Zadatak 001 (Valentina, hotelijerska škola)

Odredite polinom drugog stupnja $f(x) = ax^2 + bx + c$, ako je $f(1) = -2$, $f(2) = -2$, $f(4) = 4$.

Rješenje 001

Iz $f(1) = -2$ vidimo da je za $x = 1$ vrijednost polinoma jednaka -2. Uvrstimo $x = 1$ u polinom

$$a \cdot 1^2 + b \cdot 1 + c = -2.$$

Iz $f(2) = -2$ vidimo da je za $x = 2$ vrijednost polinoma jednaka -2. Uvrstimo $x = 2$ u polinom

$$a \cdot 2^2 + b \cdot 2 + c = -2.$$

Iz $f(4) = 4$ vidimo da je za $x = 4$ vrijednost polinoma jednaka 4. Uvrstimo $x = 4$ u polinom

$$a \cdot 4^2 + b \cdot 4 + c = 4.$$

Imamo tri jednadžbe s tri nepoznanice:

$$\begin{aligned} a \cdot 1 + b \cdot 1 + c &= -2 \\ a \cdot 4 + b \cdot 2 + c &= -2 \\ a \cdot 16 + b \cdot 4 + c &= 4. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} a + b + c &= -2 \\ 4a + 2b + c &= -2 \\ 16a + 4b + c &= 4 \end{aligned}$$

Iz prve jednadžbe izračunamo c i uvrstimo u ostale dvije:

$$\begin{aligned} a + b + c = -2 \quad &=> \quad c = -2 - a - b \\ 4a + 2b + c &= -2 \\ 16a + 4b + c &= 4 \end{aligned}$$

$$4a + 2b - 2 - a - b = -2$$

$$16a + 4b - 2 - a - b = 4$$

$$\begin{aligned} 3a + b &= 0 \\ 15a + 3b &= 6 \quad / : (-3) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} 3a + b &= 0 \\ -5a - b &= -2 \end{aligned}$$

metoda suprotnih koeficijenata

$$-2a = -2 \quad / : (-2) \quad => \quad a = 1.$$

Iz $3a + b = 0$ i $a = 1$ dobijemo:

$$3 \cdot 1 + b = 0 \quad => \quad 3 + b = 0 \quad => \quad b = -3.$$

Iz $c = -2 - a - b$, $a = 1$ i $b = -3$ slijedi:

$$c = -2 - 1 - (-3) \quad => \quad c = -2 - 1 + 3 = 0.$$

Traženi polinom drugog stupnja je $f(x) = x^2 - 3x$.

Vježba 001

Odredite polinom drugog stupnja $f(x) = ax^2 + bx + c$, ako je $f(1) = 0$, $f(2) = 3$, $f(3) = 10$.

Rezultat: $f(x) = 2x^2 - 3x + 1$.

Zadatak 002 (Mala, gimnazija)

Graf parabole $y = ax^2 + bx + c$, gdje su a, b i c realni koeficijenti, prolazi točkama $A(-1, -16)$, $B(2, -1)$ i $C(3, 0)$. Odredite koordinate tjemena parabole.

Rješenje 002

Koordinate svake točka: A, B i C uvrstimo u jednadžbu parabole

$$y = ax^2 + bx + c, \text{ tj.}$$

$$ax^2 + bx + c = y.$$

$$\left.\begin{array}{l} a\cdot(-1)^2 + b\cdot(-1) + c = -16 \\ a\cdot 2^2 + b\cdot 2 + c = -1 \\ a\cdot 3^2 + b\cdot 3 + c = 0 \end{array}\right\} \Rightarrow \left.\begin{array}{l} a - b + c = -16 \\ 4a + 2b + c = -1 \\ 9a + 3b + c = 0 \end{array}\right\}.$$

Dobili smo sustav od tri jednadžbe s tri nepoznanice. Iz prve jednadžbe izračunamo, na primjer, nepoznanicu a i njezinu vrijednost uvrstimo u ostale dvije jednadžbe.

$$\left.\begin{array}{l} a - b + c = -16 \\ 4a + 2b + c = -1 \\ 9a + 3b + c = 0 \end{array}\right\} \Rightarrow \left.\begin{array}{l} a - b + c = -16 \Rightarrow a = b - c - 16 \\ 4a + 2b + c = -1 \\ 9a + 3b + c = 0 \end{array}\right\} \Rightarrow \left.\begin{array}{l} 4(b - c - 16) + 2b + c = -1 \\ 9(b - c - 16) + 3b + c = 0 \end{array}\right\} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \left.\begin{array}{l} 4b - 4c - 64 + 2b + c = -1 \\ 9b - 9c - 144 + 3b + c = 0 \end{array}\right\} \Rightarrow \left.\begin{array}{l} 6b - 3c = 63 \;/\cdot(-2) \\ 12b - 8c = 144 \end{array}\right\} \Rightarrow \left.\begin{array}{l} -12b + 6c = -126 \\ 12b - 8c = 144 \end{array}\right\} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow -2c = 18 \Rightarrow c = -9.$$

Iz jednadžbe

$$6b - 3c = 63$$

izračunamo b:

$$6b - 3\cdot(-9)\ c = 63,$$

$$6b + 27 = 63 \;\Rightarrow\; 6b = 63 - 27 \;\Rightarrow\; 6b = 36 \;\Rightarrow\; b = 6.$$

Konačno je a jednako:

$$a = b - c - 16 = 6 - (-9) - 16 = 6 + 9 - 16 = -1.$$

Našli smo:

$$a = -1,\ b = 6,\ c = -9.$$

Budući da se koordinate tjemena $T(x_0, y_0)$ računaju po formulama:

$$x_0 = -\frac{b}{2\cdot a} \quad , \quad y_0 = \frac{4\cdot a\cdot c - b^2}{4\cdot a}$$

slijedi:

$$x_0 = -\frac{6}{2\cdot(-1)} = \frac{6}{2} = 3 \quad , \quad y_0 = \frac{4\cdot(-1)\cdot(-9) - 6^2}{4\cdot(-1)} = \frac{36 - 36}{-4} = \frac{0}{-4} = 0.$$

Koordinate tjemena su T(3, 0).

Vježba 002

Graf parabole $y = ax^2 + bx + c$, gdje su a, b i c realni koeficijenti, prolazi točkama A(1, 4), B(2, 3) i C(0, 7). Odredite koordinate tjemena parabole.

Rezultat: T(2, 3).

Zadatak 003 (Antonia, ekonomska škola)

Odredite koeficijent c (c je realan broj) kvadratne funkcije $f(x) = x^2 + bx + c$ ako graf te funkcije dira os x u točki T(1, 0).

Rješenje 003

Budući da graf funkcije dira x os u točki T(1, 0), ta točka je tjeme parabole. Koordinate tjemena $T(x_0, y_0)$ računaju se po formulama:

$$x_0 = -\frac{b}{2\cdot a} \quad , \quad y_0 = \frac{4\cdot a\cdot c - b^2}{4\cdot a}$$

pa se b i c lako izračunaju:

$$x_0 = -\frac{b}{2 \cdot a} \Rightarrow 1 = -\frac{b}{2 \cdot 1} \Rightarrow b = -2,$$

$$y_0 = \frac{4 \cdot a \cdot c - b^2}{4 \cdot a} \Rightarrow 0 = \frac{4 \cdot 1 \cdot c - (-2)^2}{4 \cdot 1} \Rightarrow 0 = \frac{4c - 4}{4} \Rightarrow 4c - 4 = 0 \Rightarrow c = 1.$$

Vježba 003

Odredite koeficijent c (c je realan broj) kvadratne funkcije $f(x) = x^2 + bx + c$ ako graf te funkcije dira os x u točki T(2, 0).

Rezultat: c = 4.

Zadatak 004 (Lana, gimnazija)

Nacrtaj graf funkcije i opiši njezin tijek: $f(x) = -x^2 + 2x + 8$.

Rješenje 004

Graf kvadratne funkcije $f(x) = ax^2 + bx + c$ je parabola. Ovisno o mogućem predznaku vodećeg koeficijenta a parabola može biti okrenuta otvorom prema gore ili dolje.

Ako je $a > 0$, parabola je okrenuta otvorom prema gore.
Ako je $a < 0$, parabola je okrenuta otvorom prema dolje.

I.

U zadatku je $a = -1 < 0$ pa je parabola otvorom okrenuta prema dolje.

II.

Nultočke kvadratne funkcije dobijemo tako da riješimo kvadratnu jednadžbu:

$$ax^2 + bx + c = 0.$$

U zadanom slučaju računamo:

$$-x^2 + 2x + 8 = 0 \implies -x^2 + 2x + 8 = 0 \;/ \cdot (-1) \implies x^2 - 2x - 8 = 0 \implies$$

$$\Rightarrow x_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} \Rightarrow x_{1,2} = \frac{2 \pm \sqrt{4 - 4 \cdot 1 \cdot (-8)}}{2 \cdot 1} = \frac{2 \pm \sqrt{4 + 32}}{2} = \frac{2 \pm \sqrt{36}}{2} = \frac{2 \pm 6}{2} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow x_1 = -2, \; x_2 = 4.$$

Nultočke su: $N_1(-2, 0)$, $N_2(4, 0)$.

III.

Tjeme parabole je točka $T(x_0, y_0)$, pri čemu je:

$$x_0 = -\frac{b}{2 \cdot a}, \qquad y_0 = \frac{4 \cdot a \cdot c - b^2}{4 \cdot a}.$$

Za funkciju $f(x) = -x^2 + 2x + 8$ je:

$$a = -1, \; b = 2, \; c = 8$$

pa je

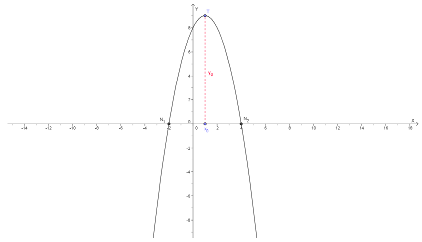
$$x_0 = -\frac{b}{2 \cdot a} = -\frac{2}{2 \cdot (-1)} = 1,$$

$$y_0 = \frac{4 \cdot a \cdot c - b^2}{4 \cdot a} = \frac{-32 - 4}{4 \cdot (-1)} = \frac{-36}{-4} = 9.$$

Tjeme je: T(1, 9).

IV.

Graf parabole:



V.

Ispisujemo tijek funkcije:

x	$-\infty$		-2		1		4		$+\infty$
f(x)	$-\infty$	$\uparrow$	0	$\uparrow$	9	$\downarrow$	0	$\downarrow$	$-\infty$

Funkcija raste na intervalu $< -\infty, 1>$. Funkcija pada na intervalu $<1, +\infty>$.

Vježba 004

Nacrtaj graf funkcije i opiši njezin tijek: $f(x) = -x^2 + 10x - 9$.

Rezultat:

x	$-\infty$		1		5		9		$+\infty$
f(x)	$-\infty$	$\uparrow$	0	$\uparrow$	16	$\downarrow$	0	$\downarrow$	$-\infty$

Zadatak 005 (Lana, gimnazija)

Nacrtaj graf funkcije i opiši njezin tijek: $f(x) = x^2 - 2x - 8$.

Rješenje 005

Graf kvadratne funkcije $f(x) = ax^2 + bx + c$ je parabola. Ovisno o mogućem predznaku vodećeg koeficijenta a parabola može biti okrenuta otvorom prema gore ili dolje.

Ako je $a > 0$, parabola je okrenuta otvorom prema gore.
Ako je $a < 0$, parabola je okrenuta otvorom prema dolje.

I.

U zadatku je $a = 1 > 0$ pa je parabola otvorom okrenuta prema gore.

II.

Nultočke kvadratne funkcije dobijemo tako da riješimo kvadratnu jednadžbu:

$$ax^2 + bx + c = 0.$$

U zadanom slučaju računamo:

$$x^2 - 2x - 8 = 0,$$

$$\Rightarrow x_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} \Rightarrow x_{1,2} = \frac{2 \pm \sqrt{4 - 4 \cdot 1 \cdot (-8)}}{2 \cdot 1} = \frac{2 \pm \sqrt{4 + 32}}{2} = \frac{2 \pm \sqrt{36}}{2} = \frac{2 \pm 6}{2} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow x_1 = -2, \; x_2 = 4.$$

Nultočke su: $N_1(-2, 0)$, $N_2(4, 0)$.

III.

Tjeme parabole je točka $T(x_0, y_0)$, pri čemu je:

$$x_0 = -\frac{b}{2 \cdot a}, \qquad y_0 = \frac{4 \cdot a \cdot c - b^2}{4 \cdot a}.$$

Za funkciju $f(x) = x^2 - 2x - 8$ je:

$$a = 1, \; b = -2, \; c = -8$$

pa je

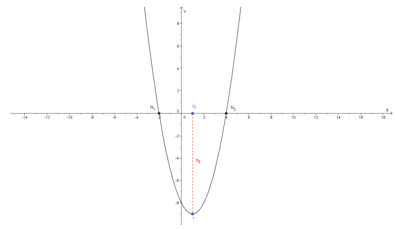
$$x_0 = -\frac{b}{2 \cdot a} = -\frac{-2}{2 \cdot 1} = 1,$$

$$y_0 = \frac{4 \cdot a \cdot c - b^2}{4 \cdot a} = \frac{-32 - 4}{4 \cdot 1} = \frac{-36}{4} = -9.$$

Tjeme je: T(1, – 9).

IV.

Graf parabole:



V.

Ispisujemo tijek funkcije:

x	– ∞		**– 2**		**1**		**4**		**+ ∞**
f(x)	**+ ∞**	↓	**0**	↓	**– 9**	↑	**0**	↑	**+ ∞**

Funkcija pada na intervalu < **– ∞, 1**>. Funkcija raste na intervalu <1, + ∞>.

Vježba 005

Nacrtaj graf funkcije i opiši njezin tijek: f(x) = $x^2 - 10x + 9$.

Rezultat:

x	– ∞		**1**		**5**		**9**		**+ ∞**
f(x)	**+ ∞**	↓	**0**	↓	**– 16**	↑	**0**	↑	**+ ∞**

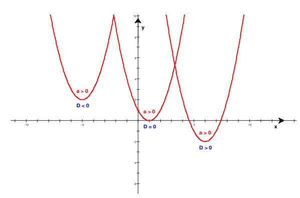
Zadatak 006 (Ines, gimnazija)

Nađite c za koji je tjeme parabole $y = x^2 - 8x + c$ na osi x.

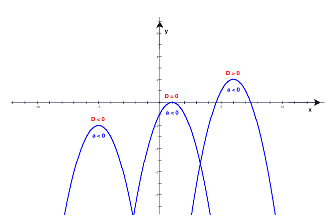
Rješenje 006

Položaj tjemena parabole ovisi o predznacima vodećeg koeficijenta i diskriminante. Pogledajte slike!

Vodeći koeficijent a je pozitivan.



Vodeći koeficijent a je negativan.



U zadanoj paraboli $y = x^2 - 8x + c$ vodeći koeficijent je a = 1, b = – 8. Budući da je tjeme na osi x, diskriminanta mora biti jednaka nuli:

$$b^2 - 4 \cdot a \cdot c = 0 \;\;\Rightarrow\;\; (-8)^2 - 4 \cdot 1 \cdot c = 0 \;\;\Rightarrow\;\; 64 - 4c = 0 \;\;\Rightarrow\;\; c = 16.$$

Vježba 006

Nađite c za koji je tjeme parabole $y = x^2 + 4x + c$ na osi x.

Rezultat: c = 4.

Zadatak 007 (Marko, Hrvoje, gimnazija)

Odredi k tako da točka A(2, k) bude najbliža točki B(4, 1).

Rješenje 007

Za točke $A(x_1, y_1)$ i $B(x_2, y_2)$ udaljenost među njima računa se po formuli:

$$|AB| = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}.$$

Zato je:

$$\left.\begin{matrix} A(2,\ k) \\ B(4,\ 1) \end{matrix}\right\} \Rightarrow |AB| = \sqrt{(4-2)^2 + (1-k)^2} = \sqrt{4 + (1-k)^2}.$$

Za svaki realan broj x vrijedi $x^2 \geq 0$. Izraz pod korijenom (radikandom) imat će najmanju vrijednost ako vrijedi:

$$(1-k)^2 = 0 \Rightarrow 1 - k = 0 \Rightarrow k = 1.$$

Točka A(2, k) bit će najbliža točki B(4, 1) ako je k = 1.

Vježba 007

Odredi k tako da točka A(2, k) bude najbliža točki B(8, 2).

Rezultat: k = 2.

Zadatak 008 (Ines, hotelijerska škola)

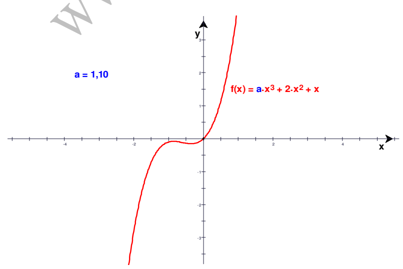
Odredite sve parametre $a \in R$ tako da graf funkcije $f(x) = ax^3 + 2x^2 + x$ ima samo jednu nul-točku.

Rješenje 008

$$f(x) = ax^3 + 2x^2 + x = x \cdot (ax^2 + 2x + 1).$$

Jedna nul-točka je x = 0.
Izraz u zagradi je kvadratna funkcija $g(x) = ax^2 + 2x + 1$ koja nema realnih rješenja ako je diskriminanta D < 0. Slijedi:

$$b^2 - 4 \cdot a \cdot c < 0 \Rightarrow 4 - 4a < 0 \Rightarrow -4a < -4 \ /:(-4) \Rightarrow a > 0.$$



Vježba 008

Odredite sve parametre $a \in R$ tako da graf funkcije $f(x) = ax^3 + 4x^2 + 4x$ ima samo jednu nul-točku.

Rezultat: $f(x) = 2x^2 - 3x + 1$.

Zadatak 009 (Petra, Anastazija, gimnazija)

Odredi $m \in R$ tako da kvadratna jednadžba $(2m + 3) \cdot x^2 - 2 \cdot x - m = 0$ ima dvostruko pozitivno rješenje.

Rješenje 009

Kvadratna jednadžba $ax^2 + bx + c = 0$ ima dvostruko rješenje ako je diskriminanta jednaka nuli:

$$\mathbf{b^2 - 4 \cdot a \cdot c = 0}.$$

Zato vrijedi:

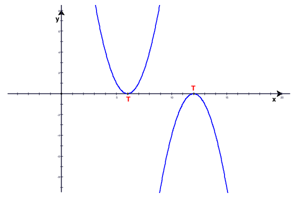
$$(2m + 3) \cdot x^2 - 2 \cdot x - m = 0,$$

$$a = 2m + 3,\ b = -2,\ c = -m,$$

$$b^2 - 4 \cdot a \cdot c = 0 \Rightarrow (-2)^2 - 4 \cdot (2m+3) \cdot (-m) = 0 \Rightarrow 4 + 4 \cdot m \cdot (2m+3) = 0\ /:4 \Rightarrow 1 + 2 \cdot m^2 + 3 \cdot m = 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 2 \cdot m^2 + 3 \cdot m + 1 = 0 \Rightarrow m_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} = \frac{-3 \pm \sqrt{9-8}}{4} = \frac{-3 \pm 1}{4} \Rightarrow m_1 = -1,\ m_2 = -\frac{1}{2}.$$

Kad je diskriminanta jednaka nuli, to znači da tjeme parabole $y = ax^2 + bx + c$ leži na x osi (apscisi). Budući da rješenja moraju biti pozitivna, tjeme će ležati na pozitivnom dijelu x osi.



Apscisa tjemena mora biti pozitivan broj:

$$-\frac{b}{2 \cdot a} > 0 \Rightarrow -\frac{-2}{2 \cdot (2m+3)} > 0 \Rightarrow \frac{1}{2m+3} > 0 \Rightarrow 2m + 3 > 0 \Rightarrow m > -\frac{3}{2}.$$

Budući da oba rješenja $m_1 = -1,\ m_2 = -\frac{1}{2}$ zadovoljavaju uvjet $m > -\frac{3}{2}$, to su tražena rješenja.

Vježba 009

Odredi $m \in R$ tako da kvadratna jednadžba $(2m+1) \cdot x^2 + 2 \cdot x + 1 - m = 0$ ima dvostruko pozitivno rješenje.

Rezultat:

$$(2m + 1) \cdot x^2 + 2 \cdot x + 1 - m = 0,$$

$$b^2 - 4 \cdot a \cdot c = 0 \Rightarrow 4 - 4 \cdot (2m+1) \cdot (1-m) = 0 \Rightarrow \ldots \Rightarrow m \cdot (2m-1) = 0 \Rightarrow m_1 = 0,\ m_2 = \frac{1}{2}.$$

$$-\frac{b}{2 \cdot a} > 0 \Rightarrow -\frac{2}{2 \cdot (2m+1)} > 0 \Rightarrow \ldots \Rightarrow 2m + 1 < 0 \Rightarrow m < -\frac{1}{2}.\ \text{Nema rješenja.}$$

Zadatak 010 (Anastazija, gimnazija)

Nađite rješenje nejednadžbe:

$$64^x + 2 \le 3 \cdot 8^x.$$

Rješenje 010

Uvedemo supstituciju (zamjenu)

$$8^x = t \quad \Rightarrow \quad 64^x = 8^{2x} = t^2$$

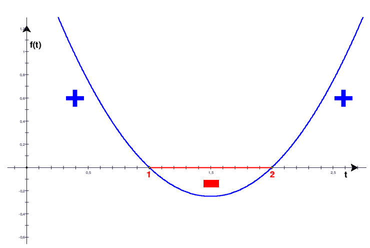
i nađemo rješenje nejednadžbe:

$$t^2 + 2 \le 3 \cdot t \quad \Rightarrow \quad t^2 - 3 \cdot t + 2 \le 0.$$

Izračunamo nultočke jednadžbe:

$$t^2 - 3 \cdot t + 2 \le 0 \quad \Rightarrow \quad [\textbf{Vièteove formule}] \quad \Rightarrow \quad t_1 = 2,\ t_2 = 1.$$

Iz grafa parabole $f(t) = t^2 - 3 \cdot t + 2$ odredimo skup rješenja nejednadžbe $t^2 - 3 \cdot t + 2 \le 0$.



Rješenje je:

$$\mathbf{1 \le t \le 2}.$$

Dalje slijedi:

$$1 \le 8^x \le 2 \quad \Rightarrow \quad 2^0 \le 2^{3x} \le 2^1 \quad \Rightarrow \quad [a^{f(x)} \le a^{g(x)} \le a^{h(x)},\ a > 1 \quad \Rightarrow \quad f(x) \le g(x) \le h(x)] \quad \Rightarrow$$

$$\Rightarrow\ 0 \le 3x \le 1 \ /:3\ \Rightarrow 0 \le x \le \frac{1}{3}\ \Rightarrow\ x \in \left[0,\ \frac{1}{3}\right].$$

Vježba 010

Nađite rješenje nejednadžbe: $16^x + 2 \le 3 \cdot 4^x$.

Rezultat: $x \in \left[0,\ \frac{1}{2}\right].$

Zadatak 011 (Petra, gimnazija)

Odredi realni broj k tako da suma nultočaka funkcije $f(x) = (k + 1) \cdot x^2 - 2 \cdot k \cdot x + 3$ bude 3.

Rješenje 011

Za nultočke funkcije $f(x) = ax^2 + bx + c$ vrijedi Vièteova formula:

$$x_1 + x_2 = -\frac{b}{a}.$$

Slijedi:

$$\left.\begin{array}{l} x_1 + x_2 = 3\ ,\ x_1 + x_2 = -\frac{-2k}{k+1} \end{array}\right\}\ \Rightarrow\ \left.\begin{array}{l} 3 = \frac{2k}{k+1}\ ,\ k \ne -1 \end{array}\right\}\ \Rightarrow$$

$$\Rightarrow\ 3 = \frac{2k}{k+1}\ /\cdot(k+1)\ \Rightarrow\ 3k + 3 = 2k\ \Rightarrow\ k = -3.$$

Vježba 011

Odredi realni broj k tako da suma nultočaka funkcije $f(x) = (k + 1) \cdot x^2 - 2 \cdot k \cdot x + 3$ bude 4.

Rezultat: $k = -2.$

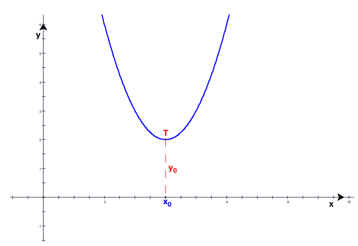
Zadatak 012 (Anastazija, gimnazija)

Za koju vrijednost parametra a funkcija $f(x) = \frac{1}{2} \cdot x^2 - 4 \cdot x + a$ ima minimalnu vrijednost – 8?

Rješenje 012

Kvadratna funkcija $f(x) = ax^2 + bx + c$, $a > 0$ ima minimalnu vrijednost u točki $T(x_0, y_0)$, tjemenu, gdje su:

$$x_0 = -\frac{b}{2 \cdot a}\quad ,\quad y_0 = \frac{4 \cdot a \cdot c - b^2}{4 \cdot a}.$$



Budući da je minimalna vrijednost jednaka – 8, slijedi:

$$\left.\begin{array}{l} f(x) = \frac{1}{2} \cdot x^2 - 4 \cdot x + a,\ y_0 = -8 \end{array}\right\}\ \Rightarrow\ \frac{4 \cdot a \cdot c - b^2}{4 \cdot a} = y_0\ \Rightarrow\ \frac{4 \cdot \frac{1}{2} \cdot a - 16}{4 \cdot \frac{1}{2}} = -8\ \Rightarrow$$

$$\Rightarrow\ \frac{2 \cdot a - 16}{2} = -8\ /\cdot 2\ \Rightarrow\ 2 \cdot a - 16 = -16\ \Rightarrow\ 2 \cdot a = 0\ \Rightarrow\ a = 0.$$

Vježba 012

Za koju vrijednost parametra a funkcija $f(x) = \frac{1}{2} \cdot x^2 - 4 \cdot x + a$ ima minimalnu vrijednost 8?

Rezultat: $a = 16.$

Zadatak 013 (2A, hotelijerska škola)

Funkcija f(x) = $ax^2 + bx + c$ ima tjeme u točki T(2, 15), a udaljenost njezinih nul-točaka je 10. Izračunaj f(12).

Rješenje 013

Nul-točke su x_1 i x_2. Udaljenost nul-točaka je 10 pa pišemo

$$|x_1 - x_2| = 10.$$

Budući da je tjeme u točki T(2, 15), vrijedi:

$$\left.\begin{array}{l} T(x_0, y_0)\ ,\ x_0 = \frac{x_1 + x_2}{2} \\ T(2, 15)\quad ,\ x_0 = 2 \end{array}\right\} \Rightarrow \frac{x_1 + x_2}{2} = 2\ /\cdot 2 \Rightarrow x_1 + x_2 = 4.$$

Odredimo vrijednosti nul-točaka:

$$\left.\begin{array}{l} |x_1 - x_2| = 10 \\ x_1 + x_2 = 4 \end{array}\right\} \Rightarrow \left.\begin{array}{l} x_1 - x_2 = 10 \\ x_1 + x_2 = 4 \end{array}\right\} \Rightarrow 2x_1 = 14\ /:2 \Rightarrow x_1 = 7 \Rightarrow [x_1 + x_2 = 4] \Rightarrow x_2 = -3.$$

Drugi sustav daje ista rješenja:

$$\left.\begin{array}{l} |x_1 - x_2| = 10 \\ x_1 + x_2 = 4 \end{array}\right\} \Rightarrow \left.\begin{array}{l} x_1 - x_2 = -10 \\ x_1 + x_2 = 4 \end{array}\right\} \Rightarrow \left.\begin{array}{l} x_1 = -3 \\ x_2 = 7 \end{array}\right\}.$$

Kvadratni trinom $ax^2 + bx + c$ može se faktorizirati $a \cdot (x - x_1) \cdot (x - x_2)$, gdje su x_1 i x_2 korijeni kvadratne jednadžbe $ax^2 + bx + c = 0$, $a \neq 0$.

Iz $f(x) = a \cdot (x - x_1) \cdot (x - x_2)$ slijedi

$$f(x) = a \cdot (x - 7) \cdot (x + 3) \Rightarrow f(2) = a \cdot (2 - 7) \cdot (2 + 3) \Rightarrow 15 = a \cdot (2 - 7) \cdot (2 + 3) \Rightarrow 15 = a \cdot (-5) \cdot 5 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 25a = -15 \Rightarrow a = -\frac{3}{5}.$$

Konačno računamo:

$$f(x) = -\frac{3}{5} \cdot (x - 7) \cdot (x + 3) \Rightarrow f(12) = -\frac{3}{5} \cdot (12 - 7) \cdot (12 + 3) = -\frac{3}{5} \cdot 5 \cdot 15 = -45.$$

Vježba 013

Funkcija f(x) = $ax^2 + bx + c$ ima tjeme u točki T(4, – 4), a udaljenost njezinih nul-točaka je 4. Izračunaj f(10).

Rezultat: f(10) = 32.

Zadatak 014 (Anamarija, hotelijerska škola)

Za koji p u jednadžbi $x^2 + (p + 3)x + 2p - 1 = 0$ izraz $x_1^2 + x_2^2$ je najmanji?

Rješenje 014

Uporabom Vièteovih formula dobije se:

$$\left.\begin{array}{l} x^2 + (p + 3)x + 2p - 1 = 0 \\ a = 1,\ b = p + 3,\ c = 2p - 1 \end{array}\right\} \Rightarrow \left\{\begin{array}{l} x_1 + x_2 = -\frac{b}{a} = -p - 3 \\ x_1 \cdot x_2 = \frac{c}{a} = 2p - 1. \end{array}\right.$$

Sada je:

$$x_1^2 + x_2^2 = \underbrace{x_1^2 + 2x_1 \cdot x_2 + x_2^2}_{\text{kvadrat zbroja}} - 2x_1 \cdot x_2 = (x_1 + x_2)^2 - 2x_1 \cdot x_2 = (-p - 3)^2 - 2 \cdot (2p - 1) = (p + 3)^2 - 2 \cdot (2p - 1) =$$

$$= p^2 + 6p + 9 - 4p + 2 = p^2 + 2p + 11.$$

Funkcija $f(p) = p^2 + 2p + 11$ je polinom drugog stupnja i njezin graf je parabola. Minimalna vrijednost je u tjemenu:

$$T\left(-\frac{b}{2a}, \frac{4ac-b^2}{4a}\right),$$

$$f(p)=p^2+2p+11 \Rightarrow \begin{cases} a=1 \\ b=2 \\ c=11 \end{cases} \Rightarrow p_{\min}=-\frac{b}{2a}=-\frac{2}{2\cdot 1}=-1.$$

Vježba 014

Za koji p u jednadžbi $x^2 + (p + 3)x - 1 = 0$ izraz $x_1^2 + x_2^2$ je najmanji?

Rezultat: -3.

Zadatak 015 (2A, hotelijerska škola)

Nacrtajte graf kvadratne funkcije tako da mu odredite tjeme, os simetrije, otvorenost i presjek s x i y osi: $y=-\frac{1}{2}\cdot x^2-x+4.$

Rješenje 015

Za skicu parabole $y = ax^2 + bx + c$ dovoljno je:

a) uočiti predznak koeficijenta a

- ako je $a > 0$, parabola ima otvor prema gore
- ako je $a < 0$, parabola ima otvor prema dolje

b) naći nultočke parabole

- rješenja kvadratne jednadžbe $ax^2 + bx + c = 0$ su nultočke parabole

c) odrediti tjeme parabole

- tjeme parabole je u točki $T(x_0, y_0)$ gdje je $x_0=-\frac{b}{2\cdot a}, \; y_0=\frac{4\cdot a\cdot c-b^2}{4\cdot a}$

d) odrediti presjek parabole i y – osi

- $\left.\begin{array}{l} x=0 \\ y=a\cdot x^2+b\cdot x+c \end{array}\right\} \Rightarrow y=c.$

e) skica parabole

f) tablica tijeka funkcije (rasta i pada funkcije)

Zato je:

a) $y=-\frac{1}{2}\cdot x^2-x+4 \Rightarrow a=-\frac{1}{2}<0 \Rightarrow$ parabola ima otvor prema dolje

b) $-\frac{1}{2}\cdot x^2-x+4=0 \;/\cdot(-2) \Rightarrow x^2+2x-8=0 \Rightarrow x_{1,2}=\frac{-b\pm\sqrt{b^2-4ac}}{2a}=\frac{-2\pm\sqrt{4-4\cdot 1\cdot(-8)}}{2\cdot 1}=$

$$=\frac{-2\pm\sqrt{4+32}}{2}=\frac{-2\pm\sqrt{36}}{2}=\frac{-2\pm 6}{2} \Rightarrow \begin{cases} x_1=\frac{-2+6}{2}=\frac{4}{2}=2 \\ x_2=\frac{-2-6}{2}=\frac{-8}{2}=-4. \end{cases}$$

Nultočke su: $N_1(2, 0)$, $N_2(-4, 0)$

c) tjeme $T(x_0, y_0)$

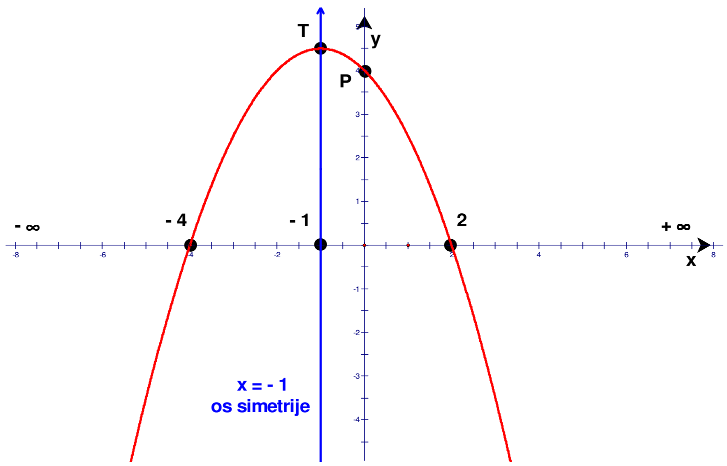
$$y=-\frac{1}{2}\cdot x^2-x+4 \Rightarrow a=-\frac{1}{2},\; b=-1,\; c=4 \Rightarrow x_0=-\frac{b}{2\cdot a}=-\frac{-1}{2\cdot\left(-\frac{1}{2}\right)}=-1,$$

$$y_0=\frac{4\cdot a\cdot c-b^2}{4\cdot a}=\frac{4\cdot\left(-\frac{1}{2}\right)\cdot 4-(-1)^2}{4\cdot\left(-\frac{1}{2}\right)}=\frac{-8-1}{-2}=\frac{-9}{-2}=\frac{9}{2}=4\frac{1}{2} \Rightarrow T\left(-1, 4\frac{1}{2}\right).$$

d) presjek parabole i y – osi

$$\left.\begin{array}{l} x=0 \\ y=-\frac{1}{2}\cdot x^2-x+4 \end{array}\right\} \Rightarrow y=4 \Rightarrow P(0, 4).$$

e) graf



f) tijek funkcije

x	$-\infty$		-4		-1		2		$+\infty$
f(x)	$-\infty$	$\uparrow$	0	$\uparrow$	$4\frac{1}{2}$	$\downarrow$	0	$\downarrow$	$-\infty$

Vježba 015

Nacrtaj graf funkcije i opiši njezin tijek: $f(x) = x^2 - 10x + 9$.

Rezultat:

x	$-\infty$		1		5		9		$+\infty$
f(x)	$+\infty$	$\downarrow$	0	$\downarrow$	-16	$\uparrow$	0	$\uparrow$	$+\infty$

Zadatak 016 (Irma, gimnazija)

Nađite m za koji je $f(x) = \log(x^2 - mx + 1)$ definiran za svaki x iz R.

Rješenje 016

Budući da je interval $\langle 0, +\infty\rangle$ domena funkcije $f(x) = \log x$, slijedi $x^2 - mx + 1 > 0$.

Ako je $ax^2 + bx + c > 0$ i $a > 0$, tada mora biti: $D = b^2 - 4 \cdot a \cdot c < 0$.

U zadanoj nejednadžbi je:

$$\left.\begin{array}{l} a=1,\ b=-m,\ c=1 \\ D=b^2-4\cdot a\cdot c<0 \end{array}\right\} \Rightarrow m^2-4<0 \Rightarrow m^2<4 \,/\sqrt{\ } \Rightarrow |m|<2 \Rightarrow \left\{\begin{array}{l} -2<m<2 \\ \text{ili} \\ x\in\langle -2, 2\rangle. \end{array}\right.$$

Vježba 016

Nađite m za koji je $f(x) = \log(x^2 - mx + 4)$ definiran za svaki x iz R.

Rezultat: $x\in\langle -4, 4\rangle$.

Zadatak 017 (4A, hotelijerska škola)

Zadana je funkcija $f(x) = ax^2 + 2x + c$. Ako je $x = 1$ apscisa tjemena i $f(3) = 0$, koliko iznosi c?

Rješenje 017

Budući da za apscisu tjemena vrijedi $x_0 = -\frac{b}{2\cdot a}$, slijedi:

$$\left.\begin{array}{l} f(x)=a\cdot x^2+2\cdot x+c \\ a=a,\ b=2,\ c=c \\ x_0=1 \end{array}\right\} \Rightarrow x_0=-\frac{b}{2\cdot a} \Rightarrow -\frac{2}{2\cdot a}=1 \Rightarrow a=-1.$$

Koeficijent c iznosi:

$$\left.\begin{array}{l} f(3)=0 \\ a=-1 \end{array}\right\} \Rightarrow a\cdot 3^2+2\cdot 3+c=0 \Rightarrow -1\cdot 9+6+c=0 \Rightarrow -9+6+c=0 \Rightarrow c=3.$$

Vježba 017

Zadana je funkcija f(x) = ax^2 + 4x + c. Ako je x = 1 apscisa tjemena i f(3) = 0, koliko iznosi c?

Rezultat: c = 12.

Zadatak 018 (Ivana, gimnazija)

Za koji realan broj a je segment [– 1, 3] područje definicije funkcije $f(x)=\sqrt{-x^2+a\cdot x+3}$?

Rješenje 018

$$\left.\begin{array}{l} f(x)=\sqrt{-x^2+a\cdot x+3} \\ a=-1,\ b=a,\ c=3 \end{array}\right\} \Rightarrow \text{[Koristimo Vièteovu formulu za zbroj]} \Rightarrow \left.\begin{array}{l} x_1=-1 \\ x_2=3 \end{array}\right\} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow x_1+x_2=-\frac{b}{2\cdot a} \Rightarrow -1+3=-\frac{a}{-1} \Rightarrow a=2.$$

Vježba 018

Za koji realan broj a je segment [– 3, 3] područje definicije funkcije $f(x)=\sqrt{-x^2+a\cdot x+3}$?

Rezultat: a = 0.

Zadatak 019 (Ivana, gimnazija)

Ako kvadratna funkcija $f(x)=2k\cdot x^2-k\cdot x+x-k+3,\ k\in R,$ ima tjeme na osi y, izračunaj zbroj koeficijenata parabole.

Rješenje 019

$$\left.\begin{array}{l} f(x)=2k\cdot x^2-k\cdot x+x-k+3 \\ f(x)=2k\cdot x^2+(1-k)\cdot x+3-k \end{array}\right\} \Rightarrow a=2k,\ b=1-k,\ c=3-k.$$

Budući da kvadratna funkcija ima tjeme na y osi, slijedi:

$$x_T=-\frac{b}{2\cdot a}=0 \Rightarrow -\frac{b}{2\cdot a}=0 \Rightarrow b=0 \Rightarrow 1-k=0 \Rightarrow k=1 \Rightarrow f(x)=2\cdot x^2+3-1=2\cdot x^2+2.$$

Zbroj koeficijenata iznosi:

$$\left.\begin{array}{l} f(x)=2\cdot x^2+2 \\ x=1 \end{array}\right\} \Rightarrow f(1)=2\cdot 1^2+2=4.$$

Vježba 019

Ako kvadratna funkcija $f(x)=2k\cdot x^2-k\cdot x+x-k+3,\ k\in R,$ ima tjeme na osi y, izračunaj umnožak koeficijenata parabole.

Rezultat: 4.

Zadatak 020 (Vesna, gimnazija)

Broj – 2 dvostruka je nultočka polinoma f(x) = ax^2 + bx + c. Ako je f(– 1) + f(5) = 25, nađi a + b + c.

Rješenje 020

Budući da je – 2 dvostruka nultočka, zadana funkcija f(x) = ax^2 + bx + c može se napisati u obliku:

$$f(x)=a\cdot(x-(-2))^2=a\cdot(x+2)^2.$$

Iz f(– 1) + f(5) = 25 slijedi:

$$f(-1)+f(5)=25 \Rightarrow a\cdot(-1+2)^2+a\cdot(5+2)^2=25 \Rightarrow a\cdot 1^2+a\cdot 7^2=25 \Rightarrow a+49\cdot a=25 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 50\cdot a=25 \;/:50 \Rightarrow a=\frac{25}{50}=\frac{1}{2}.$$

Zbroj koeficijenata je:

$$f(x)=a\cdot x^2+b\cdot x+c=\frac{1}{2}\cdot(x+2)^2 \Rightarrow f(1)=a+b+c=\frac{1}{2}\cdot(1+2)^2=\frac{1}{2}\cdot 3^2=\frac{9}{2}.$$

Vježba 020

Broj 2 dvostruka je nultočka polinoma $f(x) = ax^2 + bx + c$. Ako je $f(-1) + f(5) = 18$, nađi $a + b + c$.

Rezultat: 1.