

Zadatak 201 (Asterix, gimnazija)

Zbroj recipročnih vrijednosti rješenja kvadratne jednadžbe $x^2 + m \cdot x + 2 \cdot m + 3 = 0$ jednak je 10. Kojemu od navedenih intervala pripada realan broj m ?

A. $\langle -4, -2 \rangle$ B. $\langle -2, 0 \rangle$ C. $\langle 0, 2 \rangle$ D. $\langle 2, 4 \rangle$

Rješenje 201

Ponovimo!

$$\frac{a}{b} + \frac{c}{d} = \frac{a \cdot d + b \cdot c}{b \cdot d}.$$

Jednadžba oblika

$$a \cdot x^2 + b \cdot x + c = 0,$$

($a \neq 0$, b i c su realni brojevi) naziva se kvadratna jednadžba. Svaki broj x (realan ili kompleksan) koji zadovoljava tu jednadžbu naziva se rješenje kvadratne jednadžbe.

Rješenja x_1 i x_2 kvadratne jednadžbe

$$a \cdot x^2 + b \cdot x + c = 0$$

zadovoljavaju Viëteove formule:

$$x_1 + x_2 = -\frac{b}{a}, \quad x_1 \cdot x_2 = \frac{c}{a}.$$

Zakon distribucije množenja prema zbrajanju.

$$a \cdot (b + c) = a \cdot b + a \cdot c, \quad a \cdot b + a \cdot c = a \cdot (b + c).$$

Skratiti razlomak znači brojnik i nazivnik tog razlomka podijeliti istim brojem različitim od nule i jedinice

$$\frac{a \cdot n}{b \cdot n} = \frac{a}{b}, \quad n \neq 0, \quad n \neq 1.$$

Najprije odredimo a , b i c kvadratne jednadžbe.

$$x^2 + m \cdot x + 2 \cdot m + 3 = 0 \Rightarrow \left. \begin{array}{l} x^2 + m \cdot x + 2 \cdot m + 3 = 0 \\ a = 1, \quad b = m, \quad c = 2 \cdot m + 3 \end{array} \right\}.$$

Dalje slijedi:

$$\begin{aligned} \frac{1}{x_1} + \frac{1}{x_2} = 10 &\Rightarrow \frac{x_2 + x_1}{x_1 \cdot x_2} = 10 \Rightarrow \frac{x_1 + x_2}{x_1 \cdot x_2} = 10 \Rightarrow \left[\begin{array}{l} x_1 + x_2 = -\frac{b}{a} \\ x_1 \cdot x_2 = \frac{c}{a} \end{array} \right] \Rightarrow \frac{-\frac{b}{a}}{\frac{c}{a}} = 10 \Rightarrow \\ &\Rightarrow \frac{-\frac{b}{a}}{\frac{c}{a}} = 10 \Rightarrow -\frac{b}{c} = 10 \Rightarrow -\frac{b}{c} = 10 \quad / \cdot (-c) \Rightarrow b = -10 \cdot c \Rightarrow b + 10 \cdot c = 0 \Rightarrow \\ &\Rightarrow \left[\begin{array}{l} b = m \\ c = 2 \cdot m + 3 \end{array} \right] \Rightarrow m + 10 \cdot (2 \cdot m + 3) = 0 \Rightarrow m + 20 \cdot m + 30 = 0 \Rightarrow m + 20 \cdot m = -30 \Rightarrow \\ &\Rightarrow 21 \cdot m = -30 \Rightarrow 21 \cdot m = -30 \quad / : 21 \Rightarrow m = -1.43 \Rightarrow m \in \langle -2, 0 \rangle. \end{aligned}$$

Odgovor je pod B.

Vježba 201

Zbroj recipročnih vrijednosti rješenja kvadratne jednadžbe $x^2 + m \cdot x + 2 \cdot m = -3$ jednak je 10. Kojemu od navedenih intervala pripada realan broj m ?

A. $\langle -4, -2 \rangle$ B. $\langle -2, 0 \rangle$ C. $\langle 0, 2 \rangle$ D. $\langle 2, 4 \rangle$

Rezultat: B.

Zadatak 202 (Leon, gimnazija)

Skup svih vrijednosti q , za koje je razmak korijena jednadžbe $x^2 + 6 \cdot x + q = 0$ veći od 4, je:

A. $\langle 0, 6 \rangle$ B. $\langle 3, +\infty \rangle$ C. $\langle -\infty, 5 \rangle$ D. $\langle 5, +\infty \rangle$

Rješenje 202

Ponovimo!

$$a < b, c > 0 \Rightarrow \frac{a}{c} < \frac{b}{c}, \quad a > b, c < 0 \Rightarrow a \cdot c < b \cdot c, \quad \frac{a}{n} - \frac{b}{n} = \frac{a-b}{n}.$$
$$\frac{n}{1} = n, \quad \sqrt{a \cdot b} = \sqrt{a} \cdot \sqrt{b}, \quad (\sqrt{a})^2 = a.$$

Jednadžba oblika

$$a \cdot x^2 + b \cdot x + c = 0,$$

($a \neq 0$, b i c su realni brojevi) naziva se kvadratna jednadžba. Svaki broj x (realan ili kompleksan) koji zadovoljava tu jednadžbu naziva se rješenje kvadratne jednadžbe.

Diskriminanta kvadratne jednadžbe

$$a \cdot x^2 + b \cdot x + c = 0$$

je broj

$$D = b^2 - 4 \cdot a \cdot c.$$

- Ako je $D > 0$, jednadžba ima dva realna rješenja.
- Ako je $D = 0$, jednadžba ima jedno dvostruko realno rješenje.
- Ako je $D < 0$, jednadžba ima kompleksno – konjugirana rješenja.

Rješenja kvadratne jednadžbe

$$a \cdot x^2 + b \cdot x + c = 0$$

su brojevi

$$x_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{D}}{2 \cdot a} \Rightarrow \left. \begin{array}{l} x_1 = \frac{-b + \sqrt{D}}{2 \cdot a} \\ x_2 = \frac{-b - \sqrt{D}}{2 \cdot a} \end{array} \right\}$$

Iracionalne nejednadžbe

$$\left. \begin{array}{l} f(x) \geq 0 \\ \sqrt{f(x)} < g(x) \Leftrightarrow g(x) > 0 \\ f(x) < (g(x))^2 \end{array} \right\} \text{ sustav nejednadžbi}$$

Općenito:

Iracionalna nejednadžba je nejednadžba u kojoj se nepoznanica x pojavljuje pod znakom korijena (odnosno s nekim racionalnim eksponentom).

Funkcija $f(x) = \sqrt{x}$ definirana je na skupu nenegativnih realnih brojeva, $R^+ \cup \{0\}$. To znači da

negativni realni brojevi ne mogu biti rješenja iracionalne jednačbe $\sqrt{x} = a$. To vrijedi za sve korijene parnog eksponenta.

Skup zadajemo nabranjem njegovih elemenata ili opisom karakterističnih svojstava koja posjeduju njegovi elementi. **Presjek** skupova A i B je skup koji sadrži sve elemente koji se nalaze i u skupu A i u skupu B. Označavamo ga: $A \cap B$.

Za realni broj x njegova je apsolutna vrijednost (modul) broj $|x|$ koji određujemo na ovaj način:

$$|x| = \begin{cases} x, & x \geq 0 \\ -x, & x < 0. \end{cases}$$

Ako je broj x pozitivan ili nula, tada je on jednak svojoj apsolutnoj vrijednosti. Za svaki x, $x \geq 0$, vrijedi $|x| = x$.

Ako je x negativan broj, njegova apsolutna vrijednost je suprotan broj $-x$ koji je pozitivan. Za svaki x, $x < 0$, je $|x| = -x$.

Zakon distribucije množenja prema zbrajanju.

$$a \cdot (b+c) = a \cdot b + a \cdot c \quad , \quad a \cdot b + a \cdot c = a \cdot (b+c).$$

Skratiti razlomak znači brojnik i nazivnik tog razlomka podijeliti istim brojem različitim od nule i jedinice

$$\frac{a \cdot n}{b \cdot n} = \frac{a}{b} \quad , \quad n \neq 0 \quad , \quad n \neq 1.$$

Najprije odredimo koeficijente a, b i c kvadratne jednačbe.

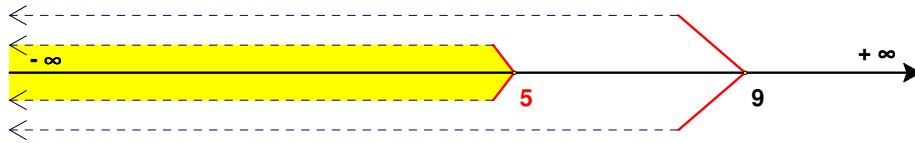
$$x^2 + 6 \cdot x + q = 0 \Rightarrow \left. \begin{array}{l} x^2 + 6 \cdot x + q = 0 \\ a = 1 \quad , \quad b = 6 \quad , \quad c = q \end{array} \right\}$$

Budući da kvadratna jednačba mora imati realna i različita rješenja koja zadovoljavaju zadani uvjet, možemo napisati sustav jednačba:

$$\begin{aligned} & \left. \begin{array}{l} D > 0 \\ |x_1 - x_2| > 4 \end{array} \right\} \Rightarrow \left. \begin{array}{l} b^2 - 4 \cdot a \cdot c > 0 \\ \left| \frac{-b + \sqrt{D}}{2 \cdot a} - \frac{-b - \sqrt{D}}{2 \cdot a} \right| > 4 \end{array} \right\} \Rightarrow \left. \begin{array}{l} b^2 - 4 \cdot a \cdot c > 0 \\ \left| \frac{-b + \sqrt{D} - (-b - \sqrt{D})}{2 \cdot a} \right| > 4 \end{array} \right\} \Rightarrow \\ & \Rightarrow \left. \begin{array}{l} b^2 - 4 \cdot a \cdot c > 0 \\ \left| \frac{-b + \sqrt{D} + b + \sqrt{D}}{2 \cdot a} \right| > 4 \end{array} \right\} \Rightarrow \left. \begin{array}{l} b^2 - 4 \cdot a \cdot c > 0 \\ \left| \frac{-b + \sqrt{D} + b + \sqrt{D}}{2 \cdot a} \right| > 4 \end{array} \right\} \Rightarrow \left. \begin{array}{l} b^2 - 4 \cdot a \cdot c > 0 \\ \left| \frac{2 \cdot \sqrt{D}}{2 \cdot a} \right| > 4 \end{array} \right\} \Rightarrow \\ & \Rightarrow \left. \begin{array}{l} b^2 - 4 \cdot a \cdot c > 0 \\ \left| \frac{2 \cdot \sqrt{D}}{2 \cdot a} \right| > 4 \end{array} \right\} \Rightarrow \left. \begin{array}{l} b^2 - 4 \cdot a \cdot c > 0 \\ \left| \frac{\sqrt{D}}{a} \right| > 4 \end{array} \right\} \Rightarrow \left. \begin{array}{l} b^2 - 4 \cdot a \cdot c > 0 \\ \left| \frac{\sqrt{b^2 - 4 \cdot a \cdot c}}{a} \right| > 4 \end{array} \right\} \Rightarrow \left. \begin{array}{l} 6^2 - 4 \cdot 1 \cdot q > 0 \\ \left| \frac{\sqrt{6^2 - 4 \cdot 1 \cdot q}}{1} \right| > 4 \end{array} \right\} \Rightarrow \\ & \Rightarrow \left. \begin{array}{l} 36 - 4 \cdot q > 0 \\ \left| \sqrt{36 - 4 \cdot q} \right| > 4 \end{array} \right\} \Rightarrow \left. \begin{array}{l} 36 - 4 \cdot q > 0 \quad / : 4 \\ \sqrt{36 - 4 \cdot q} > 4 \end{array} \right\} \Rightarrow \left. \begin{array}{l} 9 - q > 0 \\ \sqrt{4 \cdot (9 - q)} > 4 \end{array} \right\} \Rightarrow \left. \begin{array}{l} -q > -9 \quad / \cdot (-1) \\ 2 \cdot \sqrt{9 - q} > 4 \end{array} \right\} \Rightarrow \\ & \Rightarrow \left. \begin{array}{l} q < 9 \\ 2 \cdot \sqrt{9 - q} > 4 \quad / : 2 \end{array} \right\} \Rightarrow \left. \begin{array}{l} q < 9 \\ \sqrt{9 - q} > 2 \end{array} \right\} \Rightarrow \left. \begin{array}{l} q < 9 \\ \sqrt{9 - q} > 2 \quad / ^2 \end{array} \right\} \Rightarrow \left. \begin{array}{l} q < 9 \\ (\sqrt{9 - q})^2 > 2^2 \end{array} \right\} \Rightarrow \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \Rightarrow \left. \begin{array}{l} q < 9 \\ 9 - q > 4 \end{array} \right\} &\Rightarrow \left. \begin{array}{l} q < 9 \\ -q > 4 - 9 \end{array} \right\} \Rightarrow \left. \begin{array}{l} q < 9 \\ -q > -5 \end{array} \right\} \Rightarrow \left. \begin{array}{l} q < 9 \\ -q > -5 \cdot (-1) \end{array} \right\} \Rightarrow \left. \begin{array}{l} q < 9 \\ q < 5 \end{array} \right\} \Rightarrow \\ &\Rightarrow \left[\begin{array}{l} \text{presjek} \\ \text{skupova} \end{array} \right] \Rightarrow q < 5 \Rightarrow q \in \langle -\infty, 5 \rangle. \end{aligned}$$

Odgovor je pod C.



Vježba 202

Skup svih vrijednosti q , za koje je razmak korijena jednadžbe $x^2 + 6 \cdot x + q = 0$ veći od 2, je:

A. $\langle 0, 8 \rangle$ B. $\langle 8, 9 \rangle$ C. $\langle -\infty, 8 \rangle$ D. $\langle 8, +\infty \rangle$

Rezultat: C.

Zadatak 203 (Josip, gimnazija)

Kvadratna jednadžba $x^{-2} - x^{-1} + c = 0$ nema realnih rješenja ako je

A. $c > -1$ B. $c > \frac{1}{4}$ C. $c < -1$ D. $c < \frac{1}{4}$

Rješenje 203

Ponovimo!

$$a^1 = a, \quad a^{-n} = \frac{1}{a^n}, \quad a < b, a < 0 \Rightarrow \frac{a}{c} > \frac{b}{c}, \quad (a^n)^m = a^{n \cdot m}.$$

$$a^n \cdot a^m = a^{n+m}.$$

Jednadžba oblika

$$a \cdot x^2 + b \cdot x + c = 0,$$

($a \neq 0$, b i c su realni brojevi) naziva se kvadratna jednadžba. Svaki broj x (realan ili kompleksan) koji zadovoljava tu jednadžbu naziva se rješenje kvadratne jednadžbe.

Diskriminanta kvadratne jednadžbe

$$a \cdot x^2 + b \cdot x + c = 0$$

je broj

$$D = b^2 - 4 \cdot a \cdot c.$$

- Ako je $D > 0$, jednadžba ima dva realna rješenja.
- Ako je $D = 0$, jednadžba ima jedno dvostruko realno rješenje.
- Ako je $D < 0$, jednadžba ima kompleksno – konjugirana rješenja.

1. inačica

$$\begin{aligned} x^{-2} - x^{-1} + c = 0 &\Rightarrow \frac{1}{x^2} - \frac{1}{x} + c = 0 \Rightarrow \left[\begin{array}{l} \text{uvjet} \\ x \neq 0 \end{array} \right] \Rightarrow \\ &\Rightarrow \frac{1}{x^2} - \frac{1}{x} + c = 0 \cdot x^2 \Rightarrow 1 - x + c \cdot x^2 = 0 \Rightarrow c \cdot x^2 - x + 1 = 0 \Rightarrow \\ &\Rightarrow \left. \begin{array}{l} c \cdot x^2 - x + 1 = 0 \\ a = c, b = -1, c = 1 \end{array} \right\} \Rightarrow \left[D = b^2 - 4 \cdot a \cdot c \right] \Rightarrow D = (-1)^2 - 4 \cdot c \cdot 1 \Rightarrow D = 1 - 4 \cdot c. \end{aligned}$$

Uvjet je da kvadratna jednadžba nema realnih rješenja.

$$D < 0 \Rightarrow 1 - 4 \cdot c < 0 \Rightarrow -4 \cdot c < -1 \Rightarrow -4 \cdot c < -1 \quad /: (-4) \Rightarrow c > \frac{1}{4}.$$

Odgovor je pod B.

2. inačica

$$x^{-2} - x^{-1} + c = 0 \Rightarrow \left. \begin{array}{l} \text{zamjena} \\ t = x^{-1}, t^2 = x^{-2} \end{array} \right\} \Rightarrow t^2 - t + c = 0 \Rightarrow \left. \begin{array}{l} t^2 - t + c = 0 \\ a = 1, b = -1, c = c \end{array} \right\} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \left[D = b^2 - 4 \cdot a \cdot c \right] \Rightarrow D = (-1)^2 - 4 \cdot 1 \cdot c \Rightarrow D = 1 - 4 \cdot c.$$

Uvjet je da kvadratna jednadžba nema realnih rješenja.

$$D < 0 \Rightarrow 1 - 4 \cdot c < 0 \Rightarrow -4 \cdot c < -1 \Rightarrow -4 \cdot c < -1 \quad /: (-4) \Rightarrow c > \frac{1}{4}.$$

Odgovor je pod B.

Vježba 203

Kvadratna jednadžba $x^{-2} - x^{-1} + c = 0$ ima realna rješenja ako je

$$A. c \geq -1 \quad B. c > \frac{1}{4} \quad C. c \leq -1 \quad D. c \leq \frac{1}{4}$$

Rezultat: D.

Zadatak 204 (Darko, gimnazija)

Uz koji uvjet kvadratna jednadžba $x^2 - 2 \cdot a \cdot x + a^2 - b^2 - c^2 = 0$ ima dvostruko rješenje?

Rješenje 204

Ponovimo!

$$(a \cdot b)^n = a^n \cdot b^n, \quad a^2 + b^2 = 0 \Rightarrow a = b = 0.$$

Zakon distribucije množenja prema zbrajanju.

$$a \cdot (b + c) = a \cdot b + a \cdot c, \quad a \cdot b + a \cdot c = a \cdot (b + c).$$

Jednadžba oblika

$$a \cdot x^2 + b \cdot x + c = 0,$$

($a \neq 0$, b i c su realni brojevi) naziva se kvadratna jednadžba. Svaki broj x (realan ili kompleksan) koji zadovoljava tu jednadžbu naziva se rješenje kvadratne jednadžbe.

Diskriminanta kvadratne jednadžbe

$$a \cdot x^2 + b \cdot x + c = 0$$

je broj

$$D = b^2 - 4 \cdot a \cdot c.$$

- Ako je $D > 0$, jednadžba ima dva realna rješenja.
- Ako je $D = 0$, jednadžba ima jedno dvostruko realno rješenje.
- Ako je $D < 0$, jednadžba ima kompleksno – konjugirana rješenja.

Da bi umnožak bio jednak nuli, dovoljno je da jedan faktor bude jednak nuli.

$$a \cdot b = 0 \Leftrightarrow a = 0 \text{ ili } b = 0 \text{ ili } a = b = 0.$$

$$x^2 - 2 \cdot a \cdot x + a^2 - b^2 - c^2 = 0 \Rightarrow \left. \begin{array}{l} x^2 - 2 \cdot a \cdot x + a^2 - b^2 - c^2 = 0 \\ a = 1, b = -2 \cdot a, c = a^2 - b^2 - c^2 \end{array} \right\} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \left[D = 0 \Rightarrow b^2 - 4 \cdot a \cdot c = 0 \right] \Rightarrow (-2 \cdot a)^2 - 4 \cdot 1 \cdot (a^2 - b^2 - c^2) = 0 \Rightarrow$$

$$\begin{aligned} \Rightarrow 4 \cdot a^2 - 4 \cdot a^2 + 4 \cdot b^2 + 4 \cdot c^2 = 0 &\Rightarrow 4 \cdot a^2 - 4 \cdot a^2 + 4 \cdot b^2 + 4 \cdot c^2 = 0 \Rightarrow \\ \Rightarrow 4 \cdot b^2 + 4 \cdot c^2 = 0 &\Rightarrow 4 \cdot (b^2 + c^2) = 0 \Rightarrow b^2 + c^2 = 0 \Rightarrow b = c = 0. \end{aligned}$$

Vježba 204

Uz koji uvjet kvadratna jednadžba $x^2 - 2 \cdot x + 1 - b^2 - c^2 = 0$ ima dvostruko rješenje?

Rezultat: $b = c = 0$.

Zadatak 205 (Jozo, srednja škola)

Napiši kvadratnu jednadžbu čija su rješenja $x_1 = m + \sqrt{n}$, $x_2 = m - \sqrt{n}$, $n > 0$.

Rješenje 205

Ponovimo!

$$(\sqrt{a})^2 = a, \quad (a-b) \cdot (a+b) = a^2 - b^2, \quad (a-b)^2 = a^2 - 2 \cdot a \cdot b + b^2.$$

Zakon distribucije množenja prema zbrajanju.

$$a \cdot (b+c) = a \cdot b + a \cdot c, \quad a \cdot b + a \cdot c = a \cdot (b+c).$$

Jednadžba oblika

$$a \cdot x^2 + b \cdot x + c = 0,$$

($a \neq 0$, b i c su realni brojevi) naziva se kvadratna jednadžba. Svaki broj x (realan ili kompleksan) koji zadovoljava tu jednadžbu naziva se rješenje kvadratne jednadžbe.

Kvadratna jednadžba sa rješenjima x_1 i x_2 glasi

$$a \cdot (x-x_1) \cdot (x-x_2) = 0,$$

gdje je $a \neq 0$ po volji određen broj.

Rješenja x_1 i x_2 kvadratne jednadžbe

$$a \cdot x^2 + b \cdot x + c = 0$$

zadovoljavaju Viëteove formule:

$$x_1 + x_2 = -\frac{b}{a}, \quad x_1 \cdot x_2 = \frac{c}{a}.$$

Ako vrijedi

$$x_1 + x_2 = b, \quad x_1 \cdot x_2 = c,$$

onda su x_1 i x_2 rješenja kvadratne jednadžbe

$$x^2 - b \cdot x + c = 0.$$

1. inačica

Znajući rješenja, znamo i faktorizaciju kvadratnog trinoma:

$$\begin{aligned} a \cdot (x-x_1) \cdot (x-x_2) &= \begin{bmatrix} x_1 = m + \sqrt{n} \\ x_2 = m - \sqrt{n} \end{bmatrix} = a \cdot (x - (m + \sqrt{n})) \cdot (x - (m - \sqrt{n})) = \\ &= a \cdot (x - m - \sqrt{n}) \cdot (x - m + \sqrt{n}) = a \cdot ((x-m) - \sqrt{n}) \cdot ((x-m) + \sqrt{n}) = \\ &= a \cdot \left((x-m)^2 - (\sqrt{n})^2 \right) = a \cdot (x^2 - 2 \cdot m \cdot x + m^2 - n). \end{aligned}$$

Ovdje koeficijent a može biti bilo kakav (osim nule). Uzmimo da je $a = 1$. Tražena kvadratna jednadžba glasi:

$$x^2 - 2 \cdot m \cdot x + m^2 - n = 0.$$

2. inačica

$$\left. \begin{array}{l} x_1 = m + \sqrt{n} \\ x_2 = m - \sqrt{n} \end{array} \right\} \Rightarrow \left[\begin{array}{l} x_1 + x_2 = b \\ x_1 \cdot x_2 = c \end{array} \right] \Rightarrow \left. \begin{array}{l} m + \sqrt{n} + m - \sqrt{n} = b \\ (m + \sqrt{n}) \cdot (m - \sqrt{n}) = c \end{array} \right\} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \left. \begin{array}{l} m + \sqrt{n} + m - \sqrt{n} = b \\ m^2 - (\sqrt{n})^2 = c \end{array} \right\} \Rightarrow \left. \begin{array}{l} m + m = b \\ m^2 - n = c \end{array} \right\} \Rightarrow \left. \begin{array}{l} 2 \cdot m = b \\ m^2 - n = c \end{array} \right\} \Rightarrow \left. \begin{array}{l} b = 2 \cdot m \\ c = m^2 - n \end{array} \right\}.$$

Kvadratna jednačina glasi:

$$x^2 - b \cdot x + c = 0 \Rightarrow x^2 - 2 \cdot m \cdot x + m^2 - n = 0.$$

Vježba 205

Napiši kvadratnu jednačinu čija su rješenja $x_1 = 1 + \sqrt{2}$, $x_2 = 1 - \sqrt{2}$.

Rezultat: $x^2 - 2 \cdot x - 1 = 0.$

Zadatak 206 (Lucija, gimnazija)

Napiši kvadratnu jednačinu čija su rješenja $x_1 = \frac{1}{3 + \sqrt{5}}$, $x_2 = \frac{1}{3 - \sqrt{5}}$.

Rješenje 206

Ponovimo!

$$\begin{aligned} (\sqrt{a})^2 &= a, & (a-b) \cdot (a+b) &= a^2 - b^2, & (a-b)^2 &= a^2 - 2 \cdot a \cdot b + b^2. \\ \left(\frac{a}{b}\right)^n &= \frac{a^n}{b^n}, & \frac{a \cdot c}{b \cdot d} &= \frac{a \cdot c}{b \cdot d}, & \frac{a-b}{n} &= \frac{a}{n} - \frac{b}{n}, & \frac{a+b}{n} &= \frac{a}{n} + \frac{b}{n}. \end{aligned}$$

Zakon distribucije množenja prema zbrajanju.

$$a \cdot (b+c) = a \cdot b + a \cdot c, \quad a \cdot b + a \cdot c = a \cdot (b+c).$$

Proširiti razlomak znači brojnik i nazivnik tog razlomka pomnožiti istim brojem različitim od nule i jedinice

$$\frac{a}{b} = \frac{a \cdot n}{b \cdot n}, \quad n \neq 0, \quad n \neq 1.$$

Skratiti razlomak znači brojnik i nazivnik tog razlomka podijeliti istim brojem različitim od nule i jedinice

$$\frac{a \cdot n}{b \cdot n} = \frac{a}{b}, \quad n \neq 0, \quad n \neq 1.$$

Jednačina oblika

$$a \cdot x^2 + b \cdot x + c = 0,$$

($a \neq 0$, b i c su realni brojevi) naziva se kvadratna jednačina. Svaki broj x (realan ili kompleksan) koji zadovoljava tu jednačinu naziva se rješenje kvadratne jednačine.

Kvadratna jednačina sa rješenjima x_1 i x_2 glasi

$$a \cdot (x - x_1) \cdot (x - x_2) = 0,$$

gdje je $a \neq 0$ po volji određen broj.

Rješenja x_1 i x_2 kvadratne jednačine

$$a \cdot x^2 + b \cdot x + c = 0$$

zadovoljavaju Vièteove formule:

$$x_1 + x_2 = -\frac{b}{a}, \quad x_1 \cdot x_2 = \frac{c}{a}.$$

Ako vrijedi

$$x_1 + x_2 = b, \quad x_1 \cdot x_2 = c,$$

onda su x_1 i x_2 rješenja kvadratne jednadžbe

$$x^2 - b \cdot x + c = 0.$$

Preoblikujemo rješenja x_1 i x_2 tako da racionaliziramo nazivnike.

$$\left. \begin{array}{l} x_1 = \frac{1}{3+\sqrt{5}} \\ x_2 = \frac{1}{3-\sqrt{5}} \end{array} \right\} \Rightarrow \left[\begin{array}{l} \text{racionalizacija} \\ \text{nazivnika} \end{array} \right] \Rightarrow \left. \begin{array}{l} x_1 = \frac{1}{3+\sqrt{5}} \cdot \frac{3-\sqrt{5}}{3-\sqrt{5}} \\ x_2 = \frac{1}{3-\sqrt{5}} \cdot \frac{3+\sqrt{5}}{3+\sqrt{5}} \end{array} \right\} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \left. \begin{array}{l} x_1 = \frac{3-\sqrt{5}}{(3+\sqrt{5}) \cdot (3-\sqrt{5})} \\ x_2 = \frac{3+\sqrt{5}}{(3-\sqrt{5}) \cdot (3+\sqrt{5})} \end{array} \right\} \Rightarrow \left. \begin{array}{l} x_1 = \frac{3-\sqrt{5}}{3^2 - (\sqrt{5})^2} \\ x_2 = \frac{3+\sqrt{5}}{3^2 - (\sqrt{5})^2} \end{array} \right\} \Rightarrow \left. \begin{array}{l} x_1 = \frac{3-\sqrt{5}}{9-5} \\ x_2 = \frac{3+\sqrt{5}}{9-5} \end{array} \right\} \Rightarrow \left. \begin{array}{l} x_1 = \frac{3-\sqrt{5}}{4} \\ x_2 = \frac{3+\sqrt{5}}{4} \end{array} \right\} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \left. \begin{array}{l} x_1 = \frac{3}{4} - \frac{\sqrt{5}}{4} \\ x_2 = \frac{3}{4} + \frac{\sqrt{5}}{4} \end{array} \right\}.$$

1. inačica

Znajući rješenja, znamo i faktorizaciju kvadratnog trinoma:

$$\begin{aligned} a \cdot (x-x_1) \cdot (x-x_2) &= \left[\begin{array}{l} x_1 = \frac{3}{4} - \frac{\sqrt{5}}{4} \\ x_2 = \frac{3}{4} + \frac{\sqrt{5}}{4} \end{array} \right] = a \cdot \left(x - \left(\frac{3}{4} - \frac{\sqrt{5}}{4} \right) \right) \cdot \left(x - \left(\frac{3}{4} + \frac{\sqrt{5}}{4} \right) \right) = \\ &= a \cdot \left(x - \frac{3}{4} + \frac{\sqrt{5}}{4} \right) \cdot \left(x - \frac{3}{4} - \frac{\sqrt{5}}{4} \right) = a \cdot \left(\left(x - \frac{3}{4} \right) + \frac{\sqrt{5}}{4} \right) \cdot \left(\left(x - \frac{3}{4} \right) - \frac{\sqrt{5}}{4} \right) = \\ &= a \cdot \left(\left(x - \frac{3}{4} \right)^2 - \left(\frac{\sqrt{5}}{4} \right)^2 \right) = a \cdot \left(x^2 - 2 \cdot x \cdot \frac{3}{4} + \left(\frac{3}{4} \right)^2 - \frac{(\sqrt{5})^2}{4^2} \right) = \\ &= a \cdot \left(x^2 - 2 \cdot x \cdot \frac{3}{4} + \frac{9}{16} - \frac{5}{16} \right) = a \cdot \left(x^2 - x \cdot \frac{3}{2} + \frac{9-5}{16} \right) = a \cdot \left(x^2 - \frac{3}{2} \cdot x + \frac{4}{16} \right) = \\ &= a \cdot \left(x^2 - \frac{3}{2} \cdot x + \frac{1}{4} \right). \end{aligned}$$

Ovdje koeficijent a može biti bilo kakav (osim nule). Uzmimo da je $a = 4$. Tražena kvadratna

jednadžba glasi:

$$4 \cdot \left(x^2 - \frac{3}{2} \cdot x + \frac{1}{4} \right) = 0 \Rightarrow 4 \cdot x^2 - 4 \cdot \frac{3}{2} \cdot x + 4 \cdot \frac{1}{4} = 0 \Rightarrow 4 \cdot x^2 - 4 \cdot \frac{3}{2} \cdot x + 4 \cdot \frac{1}{4} = 0 \Rightarrow \\ \Rightarrow 4 \cdot x^2 - 6 \cdot x + 1 = 0.$$

2. inačica

$$\left. \begin{aligned} x_1 &= \frac{3}{4} - \frac{\sqrt{5}}{4} \\ x_2 &= \frac{3}{4} + \frac{\sqrt{5}}{4} \end{aligned} \right\} \Rightarrow \left[\begin{aligned} x_1 + x_2 &= b \\ x_1 \cdot x_2 &= c \end{aligned} \right] \Rightarrow \left. \begin{aligned} \frac{3}{4} - \frac{\sqrt{5}}{4} + \frac{3}{4} + \frac{\sqrt{5}}{4} &= b \\ \left(\frac{3}{4} - \frac{\sqrt{5}}{4} \right) \cdot \left(\frac{3}{4} + \frac{\sqrt{5}}{4} \right) &= c \end{aligned} \right\} \Rightarrow \\ \Rightarrow \left. \begin{aligned} \frac{3}{4} - \frac{\sqrt{5}}{4} + \frac{3}{4} + \frac{\sqrt{5}}{4} &= b \\ \left(\frac{3}{4} \right)^2 - \left(\frac{\sqrt{5}}{4} \right)^2 &= c \end{aligned} \right\} \Rightarrow \left. \begin{aligned} \frac{3}{4} + \frac{3}{4} &= b \\ \frac{9}{16} - \frac{(\sqrt{5})^2}{4^2} &= c \end{aligned} \right\} \Rightarrow \left. \begin{aligned} \frac{6}{4} &= b \\ \frac{9}{16} - \frac{5}{16} &= c \end{aligned} \right\} \Rightarrow \left. \begin{aligned} \frac{6}{4} &= b \\ \frac{9-5}{16} &= c \end{aligned} \right\} \Rightarrow \\ \Rightarrow \left. \begin{aligned} \frac{3}{2} &= b \\ \frac{4}{16} &= c \end{aligned} \right\} \Rightarrow \left. \begin{aligned} \frac{3}{2} &= b \\ \frac{4}{16} &= c \end{aligned} \right\} \Rightarrow \left. \begin{aligned} \frac{3}{2} &= b \\ \frac{1}{4} &= c \end{aligned} \right\}.$$

Kvadratna jednadžba glasi:

$$x^2 - \frac{3}{2} \cdot x + \frac{1}{4} = 0 \Rightarrow x^2 - \frac{3}{2} \cdot x + \frac{1}{4} = 0 \quad / \cdot 4 \Rightarrow 4 \cdot x^2 - 6 \cdot x + 1 = 0.$$

Vježba 206

Napiši kvadratnu jednadžbu čija su rješenja $x_1 = \frac{1}{3-\sqrt{5}}$, $x_2 = \frac{1}{3+\sqrt{5}}$.

Rezultat: $4 \cdot x^2 - 6 \cdot x + 1 = 0.$

Zadatak 207 (Tonka, gimnazija)

Riješite jednadžbu trećeg stupnja $k \cdot x^3 - 3 \cdot x^2 - k \cdot x + 3 = 0$ za realan broj k , $k \neq 0$.

Rješenje 207

Ponovimo!

$$a^1 = a, \quad a^n : a^m = a^{n-m}, \quad a^2 - b^2 = (a-b) \cdot (a+b).$$

Zakon distribucije množenja prema zbrajanju.

$$a \cdot (b+c) = a \cdot b + a \cdot c, \quad a \cdot b + a \cdot c = a \cdot (b+c).$$

Da bi umnožak bio jednak nuli, dovoljno je da jedan faktor bude jednak nuli.

$$a \cdot b = 0 \Leftrightarrow a = 0 \text{ ili } b = 0 \text{ ili } a = b = 0.$$

$$k \cdot x^3 - 3 \cdot x^2 - k \cdot x + 3 = 0 \Rightarrow \left[\begin{array}{l} \text{metoda} \\ \text{grupirana} \end{array} \right] \Rightarrow (k \cdot x^3 - 3 \cdot x^2) + (-k \cdot x + 3) = 0 \Rightarrow \\ \Rightarrow x^2 \cdot (k \cdot x - 3) - (k \cdot x - 3) = 0 \Rightarrow (k \cdot x - 3) \cdot (x^2 - 1) = 0 \Rightarrow (k \cdot x - 3) \cdot (x-1) \cdot (x+1) = 0 \Rightarrow$$

$$\left. \begin{array}{l} k \cdot x - 3 = 0 \\ \Rightarrow x - 1 = 0 \\ x + 1 = 0 \end{array} \right\} \Rightarrow \left. \begin{array}{l} k \cdot x = 3 \\ x = 1 \\ x = -1 \end{array} \right\} \Rightarrow \left. \begin{array}{l} k \cdot x = 3 \quad /: k \\ x = 1 \\ x = -1 \end{array} \right\} \Rightarrow \left. \begin{array}{l} x_1 = \frac{3}{k} \\ x_2 = 1 \\ x_3 = -1 \end{array} \right\}.$$

Vježba 207

Riješite jednadžbu trećeg stupnja $x^3 - 3 \cdot x^2 - x + 3 = 0$ za realan broj k , $k \neq 0$.

Rezultat: 3, 1, -1.

Zadatak 208 (Luka, gimnazija)

Odredite sva rješenja kvadratne jednadžbe $4 \cdot x^2 + p \cdot x + 65 = 0$, $p \in R$ uz uvjet da je razlika rješenja te jednadžbe jednaka 4.

Rješenje 208

Ponovimo!

$$(a-b)^2 = a^2 - 2 \cdot a \cdot b + b^2, \quad \left(\frac{a}{b}\right)^n = \frac{a^n}{b^n}, \quad (a-b)^2 = (a+b)^2 - 4 \cdot a \cdot b.$$

$$\frac{a}{b} \cdot \frac{c}{d} = \frac{a \cdot c}{b \cdot d}, \quad a^n \cdot b^n = (a \cdot b)^n.$$

Rješenja x_1 i x_2 kvadratne jednadžbe

$$a \cdot x^2 + b \cdot x + c = 0$$

zadovoljavaju Viëteove formule:

$$x_1 + x_2 = -\frac{b}{a}, \quad x_1 \cdot x_2 = \frac{c}{a}.$$

Zakon distribucije množenja prema zbrajanju,

$$a \cdot (b+c) = a \cdot b + a \cdot c, \quad a \cdot b + a \cdot c = a \cdot (b+c).$$

Skratiti razlomak znači brojnik i nazivnik tog razlomka podijeliti istim brojem različitim od nule i jedinice

$$\frac{a \cdot n}{b \cdot n} = \frac{a}{b}, \quad n \neq 0, \quad n \neq 1.$$

1. inačica

Neka su x_1 i x_2 rješenja zadane kvadratne jednadžbe čija je razlika jednaka 4. Uz taj uvjet i Viëteovu formulu izračunamo, na primjer, x_1 .

Najprije odredimo koeficijente a , b i c .

$$\left. \begin{array}{l} a \cdot x^2 + b \cdot x + c = 0 \\ 4 \cdot x^2 + p \cdot x + 65 = 0 \end{array} \right\} \Rightarrow \left. \begin{array}{l} a = 4 \\ b = p \\ c = 65 \end{array} \right\}.$$

Sada je:

$$\left. \begin{array}{l} x_1 - x_2 = 4 \\ x_1 + x_2 = -\frac{b}{a} \end{array} \right\} \Rightarrow \left. \begin{array}{l} x_1 - x_2 = 4 \\ x_1 + x_2 = -\frac{p}{4} \end{array} \right\} \Rightarrow \left[\begin{array}{l} \text{metoda suprotnih} \\ \text{koeficijenata} \end{array} \right] \Rightarrow 2 \cdot x_1 = 4 - \frac{p}{4} \Rightarrow \\ \Rightarrow 2 \cdot x_1 = 4 - \frac{p}{4} \quad /: \frac{1}{2} \Rightarrow x_1 = 2 - \frac{p}{8}.$$

Dobili smo jedno rješenje jednadžbe. Uvrstimo ga u nju kako bismo izračunali p .

$$\left. \begin{array}{l} x = 2 - \frac{p}{8} \\ 4 \cdot x^2 + p \cdot x + 65 = 0 \end{array} \right\} \Rightarrow 4 \cdot \left(2 - \frac{p}{8}\right)^2 + p \cdot \left(2 - \frac{p}{8}\right) + 65 = 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 4 \cdot \left(4 - \frac{p}{2} + \frac{p^2}{64}\right) + 2 \cdot p - \frac{p^2}{8} + 65 = 0 \Rightarrow 16 - 2 \cdot p + \frac{p^2}{16} + 2 \cdot p - \frac{p^2}{8} + 65 = 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 16 - 2 \cdot p + \frac{p^2}{16} + 2 \cdot p - \frac{p^2}{8} + 65 = 0 \Rightarrow 16 + \frac{p^2}{16} - \frac{p^2}{8} + 65 = 0 \Rightarrow \frac{p^2}{16} - \frac{p^2}{8} + 81 = 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \frac{p^2}{16} - \frac{p^2}{8} + 81 = 0 \quad / \cdot 16 \Rightarrow p^2 - 2 \cdot p^2 + 1296 = 0 \Rightarrow -p^2 + 1296 = 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow -p^2 = -1296 \Rightarrow -p^2 = -1296 \quad / \cdot (-1) \Rightarrow p^2 = 1296 \Rightarrow p^2 = 1296 \quad / \sqrt{\quad} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow p_{1,2} = \pm \sqrt{1296} \Rightarrow \left. \begin{array}{l} p_1 = -36 \\ p_2 = 36 \end{array} \right\}.$$

- Za $p = -36$ dobiju se rješenja:

$$\left. \begin{array}{l} p = -36 \\ 4 \cdot x^2 + p \cdot x + 65 = 0 \end{array} \right\} \Rightarrow 4 \cdot x^2 - 36 \cdot x + 65 = 0 \Rightarrow 4 \cdot x^2 - 36 \cdot x + 65 = 0 \left. \begin{array}{l} a = 4, b = -36, c = 65 \end{array} \right\} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \left[x_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4 \cdot a \cdot c}}{2 \cdot a} \right] \Rightarrow x_{1,2} = \frac{-(-36) \pm \sqrt{(-36)^2 - 4 \cdot 4 \cdot 65}}{2 \cdot 4} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow x_{1,2} = \frac{36 \pm \sqrt{1296 - 1040}}{8} \Rightarrow x_{1,2} = \frac{36 \pm \sqrt{256}}{8} \Rightarrow x_{1,2} = \frac{36 \pm 16}{8} \Rightarrow \left. \begin{array}{l} x_1 = \frac{36+16}{8} \\ x_2 = \frac{36-16}{8} \end{array} \right\} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \left. \begin{array}{l} x_1 = \frac{52}{8} \\ x_2 = \frac{20}{8} \end{array} \right\} \Rightarrow \left. \begin{array}{l} x_1 = \frac{52}{8} \\ x_2 = \frac{20}{8} \end{array} \right\} \Rightarrow \left. \begin{array}{l} x_1 = \frac{13}{2} \\ x_2 = \frac{5}{2} \end{array} \right\}.$$

- Za $p = 36$ dobiju se rješenja:

$$\left. \begin{array}{l} p = 36 \\ 4 \cdot x^2 + p \cdot x + 65 = 0 \end{array} \right\} \Rightarrow 4 \cdot x^2 + 36 \cdot x + 65 = 0 \Rightarrow 4 \cdot x^2 + 36 \cdot x + 65 = 0 \left. \begin{array}{l} a = 4, b = 36, c = 65 \end{array} \right\} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \left[x_{3,4} = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4 \cdot a \cdot c}}{2 \cdot a} \right] \Rightarrow x_{3,4} = \frac{-36 \pm \sqrt{36^2 - 4 \cdot 4 \cdot 65}}{2 \cdot 4} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow x_{3,4} = \frac{-36 \pm \sqrt{1296 - 1040}}{8} \Rightarrow x_{3,4} = \frac{-36 \pm \sqrt{256}}{8} \Rightarrow x_{3,4} = \frac{-36 \pm 16}{8} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \left. \begin{array}{l} x_3 = \frac{-36+16}{8} \\ x_4 = \frac{-36-16}{8} \end{array} \right\} \Rightarrow \left. \begin{array}{l} x_3 = \frac{-20}{8} \\ x_4 = \frac{-52}{8} \end{array} \right\} \Rightarrow \left. \begin{array}{l} x_3 = \frac{-20}{8} \\ x_4 = \frac{-52}{8} \end{array} \right\} \Rightarrow \left. \begin{array}{l} x_3 = -\frac{5}{2} \\ x_4 = -\frac{13}{2} \end{array} \right\}.$$

2. inačica

Pomoću identiteta dobije se:

$$\begin{aligned} (x_1 - x_2)^2 &= (x_1 + x_2)^2 - 4 \cdot x_1 \cdot x_2 \Rightarrow (x_1 - x_2)^2 = \left(-\frac{b}{a}\right)^2 - 4 \cdot \frac{c}{a} \Rightarrow \\ &\Rightarrow \left[\begin{array}{l} x_1 - x_2 = 4 \\ b = p, a = 4, c = 65 \end{array} \right] \Rightarrow 4^2 = \left(-\frac{p}{4}\right)^2 - 4 \cdot \frac{65}{4} \Rightarrow 16 = \frac{p^2}{16} - 4 \cdot \frac{65}{4} \Rightarrow \\ &\Rightarrow 16 = \frac{p^2}{16} - 65 \Rightarrow \frac{p^2}{16} - 65 = 16 \Rightarrow \frac{p^2}{16} = 16 + 65 \Rightarrow \frac{p^2}{16} = 81 \Rightarrow \frac{p^2}{16} = 81 \cdot / \cdot 16 \Rightarrow \\ &\Rightarrow p^2 = 81 \cdot 16 \Rightarrow p^2 = 9^2 \cdot 4^2 \Rightarrow p^2 = (9 \cdot 4)^2 \Rightarrow p^2 = 36^2 \Rightarrow p^2 = 36^2 \cdot / \sqrt{} \Rightarrow \\ &\Rightarrow p_{1,2} = \pm 36 \Rightarrow \left. \begin{array}{l} p_1 = -36 \\ p_2 = 36 \end{array} \right\} \end{aligned}$$

- Za $p = -36$ dobiju se rješenja:

$$\begin{aligned} \left. \begin{array}{l} p = -36 \\ 4 \cdot x^2 + p \cdot x + 65 = 0 \end{array} \right\} &\Rightarrow \left. \begin{array}{l} 4 \cdot x^2 - 36 \cdot x + 65 = 0 \\ a = 4, b = -36, c = 65 \end{array} \right\} \Rightarrow \\ &\Rightarrow \left[x_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4 \cdot a \cdot c}}{2 \cdot a} \right] \Rightarrow x_{1,2} = \frac{-(-36) \pm \sqrt{(-36)^2 - 4 \cdot 4 \cdot 65}}{2 \cdot 4} \Rightarrow \\ &\Rightarrow x_{1,2} = \frac{36 \pm \sqrt{1296 - 1040}}{8} \Rightarrow x_{1,2} = \frac{36 \pm \sqrt{256}}{8} \Rightarrow x_{1,2} = \frac{36 \pm 16}{8} \Rightarrow \left. \begin{array}{l} x_1 = \frac{36+16}{8} \\ x_2 = \frac{36-16}{8} \end{array} \right\} \Rightarrow \\ &\Rightarrow \left. \begin{array}{l} x_1 = \frac{52}{8} \\ x_2 = \frac{20}{8} \end{array} \right\} \Rightarrow \left. \begin{array}{l} x_1 = \frac{52}{8} \\ x_2 = \frac{20}{8} \end{array} \right\} \Rightarrow \left. \begin{array}{l} x_1 = \frac{13}{2} \\ x_2 = \frac{5}{2} \end{array} \right\}. \end{aligned}$$

- Za $p = 36$ dobiju se rješenja:

$$\begin{aligned} \left. \begin{array}{l} p = 36 \\ 4 \cdot x^2 + p \cdot x + 65 = 0 \end{array} \right\} &\Rightarrow \left. \begin{array}{l} 4 \cdot x^2 + 36 \cdot x + 65 = 0 \\ a = 4, b = 36, c = 65 \end{array} \right\} \Rightarrow \\ &\Rightarrow \left[x_{3,4} = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4 \cdot a \cdot c}}{2 \cdot a} \right] \Rightarrow x_{3,4} = \frac{-36 \pm \sqrt{36^2 - 4 \cdot 4 \cdot 65}}{2 \cdot 4} \Rightarrow \\ &\Rightarrow x_{3,4} = \frac{-36 \pm \sqrt{1296 - 1040}}{8} \Rightarrow x_{3,4} = \frac{-36 \pm \sqrt{256}}{8} \Rightarrow x_{3,4} = \frac{-36 \pm 16}{8} \Rightarrow \end{aligned}$$

$$\Rightarrow \left. \begin{array}{l} x_3 = \frac{-36+16}{8} \\ x_4 = \frac{-36-16}{8} \end{array} \right\} \Rightarrow \left. \begin{array}{l} x_3 = \frac{-20}{8} \\ x_4 = \frac{-52}{8} \end{array} \right\} \Rightarrow \left. \begin{array}{l} x_3 = \frac{-20}{8} \\ x_4 = \frac{-52}{8} \end{array} \right\} \Rightarrow \left. \begin{array}{l} x_3 = -\frac{5}{2} \\ x_4 = -\frac{13}{2} \end{array} \right\}.$$

Vježba 208

Nema vježbe! Može vic?

Rezultat: Donio Mujo brončanu medalju s matematičke olimpijade.
Pita ga Haso: "Kako si ti osvojio brončanu medalju?"
Mujo odgovori: "Pa pitali nas koliko je 7 puta 3 i ja s 19 osvojio treće mjesto!"

Zadatak 209 (Antun, srednja škola)

Ako su x_1, x_2 nultočke funkcije $f(x) = a \cdot x^2 + b \cdot x + c$, onda je $\frac{1+x_1}{1-x_1} + \frac{1+x_2}{1-x_2}$ jednako:

A. $\frac{2 \cdot (a-c)}{a+b+c}$ B. $\frac{a-c}{a+b+c}$ C. $\frac{2 \cdot (a-b)}{a+b+c}$ D. $\frac{a+b+c}{a+b}$

Rješenje 209

Ponovimo!

$$\frac{a}{b} + \frac{c}{d} = \frac{a \cdot d + b \cdot c}{b \cdot d}, \quad a \cdot \frac{b}{c} = \frac{a \cdot b}{c}, \quad \frac{a}{b} - \frac{c}{d} = \frac{a \cdot d - b \cdot c}{b \cdot d}.$$

$$n = \frac{n}{1}, \quad \frac{\frac{a}{b}}{\frac{c}{d}} = \frac{a \cdot d}{b \cdot c}.$$

Množenje zagrada

$$(a+b) \cdot (c+d) = a \cdot c + a \cdot d + b \cdot c + b \cdot d.$$

Rješenja x_1 i x_2 kvadratne jednadžbe

$$a \cdot x^2 + b \cdot x + c = 0$$

zadovoljavaju Vièteove formule:

$$x_1 + x_2 = -\frac{b}{a}, \quad x_1 \cdot x_2 = \frac{c}{a}.$$

Zakon distribucije množenja prema zbrajanju.

$$a \cdot (b+c) = a \cdot b + a \cdot c, \quad a \cdot b + a \cdot c = a \cdot (b+c).$$

$$f(x) = a \cdot x^2 + b \cdot x + c \Rightarrow \left[\begin{array}{l} \text{Vièteove formule} \\ x_1 + x_2 = -\frac{b}{a}, \quad x_1 \cdot x_2 = \frac{c}{a} \end{array} \right].$$

Preoblikujemo zadani izraz.

$$\begin{aligned} \frac{1+x_1}{1-x_1} + \frac{1+x_2}{1-x_2} &= \frac{(1+x_1) \cdot (1-x_2) + (1+x_2) \cdot (1-x_1)}{(1-x_1) \cdot (1-x_2)} = \\ &= \frac{1-x_2 + x_1 \cdot x_2 + 1-x_1 + x_2 - x_1 \cdot x_2}{1-x_2 - x_1 + x_1 \cdot x_2} = \frac{1-x_2 + x_1 - x_1 \cdot x_2 + 1-x_1 + x_2 - x_1 \cdot x_2}{1-x_2 - x_1 + x_1 \cdot x_2} = \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \frac{1-x_1 \cdot x_2 + 1-x_1 \cdot x_2}{1-(x_1+x_2)+x_1 \cdot x_2} = \frac{2-2 \cdot x_1 \cdot x_2}{1-(x_1+x_2)+x_1 \cdot x_2} = \left[\begin{array}{l} x_1+x_2 = -\frac{b}{a} \\ x_1 \cdot x_2 = \frac{c}{a} \end{array} \right] = \\
&= \frac{2-2 \cdot \frac{c}{a}}{1-\left(-\frac{b}{a}\right)+\frac{c}{a}} = \frac{2-\frac{2 \cdot c}{a}}{1+\frac{b}{a}+\frac{c}{a}} = \frac{\frac{2 \cdot a-2 \cdot c}{a}}{\frac{1+\frac{b}{a}+\frac{c}{a}}{1}} = \frac{\frac{2 \cdot a-2 \cdot c}{a}}{\frac{a+b+c}{a}} = \frac{2 \cdot a-2 \cdot c}{a+b+c} = \\
&= \frac{2 \cdot a-2 \cdot c}{a+b+c} = \frac{2 \cdot (a-c)}{a+b+c}.
\end{aligned}$$

Odgovor je pod A.

Vježba 209

Ako su x_1, x_2 nultočke funkcije $f(x) = a \cdot x^2 + b \cdot x + c$, onda je $\frac{1+x_1}{1-x_1} - \frac{1+x_2}{x_2-1}$ jednako:

A. $\frac{2 \cdot (a-c)}{a+b+c}$ B. $\frac{a-c}{a+b+c}$ C. $\frac{2 \cdot (a-b)}{a+b+c}$ D. $\frac{a+b+c}{a+b}$

Rezultat: A.

Zadatak 210 (4B, TUPŠ, Tonka ☺, gimnazija)

Zbroj rješenja kvadratne jednadžbe $4 \cdot x^2 + 36 = 0$ jest:

A. 0 B. 6 C. -6 D. -3

Rješenje 210

Ponovimo!

Imaginarna jedinica i je broj čiji je kvadrat jednak -1 ,

$$i^2 = -1.$$

Umnožak realnog broja b i imaginarne jedinice i zove se imaginaran broj

$$b \cdot i.$$

Rješenja x_1 i x_2 kvadratne jednadžbe

$$a \cdot x^2 + b \cdot x + c = 0$$

zadovoljavaju Viëteove formule:

$$x_1 + x_2 = -\frac{b}{a}, \quad x_1 \cdot x_2 = \frac{c}{a}.$$

I. inačica

Riješimo jednadžbu!

$$\begin{aligned}
4 \cdot x^2 + 36 = 0 &\Rightarrow 4 \cdot x^2 = -36 \Rightarrow 4 \cdot x^2 = -36 \quad / : 4 \Rightarrow x^2 = -9 \Rightarrow \\
\Rightarrow x^2 = -9 \quad / \sqrt{} &\Rightarrow x_{1,2} = \pm \sqrt{-9} \Rightarrow x_{1,2} = \pm 3 \cdot i \Rightarrow \left. \begin{array}{l} x_1 = 3 \cdot i \\ x_2 = -3 \cdot i \end{array} \right\}.
\end{aligned}$$

Tada je:

$$x_1 + x_2 = 3 \cdot i + (-3 \cdot i) = 3 \cdot i - 3 \cdot i = 3 \cdot i - 3 \cdot i = 0.$$

Odgovor je pod A.

2. inačica

Uporabom Viëteove formule dobije se:

$$\left. \begin{aligned} 4 \cdot x^2 + 36 = 0 &\Rightarrow 4 \cdot x^2 + 0 \cdot x + 36 = 0 \Rightarrow 4 \cdot x^2 + 0 \cdot x + 36 = 0 \\ a = 4, b = 0, c = 36 &\end{aligned} \right\} \Rightarrow \left[x_1 + x_2 = -\frac{b}{a} \right] \Rightarrow$$
$$\Rightarrow x_1 + x_2 = -\frac{0}{4} \Rightarrow x_1 + x_2 = 0.$$

Odgovor je pod A.

Napomena: Zbroj rješenja svake nepotpune kvadratne jednadžbe jednak je 0.

Vježba 210

Zbroj rješenja kvadratne jednadžbe $2 \cdot x^2 + 50 = 0$ jest:

A. 0 B. 6 C. -6 D. -3

Rezultat: A.

Zadatak 211 (Miro, srednja škola)

Koji x predstavlja jedno od rješenja jednadžbe $\frac{1}{2} \cdot x^2 + b \cdot x + 3 = 0$?

A. $x = b + \sqrt{b^2 - 6}$ B. $x = b - \sqrt{b^2 + 6}$ C. $x = -b + \sqrt{b^2 + 6}$ D. $x = -b - \sqrt{b^2 - 6}$

Rješenje 211

Ponovimo!

$$(a \cdot b)^n = a^n \cdot b^n, \quad \sqrt{a \cdot b} = \sqrt{a} \cdot \sqrt{b}.$$

Zakon distribucije množenja prema zbrajanju.

$$a \cdot (b + c) = a \cdot b + a \cdot c, \quad a \cdot b + a \cdot c = a \cdot (b + c).$$

Skratiti razlomak znači brojnik i nazivnik tog razlomka podijeliti istim brojem različitim od nule i jedinice

$$\frac{a \cdot n}{b \cdot n} = \frac{a}{b}, \quad n \neq 0, \quad n \neq 1.$$

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} \cdot x^2 + b \cdot x + 3 = 0 &\Rightarrow \frac{1}{2} \cdot x^2 + b \cdot x + 3 = 0 \quad / \cdot 2 \Rightarrow x^2 + 2 \cdot b \cdot x + 6 = 0 \Rightarrow \\ &\Rightarrow \left. \begin{aligned} x^2 + 2 \cdot b \cdot x + 6 = 0 \\ a = 1, b = 2 \cdot b, c = 6 \end{aligned} \right\} \Rightarrow \left. \begin{aligned} a = 1, b = 2 \cdot b, c = 6 \\ x_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4 \cdot a \cdot c}}{2 \cdot a} \end{aligned} \right\} \Rightarrow \\ &\Rightarrow x_{1,2} = \frac{-2 \cdot b \pm \sqrt{(2 \cdot b)^2 - 4 \cdot 1 \cdot 6}}{2 \cdot 1} \Rightarrow x_{1,2} = \frac{-2 \cdot b \pm \sqrt{4 \cdot b^2 - 24}}{2} \Rightarrow \\ &\Rightarrow x_{1,2} = \frac{-2 \cdot b \pm \sqrt{4 \cdot (b^2 - 6)}}{2} \Rightarrow x_{1,2} = \frac{-2 \cdot b \pm \sqrt{4} \cdot \sqrt{b^2 - 6}}{2} \Rightarrow x_{1,2} = \frac{-2 \cdot b \pm 2 \cdot \sqrt{b^2 - 6}}{2} \Rightarrow \\ &\Rightarrow x_{1,2} = \frac{2 \cdot (-b \pm \sqrt{b^2 - 6})}{2} \Rightarrow x_{1,2} = \frac{2 \cdot (-b \pm \sqrt{b^2 - 6})}{2} \Rightarrow x_{1,2} = -b \pm \sqrt{b^2 - 6} \Rightarrow \end{aligned}$$

$$\Rightarrow \left. \begin{array}{l} x_1 = -b + \sqrt{b^2 - 6} \\ x_2 = -b - \sqrt{b^2 - 6} \end{array} \right\} \Rightarrow x = -b - \sqrt{b^2 - 6}.$$

Odgovor je pod D.

Vježba 211

Koji x predstavlja jedno od rješenja jednadžbe $\frac{1}{2} \cdot x^2 + b \cdot x + 3 = 0$?

A. $x = b + \sqrt{b^2 - 6}$ B. $x = b - \sqrt{b^2 + 6}$ C. $x = -b + \sqrt{b^2 + 6}$ D. $x = -b + \sqrt{b^2 - 6}$

Rezultat: D.

Zadatak 212 (Željko, srednja škola)

Zadane su jednadžbe $x^2 + a \cdot x + 1 = 0$, $x^2 + x + a = 0$. Odredite sve realne brojeve a tako da jednadžbe imaju zajednički korijen.

Rješenje 212

Ponovimo!

$$\left. \begin{array}{l} a = b \\ c = d \end{array} \right\} \Rightarrow a - c = b - d.$$

Zakon distribucije množenja prema zbrajanju.

$$a \cdot (b + c) = a \cdot b + a \cdot c, \quad a \cdot b + a \cdot c = a \cdot (b + c).$$

Jednadžbe $x^2 + a \cdot x + 1 = 0$ i $x^2 + x + a = 0$ za $a = 1$ su identične, $x^2 + x + 1 = 0$. Imaju oba korijena (rješenja) zajednička. Pretpostavimo da je $a \neq 1$. Neka je x_1 zajednički korijen obiju jednadžbi.

$$\left. \begin{array}{l} x_1^2 + a \cdot x_1 + 1 = 0 \\ x_1^2 + x_1 + a = 0 \end{array} \right\} \Rightarrow \left[\begin{array}{l} \text{oduzmemo} \\ \text{jednadžbe} \end{array} \right] \Rightarrow x_1^2 + a \cdot x_1 + 1 - (x_1^2 + x_1 + a) = 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow x_1^2 + a \cdot x_1 + 1 - x_1^2 - x_1 - a = 0 \Rightarrow x_1^2 + a \cdot x_1 + 1 - x_1^2 - x_1 - a = 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow a \cdot x_1 + 1 - x_1 - a = 0 \Rightarrow a \cdot x_1 - x_1 - a + 1 = 0 \Rightarrow (a \cdot x_1 - x_1) + (-a + 1) = 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow x_1 \cdot (a - 1) - (a - 1) = 0 \Rightarrow x_1 \cdot (a - 1) = a - 1 \Rightarrow x_1 \cdot (a - 1) = a - 1 \cdot \frac{1}{a - 1} \Rightarrow x_1 = 1.$$

Zajednički korijen je $x_1 = 1$. Realan broj a iznosi:

$$\left. \begin{array}{l} x_1 = 1 \\ x_1^2 + x_1 + a = 0 \end{array} \right\} \Rightarrow 1^2 + 1 + a = 0 \Rightarrow 1 + 1 + a = 0 \Rightarrow a = -2.$$

Realan broj a je

$$a \in \{-2, 1\}.$$

Vježba 212

Zadane su jednadžbe $x^2 + a \cdot x = -1$, $x^2 + x = -a$. Odredite sve realne brojeve a tako da jednadžbe imaju zajednički korijen.

Rezultat: $a \in \{-2, 1\}$.

Zadatak 213 (Marta, gimnazija)

Dokaži da su za realne brojeve a, b, c, d rješenja jednadžbe $\begin{vmatrix} a-x & c+d \cdot i \\ c-d \cdot i & b-x \end{vmatrix} = 0$ realna.

Rješenje 213

Ponovimo!

$$a^2 \geq 0, a \in \mathbb{R}, (a-b) \cdot (a+b) = a^2 - b^2, (a \cdot b)^n = a^n \cdot b^n.$$
$$a^2 - 2 \cdot a \cdot b + b^2 = (a-b)^2, i - \text{imaginarna jedinica}, i^2 = -1.$$
$$(-a)^{2 \cdot n} = a^{2 \cdot n}.$$

Determinanta drugog reda

$$\begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} = a \cdot d - b \cdot c.$$

Množenje zagrada

$$(a+b) \cdot (c+d) = a \cdot c + a \cdot d + b \cdot c + b \cdot d.$$

Zakon distribucije množenja prema zbrajanju.

$$a \cdot (b+c) = a \cdot b + a \cdot c, a \cdot b + a \cdot c = a \cdot (b+c).$$

Diskriminanta kvadratne jednadžbe

$$a \cdot x^2 + b \cdot x + c = 0$$

je broj

$$D = b^2 - 4 \cdot a \cdot c.$$

- Ako je $D > 0$, jednadžba ima dva realna rješenja.
- Ako je $D = 0$, jednadžba ima jedno dvostruko realno rješenje.
- Ako je $D < 0$, jednadžba ima kompleksno – konjugirana rješenja.

Preoblikujemo jednadžbu.

$$\begin{vmatrix} a-x & c+d \cdot i \\ c-d \cdot i & b-x \end{vmatrix} = 0 \Rightarrow (a-x) \cdot (b-x) - (c-d \cdot i) \cdot (c+d \cdot i) = 0 \Rightarrow$$
$$\Rightarrow a \cdot b - a \cdot x - b \cdot x + x^2 - (c^2 - (d \cdot i)^2) = 0 \Rightarrow a \cdot b - a \cdot x - b \cdot x + x^2 - (c^2 - d^2 \cdot i^2) = 0 \Rightarrow$$
$$\Rightarrow a \cdot b - a \cdot x - b \cdot x + x^2 - (c^2 - d^2 \cdot (-1)) = 0 \Rightarrow a \cdot b - a \cdot x - b \cdot x + x^2 - (c^2 + d^2) = 0 \Rightarrow$$
$$\Rightarrow a \cdot b - a \cdot x - b \cdot x + x^2 - c^2 - d^2 = 0 \Rightarrow x^2 - (a+b) \cdot x - (c^2 + d^2 - a \cdot b) = 0 \Rightarrow$$
$$\Rightarrow \left. \begin{array}{l} x^2 - (a+b) \cdot x - (c^2 + d^2 - a \cdot b) = 0 \\ a = 1, b = -(a+b), c = -(c^2 + d^2 - a \cdot b) \end{array} \right\}$$

Ispitajmo diskriminantu kvadratne jednadžbe!

$$D = b^2 - 4 \cdot a \cdot c \Rightarrow D = (-(a+b))^2 - 4 \cdot 1 \cdot (-(c^2 + d^2 - a \cdot b)) \Rightarrow$$
$$\Rightarrow D = (a+b)^2 + 4 \cdot (c^2 + d^2 - a \cdot b) \Rightarrow D = a^2 + 2 \cdot a \cdot b + b^2 + 4 \cdot c^2 + 4 \cdot d^2 - 4 \cdot a \cdot b \Rightarrow$$
$$\Rightarrow D = a^2 - 2 \cdot a \cdot b + b^2 + 4 \cdot c^2 + 4 \cdot d^2 \Rightarrow D = (a-b)^2 + 4 \cdot (c^2 + d^2) \geq 0.$$

Budući da je diskriminanta nenegativan broj, zadana jednačba ima realna rješenja.

Vježba 213

Dokaži da su za realne brojeve a, b, c, d rješenja jednačbe $\begin{vmatrix} b-x & c+d \cdot i \\ c-d \cdot i & a-x \end{vmatrix} = 0$ realna.

Rezultat: Dokaz analogan.

Zadatak 214 (Vox, gimnazija)

Ako koeficijenti jednačbe $x^2 + p \cdot x + q = 0$ i $x^2 + m \cdot x + n = 0$ zadovoljavaju uvjet $m \cdot p = 2 \cdot (q + n)$, dokažite da su rješenja bar jedne od njih realna.

Rješenje 214

Ponovimo!

$$a^2 \geq 0, a \in \mathbb{R}, (a-b)^2 = a^2 - 2 \cdot a \cdot b + b^2.$$

Zakon distribucije množenja prema zbrajanju.

$$a \cdot (b+c) = a \cdot b + a \cdot c, a \cdot b + a \cdot c = a \cdot (b+c).$$

Diskriminanta kvadratne jednačbe

$$a \cdot x^2 + b \cdot x + c = 0$$

je broj

$$D = b^2 - 4 \cdot a \cdot c.$$

- Ako je $D > 0$, jednačba ima dva realna rješenja.
- Ako je $D = 0$, jednačba ima jedno dvostruko realno rješenje.
- Ako je $D < 0$, jednačba ima kompleksno – konjugirana rješenja.

Zadanim jednačbama odredimo njihove diskriminante:

$$\begin{aligned} \bullet \quad x^2 + p \cdot x + q = 0 &\Rightarrow \left. \begin{array}{l} x^2 + p \cdot x + q = 0 \\ a = 1, b = p, c = q \end{array} \right\} \Rightarrow [D = b^2 - 4 \cdot a \cdot c] \Rightarrow D_1 = p^2 - 4 \cdot 1 \cdot q \Rightarrow \\ &\Rightarrow D_1 = p^2 - 4 \cdot q \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \bullet \quad x^2 + m \cdot x + n = 0 &\Rightarrow \left. \begin{array}{l} x^2 + m \cdot x + n = 0 \\ a = 1, b = m, c = n \end{array} \right\} \Rightarrow [D = b^2 - 4 \cdot a \cdot c] \Rightarrow D_2 = m^2 - 4 \cdot 1 \cdot n \Rightarrow \\ &\Rightarrow D_2 = m^2 - 4 \cdot n. \end{aligned}$$

Zbrajanjem D_1 i D_2 dobije se:

$$\begin{aligned} D_1 + D_2 &= p^2 - 4 \cdot q + m^2 - 4 \cdot n \Rightarrow D_1 + D_2 = p^2 + m^2 - 4 \cdot q - 4 \cdot n \Rightarrow \\ &\Rightarrow D_1 + D_2 = p^2 + m^2 - 4 \cdot (q + n) \Rightarrow D_1 + D_2 = p^2 + m^2 - 2 \cdot 2 \cdot (q + n) \Rightarrow \\ &\Rightarrow \left[\begin{array}{l} \text{uvjet} \\ m \cdot p = 2 \cdot (q + n) \end{array} \right] \Rightarrow D_1 + D_2 = p^2 + m^2 - 2 \cdot m \cdot p \Rightarrow D_1 + D_2 = p^2 - 2 \cdot p \cdot m + m^2 \Rightarrow \\ &\Rightarrow D_1 + D_2 = (p - m)^2 \geq 0. \end{aligned}$$

Budući da je $D_1 + D_2 \geq 0$, slijedi da je barem jedan od brojeva D_1 ili D_2 nenegativan broj. To znači da su rješenja odgovarajuće kvadratne jednačbe realna.

Vježba 214

Odmor!

Rezultat: ...

Zadatak 215 (Anita, ekonomska škola)

U kvadratnoj jednadžbi $3 \cdot k \cdot x^2 - (6 \cdot k - 1) \cdot x + k + 8 = 0$ odredite k tako da jedno rješenje bude recipročna vrijednost drugog rješenja.

A. $k = 4$ B. $k = 2$ C. $k = -3$ D. $k = 1$

Rješenje 215

Ponovimo!

Jednadžba oblika

$$a \cdot x^2 + b \cdot x + c = 0,$$

($a \neq 0$, b i c su realni brojevi) naziva se kvadratna jednadžba. Svaki broj x (realan ili kompleksan) koji zadovoljava tu jednadžbu naziva se rješenje kvadratne jednadžbe.

Rješenja x_1 i x_2 kvadratne jednadžbe

$$a \cdot x^2 + b \cdot x + c = 0$$

zadovoljavaju Viëteove formule:

$$x_1 + x_2 = -\frac{b}{a}, \quad x_1 \cdot x_2 = \frac{c}{a}.$$

Neka su x_1 i x_2 rješenja zadane jednadžbe koja zadovoljavaju uvjet u zadatku,

$$x_1 = \frac{1}{x_2} \Rightarrow x_1 = \frac{1}{x_2} \cdot x_2 \Rightarrow x_1 \cdot x_2 = 1.$$

Računamo k.

$$3 \cdot k \cdot x^2 - (6 \cdot k - 1) \cdot x + k + 8 = 0 \Rightarrow \left. \begin{array}{l} 3 \cdot k \cdot x^2 - (6 \cdot k - 1) \cdot x + k + 8 = 0 \\ a = 3 \cdot k, \quad b = -(6 \cdot k - 1), \quad c = k + 8 \end{array} \right\} \Rightarrow \left[\begin{array}{l} x_1 \cdot x_2 = \frac{c}{a} \\ x_1 \cdot x_2 = 1 \end{array} \right] \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \frac{k+8}{3 \cdot k} = 1 \Rightarrow \frac{k+8}{3 \cdot k} = 1 \cdot 3 \cdot k \Rightarrow k+8 = 3 \cdot k \Rightarrow k - 3 \cdot k = -8 \Rightarrow -2 \cdot k = -8 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow -2 \cdot k = -8 \quad /: (-2) \Rightarrow k = 4.$$

Odgovor je pod A.

Vježba 215

U kvadratnoj jednadžbi $2 \cdot k \cdot x^2 - (7 \cdot k - 1) \cdot x + k + 8 = 0$ odredite k tako da jedno rješenje bude recipročna vrijednost drugog rješenja.

A. $k = 8$ B. $k = 6$ C. $k = 7$ D. $k = 1$

Rezultat: A.