Zadatak 201 (Asterix, gimnazija)

Zbroj recipročnih vrijednosti rješenja kvadratne jednadžbe $x^2 + m \cdot x + 2 \cdot m + 3 = 0$ jednak je 10. Kojemu od navedenih intervala pripada realan broj m?

$$A.\ \left\langle -4,\ -2 \right\rangle \qquad B.\ \left\langle -2,\ 0 \right\rangle \qquad C.\ \left\langle 0,\ 2 \right\rangle \qquad D.\ \left\langle 2,\ 4 \right\rangle$$

Rješenje 201

Ponovimo!

$$\frac{a}{b} + \frac{c}{d} = \frac{a \cdot d + b \cdot c}{b \cdot d}.$$

Jednadžba oblika

$$a \cdot x^2 + b \cdot x + c = 0,$$

(a $\neq$ 0, b i c su realni brojevi) naziva se kvadratna jednadžba. Svaki broj x (realan ili kompleksan) koji zadovoljava tu jednadžbu naziva se rješenje kvadratne jednadžbe.
Rješenja x_1 i x_2 kvadratne jednadžbe

$$a \cdot x^2 + b \cdot x + c = 0$$

zadovoljavaju Vièteove formule:

$$x_1 + x_2 = -\frac{b}{a} \quad , \quad x_1 \cdot x_2 = \frac{c}{a}.$$

Zakon distribucije množenja prema zbrajanju.

$$a \cdot (b + c) = a \cdot b + a \cdot c \quad , \quad a \cdot b + a \cdot c = a \cdot (b + c).$$

Skratiti razlomak znači brojnik i nazivnik tog razlomka podijeliti istim brojem različitim od nule i jedinice

$$\frac{a \cdot n}{b \cdot n} = \frac{a}{b} \ , \ n \neq 0 \ , \ n \neq 1.$$

Najprije odredimo a, b i c kvadratne jednadžbe.

$$x^2 + m \cdot x + 2 \cdot m + 3 = 0 \ \Rightarrow \ \left.\begin{array}{l} x^2 + m \cdot x + 2 \cdot m + 3 = 0 \\ a = 1 \ , \ b = m \ , \ c = 2 \cdot m + 3 \end{array}\right\}.$$

Dalje slijedi:

$$\frac{1}{x_1} + \frac{1}{x_2} = 10 \ \Rightarrow \ \frac{x_2 + x_1}{x_1 \cdot x_2} = 10 \ \Rightarrow \ \frac{x_1 + x_2}{x_1 \cdot x_2} = 10 \ \Rightarrow \ \left[\begin{array}{l} x_1 + x_2 = -\frac{b}{a} \\ x_1 \cdot x_2 = \frac{c}{a} \end{array}\right] \ \Rightarrow \ \frac{-\frac{b}{a}}{\frac{c}{a}} = 10 \ \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \ \frac{-\frac{b}{a}}{\frac{c}{a}} = 10 \ \Rightarrow \ -\frac{b}{c} = 10 \ \Rightarrow \ -\frac{b}{c} = 10 \ / \cdot (-c) \ \Rightarrow \ b = -10 \cdot c \ \Rightarrow \ b + 10 \cdot c = 0 \ \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \ \left[\begin{array}{l} b = m \\ c = 2 \cdot m + 3 \end{array}\right] \ \Rightarrow \ m + 10 \cdot (2 \cdot m + 3) = 0 \ \Rightarrow \ m + 20 \cdot m + 30 = 0 \ \Rightarrow \ m + 20 \cdot m = -30 \ \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \ 21 \cdot m = -30 \ \Rightarrow \ 21 \cdot m = -30 \ /: 21 \ \Rightarrow \ m = -1.43 \ \Rightarrow \ m \in \left\langle -2,\ 0 \right\rangle.$$

Odgovor je pod B.

Vježba 201

Zbroj recipročnih vrijednosti rješenja kvadratne jednadžbe $x^2 + m \cdot x + 2 \cdot m = -3$ jednak je 10. Kojemu od navedenih intervala pripada realan broj m?

$$A. \langle -4, -2 \rangle \qquad B. \langle -2, 0 \rangle \qquad C. \langle 0, 2 \rangle \qquad D. \langle 2, 4 \rangle$$

Rezultat: B.

Zadatak 202 (Leon, gimnazija)

Skup svih vrijednosti q, za koje je razmak korijena jednadžbe $x^2 + 6 \cdot x + q = 0$ veći od 4, je:

$$A. \langle 0, 6 \rangle \qquad B. \langle 3, +\infty \rangle \qquad C. \langle -\infty, 5 \rangle \qquad D. \langle 5, +\infty \rangle$$

Rješenje 202

Ponovimo!

$$a < b \ , \ c > 0 \ \Rightarrow \ \frac{a}{c} < \frac{b}{c} \quad , \quad a > b \ , \ c < 0 \ \Rightarrow \ a \cdot c < b \cdot c \quad , \quad \frac{a}{n} - \frac{b}{n} = \frac{a-b}{n}.$$

$$\frac{n}{1} = n \quad , \quad \sqrt{a \cdot b} = \sqrt{a} \cdot \sqrt{b} \quad , \quad \left(\sqrt{a}\right)^2 = a.$$

Jednadžba oblika

$$a \cdot x^2 + b \cdot x + c = 0,$$

(a ≠ 0, b i c su realni brojevi) naziva se kvadratna jednadžba. Svaki broj x (realan ili kompleksan) koji zadovoljava tu jednadžbu naziva se rješenje kvadratne jednadžbe.
Diskriminanta kvadratne jednadžbe

$$a \cdot x^2 + b \cdot x + c = 0$$

je broj

$$D = b^2 - 4 \cdot a \cdot c.$$

- Ako je D > 0, jednadžba ima dva realna rješenja.
- Ako je D = 0, jednadžba ima jedno dvostruko realno rješenje.
- Ako je D < 0, jednadžba ima kompleksno – konjugirana rješenja.

Rješenja kvadratne jednadžbe

$$a \cdot x^2 + b \cdot x + c = 0$$

su brojevi

$$x_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{D}}{2 \cdot a} \ \Rightarrow \ \left. \begin{array}{l} x_1 = \dfrac{-b + \sqrt{D}}{2 \cdot a} \\ x_2 = \dfrac{-b - \sqrt{D}}{2 \cdot a} \end{array} \right\}.$$

Iracionalne nejednadžbe

$$\sqrt{f(x)} < g(x) \ \Leftrightarrow \ \left. \begin{array}{l} f(x) \geq 0 \\ g(x) > 0 \\ f(x) < (g(x))^2 \end{array} \right\} \ \text{sustav nejednadžbi}$$

Općenito:
Iracionalna nejednadžba je nejednadžba u kojoj se nepoznanica x pojavljuje pod znakom korijena (odnosno s nekim racionalnim eksponentom).
Funkcija $f(x) = \sqrt{x}$ definirana je na skupu nenegativnih realnih brojeva, $R^+ \cup \{0\}$. To znači da

negativni realni brojevi ne mogu biti rješenja iracionalne jednadžbe $\sqrt{x} = a.$ To vrijedi za sve korijene parnog eksponenta.
Skup zadajemo nabrajanjem njegovih elemenata ili opisom karakterističnih svojstava koja posjeduju njegovi elementi. Presjek skupova A i B je skup koji sadrži sve elemente koji se nalaze i u skupu A i u skupu B. Označavamo ga: $A \cap B$.
Za realni broj x njegova je apsolutna vrijednost (modul) broj $|x|$ koji određujemo na ovaj način:

$$|x| = \begin{cases} x, & x \geq 0 \\ -x, & x < 0. \end{cases}$$

Ako je broj x pozitivan ili nula, tada je on jednak svojoj apsolutnoj vrijednosti. Za svaki x, $x \geq 0$, vrijedi $|x| = x$.
Ako je x negativan broj, njegova apsolutna vrijednost je suprotan broj – x koji je pozitivan. Za svaki x, $x < 0$, je $|x| = -x$.
Zakon distribucije množenja prema zbrajanju.

$$a \cdot (b+c) = a \cdot b + a \cdot c \quad , \quad a \cdot b + a \cdot c = a \cdot (b+c).$$

Skratiti razlomak znači brojnik i nazivnik tog razlomka podijeliti istim brojem različitim od nule i jedinice

$$\frac{a \cdot n}{b \cdot n} = \frac{a}{b} \; , \; n \neq 0 \; , \; n \neq 1.$$

Najprije odredimo koeficijente a, b i c kvadratne jednadžbe.

$$x^2 + 6 \cdot x + q = 0 \Rightarrow \left.\begin{matrix} x^2 + 6 \cdot x + q = 0 \\ a = 1 \; , \; b = 6 \; , \; c = q \end{matrix}\right\}.$$

Budući da kvadratna jednadžba mora imati realna i različita rješenja koja zadovoljavaju zadani uvjet, možemo napisati sustav jednadžba:

$$\left.\begin{matrix} D > 0 \\ |x_1 - x_2| > 4 \end{matrix}\right\} \Rightarrow \left.\begin{matrix} b^2 - 4 \cdot a \cdot c > 0 \\ \left| \frac{-b + \sqrt{D}}{2 \cdot a} - \frac{-b - \sqrt{D}}{2 \cdot a} \right| > 4 \end{matrix}\right\} \Rightarrow \left.\begin{matrix} b^2 - 4 \cdot a \cdot c > 0 \\ \left| \frac{-b + \sqrt{D} - \left(-b - \sqrt{D}\right)}{2 \cdot a} \right| > 4 \end{matrix}\right\} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \left.\begin{matrix} b^2 - 4 \cdot a \cdot c > 0 \\ \left| \frac{-b + \sqrt{D} + b + \sqrt{D}}{2 \cdot a} \right| > 4 \end{matrix}\right\} \Rightarrow \left.\begin{matrix} b^2 - 4 \cdot a \cdot c > 0 \\ \left| \frac{-b + \sqrt{D} + b + \sqrt{D}}{2 \cdot a} \right| > 4 \end{matrix}\right\} \Rightarrow \left.\begin{matrix} b^2 - 4 \cdot a \cdot c > 0 \\ \left| \frac{2 \cdot \sqrt{D}}{2 \cdot a} \right| > 4 \end{matrix}\right\} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \left.\begin{matrix} b^2 - 4 \cdot a \cdot c > 0 \\ \left| \frac{2 \cdot \sqrt{D}}{2 \cdot a} \right| > 4 \end{matrix}\right\} \Rightarrow \left.\begin{matrix} b^2 - 4 \cdot a \cdot c > 0 \\ \left| \frac{\sqrt{D}}{a} \right| > 4 \end{matrix}\right\} \Rightarrow \left.\begin{matrix} b^2 - 4 \cdot a \cdot c > 0 \\ \left| \frac{\sqrt{b^2 - 4 \cdot a \cdot c}}{a} \right| > 4 \end{matrix}\right\} \Rightarrow \left.\begin{matrix} 6^2 - 4 \cdot 1 \cdot q > 0 \\ \left| \frac{\sqrt{6^2 - 4 \cdot 1 \cdot q}}{1} \right| > 4 \end{matrix}\right\} \Rightarrow$$

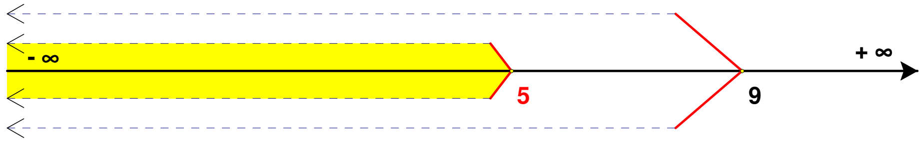
$$\Rightarrow \left.\begin{matrix} 36 - 4 \cdot q > 0 \\ \left| \sqrt{36 - 4 \cdot q} \right| > 4 \end{matrix}\right\} \Rightarrow \left.\begin{matrix} 36 - 4 \cdot q > 0 \; /: 4 \\ \sqrt{36 - 4 \cdot q} > 4 \end{matrix}\right\} \Rightarrow \left.\begin{matrix} 9 - q > 0 \\ \sqrt{4 \cdot (9 - q)} > 4 \end{matrix}\right\} \Rightarrow \left.\begin{matrix} -q > -9 \; / \cdot (-1) \\ 2 \cdot \sqrt{9 - q} > 4 \end{matrix}\right\} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \left.\begin{matrix} q < 9 \\ 2 \cdot \sqrt{9 - q} > 4 \; /: 2 \end{matrix}\right\} \Rightarrow \left.\begin{matrix} q < 9 \\ \sqrt{9 - q} > 2 \end{matrix}\right\} \Rightarrow \left.\begin{matrix} q < 9 \\ \sqrt{9 - q} > 2 \; /^2 \end{matrix}\right\} \Rightarrow \left.\begin{matrix} q < 9 \\ \left(\sqrt{9 - q}\right)^2 > 2^2 \end{matrix}\right\} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \left.\begin{matrix} q<9 \\ 9-q>4 \end{matrix}\right\} \Rightarrow \left.\begin{matrix} q<9 \\ -q>4-9 \end{matrix}\right\} \Rightarrow \left.\begin{matrix} q<9 \\ -q>-5 \end{matrix}\right\} \Rightarrow \left.\begin{matrix} q<9 \\ -q>-5 \ / \cdot (-1) \end{matrix}\right\} \Rightarrow \left.\begin{matrix} q<9 \\ q<5 \end{matrix}\right\} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{bmatrix} \text{presjek} \\ \text{skupova} \end{bmatrix} \Rightarrow q<5 \Rightarrow q \in \langle -\infty, 5 \rangle.$$

Odgovor je pod C.



Vježba 202

Skup svih vrijednosti q, za koje je razmak korijena jednadžbe $x^2+6\cdot x+q=0$ veći od 2, je:

$A. \langle 0, 8 \rangle \qquad B. \langle 8, 9 \rangle \qquad C. \langle -\infty, 8 \rangle \qquad D. \langle 8, +\infty \rangle$

Rezultat: C.

Zadatak 203 (Josip, gimnazija)

Kvadratna jednadžba $x^{-2}-x^{-1}+c=0$ nema realnih rješenja ako je

$A.\ c>-1 \qquad B.\ c>\frac{1}{4} \qquad C.\ c<-1 \qquad D.\ c<\frac{1}{4}$

Rješenje 203

Ponovimo!

$$a^1=a \quad , \quad a^{-n}=\frac{1}{a^n} \quad , \quad a<b\ ,\ c<0 \Rightarrow \frac{a}{c}>\frac{b}{c} \quad , \quad \left(a^n\right)^m=a^{n\cdot m}.$$

$$a^n : a^m = a^{n-m}.$$

Jednadžba oblika

$$a\cdot x^2+b\cdot x+c=0,$$

($a \neq 0$, b i c su realni brojevi) naziva se kvadratna jednadžba. Svaki broj x (realan ili kompleksan) koji zadovoljava tu jednadžbu naziva se rješenje kvadratne jednadžbe.
Diskriminanta kvadratne jednadžbe

$$a\cdot x^2+b\cdot x+c=0$$

je broj

$$D=b^2-4\cdot a\cdot c.$$

- Ako je D > 0, jednadžba ima dva realna rješenja.
- Ako je D = 0, jednadžba ima jedno dvostruko realno rješenje.
- Ako je D < 0, jednadžba ima kompleksno – konjugirana rješenja.

1.inačica

$$x^{-2}-x^{-1}+c=0 \Rightarrow \frac{1}{x^2}-\frac{1}{x}+c=0 \Rightarrow \begin{bmatrix} \text{uvjet} \\ x \neq 0 \end{bmatrix} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \frac{1}{x^2}-\frac{1}{x}+c=0 \ / \cdot x^2 \Rightarrow 1-x+c\cdot x^2=0 \Rightarrow c\cdot x^2-x+1=0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \left.\begin{matrix} c\cdot x^2-x+1=0 \\ a=c \ , \ b=-1 \ , \ c=1 \end{matrix}\right\} \Rightarrow \left[D=b^2-4\cdot a\cdot c \right] \Rightarrow D=(-1)^2-4\cdot c\cdot 1 \Rightarrow D=1-4\cdot c.$$

Uvjet je da kvadratna jednadžba nema realnih rješenja.

$$D<0 \Rightarrow 1-4\cdot c<0 \Rightarrow -4\cdot c<-1 \Rightarrow -4\cdot c<-1 \;/:(-4) \Rightarrow c>\frac{1}{4}.$$

Odgovor je pod B.

2.inačica

$$x^{-2}-x^{-1}+c=0 \Rightarrow \left[\begin{array}{c}\text{zamjena}\\ t=x^{-1}\;,\;t^2=x^{-2}\end{array}\right] \Rightarrow t^2-t+c=0 \Rightarrow \left.\begin{array}{l}t^2-t+c=0\\ a=1\;,\;b=-1\;,\;c=c\end{array}\right\} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \left[D=b^2-4\cdot a\cdot c\right] \Rightarrow D=(-1)^2-4\cdot 1\cdot c \Rightarrow D=1-4\cdot c.$$

Uvjet je da kvadratna jednadžba nema realnih rješenja.

$$D<0 \Rightarrow 1-4\cdot c<0 \Rightarrow -4\cdot c<-1 \Rightarrow -4\cdot c<-1 \;/:(-4) \Rightarrow c>\frac{1}{4}.$$

Odgovor je pod B.

Vježba 203

Kvadratna jednadžba $x^{-2}-x^{-1}+c=0$ ima realna rješenja ako je

$$A.\; c\ge -1 \qquad B.\; c>\frac{1}{4} \qquad C.\; c\le -1 \qquad D.\; c\le \frac{1}{4}$$

Rezultat: D.

Zadatak 204 (Darko, gimnazija)

Uz koji uvjet kvadratna jednadžba $x^2-2\cdot a\cdot x+a^2-b^2-c^2=0$ ima dvostruko rješenje?

Rješenje 204

Ponovimo!

$$(a\cdot b)^n=a^n\cdot b^n \quad , \quad a^2+b^2=0 \Rightarrow a=b=0.$$

Zakon distribucije množenja prema zbrajanju.

$$a\cdot(b+c)=a\cdot b+a\cdot c \quad , \quad a\cdot b+a\cdot c=a\cdot(b+c).$$

Jednadžba oblika

$$a\cdot x^2+b\cdot x+c=0,$$

($a \ne 0$, b i c su realni brojevi) naziva se kvadratna jednadžba. Svaki broj x (realan ili kompleksan) koji zadovoljava tu jednadžbu naziva se rješenje kvadratne jednadžbe.
Diskriminanta kvadratne jednadžbe

$$a\cdot x^2+b\cdot x+c=0$$

je broj

$$D=b^2-4\cdot a\cdot c.$$

- Ako je D > 0, jednadžba ima dva realna rješenja.
- Ako je D = 0, jednadžba ima jedno dvostruko realno rješenje.
- Ako je D < 0, jednadžba ima kompleksno – konjugirana rješenja.

Da bi umnožak bio jednak nuli, dovoljno je da jedan faktor bude jednak nuli.

$$a\cdot b=0 \Leftrightarrow a=0 \text{ ili } b=0 \text{ ili } a=b=0.$$

$$x^2-2\cdot a\cdot x+a^2-b^2-c^2=0 \Rightarrow \left.\begin{array}{l}x^2-2\cdot a\cdot x+a^2-b^2-c^2=0\\ a=1\;,\;b=-2\cdot a\;,\;c=a^2-b^2-c^2\end{array}\right\} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \left[D=0 \Rightarrow b^2-4\cdot a\cdot c=0\right] \Rightarrow (-2\cdot a)^2-4\cdot 1\cdot\left(a^2-b^2-c^2\right)=0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \ 4\cdot a^2-4\cdot a^2+4\cdot b^2+4\cdot c^2=0 \ \Rightarrow \ 4\cdot a^2-4\cdot a^2+4\cdot b^2+4\cdot c^2=0 \ \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \ 4\cdot b^2+4\cdot c^2=0 \ \Rightarrow \ 4\cdot\left(b^2+c^2\right)=0 \ \Rightarrow \ b^2+c^2=0 \ \Rightarrow \ b=c=0.$$

Vježba 204

Uz koji uvjet kvadratna jednadžba $x^2-2\cdot x+1-b^2-c^2=0$ ima dvostruko rješenje?

Rezultat: $b=c=0.$

Zadatak 205 (Jozo, srednja škola)

Napiši kvadratnu jednadžbu čija su rješenja $x_1=m+\sqrt{n},\ x_2=m-\sqrt{n},\ n>0.$

Rješenje 205

Ponovimo!

$$\left(\sqrt{a}\right)^2=a \quad , \quad (a-b)\cdot(a+b)=a^2-b^2 \quad , \quad (a-b)^2=a^2-2\cdot a\cdot b+b^2.$$

Zakon distribucije množenja prema zbrajanju.

$$a\cdot(b+c)=a\cdot b+a\cdot c \quad , \quad a\cdot b+a\cdot c=a\cdot(b+c).$$

Jednadžba oblika

$$a\cdot x^2+b\cdot x+c=0,$$

($a\neq 0$, b i c su realni brojevi) naziva se kvadratna jednadžba. Svaki broj x (realan ili kompleksan) koji zadovoljava tu jednadžbu naziva se rješenje kvadratne jednadžbe.
Kvadratna jednadžba sa rješenjima x_1 i x_2 glasi

$$a\cdot\left(x-x_1\right)\cdot\left(x-x_2\right)=0,$$

gdje je $a\neq 0$ po volji određen broj.
Rješenja x_1 i x_2 kvadratne jednadžbe

$$a\cdot x^2+b\cdot x+c=0$$

zadovoljavaju Vièteove formule:

$$x_1+x_2=-\frac{b}{a} \quad , \quad x_1\cdot x_2=\frac{c}{a}.$$

Ako vrijedi

$$x_1+x_2=b \quad , \quad x_1\cdot x_2=c,$$

onda su x_1 i x_2 rješenja kvadratne jednadžbe

$$x^2-b\cdot x+c=0.$$

1.inačica

Znajući rješenja, znamo i faktorizaciju kvadratnog trinoma:

$$a\cdot\left(x-x_1\right)\cdot\left(x-x_2\right)=\left[\begin{array}{l} x_1=m+\sqrt{n} \\ x_2=m-\sqrt{n}\end{array}\right]=a\cdot\left(x-\left(m+\sqrt{n}\right)\right)\cdot\left(x-\left(m-\sqrt{n}\right)\right)=$$

$$=a\cdot\left(x-m-\sqrt{n}\right)\cdot\left(x-m+\sqrt{n}\right)=a\cdot\left((x-m)-\sqrt{n}\right)\cdot\left((x-m)+\sqrt{n}\right)=$$

$$=a\cdot\left((x-m)^2-\left(\sqrt{n}\right)^2\right)=a\cdot\left(x^2-2\cdot m\cdot x+m^2-n\right).$$

Ovdje koeficijent a može biti bilo kakav (osim nule). Uzmimo da je a = 1. Tražena kvadratna jednadžba glasi:

$$x^2 - 2 \cdot m \cdot x + m^2 - n = 0.$$

2.inačica

$$\left.\begin{array}{l} x_1 = m + \sqrt{n} \\ x_2 = m - \sqrt{n} \end{array}\right\} \Rightarrow \left[\begin{array}{l} x_1 + x_2 = b \\ x_1 \cdot x_2 = c \end{array}\right] \Rightarrow \left.\begin{array}{l} m + \sqrt{n} + m - \sqrt{n} = b \\ \left(m + \sqrt{n}\right) \cdot \left(m - \sqrt{n}\right) = c \end{array}\right\} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \left.\begin{array}{l} m + \sqrt{n} + m - \sqrt{n} = b \\ m^2 - \left(\sqrt{n}\right)^2 = c \end{array}\right\} \Rightarrow \left.\begin{array}{l} m + m = b \\ m^2 - n = c \end{array}\right\} \Rightarrow \left.\begin{array}{l} 2 \cdot m = b \\ m^2 - n = c \end{array}\right\} \Rightarrow \left.\begin{array}{l} b = 2 \cdot m \\ c = m^2 - n \end{array}\right\}.$$

Kvadratna jednadžba glasi:

$$x^2 - b \cdot x + c = 0 \Rightarrow x^2 - 2 \cdot m \cdot x + m^2 - n = 0.$$

Vježba 205

Napiši kvadratnu jednadžbu čija su rješenja $x_1 = 1 + \sqrt{2}$, $x_2 = 1 - \sqrt{2}$.

Rezultat: $x^2 - 2 \cdot x - 1 = 0.$

Zadatak 206 (Lucija, gimnazija)

Napiši kvadratnu jednadžbu čija su rješenja $x_1 = \frac{1}{3 + \sqrt{5}}$, $x_2 = \frac{1}{3 - \sqrt{5}}$.

Rješenje 206

Ponovimo!

$$\left(\sqrt{a}\right)^2 = a \quad , \quad (a - b) \cdot (a + b) = a^2 - b^2 \quad , \quad (a - b)^2 = a^2 - 2 \cdot a \cdot b + b^2.$$

$$\left(\frac{a}{b}\right)^n = \frac{a^n}{b^n} \quad , \quad \frac{a}{b} \cdot \frac{c}{d} = \frac{a \cdot c}{b \cdot d} \quad , \quad \frac{a - b}{n} = \frac{a}{n} - \frac{b}{n} \quad , \quad \frac{a + b}{n} = \frac{a}{n} + \frac{b}{n}.$$

Zakon distribucije množenja prema zbrajanju.

$$a \cdot (b + c) = a \cdot b + a \cdot c \quad , \quad a \cdot b + a \cdot c = a \cdot (b + c).$$

Proširiti razlomak znači brojnik i nazivnik tog razlomka pomnožiti istim brojem različitim od nule i jedinice

$$\frac{a}{b} = \frac{a \cdot n}{b \cdot n} \; , \; n \neq 0 \; , \; n \neq 1.$$

Skratiti razlomak znači brojnik i nazivnik tog razlomka podijeliti istim brojem različitim od nule i jedinice

$$\frac{a \cdot n}{b \cdot n} = \frac{a}{b} \; , \; n \neq 0 \; , \; n \neq 1.$$

Jednadžba oblika

$$a \cdot x^2 + b \cdot x + c = 0,$$

($a \neq 0$, b i c su realni brojevi) naziva se kvadratna jednadžba. Svaki broj x (realan ili kompleksan) koji zadovoljava tu jednadžbu naziva se rješenje kvadratne jednadžbe.
Kvadratna jednadžba sa rješenjima x_1 i x_2 glasi

$$a \cdot \left(x - x_1\right) \cdot \left(x - x_2\right) = 0,$$

gdje je $a \neq 0$ po volji određen broj.
Rješenja x_1 i x_2 kvadratne jednadžbe

$$a \cdot x^2 + b \cdot x + c = 0$$

zadovoljavaju Vièteove formule:

$$x_1 + x_2 = -\frac{b}{a} \quad , \quad x_1 \cdot x_2 = \frac{c}{a}.$$

Ako vrijedi

$$x_1 + x_2 = b \quad , \quad x_1 \cdot x_2 = c,$$

onda su x_1 i x_2 rješenja kvadratne jednadžbe

$$x^2 - b \cdot x + c = 0.$$

Preoblikujemo rješenja x_1 i x_2 tako da racionaliziramo nazivnike.

$$\left.\begin{aligned} x_1 &= \frac{1}{3+\sqrt{5}} \\ x_2 &= \frac{1}{3-\sqrt{5}} \end{aligned}\right\} \Rightarrow \left[\begin{array}{l} \text{racionalizacija} \\ \text{nazivnika} \end{array}\right] \Rightarrow \left.\begin{aligned} x_1 &= \frac{1}{3+\sqrt{5}} \cdot \frac{3-\sqrt{5}}{3-\sqrt{5}} \\ x_2 &= \frac{1}{3-\sqrt{5}} \cdot \frac{3+\sqrt{5}}{3+\sqrt{5}} \end{aligned}\right\} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \left.\begin{aligned} x_1 &= \frac{3-\sqrt{5}}{\left(3+\sqrt{5}\right)\cdot\left(3-\sqrt{5}\right)} \\ x_2 &= \frac{3+\sqrt{5}}{\left(3-\sqrt{5}\right)\cdot\left(3+\sqrt{5}\right)} \end{aligned}\right\} \Rightarrow \left.\begin{aligned} x_1 &= \frac{3-\sqrt{5}}{3^2-\left(\sqrt{5}\right)^2} \\ x_2 &= \frac{3+\sqrt{5}}{3^2-\left(\sqrt{5}\right)^2} \end{aligned}\right\} \Rightarrow \left.\begin{aligned} x_1 &= \frac{3-\sqrt{5}}{9-5} \\ x_2 &= \frac{3+\sqrt{5}}{9-5} \end{aligned}\right\} \Rightarrow \left.\begin{aligned} x_1 &= \frac{3-\sqrt{5}}{4} \\ x_2 &= \frac{3+\sqrt{5}}{4} \end{aligned}\right\} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \left.\begin{aligned} x_1 &= \frac{3}{4} - \frac{\sqrt{5}}{4} \\ x_2 &= \frac{3}{4} + \frac{\sqrt{5}}{4} \end{aligned}\right\}.$$

1.inačica

Znajući rješenja, znamo i faktorizaciju kvadratnog trinoma:

$$a \cdot \left(x - x_1\right) \cdot \left(x - x_2\right) = \left[\begin{array}{l} x_1 = \frac{3}{4} - \frac{\sqrt{5}}{4} \\ x_2 = \frac{3}{4} + \frac{\sqrt{5}}{4} \end{array}\right] = a \cdot \left(x - \left(\frac{3}{4} - \frac{\sqrt{5}}{4}\right)\right) \cdot \left(x - \left(\frac{3}{4} + \frac{\sqrt{5}}{4}\right)\right) =$$

$$= a \cdot \left(x - \frac{3}{4} + \frac{\sqrt{5}}{4}\right) \cdot \left(x - \frac{3}{4} - \frac{\sqrt{5}}{4}\right) = a \cdot \left(\left(x - \frac{3}{4}\right) + \frac{\sqrt{5}}{4}\right) \cdot \left(\left(x - \frac{3}{4}\right) - \frac{\sqrt{5}}{4}\right) =$$

$$= a \cdot \left(\left(x - \frac{3}{4}\right)^2 - \left(\frac{\sqrt{5}}{4}\right)^2\right) = a \cdot \left(x^2 - 2 \cdot x \cdot \frac{3}{4} + \left(\frac{3}{4}\right)^2 - \frac{\left(\sqrt{5}\right)^2}{4^2}\right) =$$

$$= a \cdot \left(x^2 - 2 \cdot x \cdot \frac{3}{4} + \frac{9}{16} - \frac{5}{16}\right) = a \cdot \left(x^2 - x \cdot \frac{3}{2} + \frac{9-5}{16}\right) = a \cdot \left(x^2 - \frac{3}{2} \cdot x + \frac{4}{16}\right) =$$

$$= a \cdot \left(x^2 - \frac{3}{2} \cdot x + \frac{4}{16}\right) = a \cdot \left(x^2 - \frac{3}{2} \cdot x + \frac{1}{4}\right).$$

Ovdje koeficijent a može biti bilo kakav (osim nule). Uzmimo da je a = 4. Tražena kvadratna jednadžba glasi:

$$4\cdot\left(x^2-\frac{3}{2}\cdot x+\frac{1}{4}\right)=0 \Rightarrow 4\cdot x^2-4\cdot\frac{3}{2}\cdot x+4\cdot\frac{1}{4}=0 \Rightarrow 4\cdot x^2-4\cdot\frac{3}{2}\cdot x+4\cdot\frac{1}{4}=0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 4\cdot x^2-6\cdot x+1=0.$$

2.inačica

$$\left.\begin{array}{l} x_1=\frac{3}{4}-\frac{\sqrt{5}}{4} \\ x_2=\frac{3}{4}+\frac{\sqrt{5}}{4}\end{array}\right\} \Rightarrow \left[\begin{array}{l} x_1+x_2=b \\ x_1\cdot x_2=c\end{array}\right] \Rightarrow \left.\begin{array}{l} \frac{3}{4}-\frac{\sqrt{5}}{4}+\frac{3}{4}+\frac{\sqrt{5}}{4}=b \\ \left(\frac{3}{4}-\frac{\sqrt{5}}{4}\right)\cdot\left(\frac{3}{4}+\frac{\sqrt{5}}{4}\right)=c\end{array}\right\} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \left.\begin{array}{l} \frac{3}{4}-\frac{\sqrt{5}}{4}+\frac{3}{4}+\frac{\sqrt{5}}{4}=b \\ \left(\frac{3}{4}\right)^2-\left(\frac{\sqrt{5}}{4}\right)^2=c\end{array}\right\} \Rightarrow \left.\begin{array}{l} \frac{3}{4}+\frac{3}{4}=b \\ \frac{9}{16}-\frac{\left(\sqrt{5}\right)^2}{4^2}=c\end{array}\right\} \Rightarrow \left.\begin{array}{l} \frac{6}{4}=b \\ \frac{9}{16}-\frac{5}{16}=c\end{array}\right\} \Rightarrow \left.\begin{array}{l} \frac{6}{4}=b \\ \frac{9-5}{16}=c\end{array}\right\} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \left.\begin{array}{l} \frac{3}{2}=b \\ \frac{4}{16}=c\end{array}\right\} \Rightarrow \left.\begin{array}{l} \frac{3}{2}=b \\ \frac{4}{16}=c\end{array}\right\} \Rightarrow \left.\begin{array}{l} \frac{3}{2}=b \\ \frac{1}{4}=c\end{array}\right\}.$$

Kvadratna jednadžba glasi:

$$x^2-\frac{3}{2}\cdot x+\frac{1}{4}=0 \Rightarrow x^2-\frac{3}{2}\cdot x+\frac{1}{4}=0 \ /\cdot 4 \Rightarrow 4\cdot x^2-6\cdot x+1=0.$$

Vježba 206

Napiši kvadratnu jednadžbu čija su rješenja $x_1=\frac{1}{3-\sqrt{5}}$, $x_2=\frac{1}{3+\sqrt{5}}$.

Rezultat: $4\cdot x^2-6\cdot x+1=0.$

Zadatak 207 (Tonka, gimnazija)

Riješite jednadžbu trećeg stupnja $k\cdot x^3-3\cdot x^2-k\cdot x+3=0$ za realan broj k, $k\neq 0$.

Rješenje 207

Ponovimo!

$$a^1=a \quad , \quad a^n:a^m=a^{n-m} \quad , \quad a^2-b^2=(a-b)\cdot(a+b).$$

Zakon distribucije množenja prema zbrajanju.

$$a\cdot(b+c)=a\cdot b+a\cdot c \quad , \quad a\cdot b+a\cdot c=a\cdot(b+c).$$

Da bi umnožak bio jednak nuli, dovoljno je da jedan faktor bude jednak nuli.

$$a\cdot b=0 \Leftrightarrow a=0 \text{ ili } b=0 \text{ ili } a=b=0.$$

$$k\cdot x^3-3\cdot x^2-k\cdot x+3=0 \Rightarrow \left[\begin{array}{c}\text{metoda}\\ \text{grupirana}\end{array}\right] \Rightarrow \left(k\cdot x^3-3\cdot x^2\right)+\left(-k\cdot x+3\right)=0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow x^2\cdot(k\cdot x-3)-(k\cdot x-3)=0 \Rightarrow (k\cdot x-3)\cdot\left(x^2-1\right)=0 \Rightarrow (k\cdot x-3)\cdot(x-1)\cdot(x+1)=0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \left.\begin{array}{l} k\cdot x-3=0 \\ x-1=0 \\ x+1=0 \end{array}\right\} \Rightarrow \left.\begin{array}{l} k\cdot x=3 \\ x=1 \\ x=-1 \end{array}\right\} \Rightarrow \left.\begin{array}{l} k\cdot x=3 \; /:k \\ x=1 \\ x=-1 \end{array}\right\} \Rightarrow \left.\begin{array}{l} x_1=\frac{3}{k} \\ x_2=1 \\ x_3=-1 \end{array}\right\}.$$

Vježba 207

Riješite jednadžbu trećeg stupnja $x^3-3\cdot x^2-x+3=0$ za realan broj k, $k\neq 0$.

Rezultat: 3, 1, – 1.

Zadatak 208 (Luka, gimnazija)

Odredite sva rješenja kvadratne jednadžbe $4\cdot x^2+p\cdot x+65=0,\; p\in R$ uz uvjet da je razlika rješenja te jednadžbe jednaka 4.

Rješenje 208

Ponovimo!

$$(a-b)^2=a^2-2\cdot a\cdot b+b^2 \quad , \quad \left(\frac{a}{b}\right)^n=\frac{a^n}{b^n} \quad , \quad (a-b)^2=(a+b)^2-4\cdot a\cdot b.$$

$$\frac{a}{b}\cdot\frac{c}{d}=\frac{a\cdot c}{b\cdot d} \quad , \quad a^n\cdot b^n=(a\cdot b)^n.$$

Rješenja x_1 i x_2 kvadratne jednadžbe

$$a\cdot x^2+b\cdot x+c=0$$

zadovoljavaju Vièteove formule:

$$x_1+x_2=-\frac{b}{a}, \quad x_1\cdot x_2=\frac{c}{a}.$$

Zakon distribucije množenja prema zbrajanju.

$$a\cdot(b+c)=a\cdot b+a\cdot c \quad , \quad a\cdot b+a\cdot c=a\cdot(b+c).$$

Skratiti razlomak znači brojnik i nazivnik tog razlomka podijeliti istim brojem različitim od nule i jedinice

$$\frac{a\cdot n}{b\cdot n}=\frac{a}{b} \; , \; n\neq 0 \; , \; n\neq 1.$$

1.inačica

Neka su x_1 i x_2 rješenja zadane kvadratne jednadžbe čija je razlika jednaka 4. Uz taj uvjet i Vièteovu formulu izračunamo, na primjer, x_1.
Najprije odredimo koeficijente a, b i c.

$$\left.\begin{array}{l} a\cdot x^2+b\cdot x+c=0 \\ 4\cdot x^2+p\cdot x+65=0 \end{array}\right\} \Rightarrow \left.\begin{array}{l} a=4 \\ b=p \\ c=65 \end{array}\right\}.$$

Sada je:

$$\left.\begin{array}{l} x_1-x_2=4 \\ x_1+x_2=-\frac{b}{a} \end{array}\right\} \Rightarrow \left.\begin{array}{l} x_1-x_2=4 \\ x_1+x_2=-\frac{p}{4} \end{array}\right\} \Rightarrow \left[\begin{array}{l} \text{metoda suprotnih} \\ \text{koeficijenata} \end{array}\right] \Rightarrow 2\cdot x_1=4-\frac{p}{4} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 2\cdot x_1=4-\frac{p}{4} \; /\cdot\frac{1}{2} \Rightarrow x_1=2-\frac{p}{8}.$$

Dobili smo jedno rješenje jednadžbe. Uvrstimo ga u nju kako bismo izračunali p.

$$\left.\begin{array}{l} x=2-\frac{p}{8} \\ 4\cdot x^2+p\cdot x+65=0 \end{array}\right\} \Rightarrow 4\cdot\left(2-\frac{p}{8}\right)^2+p\cdot\left(2-\frac{p}{8}\right)+65=0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 4\cdot\left(4-\frac{p}{2}+\frac{p^2}{64}\right)+2\cdot p-\frac{p^2}{8}+65=0 \Rightarrow 16-2\cdot p+\frac{p^2}{16}+2\cdot p-\frac{p^2}{8}+65=0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 16-2\cdot p+\frac{p^2}{16}+2\cdot p-\frac{p^2}{8}+65=0 \Rightarrow 16+\frac{p^2}{16}-\frac{p^2}{8}+65=0 \Rightarrow \frac{p^2}{16}-\frac{p^2}{8}+81=0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \frac{p^2}{16}-\frac{p^2}{8}+81=0 \ /\cdot 16 \Rightarrow p^2-2\cdot p^2+1296=0 \Rightarrow -p^2+1296=0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow -p^2=-1296 \Rightarrow -p^2=-1296 \ /\cdot(-1) \Rightarrow p^2=1296 \Rightarrow p^2=1296 \ /\sqrt{\ } \Rightarrow$$

$$\Rightarrow p_{1,2}=\pm\sqrt{1296} \Rightarrow \left.\begin{array}{l} p_1=-36 \\ p_2=36 \end{array}\right\}.$$

- Za p = – 36 dobiju se rješenja:

$$\left.\begin{array}{l} p=-36 \\ 4\cdot x^2+p\cdot x+65=0 \end{array}\right\} \Rightarrow 4\cdot x^2-36\cdot x+65=0 \Rightarrow \left.\begin{array}{l} 4\cdot x^2-36\cdot x+65=0 \\ a=4 \ , \ b=-36 \ , \ c=65 \end{array}\right\} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \left[x_{1,2}=\frac{-b\pm\sqrt{b^2-4\cdot a\cdot c}}{2\cdot a}\right] \Rightarrow x_{1,2}=\frac{-(-36)\pm\sqrt{(-36)^2-4\cdot 4\cdot 65}}{2\cdot 4} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow x_{1,2}=\frac{36\pm\sqrt{1296-1040}}{8} \Rightarrow x_{1,2}=\frac{36\pm\sqrt{256}}{8} \Rightarrow x_{1,2}=\frac{36\pm 16}{8} \Rightarrow \left.\begin{array}{l} x_1=\frac{36+16}{8} \\ x_2=\frac{36-16}{8} \end{array}\right\} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \left.\begin{array}{l} x_1=\frac{52}{8} \\ x_2=\frac{20}{8} \end{array}\right\} \Rightarrow \left.\begin{array}{l} x_1=\frac{52}{8} \\ x_2=\frac{20}{8} \end{array}\right\} \Rightarrow \left.\begin{array}{l} x_1=\frac{13}{2} \\ x_2=\frac{5}{2} \end{array}\right\}.$$

- Za p = 36 dobiju se rješenja:

$$\left.\begin{array}{l} p=36 \\ 4\cdot x^2+p\cdot x+65=0 \end{array}\right\} \Rightarrow 4\cdot x^2+36\cdot x+65=0 \Rightarrow \left.\begin{array}{l} 4\cdot x^2+36\cdot x+65=0 \\ a=4 \ , \ b=36 \ , \ c=65 \end{array}\right\} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \left[x_{3,4}=\frac{-b\pm\sqrt{b^2-4\cdot a\cdot c}}{2\cdot a}\right] \Rightarrow x_{3,4}=\frac{-36\pm\sqrt{36^2-4\cdot 4\cdot 65}}{2\cdot 4} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow x_{3,4}=\frac{-36\pm\sqrt{1296-1040}}{8} \Rightarrow x_{3,4}=\frac{-36\pm\sqrt{256}}{8} \Rightarrow x_{3,4}=\frac{-36\pm 16}{8} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \left.\begin{array}{l} x_3 = \dfrac{-36+16}{8} \\ x_4 = \dfrac{-36-16}{8} \end{array}\right\} \Rightarrow \left.\begin{array}{l} x_3 = \dfrac{-20}{8} \\ x_4 = \dfrac{-52}{8} \end{array}\right\} \Rightarrow \left.\begin{array}{l} x_3 = \dfrac{-20}{8} \\ x_4 = \dfrac{-52}{8} \end{array}\right\} \Rightarrow \left.\begin{array}{l} x_3 = -\dfrac{5}{2} \\ x_4 = -\dfrac{13}{2} \end{array}\right\}.$$

2.inačica

Pomoću identiteta dobije se:

$$(x_1 - x_2)^2 = (x_1 + x_2)^2 - 4 \cdot x_1 \cdot x_2 \Rightarrow (x_1 - x_2)^2 = \left(-\frac{b}{a}\right)^2 - 4 \cdot \frac{c}{a} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \left[\begin{array}{l} x_1 - x_2 = 4 \\ b = p \;\;,\;\; a = 4 \;,\;\; c = 65 \end{array}\right] \Rightarrow 4^2 = \left(-\frac{p}{4}\right)^2 - 4 \cdot \frac{65}{4} \Rightarrow 16 = \frac{p^2}{16} - 4 \cdot \frac{65}{4} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 16 = \frac{p^2}{16} - 65 \Rightarrow \frac{p^2}{16} - 65 = 16 \Rightarrow \frac{p^2}{16} = 16 + 65 \Rightarrow \frac{p^2}{16} = 81 \Rightarrow \frac{p^2}{16} = 81 \;/\cdot 16 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow p^2 = 81 \cdot 16 \Rightarrow p^2 = 9^2 \cdot 4^2 \Rightarrow p^2 = (9 \cdot 4)^2 \Rightarrow p^2 = 36^2 \Rightarrow p^2 = 36^2 \;/\sqrt{\;} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow p_{1,2} = \pm 36 \Rightarrow \left.\begin{array}{l} p_1 = -36 \\ p_2 = 36 \end{array}\right\}.$$

- Za p = – 36 dobiju se rješenja:

$$\left.\begin{array}{l} p = -36 \\ 4 \cdot x^2 + p \cdot x + 65 = 0 \end{array}\right\} \Rightarrow 4 \cdot x^2 - 36 \cdot x + 65 = 0 \Rightarrow \left.\begin{array}{l} 4 \cdot x^2 - 36 \cdot x + 65 = 0 \\ a = 4 \;\;,\;\; b = -36 \;\;,\;\; c = 65 \end{array}\right\} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \left[x_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4 \cdot a \cdot c}}{2 \cdot a} \right] \Rightarrow x_{1,2} = \frac{-(-36) \pm \sqrt{(-36)^2 - 4 \cdot 4 \cdot 65}}{2 \cdot 4} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow x_{1,2} = \frac{36 \pm \sqrt{1296 - 1040}}{8} \Rightarrow x_{1,2} = \frac{36 \pm \sqrt{256}}{8} \Rightarrow x_{1,2} = \frac{36 \pm 16}{8} \Rightarrow \left.\begin{array}{l} x_1 = \dfrac{36+16}{8} \\ x_2 = \dfrac{36-16}{8} \end{array}\right\} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \left.\begin{array}{l} x_1 = \dfrac{52}{8} \\ x_2 = \dfrac{20}{8} \end{array}\right\} \Rightarrow \left.\begin{array}{l} x_1 = \dfrac{52}{8} \\ x_2 = \dfrac{20}{8} \end{array}\right\} \Rightarrow \left.\begin{array}{l} x_1 = \dfrac{13}{2} \\ x_2 = \dfrac{5}{2} \end{array}\right\}.$$

- Za p = 36 dobiju se rješenja:

$$\left.\begin{array}{l} p = 36 \\ 4 \cdot x^2 + p \cdot x + 65 = 0 \end{array}\right\} \Rightarrow 4 \cdot x^2 + 36 \cdot x + 65 = 0 \Rightarrow \left.\begin{array}{l} 4 \cdot x^2 + 36 \cdot x + 65 = 0 \\ a = 4 \;\;,\;\; b = 36 \;\;,\;\; c = 65 \end{array}\right\} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \left[x_{3,4} = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4 \cdot a \cdot c}}{2 \cdot a} \right] \Rightarrow x_{3,4} = \frac{-36 \pm \sqrt{36^2 - 4 \cdot 4 \cdot 65}}{2 \cdot 4} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow x_{3,4} = \frac{-36 \pm \sqrt{1296 - 1040}}{8} \Rightarrow x_{3,4} = \frac{-36 \pm \sqrt{256}}{8} \Rightarrow x_{3,4} = \frac{-36 \pm 16}{8} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \left.\begin{array}{l} x_3 = \dfrac{-36+16}{8} \\ x_4 = \dfrac{-36-16}{8} \end{array}\right\} \Rightarrow \left.\begin{array}{l} x_3 = \dfrac{-20}{8} \\ x_4 = \dfrac{-52}{8} \end{array}\right\} \Rightarrow \left.\begin{array}{l} x_3 = \dfrac{-20}{8} \\ x_4 = \dfrac{-52}{8} \end{array}\right\} \Rightarrow \left.\begin{array}{l} x_3 = -\dfrac{5}{2} \\ x_4 = -\dfrac{13}{2} \end{array}\right\}.$$

Vježba 208

Nema vježbe! Može vic?

Rezultat: Donio Mujo brončanu medalju s matematičke olimpijade.
Pita ga Haso: "Kako si ti osvojio brončanu medalju?"
Mujo odgovori: "Pa pitali nas koliko je 7 puta 3 i ja s 19 osvojio treće mjesto!"

Zadatak 209 (Antun, srednja škola)

Ako su x_1, x_2 nultočke funkcije $f(x) = a \cdot x^2 + b \cdot x + c$, onda je $\dfrac{1+x_1}{1-x_1} + \dfrac{1+x_2}{1-x_2}$ jednako:

$$A.\ \frac{2\cdot(a-c)}{a+b+c} \qquad B.\ \frac{a-c}{a+b+c} \qquad C.\ \frac{2\cdot(a-b)}{a+b+c} \qquad D.\ \frac{a+b+c}{a+b}$$

Rješenje 209

Ponovimo!

$$\frac{a}{b}+\frac{c}{d}=\frac{a\cdot d+b\cdot c}{b\cdot d} \quad , \quad a\cdot\frac{b}{c}=\frac{a\cdot b}{c} \quad , \quad \frac{a}{b}-\frac{c}{d}=\frac{a\cdot d-b\cdot c}{b\cdot d}.$$

$$n=\frac{n}{1} \quad , \quad \frac{\frac{a}{b}}{\frac{c}{d}}=\frac{a\cdot d}{b\cdot c}.$$

Množenje zagrada

$$(a+b)\cdot(c+d)=a\cdot c+a\cdot d+b\cdot c+b\cdot d.$$

Rješenja x_1 i x_2 kvadratne jednadžbe

$$a\cdot x^2+b\cdot x+c=0$$

zadovoljavaju Vièteove formule:

$$x_1+x_2=-\frac{b}{a} \quad , \quad x_1\cdot x_2=\frac{c}{a}.$$

Zakon distribucije množenja prema zbrajanju.

$$a\cdot(b+c)=a\cdot b+a\cdot c \quad , \quad a\cdot b+a\cdot c=a\cdot(b+c).$$

$$f(x)=a\cdot x^2+b\cdot x+c \Rightarrow \left[\begin{array}{c} \text{Vièteove formule} \\ x_1+x_2=-\dfrac{b}{a} \ , \ x_1\cdot x_2=\dfrac{c}{a} \end{array}\right].$$

Preoblikujemo zadani izraz.

$$\frac{1+x_1}{1-x_1}+\frac{1+x_2}{1-x_2}=\frac{(1+x_1)\cdot(1-x_2)+(1+x_2)\cdot(1-x_1)}{(1-x_1)\cdot(1-x_2)}=$$

$$=\frac{1-x_2+x_1-x_1\cdot x_2+1-x_1+x_2-x_1\cdot x_2}{1-x_2-x_1+x_1\cdot x_2}=\frac{1-x_2+x_1-x_1\cdot x_2+1-x_1+x_2-x_1\cdot x_2}{1-x_2-x_1+x_1\cdot x_2}=$$

$$= \frac{1-x_1\cdot x_2+1-x_1\cdot x_2}{1-\left(x_1+x_2\right)+x_1\cdot x_2} = \frac{2-2\cdot x_1\cdot x_2}{1-\left(x_1+x_2\right)+x_1\cdot x_2} = \begin{bmatrix} x_1+x_2=-\frac{b}{a} \\ x_1\cdot x_2=\frac{c}{a} \end{bmatrix} =$$

$$= \frac{2-2\cdot\frac{c}{a}}{1-\left(-\frac{b}{a}\right)+\frac{c}{a}} = \frac{2-\frac{2\cdot c}{a}}{1+\frac{b}{a}+\frac{c}{a}} = \frac{\frac{2}{1}-\frac{2\cdot c}{a}}{\frac{1}{1}+\frac{b}{a}+\frac{c}{a}} = \frac{\frac{2\cdot a-2\cdot c}{a}}{\frac{a+b+c}{a}} = \frac{\frac{2\cdot a-2\cdot c}{a}}{\frac{a+b+c}{a}} =$$

$$= \frac{\frac{2\cdot a-2\cdot c}{1}}{\frac{a+b+c}{1}} = \frac{2\cdot a-2\cdot c}{a+b+c} = \frac{2\cdot\left(a-c\right)}{a+b+c}.$$

Odgovor je pod A.

Vježba 209

Ako su x_1, x_2 nultočke funkcije $f(x) = a \cdot x^2 + b \cdot x + c$, onda je $\frac{1+x_1}{1-x_1}-\frac{1+x_2}{x_2-1}$ jednako:

$A.\ \frac{2\cdot\left(a-c\right)}{a+b+c}$ $\quad B.\ \frac{a-c}{a+b+c}$ $\quad C.\ \frac{2\cdot\left(a-b\right)}{a+b+c}$ $\quad D.\ \frac{a+b+c}{a+b}$

Rezultat: A.

Zadatak 210 (4B, TUPŠ, Tonka ☺, gimnazija)

Zbroj rješenja kvadratne jednadžbe $4 \cdot x^2 + 36 = 0$ jest:

$A.\ 0 \qquad B.\ 6 \qquad C.\ -6 \qquad D.\ -3$

Rješenje 210

Ponovimo!

Imaginarna jedinica i je broj čiji je kvadrat jednak – 1,

$$i^2=-1.$$

Umnožak realnog broja b i imaginarne jedinice i zove se imaginaran broj

$$b\cdot i.$$

Rješenja x_1 i x_2 kvadratne jednadžbe

$$a\cdot x^2+b\cdot x+c=0$$

zadovoljavaju Vièteove formule:

$$x_1+x_2=-\frac{b}{a} \quad , \quad x_1\cdot x_2=\frac{c}{a}.$$

1.inačica

Riješimo jednadžbu!

$$4\cdot x^2+36=0 \Rightarrow 4\cdot x^2=-36 \Rightarrow 4\cdot x^2=-36\ /:4 \Rightarrow x^2=-9 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow x^2=-9\ /\sqrt{\ } \Rightarrow x_{1,2}=\pm\sqrt{-9} \Rightarrow x_{1,2}=\pm 3\cdot i \Rightarrow \left.\begin{matrix} x_1=3\cdot i \\ x_2=-3\cdot i \end{matrix}\right\}.$$

Tada je:

$$x_1+x_2=3\cdot i+\left(-3\cdot i\right)=3\cdot i-3\cdot i=3\cdot i-3\cdot i=0.$$

Odgovor je pod A.

2.inačica

Uporabom Vièteove formule dobije se:

$$4 \cdot x^2 + 36 = 0 \Rightarrow 4 \cdot x^2 + 0 \cdot x + 36 = 0 \Rightarrow \left. \begin{array}{l} 4 \cdot x^2 + 0 \cdot x + 36 = 0 \\ a = 4 \ , \ b = 0 \ , \ c = 36 \end{array} \right\} \Rightarrow \left[x_1 + x_2 = -\frac{b}{a} \right] \Rightarrow$$

$$\Rightarrow x_1 + x_2 = -\frac{0}{4} \Rightarrow x_1 + x_2 = 0.$$

Odgovor je pod A.

Napomena: Zbroj rješenja svake nepotpune kvadratne jednadžbe jednak je 0.

Vježba 210

Zbroj rješenja kvadratne jednadžbe $2 \cdot x^2 + 50 = 0$ jest:

$A.\ 0 \qquad B.\ 6 \qquad C.\ -6 \qquad D.\ -3$

Rezultat: A.

Zadatak 211 (Miro, srednja škola)

Koji x predstavlja jedno od rješenja jednadžbe $\frac{1}{2} \cdot x^2 + b \cdot x + 3 = 0$?

$A.\ x = b + \sqrt{b^2 - 6} \qquad B.\ x = b - \sqrt{b^2 + 6} \qquad C.\ x = -b + \sqrt{b^2 + 6} \qquad D.\ x = -b - \sqrt{b^2 - 6}$

Rješenje 211

Ponovimo!

$$(a \cdot b)^n = a^n \cdot b^n \quad , \quad \sqrt{a \cdot b} = \sqrt{a} \cdot \sqrt{b}.$$

Zakon distribucije množenja prema zbrajanju.

$$a \cdot (b + c) = a \cdot b + a \cdot c \quad , \quad a \cdot b + a \cdot c = a \cdot (b + c).$$

Skratiti razlomak znači brojnik i nazivnik tog razlomka podijeliti istim brojem različitim od nule i jedinice

$$\frac{a \cdot n}{b \cdot n} = \frac{a}{b} \ , \ n \neq 0 \ , \ n \neq 1.$$

$$\frac{1}{2} \cdot x^2 + b \cdot x + 3 = 0 \Rightarrow \frac{1}{2} \cdot x^2 + b \cdot x + 3 = 0 \ / \cdot 2 \Rightarrow x^2 + 2 \cdot b \cdot x + 6 = 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \left. \begin{array}{l} x^2 + 2 \cdot b \cdot x + 6 = 0 \\ a = 1 \ , \ b = 2 \cdot b \ , \ c = 6 \end{array} \right\} \Rightarrow \left. \begin{array}{l} a = 1 \ , \ b = 2 \cdot b \ , \ c = 6 \\ x_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4 \cdot a \cdot c}}{2 \cdot a} \end{array} \right\} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow x_{1,2} = \frac{-2 \cdot b \pm \sqrt{(2 \cdot b)^2 - 4 \cdot 1 \cdot 6}}{2 \cdot 1} \Rightarrow x_{1,2} = \frac{-2 \cdot b \pm \sqrt{4 \cdot b^2 - 24}}{2} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow x_{1,2} = \frac{-2 \cdot b \pm \sqrt{4 \cdot (b^2 - 6)}}{2} \Rightarrow x_{1,2} = \frac{-2 \cdot b \pm \sqrt{4} \cdot \sqrt{b^2 - 6}}{2} \Rightarrow x_{1,2} = \frac{-2 \cdot b \pm 2 \cdot \sqrt{b^2 - 6}}{2} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow x_{1,2} = \frac{2 \cdot \left(-b \pm \sqrt{b^2 - 6}\right)}{2} \Rightarrow x_{1,2} = \frac{2 \cdot \left(-b \pm \sqrt{b^2 - 6}\right)}{2} \Rightarrow x_{1,2} = -b \pm \sqrt{b^2 - 6} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \left.\begin{array}{l} x_1 = -b+\sqrt{b^2-6} \\ x_2 = -b-\sqrt{b^2-6} \end{array}\right\} \Rightarrow x = -b-\sqrt{b^2-6}.$$

Odgovor je pod D.

Vježba 211

Koji x predstavlja jedno od rješenja jednadžbe $\frac{1}{2}\cdot x^2 + b\cdot x + 3 = 0$?

$A.\ x = b+\sqrt{b^2-6}$ $\quad B.\ x = b-\sqrt{b^2+6}$ $\quad C.\ x = -b+\sqrt{b^2+6}$ $\quad D.\ x = -b+\sqrt{b^2-6}$

Rezultat: D.

Zadatak 212 (Željko, srednja škola)

Zadane su jednadžbe $x^2 + a\cdot x + 1 = 0,\ x^2 + x + a = 0.$ Odredite sve realne brojeve a tako da jednadžbe imaju zajednički korijen.

Rješenje 212

Ponovimo!

$$\left.\begin{array}{l} a = b \\ c = d \end{array}\right\} \Rightarrow a - c = b - d.$$

Zakon distribucije množenja prema zbrajanju.

$$a\cdot(b+c) = a\cdot b + a\cdot c \quad , \quad a\cdot b + a\cdot c = a\cdot(b+c).$$

Jednadžbe $x^2 + a\cdot x + 1 = 0$ i $x^2 + x + a = 0$ za a = 1 su identične, $x^2 + x + 1 = 0.$ Imaju oba korijena (rješenja) zajednička. Pretpostavimo da je a ≠ 1. Neka je x_1 zajednički korijen obiju jednadžbi.

$$\left.\begin{array}{l} x_1^2 + a\cdot x_1 + 1 = 0 \\ x_1^2 + x_1 + a = 0 \end{array}\right\} \Rightarrow \left[\begin{array}{c}\text{oduzmemo} \\ \text{jednadžbe}\end{array}\right] \Rightarrow x_1^2 + a\cdot x_1 + 1 - \left(x_1^2 + x_1 + a\right) = 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow x_1^2 + a\cdot x_1 + 1 - x_1^2 - x_1 - a = 0 \Rightarrow x_1^2 + a\cdot x_1 + 1 - x_1^2 - x_1 - a = 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow a\cdot x_1 + 1 - x_1 - a = 0 \Rightarrow a\cdot x_1 - x_1 - a + 1 = 0 \Rightarrow \left(a\cdot x_1 - x_1\right) + \left(-a+1\right) = 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow x_1\cdot(a-1) - (a-1) = 0 \Rightarrow x_1\cdot(a-1) = a-1 \Rightarrow x_1\cdot(a-1) = a-1 \ /\cdot\frac{1}{a-1} \Rightarrow x_1 = 1.$$

Zajednički korijen je $x_1 = 1$. Realan broj a iznosi:

$$\left.\begin{array}{l} x_1 = 1 \\ x_1^2 + x_1 + a = 0 \end{array}\right\} \Rightarrow 1^2 + 1 + a = 0 \Rightarrow 1 + 1 + a = 0 \Rightarrow a = -2.$$

Realan broj a je

$$a \in \{-2, 1\}.$$

Vježba 212

Zadane su jednadžbe $x^2 + a\cdot x = -1,\ x^2 + x = -a.$ Odredite sve realne brojeve a tako da jednadžbe imaju zajednički korijen.

Rezultat: $a \in \{-2, 1\}.$

Zadatak 213 (Marta, gimnazija)

Dokaži da su za realne brojeve a, b, c, d rješenja jednadžbe $\begin{vmatrix} a-x & c+d\cdot i \\ c-d\cdot i & b-x \end{vmatrix}=0$ realna.

Rješenje 213

Ponovimo!

$$a^2\ge 0\ ,\ a\in R\quad ,\quad (a-b)\cdot(a+b)=a^2-b^2\quad ,\quad (a\cdot b)^n=a^n\cdot b^n.$$
$$a^2-2\cdot a\cdot b+b^2=(a-b)^2\quad ,\quad i-imaginarna\ \ jedinica\quad ,\quad i^2=-1.$$
$$(-a)^{2\cdot n}=a^{2\cdot n}.$$

Determinanta drugog reda

$$\begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix}=a\cdot d-b\cdot c.$$

Množenje zagrada

$$(a+b)\cdot(c+d)=a\cdot c+a\cdot d+b\cdot c+b\cdot d.$$

Zakon distribucije množenja prema zbrajanju.

$$a\cdot(b+c)=a\cdot b+a\cdot c\quad ,\quad a\cdot b+a\cdot c=a\cdot(b+c).$$

Diskriminanta kvadratne jednadžbe

$$a\cdot x^2+b\cdot x+c=0$$

je broj

$$D=b^2-4\cdot a\cdot c.$$

- Ako je D > 0, jednadžba ima dva realna rješenja.
- Ako je D = 0, jednadžba ima jedno dvostruko realno rješenje.
- Ako je D < 0, jednadžba ima kompleksno – konjugirana rješenja.

Preoblikujemo jednadžbu.

$$\begin{vmatrix} a-x & c+d\cdot i \\ c-d\cdot i & b-x \end{vmatrix}=0\ \Rightarrow\ (a-x)\cdot(b-x)-(c-d\cdot i)\cdot(c+d\cdot i)=0\ \Rightarrow$$

$$\Rightarrow\ a\cdot b-a\cdot x-b\cdot x+x^2-\left(c^2-(d\cdot i)^2\right)=0\ \Rightarrow\ a\cdot b-a\cdot x-b\cdot x+x^2-\left(c^2-d^2\cdot i^2\right)=0\ \Rightarrow$$

$$\Rightarrow\ a\cdot b-a\cdot x-b\cdot x+x^2-\left(c^2-d^2\cdot(-1)\right)=0\ \Rightarrow\ a\cdot b-a\cdot x-b\cdot x+x^2-\left(c^2+d^2\right)=0\ \Rightarrow$$

$$\Rightarrow\ a\cdot b-a\cdot x-b\cdot x+x^2-c^2-d^2=0\ \Rightarrow\ x^2-(a+b)\cdot x-\left(c^2+d^2-a\cdot b\right)=0\ \Rightarrow$$

$$\Rightarrow\ \left.\begin{array}{l} x^2-(a+b)\cdot x-\left(c^2+d^2-a\cdot b\right)=0 \\ a=1\ ,\ b=-(a+b)\ ,\ c=-\left(c^2+d^2-a\cdot b\right) \end{array}\right\}.$$

Ispitajmo diskriminantu kvadratne jednadžbe!

$$D=b^2-4\cdot a\cdot c\ \Rightarrow\ D=\left(-(a+b)\right)^2-4\cdot 1\cdot\left(-\left(c^2+d^2-a\cdot b\right)\right)\ \Rightarrow$$

$$\Rightarrow\ D=(a+b)^2+4\cdot\left(c^2+d^2-a\cdot b\right)\ \Rightarrow\ D=a^2+2\cdot a\cdot b+b^2+4\cdot c^2+4\cdot d^2-4\cdot a\cdot b\ \Rightarrow$$

$$\Rightarrow\ D=a^2-2\cdot a\cdot b+b^2+4\cdot c^2+4\cdot d^2\ \Rightarrow\ D=(a-b)^2+4\cdot\left(c^2+d^2\right)\ge 0.$$

Budući da je diskriminanta nenegativan broj, zadana jednadžba ima realna rješenja.

Vježba 213

Dokaži da su za realne brojeve a, b, c, d rješenja jednadžbe $\begin{vmatrix} b-x & c+d\cdot i \\ c-d\cdot i & a-x \end{vmatrix}=0$ realna.

Rezultat: Dokaz analogan.

Zadatak 214 (Vox, gimnazija)

Ako koeficijenti jednadžbe $x^2+p\cdot x+q=0$ i $x^2+m\cdot x+n=0$ zadovoljavaju uvjet $m\cdot p=2\cdot(q+n)$, dokažite da su rješenja bar jedne od njih realna.

Rješenje 214

Ponovimo!

$$a^2\ge 0\ ,\ a\in R\quad,\quad (a-b)^2=a^2-2\cdot a\cdot b+b^2.$$

Zakon distribucije množenja prema zbrajanju.

$$a\cdot(b+c)=a\cdot b+a\cdot c\quad,\quad a\cdot b+a\cdot c=a\cdot(b+c).$$

Diskriminanta kvadratne jednadžbe

$$a\cdot x^2+b\cdot x+c=0$$

je broj

$$D=b^2-4\cdot a\cdot c.$$

- Ako je D > 0, jednadžba ima dva realna rješenja.
- Ako je D = 0, jednadžba ima jedno dvostruko realno rješenje.
- Ako je D < 0, jednadžba ima kompleksno – konjugirana rješenja.

Zadanim jednadžbama odredimo njihove diskriminante:

- $$x^2+p\cdot x+q=0\ \Rightarrow\ \left.\begin{array}{l} x^2+p\cdot x+q=0 \\ a=1\ ,\ b=p\ ,\ c=q \end{array}\right\}\Rightarrow \left[D=b^2-4\cdot a\cdot c\right]\Rightarrow D_1=p^2-4\cdot 1\cdot q\ \Rightarrow$$
$$\Rightarrow\ D_1=p^2-4\cdot q$$
- $$x^2+m\cdot x+n=0\ \Rightarrow\ \left.\begin{array}{l} x^2+m\cdot x+n=0 \\ a=1\ ,\ b=m\ ,\ c=n \end{array}\right\}\Rightarrow \left[D=b^2-4\cdot a\cdot c\right]\Rightarrow D_2=m^2-4\cdot 1\cdot n\ \Rightarrow$$
$$\Rightarrow\ D_2=m^2-4\cdot n.$$

Zbrajanjem D_1 i D_2 dobije se:

$$D_1+D_2=p^2-4\cdot q+m^2-4\cdot n\ \Rightarrow\ D_1+D_2=p^2+m^2-4\cdot q-4\cdot n\ \Rightarrow$$

$$\Rightarrow\ D_1+D_2=p^2+m^2-4\cdot(q+n)\ \Rightarrow\ D_1+D_2=p^2+m^2-2\cdot 2\cdot(q+n)\ \Rightarrow$$

$$\Rightarrow\left[\begin{array}{c}\text{uvjet}\\ m\cdot p=2\cdot(q+n)\end{array}\right]\Rightarrow\ D_1+D_2=p^2+m^2-2\cdot m\cdot p\ \Rightarrow\ D_1+D_2=p^2-2\cdot p\cdot m+m^2\ \Rightarrow$$

$$\Rightarrow\ D_1+D_2=(p-m)^2\ge 0.$$

Budući da je $D_1+D_2\ge 0$, slijedi da je barem jedan od brojeva D_1 ili D_2 nenegativan broj. To znači da su rješenja odgovarajuće kvadratne jednadžbe realna.

Vježba 214

Odmor!

Rezultat: …