Zadatak 181 (Manuel, srednja škola)

Koliko iznosi zbroj rješenja jednadžbe $2 \cdot (x+5)^3 - 7 \cdot (x+5)^2 + 7 \cdot (x+5) - 2 = 0$?

$$A. -\frac{33}{2} \qquad B. -\frac{31}{2} \qquad C. -\frac{25}{2} \qquad D. -\frac{23}{2}$$

Rješenje 181

Ponovimo!

$$a^3 - b^3 = (a-b) \cdot \left(a^2 + a \cdot b + b^2\right) \quad , \quad (a+b)^3 = a^3 + 3 \cdot a^2 \cdot b + 3 \cdot a \cdot b^2 + b^3.$$

$$(a+b)^2 = a^2 + 2 \cdot a \cdot b + b^2 \quad , \quad n = \frac{n}{1} \quad , \quad \frac{a}{b} + \frac{c}{d} = \frac{a \cdot d + b \cdot c}{b \cdot d} \quad , \quad \frac{a}{b} - \frac{c}{d} = \frac{a \cdot d - b \cdot c}{b \cdot d}.$$

Zakon distribucije množenja prema zbrajanju.

$$a \cdot (b+c) = a \cdot b + a \cdot c \quad , \quad a \cdot b + a \cdot c = a \cdot (b+c).$$

Skratiti razlomak znači brojnik i nazivnik tog razlomka podijeliti istim brojem različitim od nule i jedinice

$$\frac{a \cdot n}{b \cdot n} = \frac{a}{b} \ , \ n \neq 0 \ , \ n \neq 1.$$

Da bi umnožak bio jednak nuli, dovoljno je da jedan faktor bude jednak nuli.

$$a \cdot b = 0 \Leftrightarrow a = 0 \text{ ili } b = 0 \text{ ili } a = b = 0.$$

Neka je

$$f(x) = a \cdot x^3 + b \cdot x^2 + c \cdot x + d$$

polinom trećeg stupnja, a x_1, x_2, x_3 njegove nultočke. Tada vrijede Vièteove formule:

$$x_1 + x_2 + x_3 = -\frac{b}{a} \quad , \quad x_1 \cdot x_2 + x_1 \cdot x_3 + x_2 \cdot x_3 = \frac{c}{a} \quad , \quad x_1 \cdot x_2 \cdot x_3 = -\frac{d}{a}.$$

1.inačica

$$2 \cdot (x+5)^3 - 7 \cdot (x+5)^2 + 7 \cdot (x+5) - 2 = 0 \Rightarrow \begin{bmatrix} \text{zamjena} \\ x+5=t \end{bmatrix} \Rightarrow 2 \cdot t^3 - 7 \cdot t^2 + 7 \cdot t - 2 = 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 2 \cdot t^3 - 2 - 7 \cdot t^2 + 7 \cdot t = 0 \Rightarrow 2 \cdot \left(t^3 - 1\right) - 7 \cdot t \cdot (t-1) = 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 2 \cdot (t-1) \cdot \left(t^2 + t + 1\right) - 7 \cdot t \cdot (t-1) = 0 \Rightarrow (t-1) \cdot \left(2 \cdot \left(t^2 + t + 1\right) - 7 \cdot t\right) = 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow (t-1) \cdot \left(2 \cdot t^2 + 2 \cdot t + 2 - 7 \cdot t\right) = 0 \Rightarrow (t-1) \cdot \left(2 \cdot t^2 - 5 \cdot t + 2\right) = 0 \Rightarrow \left.\begin{matrix} t-1=0 \\ 2 \cdot t^2 - 5 \cdot t + 2 = 0 \end{matrix}\right\}.$$

- Riješimo prvu linearnu jednadžbu.

$$t - 1 = 0 \Rightarrow t_1 = 1.$$

- Riješimo drugu kvadratnu jednadžbu.

$$2 \cdot t^2 - 5 \cdot t + 2 = 0 \Rightarrow \left.\begin{matrix} 2 \cdot t^2 - 5 \cdot t + 2 = 0 \\ a = 2 \ , \ b = -5 \ , \ c = 2 \end{matrix}\right\} \Rightarrow \left.\begin{matrix} a = 2 \ , \ b = -5 \ , \ c = 2 \\ t_{2,3} = \dfrac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4 \cdot a \cdot c}}{2 \cdot a} \end{matrix}\right\} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow t_{2,3} = \frac{-(-5) \pm \sqrt{(-5)^2 - 4 \cdot 2 \cdot 2}}{2 \cdot 2} \Rightarrow t_{2,3} = \frac{5 \pm \sqrt{25 - 16}}{4} \Rightarrow t_{2,3} = \frac{5 \pm \sqrt{9}}{4} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow t_{2,3}=\frac{5\pm 3}{4} \Rightarrow \left.\begin{array}{l} t_2=\frac{5+3}{4} \\ t_3=\frac{5-3}{4}\end{array}\right\} \Rightarrow \left.\begin{array}{l} t_2=\frac{8}{4} \\ t_3=\frac{2}{4}\end{array}\right\} \Rightarrow \left.\begin{array}{l} t_2=\frac{8}{4} \\ t_3=\frac{2}{4}\end{array}\right\} \Rightarrow \left.\begin{array}{l} t_2=2 \\ t_3=\frac{1}{2}\end{array}\right\}.$$

Vraćamo se zamjeni.

$$\left.\begin{array}{l} t_1=1 \\ t_2=2 \\ t_3=\frac{1}{2}\end{array}\right\} \Rightarrow \begin{bmatrix}\text{zamjena} \\ x+5=t\end{bmatrix} \Rightarrow \left.\begin{array}{l} x+5=1 \\ x+5=2 \\ x+5=\frac{1}{2}\end{array}\right\} \Rightarrow \left.\begin{array}{l} x=1-5 \\ x=2-5 \\ x=\frac{1}{2}-5\end{array}\right\} \Rightarrow \left.\begin{array}{l} x_1=-4 \\ x_2=-3 \\ x=\frac{1}{2}-\frac{5}{1}\end{array}\right\} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \left.\begin{array}{l} x_1=-4 \\ x_2=-3 \\ x=\frac{1-10}{2}\end{array}\right\} \Rightarrow \left.\begin{array}{l} x_1=-4 \\ x_2=-3 \\ x_3=-\frac{9}{2}\end{array}\right\}.$$

Zbroj rješenja jednadžbe iznosi:

$$x_1+x_2+x_3=-4+(-3)+\left(-\frac{9}{2}\right) \Rightarrow x_1+x_2+x_3=-4-3-\frac{9}{2} \Rightarrow x_1+x_2+x_3=-\frac{4}{1}-\frac{3}{1}-\frac{9}{2} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow x_1+x_2+x_3=\frac{-8-6-9}{2} \Rightarrow x_1+x_2+x_3=-\frac{23}{2}.$$

Odgovor je pod D.

2.inačica

Preoblikujemo zadanu jednadžbu i uporabimo Vièteovu formulu.

$$2\cdot(x+5)^3-7\cdot(x+5)^2+7\cdot(x+5)-2=0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 2\cdot\left(x^3+3\cdot x^2\cdot 5+3\cdot x\cdot 5^2+5^3\right)-7\cdot\left(x^2+2\cdot x\cdot 5+5^2\right)+7\cdot(x+5)-2=0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 2\cdot\left(x^3+15\cdot x^2+75\cdot x+125\right)-7\cdot\left(x^2+10\cdot x+25\right)+7\cdot(x+5)-2=0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 2\cdot x^3+30\cdot x^2+150\cdot x+250-7\cdot x^2-70\cdot x-175+7\cdot x+35-2=0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 2\cdot x^3+23\cdot x^2+87\cdot x+108=0 \Rightarrow \left.\begin{array}{l} 2\cdot x^3+23\cdot x^2+87\cdot x+108=0 \\ a=2\ ,\ b=23\ ,\ c=87\ ,\ d=108\end{array}\right\}.$$

Sada je:

$$x_1+x_2+x_3=-\frac{b}{a} \Rightarrow x_1+x_2+x_3=-\frac{23}{2}.$$

Odgovor je pod D.

3.inačica

$$2\cdot(x+5)^3-7\cdot(x+5)^2+7\cdot(x+5)-2=0 \Rightarrow 2\cdot(x+5)^3-2-7\cdot(x+5)^2+7\cdot(x+5)=0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 2\cdot\left((x+5)^3-1\right)-7\cdot(x+5)\cdot\left((x+5)-1\right)=0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow\ 2\cdot\left(\left(x+5\right)-1\right)\cdot\left(\left(x+5\right)^2+\left(x+5\right)\cdot 1+1^2\right)-7\cdot\left(x+5\right)\cdot\left(x+5-1\right)=0\ \Rightarrow$$

$$\Rightarrow\ 2\cdot\left(x+5-1\right)\cdot\left(\left(x+5\right)^2+x+5+1\right)-7\cdot\left(x+5\right)\cdot\left(x+4\right)=0\ \Rightarrow$$

$$\Rightarrow\ 2\cdot\left(x+4\right)\cdot\left(x^2+10\cdot x+25+x+5+1\right)-7\cdot\left(x+5\right)\cdot\left(x+4\right)=0\ \Rightarrow$$

$$\Rightarrow\ 2\cdot\left(x+4\right)\cdot\left(x^2+11\cdot x+31\right)-7\cdot\left(x+5\right)\cdot\left(x+4\right)=0\ \Rightarrow$$

$$\Rightarrow\ \left(x+4\right)\cdot\left(2\cdot\left(x^2+11\cdot x+31\right)-7\cdot\left(x+5\right)\right)=0\ \Rightarrow$$

$$\Rightarrow\ \left(x+4\right)\cdot\left(2\cdot x^2+22\cdot x+62-7\cdot x-35\right)=0\ \Rightarrow\ \left(x+4\right)\cdot\left(2\cdot x^2+15\cdot x+27\right)=0\ \Rightarrow$$

$$\Rightarrow\ \left.\begin{matrix} x+4=0 \\ 2\cdot x^2+15\cdot x+27 \end{matrix}\right\}.$$

- Riješimo prvu linearnu jednadžbu.

$$x+4=0\ \Rightarrow\ x_1=-4.$$

- Riješimo drugu kvadratnu jednadžbu.

$$2\cdot x^2+15\cdot x+27=0\ \Rightarrow\ \left.\begin{matrix} 2\cdot x^2+15\cdot x+27=0 \\ a=2\ ,\ b=15\ ,\ c=27 \end{matrix}\right\}\Rightarrow\ \left.\begin{matrix} a=2\ ,\ b=15\ ,\ c=27 \\ x_{2,3}=\dfrac{-b\pm\sqrt{b^2-4\cdot a\cdot c}}{2\cdot a} \end{matrix}\right\}\ \Rightarrow$$

$$\Rightarrow\ x_{2,3}=\frac{-15\pm\sqrt{15^2-4\cdot 2\cdot 27}}{2\cdot 2}\ \Rightarrow\ x_{2,3}=\frac{-15\pm\sqrt{225-216}}{4}\ \Rightarrow\ x_{2,3}=\frac{-15\pm\sqrt{9}}{4}\ \Rightarrow$$

$$\Rightarrow\ x_{2,3}=\frac{-15\pm 3}{4}\ \Rightarrow\ \left.\begin{matrix} x_2=\dfrac{-15+3}{4} \\ x_3=\dfrac{-15-3}{4} \end{matrix}\right\}\ \Rightarrow\ \left.\begin{matrix} x_2=-\dfrac{12}{4} \\ x_3=-\dfrac{18}{4} \end{matrix}\right\}\ \Rightarrow\ \left.\begin{matrix} x_2=-\dfrac{12}{4} \\ x_3=-\dfrac{18}{4} \end{matrix}\right\}\ \Rightarrow\ \left.\begin{matrix} x_2=-3 \\ x_3=-\dfrac{9}{2} \end{matrix}\right\}.$$

Zbroj rješenja jednadžbe iznosi:

$$x_1+x_2+x_3=-4+\left(-3\right)+\left(-\frac{9}{2}\right)\ \Rightarrow\ x_1+x_2+x_3=-4-3-\frac{9}{2}\ \Rightarrow\ x_1+x_2+x_3=-\frac{4}{1}-\frac{3}{1}-\frac{9}{2}\ \Rightarrow$$

$$\Rightarrow\ x_1+x_2+x_3=\frac{-8-6-9}{2}\ \Rightarrow\ x_1+x_2+x_3=-\frac{23}{2}.$$

Odgovor je pod D.

Vježba 181

Koliko iznosi umnožak rješenja jednadžbe $2\cdot\left(x+5\right)^3-7\cdot\left(x+5\right)^2+7\cdot\left(x+5\right)-2=0$?

A. 54 *B.* −54 *C.* 108 *D.* −108

Rezultat: B.

Zadatak 182 (Marljivi dečki, Magnusgymnasium)

Riješi jednadžbu $2\cdot x^2-3\cdot\left|x\right|-2=0.$

Rješenje 182

Ponovimo!

Za realni broj x njegova je apsolutna vrijednost (modul) broj $|x|$ koji određujemo na ovaj način:

$$|x|=\begin{cases} x, & x\geq 0 \\ -x, & x<0. \end{cases}$$

Ako je broj x pozitivan ili nula, tada je on jednak svojoj apsolutnoj vrijednosti. Za svaki x, $x \geq 0$, vrijedi $|x| = x$.

Ako je x negativan broj, njegova apsolutna vrijednost je suprotan broj $-x$ koji je pozitivan. Za svaki x, $x < 0$, je $|x| = -x$.

Skratiti razlomak znači brojnik i nazivnik tog razlomka podijeliti istim brojem različitim od nule i jedinice

$$\frac{a\cdot n}{b\cdot n}=\frac{a}{b}\ ,\ n\neq 0\ ,\ n\neq 1.$$

Zadanu kvadratnu jednadžbu preoblikujemo u dvije: jednu u slučaju kada je $x \geq 0$, a drugu za $x < 0$.

- slučaj $x \geq 0$

$$\left.\begin{aligned} &x\geq 0\ ,\ |x|=x \\ &2\cdot x^2-3\cdot|x|-2=0 \end{aligned}\right\}\Rightarrow 2\cdot x^2-3\cdot x-2=0\Rightarrow \left.\begin{aligned} &2\cdot x^2-3\cdot x-2=0 \\ &a=2\ ,\ b=-3\ ,\ c=-2 \end{aligned}\right\}\Rightarrow$$

$$\Rightarrow \left.\begin{aligned} &a=2\ ,\ b=-3\ ,\ c=-2 \\ &x_{1,2}=\frac{-b\pm\sqrt{b^2-4\cdot a\cdot c}}{2\cdot a} \end{aligned}\right\}\Rightarrow$$

$$\Rightarrow x_{1,2}=\frac{-(-3)\pm\sqrt{(-3)^2-4\cdot 2\cdot(-2)}}{2\cdot 2}\Rightarrow x_{1,2}=\frac{3\pm\sqrt{9+16}}{4}\Rightarrow x_{1,2}=\frac{3\pm\sqrt{25}}{4}\Rightarrow$$

$$\Rightarrow x_{1,2}=\frac{3\pm 5}{4}\Rightarrow \left.\begin{aligned} &x_1=\frac{3+5}{4} \\ &x_2=\frac{3-5}{4} \end{aligned}\right\}\Rightarrow \left.\begin{aligned} &x_1=\frac{8}{4} \\ &x_2=-\frac{2}{4} \end{aligned}\right\}\Rightarrow \left.\begin{aligned} &x_1=\frac{8}{4} \\ &x_2=-\frac{2}{4} \end{aligned}\right\}\Rightarrow \left.\begin{aligned} &x_1=2 \\ &x_2=-\frac{1}{2} \end{aligned}\right\}\Rightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{bmatrix} \text{uvjet} \\ x\geq 0 \end{bmatrix}\Rightarrow \left.\begin{aligned} &x_1=2 \\ &x_2=-\frac{1}{2}\ \text{nema smisla} \end{aligned}\right\}\Rightarrow x_1=2.$$

- slučaj $x < 0$

$$\left.\begin{aligned} &x<0\ ,\ |x|=-x \\ &2\cdot x^2-3\cdot|x|-2=0 \end{aligned}\right\}\Rightarrow 2\cdot x^2-3\cdot(-x)-2=0\Rightarrow 2\cdot x^2+3\cdot x-2=0\Rightarrow$$

$$\Rightarrow \left.\begin{aligned} &2\cdot x^2+3\cdot x-2=0 \\ &a=2\ ,\ b=3\ ,\ c=-2 \end{aligned}\right\}\Rightarrow \left.\begin{aligned} &a=2\ ,\ b=3\ ,\ c=-2 \\ &x_{1,2}=\frac{-b\pm\sqrt{b^2-4\cdot a\cdot c}}{2\cdot a} \end{aligned}\right\}\Rightarrow$$

$$\Rightarrow x_{1,2}=\frac{-3\pm\sqrt{3^2-4\cdot 2\cdot(-2)}}{2\cdot 2}\Rightarrow x_{1,2}=\frac{-3\pm\sqrt{9+16}}{4}\Rightarrow x_{1,2}=\frac{-3\pm\sqrt{25}}{4}\Rightarrow$$

$$\Rightarrow x_{1,2}=\frac{-3\pm5}{4} \Rightarrow \left.\begin{array}{l} x_1=\frac{-3+5}{4} \\ x_2=\frac{-3-5}{4}\end{array}\right\} \Rightarrow \left.\begin{array}{l} x_1=\frac{2}{4} \\ x_2=-\frac{8}{4}\end{array}\right\} \Rightarrow \left.\begin{array}{l} x_1=\frac{2}{4} \\ x_2=-\frac{8}{4}\end{array}\right\} \Rightarrow \left.\begin{array}{l} x_1=\frac{1}{2} \\ x_2=-2\end{array}\right\} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{bmatrix} \text{uvjet} \\ x<0 \end{bmatrix} \Rightarrow \left.\begin{array}{l} x_1=\frac{1}{2} \text{ nema smisla} \\ x_2=-2\end{array}\right\} \Rightarrow x_2=-2.$$

Vježba 182

Riješi jednadžbu $2\cdot x^2-3\cdot|x|=2.$

Rezultat: $x_1 = 2$, $x_2 = -2$.

Zadatak 183 (4A, 4B, TUPŠ)

Riješite nejednadžbu $(2\cdot x-1)^2+3\cdot(2\cdot x-1)+2>0$ i napišite rješenja uz pomoć intervala.

Rješenje 183

Ponovimo!

Metoda testiranja točaka

Kako odrediti je li kvadratna funkcija $y=a\cdot x^2+b\cdot x+c$ pozitivna, negativna ili nula?

- Najprije odredimo njezine realne nultočke tako da riješimo kvadratnu jednadžbu
$$a\cdot x^2+b\cdot x+c=0.$$
- Nultočke dijele brojevni pravac (skup realnih brojeva, R) na intervale.
- Iz svakog intervala izaberemo po jedan x i uvrstimo ga u $a\cdot x^2+b\cdot x+c=0$. Predznak dobivene vrijednosti određuje predznak za cijeli interval.
- Intervali koji imaju traženi predznak rješenje su problema.

$$(a-b)^2=a^2-2\cdot a\cdot b+b^2 \quad , \quad (a\cdot b)^n=a^n\cdot b^n \quad , \quad a>b \ , \ c>0 \Rightarrow \frac{a}{c}>\frac{b}{c}.$$

Za broj x_0 kažemo da je nultočka (korijen) funkcije f ako vrijedi
$$f(x_0)=0.$$

Da bi umnožak bio jednak nuli, dovoljno je da jedan faktor bude jednak nuli.
$$a\cdot b=0 \Leftrightarrow a=0 \text{ ili } b=0 \text{ ili } a=b=0.$$

Zakon distribucije množenja prema zbrajanju.
$$a\cdot(b+c)=a\cdot b+a\cdot c \quad , \quad a\cdot b+a\cdot c=a\cdot(b+c).$$

Neka je U univerzalni skup, te A i B proizvoljni skupovi koji su podskupovi skupa U. Tada je:

- $A\cup B$ unija skupova A i B,
$$A\cup B=\{x\in U : x\in A \text{ ili } x\in B\} \text{ unija skupova A i B}$$

Unija dva ili više skupa je skup koji se sastoji od **svih elemenata** zadanih skupova.
Skratiti razlomak znači brojnik i nazivnik tog razlomka podijeliti istim brojem različitim od nule i jedinice

$$\frac{a\cdot n}{b\cdot n}=\frac{a}{b} \ , \ n\neq0 \ , \ n\neq1.$$

$$\frac{a}{b}-\frac{c}{d}=\frac{a\cdot d-b\cdot c}{b\cdot d}.$$

Preoblikujemo zadanu nejednadžbu.

$$(2\cdot x-1)^2+3\cdot(2\cdot x-1)+2>0 \Rightarrow 4\cdot x^2-4\cdot x+1+6\cdot x-3+2>0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 4\cdot x^2-4\cdot x+1+6\cdot x-3+2>0 \Rightarrow 4\cdot x^2-4\cdot x+6\cdot x>0 \Rightarrow 4\cdot x^2+2\cdot x>0 \Rightarrow$$

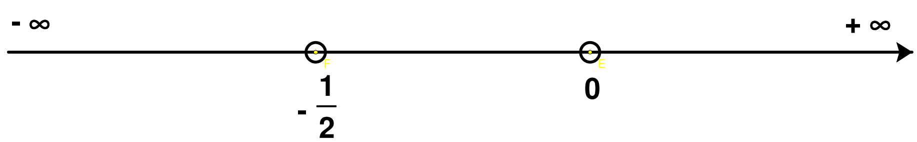
$$\Rightarrow 4\cdot x^2+2\cdot x>0 \;/:2 \Rightarrow 2\cdot x^2+x>0.$$

Zatim nađemo nultočke kvadratne jednadžbe.

$$2\cdot x^2+x=0 \Rightarrow x\cdot(2\cdot x+1)=0 \Rightarrow \left.\begin{matrix} x=0 \\ 2\cdot x+1=0 \end{matrix}\right\} \Rightarrow \left.\begin{matrix} x_1=0 \\ 2\cdot x=-1 \end{matrix}\right\} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \left.\begin{matrix} x_1=0 \\ 2\cdot x=-1 \;/:2 \end{matrix}\right\} \Rightarrow \left.\begin{matrix} x_1=0 \\ x_2=-\frac{1}{2} \end{matrix}\right\}.$$

Nultočke ucrtamo na os x.



U točkama $-\frac{1}{2}$ i 0 vrijedi jednakost =, pa one nisu rješenja naše stroge nejednakosti >. Zato ih nismo popunili.

- Odaberemo x manji od $-\frac{1}{2}$, na primjer x = – 1 i uvrstimo ga u $y=2\cdot x^2+x$.

$$\left.\begin{matrix} x=-1 \\ y=2\cdot x^2+x \end{matrix}\right\} \Rightarrow y=2\cdot(-1)^2+(-1) \Rightarrow y=2\cdot1-1 \Rightarrow y=2-1 \Rightarrow y=1>0.$$

Rezultat je pozitivan što znači da je $y=2\cdot x^2+x$ pozitivno na cijelom intervalu $\left\langle -\infty, -\frac{1}{2}\right\rangle$.

Upišimo + iznad tog intervala $\left\langle -\infty, -\frac{1}{2}\right\rangle$.

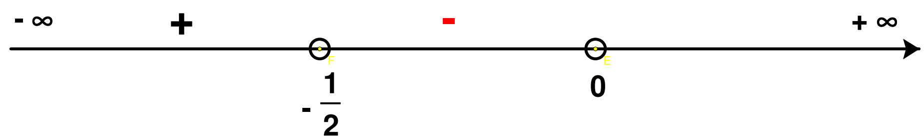
- Odaberemo x između $-\frac{1}{2}$ i 0, na primjer $x=-\frac{1}{4}$ i uvrstimo ga u $y=2\cdot x^2+x$.

$$\left.\begin{matrix} x=-\frac{1}{4} \\ y=2\cdot x^2+x \end{matrix}\right\} \Rightarrow y=2\cdot\left(-\frac{1}{4}\right)^2+\left(-\frac{1}{4}\right) \Rightarrow y=2\cdot\frac{1}{16}-\frac{1}{4} \Rightarrow y=2\cdot\frac{1}{16}-\frac{1}{4} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow y=\frac{1}{8}-\frac{1}{4} \Rightarrow y=\frac{1-2}{8} \Rightarrow y=-\frac{1}{8}<0.$$

Rezultat je negativan što znači da je $y=2\cdot x^2+x$ negativan na cijelom intervalu $\left\langle -\frac{1}{2}, 0\right\rangle$.

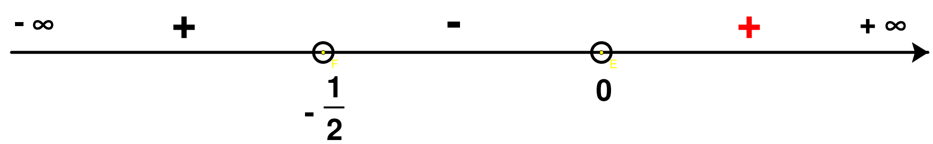
Upišimo - iznad tog intervala $\left\langle -\frac{1}{2},\ 0 \right\rangle$.



- Odaberemo x veći od 0, na primjer x = 1 i uvrstimo ga u $y = 2 \cdot x^2 + x$.

$$\left. \begin{array}{l} x = 1 \\ y = 2 \cdot x^2 + x \end{array} \right\} \Rightarrow y = 2 \cdot 1^2 + 1 \Rightarrow y = 2 \cdot 1 + 1 \Rightarrow y = 2 + 1 \Rightarrow y = 3 > 0.$$

Rezultat je pozitivan što znači da je $y = 2 \cdot x^2 + x$ pozitivno na cijelom intervalu $\langle 0, +\infty \rangle$.
Upišimo + iznad tog intervala $\langle 0, +\infty \rangle$.



Nejednadžba

$$2 \cdot x^2 + x > 0,$$

odnosno polazna nejednadžbe

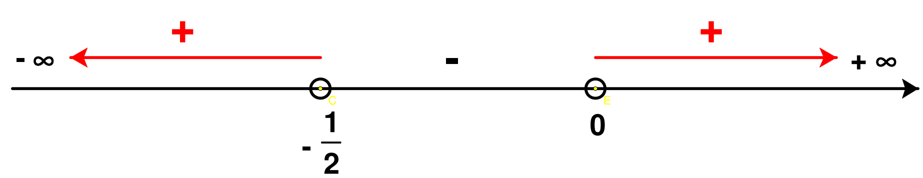
$$(2 \cdot x - 1)^2 + 3 \cdot (2 \cdot x - 1) + 2 > 0$$

vrijedi za

$$x < -\frac{1}{2} \ \text{i} \ x > 0.$$

Zapis rješenje uz pomoć intervala glasi:

$$x \in \left\langle -\infty,\ -\frac{1}{2} \right\rangle \cup \langle 0, +\infty \rangle.$$



Vježba 183

Riješite nejednadžbu $(2 \cdot x - 1)^2 + 3 \cdot (2 \cdot x - 1) + 2 < 0$ i napišite rješenja uz pomoć intervala.

Rezultat: $\left\langle -\frac{1}{2},\ 0 \right\rangle$.

Zadatak 184 (Zvone, tehnička škola)

Odredite sva realna rješenja jednadžbe $5 \cdot y - 135 \cdot y^4 = 0$.

Rješenje 184

Ponovimo!

$$\left(a\cdot b\right)^n=a^n\cdot b^n \quad , \quad a^1=a \quad , \quad a^n:a^m=a^{n-m}.$$

$$a^3-b^3=\left(a-b\right)\cdot\left(a^2+a\cdot b+b^2\right).$$

Da bi umnožak bio jednak nuli, dovoljno je da jedan faktor bude jednak nuli.

$$a\cdot b=0 \;\Leftrightarrow\; a=0 \text{ ili } b=0 \text{ ili } a=b=0.$$

Zakon distribucije množenja prema zbrajanju.

$$a\cdot\left(b+c\right)=a\cdot b+a\cdot c \quad , \quad a\cdot b+a\cdot c=a\cdot\left(b+c\right).$$

Diskriminanta kvadratne jednadžbe

$$a\cdot x^2+b\cdot x+c=0$$

je broj

$$D=b^2-4\cdot a\cdot c.$$

- Ako je D > 0, jednadžba ima dva realna rješenja.
- Ako je D = 0, jednadžba ima jedno dvostruko realno rješenje.
- Ako je D < 0, jednadžba ima kompleksno – konjugirana rješenja.

$$5\cdot y-135\cdot y^4=0 \Rightarrow 5\cdot y-135\cdot y^4=0 \;/:5 \Rightarrow y-27\cdot y^4=0 \Rightarrow y\cdot\left(1-27\cdot y^3\right)=0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow y\cdot\left(1-\left(3\cdot y\right)^3\right)=0 \Rightarrow y\cdot\left(1-3\cdot y\right)\cdot\left(1+3\cdot y+\left(3\cdot y\right)^2\right)=0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow y\cdot\left(1-3\cdot y\right)\cdot\left(1+3\cdot y+9\cdot y^2\right)=0 \Rightarrow y\cdot\left(1-3\cdot y\right)\cdot\left(9\cdot y^2+3\cdot y+1\right)=0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \left.\begin{array}{l} y=0 \\ 1-3\cdot y=0 \\ 9\cdot y^2+3\cdot y+1=0 \end{array}\right\}.$$

Prva jednadžba

$$y=0 \Rightarrow y_1=0 \text{ rješenje je realno.}$$

Druga jednadžba

$$1-3\cdot y=0 \Rightarrow -3\cdot y=-1 \Rightarrow -3\cdot y=-1 \;/:\left(-3\right) \Rightarrow y=\frac{1}{3} \text{ rješenje je realno.}$$

Treća jednadžba

$$9\cdot y^2+3\cdot y+1=0 \Rightarrow \left.\begin{array}{l} 9\cdot y^2+3\cdot y+1=0 \\ a=9 \;,\; b=3 \;,\; c=1 \end{array}\right\} \Rightarrow \left.\begin{array}{l} a=9 \;,\; b=3 \;,\; c=1 \\ D=b^2-4\cdot a\cdot c \end{array}\right\} \Rightarrow D=3^2-4\cdot 9\cdot 1 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow D=9-36 \Rightarrow D=-27<0 \text{ rješenja nisu realna već konjugirano kompleksni brojevi.}$$

Vježba 184

Odredite sva realna rješenja jednadžbe $2\cdot y-16\cdot y^4=0.$

Rezultat: $0, \frac{1}{2}.$

Zadatak 185 (Ante, tehnička škola)

Kvadratna jednadžba $x^2 + b\cdot x + c = 0$ ima dvostruko rješenje $x_1 = x_2 = -5$. Koliki je koeficijent b te kvadratne jednadžbe?

Rješenje 185

Ponovimo!

$$a^1 = a \quad , \quad a^n \cdot a^m = a^{n+m} \quad , \quad (a+b)^2 = a^2 + 2 \cdot a \cdot b + b^2.$$

$$a^2 - 2 \cdot a \cdot b + b^2 = (a-b)^2 \quad , \quad a^n \ , \ n \neq 0 \ \Rightarrow \ a = 0.$$

Polinom drugog stupnja (kvadratna funkcija) ima oblik

$$f(x) = a \cdot x^2 + b \cdot x + c,$$

gdje su a ≠ 0, b i c realni brojevi. Broj a naziva se vodeći koeficijent polinoma drugog stupnja, b linearni koeficijent, a c slobodni koeficijent polinoma.

Poučak o jednakosti polinoma:

Dva polinoma jednaka su ako i samo ako su istog stupnja i ako su im koeficijenti uz iste potencije jednaki.

Faktorizacija kvadratnog trinoma

Svaki se kvadratni trinom može napisati u obliku

$$a \cdot x^2 + b \cdot x + c = a \cdot (x - x_1) \cdot (x - x_2),$$

gdje su x_1 i x_2 rješenja pripadne kvadratne jednadžbe $a \cdot x^2 + b \cdot x + c = 0$.

Graf kvadratne funkcije

$$f(x) = a \cdot x^2 + b \cdot x + c, \ a \neq 0$$

je parabola

$$y = a \cdot x^2 + b \cdot x + c.$$

Tjeme T najniža je točka parabole i parabola je otvorena prema gore ako je a > 0.

Tjeme T najviša je točka parabole i parabola je otvorena prema dolje ako je a < 0.

Za broj x_0 kažemo da je nultočka (korijen) funkcije f ako vrijedi

$$f(x_0) = 0.$$

Kvadratna funkcija (polinom drugog stupnja)

$$f(x) = a \cdot x^2 + b \cdot x + c,$$

ima ekstrem u točki s apscisom

$$x_0 = -\frac{b}{2 \cdot a}.$$

Ekstrem je minimum ako je a > 0, maksimum ako je a < 0.

Zakon distribucije množenja prema zbrajanju.

$$a \cdot (b+c) = a \cdot b + a \cdot c \quad , \quad a \cdot b + a \cdot c = a \cdot (b+c).$$

Diskriminanta kvadratne jednadžbe

$$a \cdot x^2 + b \cdot x + c = 0$$

je broj

$$D = b^2 - 4 \cdot a \cdot c.$$

- Ako je D > 0, jednadžba ima dva realna rješenja.
- Ako je D = 0, jednadžba ima jedno dvostruko realno rješenje.
- Ako je D < 0, jednadžba ima kompleksno – konjugirana rješenja.

1.inačica

Kvadratna jednadžba $x^2 + b \cdot x + c = 0$ ima dvostruko rješenje $x_1 = x_2 = -5$ pa vrijedi rastav.

$$x^2 + b \cdot x + c = (x - x_1) \cdot (x - x_2) \ \Rightarrow \ \left[\ x_1 = x_2 = -5 \ \right] \ \Rightarrow$$

$$x^2 + b \cdot x + c = (x - (-5)) \cdot (x - (-5)) \ \Rightarrow \ x^2 + b \cdot x + c = (x+5) \cdot (x+5) \ \Rightarrow$$

$$\Rightarrow x^2 + b \cdot x + c = (x+5)^2 \Rightarrow x^2 + b \cdot x + c = x^2 + 10 \cdot x + 25 \Rightarrow \left[\begin{matrix} \text{jednakost} \\ \text{polinoma} \end{matrix} \right] \Rightarrow$$

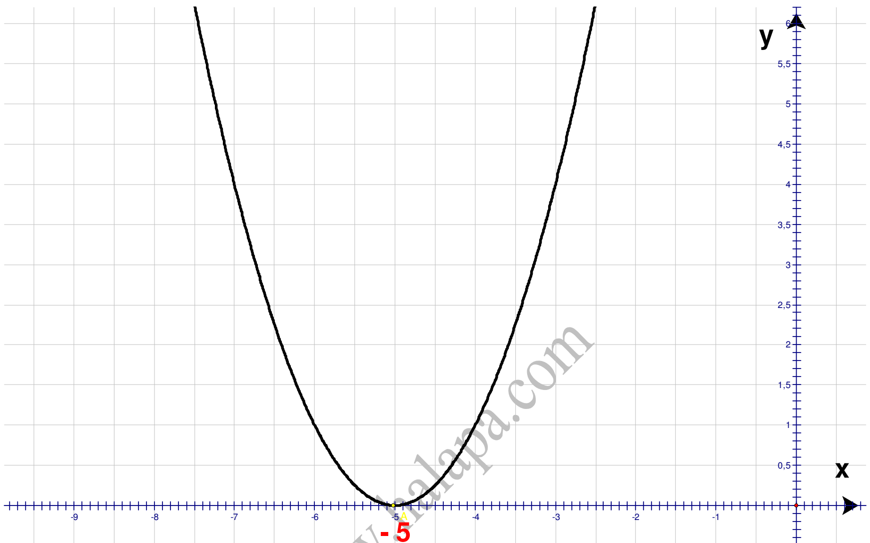
$$\Rightarrow \left. \begin{matrix} b = 10 \\ c = 25 \end{matrix} \right\} \Rightarrow b = 10 \text{ rješenje.}$$

2.inačica

Pripadna kvadratna funkcija dana je pravilom

$$f(x) = x^2 + b \cdot x + c \Rightarrow \left. \begin{matrix} f(x) = x^2 + b \cdot x + c \\ a = 1 \; , \; b = b \; , \; c = c \end{matrix} \right\}.$$

Njezin graf je parabola okrenuta otvorom uvis jer je a = 1 > 0.



Budući da kvadratna jednadžba ima dvostruko rješenje $x_1 = x_2 = -5$, kvadratna funkcija ima dvostruku nultočku $x_0 = -5$ pa apscisa tjemena glasi $x_0 = -5$.

Dalje imamo:

$$\left. \begin{matrix} a = 1 \\ x_0 = -5 \end{matrix} \right\} \Rightarrow \left[x_0 = -\frac{b}{2 \cdot a} \right] \Rightarrow -5 = -\frac{b}{2 \cdot 1} \Rightarrow -5 = -\frac{b}{2} \Rightarrow \frac{b}{2} = 5 \Rightarrow \frac{b}{2} = 5 \; / \cdot 2 \Rightarrow b = 10.$$

3.inačica

Odredimo koeficijente kvadratne jednadžbe.

$$x^2 + b \cdot x + c = 0 \Rightarrow \left. \begin{matrix} x^2 + b \cdot x + c = 0 \\ a = 1 \; , \; b = b \; , \; c = c \end{matrix} \right\}.$$

Budući da je x = – 5 rješenje jednadžbe, uvrstit ćemo u nju tu vrijednost.

$$\left. \begin{matrix} x^2 + b \cdot x + c = 0 \\ x = -5 \end{matrix} \right\} \Rightarrow (-5)^2 + b \cdot (-5) + c = 0 \Rightarrow 25 - 5 \cdot b + c = 0 \Rightarrow c = 5 \cdot b - 25.$$

Kvadratna jednadžba ima dvostruko realno rješenje pa njezina diskriminanta mora biti jednaka nuli.

$$\left. \begin{matrix} b^2 - 4 \cdot a \cdot c = 0 \\ a = 1 \end{matrix} \right\} \Rightarrow b^2 - 4 \cdot 1 \cdot c = 0 \Rightarrow b^2 - 4 \cdot c = 0.$$

Iz sustava jednadžbi dobijemo vrijednost koeficijenta b.

$$\left.\begin{array}{l} c=5\cdot b-25 \\ b^2-4\cdot c=0 \end{array}\right\} \Rightarrow \left[\begin{array}{l} \text{metoda} \\ \text{zamjene} \end{array}\right] \Rightarrow b^2-4\cdot(5\cdot b-25)=0 \Rightarrow b^2-20\cdot b+100=0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow (b-10)^2=0 \Rightarrow b-10=0 \Rightarrow b=10.$$

Vježba 185

Kvadratna jednadžba $x^2 + b \cdot x + c = 0$ ima dvostruko rješenje $x_1 = x_2 = -4$. Koliki je koeficijent b te kvadratne jednadžbe?

Rezultat: b = 8.

Zadatak 186 (Ispravak zadatka)

Riješite jednadžbu: $(x+1)^2+(x+2)^2+(x+3)^2+(x+4)^2+\ldots+(x+11)^2=385.$

U zbirci je zadatak napisan kao $(x+1)^2+(x+2)^2+(x+3)^2+(x+4)^2+\ldots+(x+11)^2=35.$

Zahvaljujem kolegi Tiboru na uočenoj pogrešci.

Rješenje 186

Ponovimo!

$$(a+b)^2=a^2+2\cdot a\cdot b+b^2 \quad , \quad 1+2+3+4+\ldots+n=\frac{n\cdot(n+1)}{2}.$$

$$1^2+2^2+3^2+4^2+\ldots+n^2=\frac{n\cdot(n+1)\cdot(2\cdot n+1)}{6}.$$

Zakon distribucije množenja prema zbrajanju.

$$a\cdot(b+c)=a\cdot b+a\cdot c \quad , \quad a\cdot b+a\cdot c=a\cdot(b+c).$$

Skratiti razlomak znači brojnik i nazivnik tog razlomka podijeliti istim brojem različitim od nule i jedinice

$$\frac{a\cdot n}{b\cdot n}=\frac{a}{b} \;,\; n\neq 0 \;,\; n\neq 1.$$

$$(x+1)^2+(x+2)^2+(x+3)^2+(x+4)^2+\ldots+(x+11)^2=385 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow x^2+2\cdot x+1+x^2+4\cdot x+4+x^2+6\cdot x+9+x^2+8\cdot x+16+\ldots+x^2+22\cdot x+121=385 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 11\cdot x^2+(2\cdot x+4\cdot x+6\cdot x+8\cdot x+\ldots+22\cdot x)+(1+4+9+16+\ldots+121)=385 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 11\cdot x^2+2\cdot x\cdot(1+2+3+4+\ldots+11)+\left(1^2+2^2+3^2+4^2+\ldots+11^2\right)=385 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 11\cdot x^2+2\cdot x\cdot\frac{11\cdot(11+1)}{2}+\frac{11\cdot(11+1)\cdot(2\cdot 11+1)}{6}=385 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 11\cdot x^2+2\cdot x\cdot\frac{11\cdot 12}{2}+\frac{11\cdot 12\cdot 23}{6}=385 \Rightarrow 11\cdot x^2+2\cdot x\cdot\frac{11\cdot 12}{2}+\frac{11\cdot 12\cdot 23}{6}=385 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 11\cdot x^2+x\cdot 11\cdot 12+11\cdot 2\cdot 23=385 \Rightarrow 11\cdot x^2+132\cdot x+506=385 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 11\cdot x^2+132\cdot x+506-385=0 \Rightarrow 11\cdot x^2+132\cdot x+121=0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 11\cdot x^2+132\cdot x+121=0 \;/:11 \Rightarrow x^2+12\cdot x+11=0 \Rightarrow \left.\begin{array}{l} x^2+12\cdot x+11=0 \\ a=1 \;,\; b=12 \;,\; c=11 \end{array}\right\} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \left.\begin{matrix} a=1\ ,\ b=12\ ,\ c=11 \\ x_{1,2}=\dfrac{-b\pm\sqrt{b^2-4\cdot a\cdot c}}{2\cdot a}\end{matrix}\right\} \Rightarrow x_{1,2}=\frac{-12\pm\sqrt{12^2-4\cdot 1\cdot 11}}{2\cdot 1} \Rightarrow x_{1,2}=\frac{-12\pm\sqrt{144-44}}{2} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow x_{1,2}=\frac{-12\pm\sqrt{100}}{2} \Rightarrow x_{1,2}=\frac{-12\pm 10}{2} \Rightarrow \left.\begin{matrix} x_1=\dfrac{-12+10}{2} \\ x_2=\dfrac{-12-10}{2}\end{matrix}\right\} \Rightarrow \left.\begin{matrix} x_1=-\dfrac{2}{2} \\ x_2=-\dfrac{22}{2}\end{matrix}\right\} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \left.\begin{matrix} x_1=-\dfrac{2}{2} \\ x_2=-\dfrac{22}{2}\end{matrix}\right\} \Rightarrow \left.\begin{matrix} x_1=-1 \\ x_2=-11\end{matrix}\right\}.$$

Vježba 186

Riješite jednadžbu: $(x+1)^2+(x+2)^2+(x+3)^2=5.$

Rezultat: $x_1=-1,\ x_2=-3.$

Zadatak 187 (Lara, gimnazija)

Automobil i autobus krenuli su istodobno na put dug 360 km. Automobil je u prosjeku vozio 15 km / h brže od autobusa pa je stigao 48 minuta ranije. Kolika je bila prosječna brzina autobusa?

Rješenje 187

Ponovimo!

$$1\ h=60\ \text{min} \quad , \quad 1\ \text{min}=\frac{1}{60}\ h.$$

Jednoliko pravocrtno gibanje duž puta s jest gibanje pri kojem vrijedi izraz

$$s=v\cdot t \ \Rightarrow\ t=\frac{s}{v},$$

gdje je v stalna, konstantna brzina kojom se tijelo giba.
Skratiti razlomak znači brojnik i nazivnik tog razlomka podijeliti istim brojem različitim od nule i jedinice

$$\frac{a\cdot n}{b\cdot n}=\frac{a}{b}\ ,\ n\neq 0\ ,\ n\neq 1.$$

Zakon distribucije množenja prema zbrajanju.

$$a\cdot(b+c)=a\cdot b+a\cdot c \quad , \quad a\cdot b+a\cdot c=a\cdot(b+c).$$

$$s=360\ km \quad , \quad v_b \quad , \quad v_a=v_b+15\ km/h \quad , \quad \Delta t=48\ \text{min}=\frac{48}{60}\ h=\frac{48}{60}\ h=\frac{4}{5}\ h$$

Vremena za koja automobil i autobus prijeđu put s iznose:

- automobil

$$t_a=\frac{s}{v_a} \Rightarrow t_a=\frac{s}{v_b+15}$$

- autobus

$$t_b=\frac{s}{v_b}.$$

Budući da je automobil stigao Δt vremena ranije od autobusa, vrijedi:

$$t_b - t_a = \Delta t \Rightarrow \frac{s}{v_b} - \frac{s}{v_b + 15} = \frac{4}{5} \Rightarrow \frac{360}{v_b} - \frac{360}{v_b + 15} = \frac{4}{5} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \frac{360}{v_b} - \frac{360}{v_b + 15} = \frac{4}{5} \; / \cdot \frac{5 \cdot v_b \cdot (v_b + 15)}{4} \Rightarrow 450 \cdot (v_b + 15) - 450 \cdot v_b = v_b \cdot (v_b + 15) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 450 \cdot v_b + 6750 - 450 \cdot v_b = v_b^2 + 15 \cdot v_b \Rightarrow 450 \cdot v_b + 6750 - 450 \cdot v_b = v_b^2 + 15 \cdot v_b \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 6750 = v_b^2 + 15 \cdot v_b \Rightarrow v_b^2 + 15 \cdot v_b = 6750 \Rightarrow v_b^2 + 15 \cdot v_b - 6750 = 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \left. \begin{array}{l} v_b^2 + 15 \cdot v_b - 6750 = 0 \\ a = 1 \;,\; b = 15 \;,\; c = -6750 \end{array} \right\} \Rightarrow \left. \begin{array}{l} a = 1 \;,\; b = 15 \;,\; c = -6750 \\ (v_b)_{1,2} = \dfrac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4 \cdot a \cdot c}}{2 \cdot a} \end{array} \right\} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow (v_b)_{1,2} = \frac{-15 \pm \sqrt{15^2 - 4 \cdot 1 \cdot (-6750)}}{2 \cdot 1} \Rightarrow (v_b)_{1,2} = \frac{-15 \pm \sqrt{225 + 27000}}{2} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow (v_b)_{1,2} = \frac{-15 \pm \sqrt{27225}}{2} \Rightarrow (v_b)_{1,2} = \frac{-15 \pm 165}{2} \Rightarrow \left. \begin{array}{l} (v_b)_1 = \dfrac{-15 + 165}{2} \\ (v_b)_2 = \dfrac{-15 - 165}{2} \end{array} \right\} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \left. \begin{array}{l} (v_b)_1 = \dfrac{150}{2} \\ (v_b)_2 = -\dfrac{180}{2} \end{array} \right\} \Rightarrow \left. \begin{array}{l} (v_b)_1 = \dfrac{150}{2} \\ (v_b)_2 = -\dfrac{180}{2} \end{array} \right\} \Rightarrow \left. \begin{array}{l} (v_b)_1 = 75 \\ (v_b)_2 = -90 \text{ nema smisla} \end{array} \right\} \Rightarrow v_b = 75 \frac{km}{h}.$$

Prosječna brzina autobusa bila je 75 km / h.

Vježba 187

Automobil i autobus krenuli su istodobno na put dug 360 km. Autobus je u prosjeku vozio 15 km / h sporije pa je automobil stigao 48 minuta ranije. Kolika je bila prosječna brzina autobusa?

Rezultat: 75 km / h.

Zadatak 188 (Lara, gimnazija)

Lara ☺ do posla vozi 45 km. Ako poveća prosječnu brzinu za 5 km / h, stići će 6 minuta ranije nego obično. Odredite kojom prosječnom brzinom obično vozi na posao.

Rješenje 188

Ponovimo!

$$1 \; h = 60 \text{ min} \quad , \quad 1 \text{ min} = \frac{1}{60} \; h.$$

Jednoliko pravocrtno gibanje duž puta s jest gibanje pri kojem vrijedi izraz

$$s = v \cdot t \Rightarrow t = \frac{s}{v},$$

gdje je v stalna, konstantna brzina kojom se tijelo giba.

Skratiti razlomak znači brojnik i nazivnik tog razlomka podijeliti istim brojem različitim od nule i jedinice

$$\frac{a\cdot n}{b\cdot n}=\frac{a}{b}\ ,\ n\neq 0\ ,\ n\neq 1.$$

Zakon distribucije množenja prema zbrajanju.

$$a\cdot(b+c)=a\cdot b+a\cdot c\quad ,\quad a\cdot b+a\cdot c=a\cdot(b+c).$$

$$s=45\ km\quad ,\quad v_1\quad ,\quad v_2=v_1+5\ km/h\quad ,\quad \Delta t=6\ \min=\frac{6}{60}\ h=\frac{6}{60}\ h=\frac{1}{10}\ h$$

Vremena za koja Lara vozi sporije ili brže na putu s iznose:

- sporija vožnja brzinom v_1

$$t_1=\frac{s}{v_1}$$

- brža vožnja brzinom v_2

$$t_2=\frac{s}{v_2}\ \Rightarrow\ t_2=\frac{s}{v_1+5}.$$

Budući da je bržom vožnjom stigla Δt vremena ranije nego obično, vrijedi:

$$t_1-t_2=\Delta t\ \Rightarrow\ \frac{s}{v_1}-\frac{s}{v_1+5}=\Delta t\ \Rightarrow\ \frac{45}{v_1}-\frac{45}{v_1+5}=\frac{1}{10}\ \Rightarrow$$

$$\Rightarrow\ \frac{45}{v_1}-\frac{45}{v_1+5}=\frac{1}{10}\ /\cdot 10\cdot v_1\cdot(v_1+5)\ \Rightarrow\ 450\cdot(v_1+5)-450\cdot v_1=v_1\cdot(v_1+5)\ \Rightarrow$$

$$\Rightarrow\ 450\cdot v_1+2\,250-450\cdot v_1=v_1^2+5\cdot v_1\ \Rightarrow\ 450\cdot v_1+2\,250-450\cdot v_1=v_1^2+5\cdot v_1\ \Rightarrow$$

$$\Rightarrow\ 2\,250=v_1^2+5\cdot v_1\ \Rightarrow\ v_1^2+5\cdot v_1=2\,250\ \Rightarrow\ v_1^2+5\cdot v_1-2\,250=0\ \Rightarrow$$

$$\Rightarrow\ \left.\begin{array}{l} v_1^2+5\cdot v_1-2\,250=0 \\ a=1\ ,\ b=5\ ,\ c=-2\,250 \end{array}\right\}\ \Rightarrow\ \left.\begin{array}{l} a=1\ ,\ b=5\ ,\ c=-2\,250 \\ (v_1)_{1,2}=\dfrac{-b\pm\sqrt{b^2-4\cdot a\cdot c}}{2\cdot a} \end{array}\right\}\ \Rightarrow$$

$$\Rightarrow\ (v_1)_{1,2}=\frac{-5\pm\sqrt{5^2-4\cdot 1\cdot(-2\,250)}}{2\cdot 1}\ \Rightarrow\ (v_1)_{1,2}=\frac{-5\pm\sqrt{25+9\,000}}{2}\ \Rightarrow$$

$$\Rightarrow\ (v_1)_{1,2}=\frac{-5\pm\sqrt{9\,025}}{2}\ \Rightarrow\ (v_1)_{1,2}=\frac{-5\pm 95}{2}\ \Rightarrow\ \left.\begin{array}{l} (v_1)_1=\dfrac{-5+95}{2} \\ (v_1)_2=\dfrac{-5-95}{2} \end{array}\right\}\ \Rightarrow$$

$$\Rightarrow\ \left.\begin{array}{l} (v_1)_1=\dfrac{90}{2} \\ (v_1)_2=-\dfrac{100}{2} \end{array}\right\}\ \Rightarrow\ \left.\begin{array}{l} (v_1)_1=\dfrac{90}{2} \\ (v_1)_2=-\dfrac{100}{2} \end{array}\right\}\ \Rightarrow\ \left.\begin{array}{l} (v_1)_1=45 \\ (v_1)_2=-50\ \text{nema smisla} \end{array}\right\}\ \Rightarrow\ v_1=45\ \frac{km}{h}.$$

Prosječna brzina je obično 45 km / h.

Vježba 188

Ana do posla vozi 45 km. Ako poveća prosječnu brzinu za 5 km / h, stići će 6 minuta ranije nego obično. Odredite iznos veće brzine kojom vozi na posao.

Rezultat: 50 km / h.

Zadatak 189 (Vibrato et pizzicato ☺, gimnazija)

Riješi jednadžbu: $x^2 - a^2 \cdot (x - a \cdot b) = b^2 \cdot (x + a \cdot b)$.

Rješenje 189

Ponovimo!

$$a^1 = a \quad , \quad a^n \cdot a^m = a^{n+m} \quad , \quad \left(a^n\right)^m = a^{n \cdot m} \quad , \quad \sqrt{a^2} = a \ , \ a \ge 0.$$

$$(-a)^2 = a^2 \quad , \quad (a+b)^2 = a^2 + 2 \cdot a \cdot b + b^2.$$

$$(a+b+c)^2 = a^2 + b^2 + c^2 + 2 \cdot a \cdot b + 2 \cdot a \cdot c + 2 \cdot b \cdot c.$$

Skratiti razlomak znači brojnik i nazivnik tog razlomka podijeliti istim brojem različitim od nule i jedinice

$$\frac{a \cdot n}{b \cdot n} = \frac{a}{b} \ , \ n \ne 0 \ , \ n \ne 1.$$

Zakon distribucije množenja prema zbrajanju.

$$a \cdot (b+c) = a \cdot b + a \cdot c \quad , \quad a \cdot b + a \cdot c = a \cdot (b+c).$$

$$x^2 - a^2 \cdot (x - a \cdot b) = b^2 \cdot (x + a \cdot b) \Rightarrow x^2 - a^2 \cdot x + a^3 \cdot b = b^2 \cdot x + a \cdot b^3 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow x^2 - a^2 \cdot x + a^3 \cdot b - b^2 \cdot x - a \cdot b^3 = 0 \Rightarrow x^2 - \left(a^2 + b^2\right) \cdot x + a^3 \cdot b - a \cdot b^3 = 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \left.\begin{array}{l} x^2 - \left(a^2 + b^2\right) \cdot x + a^3 \cdot b - a \cdot b^3 = 0 \\ a = 1 \ , \ b = -\left(a^2 + b^2\right) \ , \ c = a^3 \cdot b - a \cdot b^3 \end{array}\right\} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \left.\begin{array}{l} a = 1 \ , \ b = -\left(a^2 + b^2\right) \ , \ c = a^3 \cdot b - a \cdot b^3 \\ x_{1,2} = \dfrac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4 \cdot a \cdot c}}{2 \cdot a} \end{array}\right\} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow x_{1,2} = \frac{-\left(-\left(a^2 + b^2\right)\right) \pm \sqrt{\left(-\left(a^2 + b^2\right)\right)^2 - 4 \cdot 1 \cdot \left(a^3 \cdot b - a \cdot b^3\right)}}{2 \cdot 1} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow x_{1,2} = \frac{a^2 + b^2 \pm \sqrt{\left(a^2 + b^2\right)^2 - 4 \cdot \left(a^3 \cdot b - a \cdot b^3\right)}}{2} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow x_{1,2} = \frac{a^2 + b^2 \pm \sqrt{a^4 + 2 \cdot a^2 \cdot b^2 + b^4 - 4 \cdot a^3 \cdot b + 4 \cdot a \cdot b^3}}{2} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow x_{1,2} = \frac{a^2 + b^2 \pm \sqrt{a^4 + 4 \cdot a^2 \cdot b^2 + b^4 - 4 \cdot a^3 \cdot b - 2 \cdot a^2 \cdot b^2 + 4 \cdot a \cdot b^3}}{2} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow x_{1,2}=\frac{a^2+b^2\pm\sqrt{\left(a^2-2\cdot a\cdot b-b^2\right)^2}}{2}\Rightarrow x_{1,2}=\frac{a^2+b^2\pm\left(a^2-2\cdot a\cdot b-b^2\right)}{2}\Rightarrow$$

$$\Rightarrow\left.\begin{array}{l}x_1=\dfrac{a^2+b^2+\left(a^2-2\cdot a\cdot b-b^2\right)}{2}\\ x_2=\dfrac{a^2+b^2-\left(a^2-2\cdot a\cdot b-b^2\right)}{2}\end{array}\right\}\Rightarrow\left.\begin{array}{l}x_1=\dfrac{a^2+b^2+a^2-2\cdot a\cdot b-b^2}{2}\\ x_2=\dfrac{a^2+b^2-a^2+2\cdot a\cdot b+b^2}{2}\end{array}\right\}\Rightarrow$$

$$\Rightarrow\left.\begin{array}{l}x_1=\dfrac{a^2+b^2+a^2-2\cdot a\cdot b-b^2}{2}\\ x_2=\dfrac{a^2+b^2-a^2+2\cdot a\cdot b+b^2}{2}\end{array}\right\}\Rightarrow\left.\begin{array}{l}x_1=\dfrac{a^2+a^2-2\cdot a\cdot b}{2}\\ x_2=\dfrac{b^2+2\cdot a\cdot b+b^2}{2}\end{array}\right\}\Rightarrow$$

$$\Rightarrow\left.\begin{array}{l}x_1=\dfrac{2\cdot a^2-2\cdot a\cdot b}{2}\\ x_2=\dfrac{2\cdot a\cdot b+2\cdot b^2}{2}\end{array}\right\}\Rightarrow\left.\begin{array}{l}x_1=\dfrac{2\cdot a\cdot(a-b)}{2}\\ x_2=\dfrac{2\cdot b\cdot(a+b)}{2}\end{array}\right\}\Rightarrow\left.\begin{array}{l}x_1=\dfrac{2\cdot a\cdot(a-b)}{2}\\ x_2=\dfrac{2\cdot b\cdot(a+b)}{2}\end{array}\right\}\Rightarrow$$

$$\Rightarrow\left.\begin{array}{l}x_1=a\cdot(a-b)\\ x_2=b\cdot(a+b)\end{array}\right\}.$$

Vježba 189

Riješi jednadžbu: $x^2+a^2\cdot(a\cdot b-x)=b^2\cdot(x+a\cdot b)$.

Rezultat: $x_1=a\cdot(a-b)\ ,\ x_2=b\cdot(a+b)$.

Zadatak 190 (Vibrato et pizzicato ☺, gimnazija)

Riješi jednadžbu: $\dfrac{x+b}{x-a}-\dfrac{x^2+a^2-b^2-a\cdot x}{x^2-a\cdot x-b\cdot x+a\cdot b}=\dfrac{x+a}{b-x}$.

Rješenje 190

Ponovimo!

$$(a+b)\cdot(a-b)=a^2-b^2\quad,\quad\sqrt{a^2}=a\ ,\ a\ge 0\quad,\quad\sqrt{a\cdot b}=\sqrt{a}\cdot\sqrt{b}.$$

Skratiti razlomak znači brojnik i nazivnik tog razlomka podijeliti istim brojem različitim od nule i jedinice

$$\frac{a\cdot n}{b\cdot n}=\frac{a}{b}\ ,\ n\ne 0\ ,\ n\ne 1.$$

Zakon distribucije množenja prema zbrajanju.

$$a\cdot(b+c)=a\cdot b+a\cdot c\quad,\quad a\cdot b+a\cdot c=a\cdot(b+c).$$

$$\frac{x+b}{x-a}-\frac{x^2+a^2-b^2-a\cdot x}{x^2-a\cdot x-b\cdot x+a\cdot b}=\frac{x+a}{b-x}\Rightarrow\left[\begin{array}{c}\text{metoda}\\ \text{grupiranja}\end{array}\right]\Rightarrow$$

$$\Rightarrow \frac{x+b}{x-a}-\frac{x^2+a^2-b^2-a\cdot x}{\left(x^2-a\cdot x\right)+\left(-b\cdot x+a\cdot b\right)}=\frac{x+a}{b-x} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \frac{x+b}{x-a}-\frac{x^2+a^2-b^2-a\cdot x}{x\cdot(x-a)-b\cdot(x-a)}=\frac{x+a}{b-x} \Rightarrow \frac{x+b}{x-a}-\frac{x^2+a^2-b^2-a\cdot x}{x\cdot(x-a)-b\cdot(x-a)}=\frac{x+a}{b-x} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \frac{x+b}{x-a}-\frac{x^2+a^2-b^2-a\cdot x}{(x-a)\cdot(x-b)}=\frac{x+a}{b-x} \Rightarrow \frac{x+b}{x-a}-\frac{x^2+a^2-b^2-a\cdot x}{(x-a)\cdot(x-b)}-\frac{x+a}{b-x}=0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \frac{x+b}{x-a}-\frac{x^2+a^2-b^2-a\cdot x}{(x-a)\cdot(x-b)}+\frac{x+a}{x-b}=0.$$

Rasprava! Budući da nazivnik ne smije biti jednak nuli, slijedi:

$$\left.\begin{array}{l} x-a\neq 0 \\ x-b\neq 0 \end{array}\right\} \Rightarrow \left.\begin{array}{l} x\neq a \\ x\neq b \end{array}\right\}.$$

Dalje pišemo:

$$\frac{x+b}{x-a}-\frac{x^2+a^2-b^2-a\cdot x}{(x-a)\cdot(x-b)}+\frac{x+a}{x-b}=0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \frac{x+b}{x-a}-\frac{x^2+a^2-b^2-a\cdot x}{(x-a)\cdot(x-b)}+\frac{x+a}{x-b}=0 \;/\cdot (x-a)\cdot(x-b) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow (x+b)\cdot(x-b)-\left(x^2+a^2-b^2-a\cdot x\right)+(x+a)\cdot(x-a)=0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow x^2-b^2-x^2-a^2+b^2+a\cdot x+x^2-a^2=0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow x^2-b^2-x^2-a^2+b^2+a\cdot x+x^2-a^2=0 \Rightarrow -a^2+a\cdot x+x^2-a^2=0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow x^2+a\cdot x-2\cdot a^2=0 \Rightarrow \left.\begin{array}{l} x^2+a\cdot x-2\cdot a^2=0 \\ a=1\ ,\ b=a\ ,\ c=-2\cdot a^2 \end{array}\right\} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \left.\begin{array}{l} a=1\ ,\ b=a\ ,\ c=-2\cdot a^2 \\ x_{1,2}=\dfrac{-b\pm\sqrt{b^2-4\cdot a\cdot c}}{2\cdot a} \end{array}\right\} \Rightarrow x_{1,2}=\frac{-a\pm\sqrt{a^2-4\cdot 1\cdot\left(-2\cdot a^2\right)}}{2\cdot 1} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow x_{1,2}=\frac{-a\pm\sqrt{a^2+8\cdot a^2}}{2} \Rightarrow x_{1,2}=\frac{-a\pm\sqrt{9\cdot a^2}}{2} \Rightarrow x_{1,2}=\frac{-a\pm 3\cdot a}{2} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \left.\begin{array}{l} x_1=\dfrac{-a+3\cdot a}{2} \\ x_2=\dfrac{-a-3\cdot a}{2} \end{array}\right\} \Rightarrow \left.\begin{array}{l} x_1=\dfrac{2\cdot a}{2} \\ x_2=-\dfrac{4\cdot a}{2} \end{array}\right\} \Rightarrow \left.\begin{array}{l} x_1=\dfrac{2\cdot a}{2} \\ x_2=-\dfrac{4\cdot a}{2} \end{array}\right\} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \left.\begin{array}{l} x_1 = a \text{ nije rješenje zbog rasprave} \\ x_2 = -2 \cdot a \end{array}\right\} \Rightarrow x = -2 \cdot a.$$

Vježba 190

Riješi jednadžbu: $\frac{x+b}{x-a} = \frac{x+a}{b-x} + \frac{x^2 + a^2 - b^2 - a \cdot x}{x^2 - a \cdot x - b \cdot x + a \cdot b}$.

Rezultat: $x = -2 \cdot a$.

Zadatak 191 (2B, TUPŠ)

Riješi jednadžbu pri čemu su a i b realni brojevi: $a \cdot b^2 \cdot x^2 - \left(a^2 + b^2\right) \cdot x + a = 0$.

Rješenje 191

Ponovimo!

$$(-a)^2 = a^2 \quad , \quad a^1 = a \quad , \quad a^n \cdot a^m = a^{n+m} \quad , \quad \left(a^n\right)^m = a^{n \cdot m}.$$

$$(a+b)^2 = a^2 + 2 \cdot a \cdot b + b^2 \quad , \quad a^2 - 2 \cdot a \cdot b + b^2 = (a-b)^2 \quad , \quad \sqrt{a^2} = a \ , \ a \ge 0.$$

$$\frac{a^n}{a^m} = a^{n-m}.$$

Skratiti razlomak znači brojnik i nazivnik tog razlomka podijeliti istim brojem različitim od nule i jedinice

$$\frac{a \cdot n}{b \cdot n} = \frac{a}{b} \ , \ n \ne 0 \ , \ n \ne 1.$$

Zakon distribucije množenja prema zbrajanju.

$$a \cdot (b+c) = a \cdot b + a \cdot c \quad , \quad a \cdot b + a \cdot c = a \cdot (b+c).$$

$$a \cdot b^2 \cdot x^2 - \left(a^2 + b^2\right) \cdot x + a = 0 \Rightarrow \left.\begin{array}{l} a \cdot b^2 \cdot x^2 - \left(a^2 + b^2\right) \cdot x + a = 0 \\ a = a \cdot b^2 \ , \ b = -\left(a^2 + b^2\right) \ , \ c = a \end{array}\right\} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \left.\begin{array}{l} a = a \cdot b^2 \ , \ b = -\left(a^2 + b^2\right) \ , \ c = a \\ x_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4 \cdot a \cdot c}}{2 \cdot a} \end{array}\right\} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow x_{1,2} = \frac{-\left(-\left(a^2 + b^2\right)\right) \pm \sqrt{\left(-\left(a^2 + b^2\right)\right)^2 - 4 \cdot a \cdot b^2 \cdot a}}{2 \cdot a \cdot b^2} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow x_{1,2} = \frac{a^2 + b^2 \pm \sqrt{\left(a^2 + b^2\right)^2 - 4 \cdot a^2 \cdot b^2}}{2 \cdot a \cdot b^2} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow x_{1,2} = \frac{a^2 + b^2 \pm \sqrt{\left(a^2\right)^2 + 2 \cdot a^2 \cdot b^2 + \left(b^2\right)^2 - 4 \cdot a^2 \cdot b^2}}{2 \cdot a \cdot b^2} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow x_{1,2}=\frac{a^2+b^2\pm\sqrt{a^4+2\cdot a^2\cdot b^2+b^4-4\cdot a^2\cdot b^2}}{2\cdot a\cdot b^2}\Rightarrow$$

$$\Rightarrow x_{1,2}=\frac{a^2+b^2\pm\sqrt{a^4-2\cdot a^2\cdot b^2+b^4}}{2\cdot a\cdot b^2}\Rightarrow x_{1,2}=\frac{a^2+b^2\pm\sqrt{\left(a^2-b^2\right)^2}}{2\cdot a\cdot b^2}\Rightarrow$$

$$\Rightarrow x_{1,2}=\frac{a^2+b^2\pm\left(a^2-b^2\right)}{2\cdot a\cdot b^2}\Rightarrow \left.\begin{array}{l} x_1=\dfrac{a^2+b^2+\left(a^2-b^2\right)}{2\cdot a\cdot b^2} \\ x_2=\dfrac{a^2+b^2-\left(a^2-b^2\right)}{2\cdot a\cdot b^2}\end{array}\right\}\Rightarrow$$

$$\Rightarrow \left.\begin{array}{l} x_1=\dfrac{a^2+b^2+a^2-b^2}{2\cdot a\cdot b^2} \\ x_2=\dfrac{a^2+b^2-a^2+b^2}{2\cdot a\cdot b^2}\end{array}\right\}\Rightarrow \left.\begin{array}{l} x_1=\dfrac{a^2+b^2+a^2-b^2}{2\cdot a\cdot b^2} \\ x_2=\dfrac{a^2+b^2-a^2+b^2}{2\cdot a\cdot b^2}\end{array}\right\}\Rightarrow \left.\begin{array}{l} x_1=\dfrac{a^2+a^2}{2\cdot a\cdot b^2} \\ x_2=\dfrac{b^2+b^2}{2\cdot a\cdot b^2}\end{array}\right\}\Rightarrow$$

$$\Rightarrow \left.\begin{array}{l} x_1=\dfrac{2\cdot a^2}{2\cdot a\cdot b^2} \\ x_2=\dfrac{2\cdot b^2}{2\cdot a\cdot b^2}\end{array}\right\}\Rightarrow \left.\begin{array}{l} x_1=\dfrac{2\cdot a^2}{2\cdot a\cdot b^2} \\ x_2=\dfrac{2\cdot b^2}{2\cdot a\cdot b^2}\end{array}\right\}\Rightarrow \left.\begin{array}{l} x_1=\dfrac{a}{b^2} \\ x_2=\dfrac{1}{a}\end{array}\right\}.$$

Vježba 191

Riješi jednadžbu pri čemu su a i b realni brojevi: $a\cdot b^2\cdot x^2-a^2\cdot x-b^2\cdot x+a=0.$

Rezultat: $x_1=\dfrac{a}{b^2}\ ,\ x_2=\dfrac{1}{a}.$

Zadatak 192 (2B, TUPŠ)

Riješi jednadžbu pri čemu su a i b realni brojevi: $(a-b)^2\cdot x^2-\left(b^2-a^2\right)\cdot x+a\cdot b=0.$

Rješenje 192

Ponovimo!

$$(-a)^2=a^2\quad,\quad a^2-b^2=(a+b)\cdot(a-b)\quad,\quad (a\cdot b)^n=a^n\cdot b^n\quad,\quad \sqrt{a\cdot b}=\sqrt{a}\cdot\sqrt{b}.$$

$$\sqrt{a^2}=a\ ,\ a\geq 0\quad,\quad (a+b)^2=a^2+2\cdot a\cdot b+b^2\quad,\quad a^2-2\cdot a\cdot b+b^2=(a-b)^2.$$

$$a^1=a\quad,\quad a^n\cdot a^m=a^{n+m}.$$

Skratiti razlomak znači brojnik i nazivnik tog razlomka podijeliti istim brojem različitim od nule i jedinice

$$\frac{a\cdot n}{b\cdot n}=\frac{a}{b}\ ,\ n\neq 0\ ,\ n\neq 1.$$

Zakon distribucije množenja prema zbrajanju.

$$a\cdot(b+c)=a\cdot b+a\cdot c\quad,\quad a\cdot b+a\cdot c=a\cdot(b+c).$$

$$(a-b)^2\cdot x^2-\left(b^2-a^2\right)\cdot x+a\cdot b=0 \Rightarrow \left.\begin{array}{l}(a-b)^2\cdot x^2-\left(b^2-a^2\right)\cdot x+a\cdot b=0\\ a=(a-b)^2\ \ ,\ b=-\left(b^2-a^2\right)\ ,\ c=a\cdot b\end{array}\right\}\Rightarrow$$

$$\Rightarrow \left.\begin{array}{l}a=(a-b)^2\ \ ,\ b=-\left(b^2-a^2\right)\ ,\ c=a\cdot b\\ x_{1,2}=\dfrac{-b\pm\sqrt{b^2-4\cdot a\cdot c}}{2\cdot a}\end{array}\right\}\Rightarrow$$

$$\Rightarrow x_{1,2}=\frac{-\left(-\left(b^2-a^2\right)\right)\pm\sqrt{\left(-\left(b^2-a^2\right)\right)^2-4\cdot(a-b)^2\cdot a\cdot b}}{2\cdot(a-b)^2}\Rightarrow$$

$$\Rightarrow x_{1,2}=\frac{b^2-a^2\pm\sqrt{\left(b^2-a^2\right)^2-4\cdot a\cdot b\cdot(a-b)^2}}{2\cdot(a-b)^2}\Rightarrow$$

$$\Rightarrow x_{1,2}=\frac{b^2-a^2\pm\sqrt{\left(a^2-b^2\right)^2-4\cdot a\cdot b\cdot(a-b)^2}}{2\cdot(a-b)^2}\Rightarrow$$

$$\Rightarrow x_{1,2}=\frac{b^2-a^2\pm\sqrt{((a-b)\cdot(a+b))^2-4\cdot a\cdot b\cdot(a-b)^2}}{2\cdot(a-b)^2}\Rightarrow$$

$$\Rightarrow x_{1,2}=\frac{b^2-a^2\pm\sqrt{(a-b)^2\cdot(a+b)^2-4\cdot a\cdot b\cdot(a-b)^2}}{2\cdot(a-b)^2}\Rightarrow$$

$$\Rightarrow x_{1,2}=\frac{b^2-a^2\pm\sqrt{(a-b)^2\cdot(a+b)^2-4\cdot a\cdot b\cdot(a-b)^2}}{2\cdot(a-b)^2}\Rightarrow$$

$$\Rightarrow x_{1,2}=\frac{b^2-a^2\pm\sqrt{(a-b)^2\cdot\left((a+b)^2-4\cdot a\cdot b\right)}}{2\cdot(a-b)^2}\Rightarrow$$

$$\Rightarrow x_{1,2}=\frac{b^2-a^2\pm\sqrt{(a-b)^2}\cdot\sqrt{(a+b)^2-4\cdot a\cdot b}}{2\cdot(a-b)^2}\Rightarrow$$

$$\Rightarrow x_{1,2}=\frac{b^2-a^2\pm(a-b)\cdot\sqrt{(a+b)^2-4\cdot a\cdot b}}{2\cdot(a-b)^2}\Rightarrow$$

$$\Rightarrow x_{1,2}=\frac{b^2-a^2\pm(a-b)\cdot\sqrt{a^2+2\cdot a\cdot b+b^2-4\cdot a\cdot b}}{2\cdot(a-b)^2}\Rightarrow$$

$$\Rightarrow x_{1,2}=\frac{b^2-a^2\pm(a-b)\cdot\sqrt{a^2-2\cdot a\cdot b+b^2}}{2\cdot(a-b)^2} \Rightarrow x_{1,2}=\frac{b^2-a^2\pm(a-b)\cdot\sqrt{(a-b)^2}}{2\cdot(a-b)^2} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow x_{1,2}=\frac{b^2-a^2\pm(a-b)\cdot(a-b)}{2\cdot(a-b)^2} \Rightarrow x_{1,2}=\frac{b^2-a^2\pm(a-b)^2}{2\cdot(a-b)^2} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow x_{1,2}=\frac{b^2-a^2\pm(b-a)^2}{2\cdot(a-b)^2} \Rightarrow x_{1,2}=\frac{(b-a)\cdot(b+a)\pm(b-a)^2}{2\cdot(a-b)^2} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow x_{1,2}=\frac{(b-a)\cdot((b+a)\pm(b-a))}{2\cdot(a-b)^2} \Rightarrow x_{1,2}=\frac{(b-a)\cdot((b+a)\pm(b-a))}{2\cdot(b-a)^2} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow x_{1,2}=\frac{(b-a)\cdot((b+a)\pm(b-a))}{2\cdot(b-a)^2} \Rightarrow x_{1,2}=\frac{(b+a)\pm(b-a)}{2\cdot(b-a)} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \left.\begin{array}{l} x_1=\dfrac{(b+a)+(b-a)}{2\cdot(b-a)} \\ x_2=\dfrac{(b+a)-(b-a)}{2\cdot(b-a)} \end{array}\right\} \Rightarrow \left.\begin{array}{l} x_1=\dfrac{b+a+b-a}{2\cdot(b-a)} \\ x_2=\dfrac{b+a-b+a}{2\cdot(b-a)} \end{array}\right\} \Rightarrow \left.\begin{array}{l} x_1=\dfrac{b+a+b-a}{2\cdot(b-a)} \\ x_2=\dfrac{b+a-b+a}{2\cdot(b-a)} \end{array}\right\} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \left.\begin{array}{l} x_1=\dfrac{2\cdot b}{2\cdot(b-a)} \\ x_2=\dfrac{2\cdot a}{2\cdot(b-a)} \end{array}\right\} \Rightarrow \left.\begin{array}{l} x_1=\dfrac{2\cdot b}{2\cdot(b-a)} \\ x_2=\dfrac{2\cdot a}{2\cdot(b-a)} \end{array}\right\} \Rightarrow \left.\begin{array}{l} x_1=\dfrac{b}{b-a} \\ x_2=\dfrac{a}{b-a} \end{array}\right\}.$$

Vježba 192

Riješi jednadžbu pri čemu su a i b realni brojevi: $(a-b)^2\cdot x^2+\left(a^2-b^2\right)\cdot x+a\cdot b=0.$

Rezultat: $x_1=\dfrac{b}{b-a}\ ,\ x_2=\dfrac{a}{b-a}.$

Zadatak 193 (2B, TUPŠ)

Riješi jednadžbu pri čemu su a i b realni brojevi: $x^2-2\cdot a\cdot x+\left(a^2-b^2\right)=0.$

Rješenje 193

Ponovimo!

$$(-a)^2=a^2\quad,\quad(a\cdot b)^n=a^n\cdot b^n\quad,\quad\sqrt{a\cdot b}=\sqrt{a}\cdot\sqrt{b}\quad,\quad\sqrt{a^2}=a\ ,\ a\geq 0.$$

Skratiti razlomak znači brojnik i nazivnik tog razlomka podijeliti istim brojem različitim od nule i jedinice

$$\frac{a\cdot n}{b\cdot n}=\frac{a}{b}\ ,\ n\neq 0\ ,\ n\neq 1.$$

Zakon distribucije množenja prema zbrajanju.

$$a\cdot(b+c)=a\cdot b+a\cdot c\quad,\quad a\cdot b+a\cdot c=a\cdot(b+c).$$

$$x^2 - 2 \cdot a \cdot x + \left(a^2 - b^2\right) = 0 \Rightarrow \left.\begin{array}{l} x^2 - 2 \cdot a \cdot x + \left(a^2 - b^2\right) = 0 \\ a = 1 \;,\; b = -2 \cdot a \;,\; c = a^2 - b^2 \end{array}\right\} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \left.\begin{array}{l} a = 1 \;,\; b = -2 \cdot a \;,\; c = a^2 - b^2 \\ x_{1,2} = \dfrac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4 \cdot a \cdot c}}{2 \cdot a} \end{array}\right\} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow x_{1,2} = \frac{-(-2 \cdot a) \pm \sqrt{(-2 \cdot a)^2 - 4 \cdot 1 \cdot \left(a^2 - b^2\right)}}{2 \cdot 1} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow x_{1,2} = \frac{2 \cdot a \pm \sqrt{4 \cdot a^2 - 4 \cdot a^2 + 4 \cdot b^2}}{2} \Rightarrow x_{1,2} = \frac{2 \cdot a \pm \sqrt{4 \cdot a^2 - 4 \cdot a^2 + 4 \cdot b^2}}{2} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow x_{1,2} = \frac{2 \cdot a \pm \sqrt{4 \cdot b^2}}{2} \Rightarrow x_{1,2} = \frac{2 \cdot a \pm \sqrt{4} \cdot \sqrt{b^2}}{2} \Rightarrow x_{1,2} = \frac{2 \cdot a \pm 2 \cdot b}{2} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow x_{1,2} = \frac{2 \cdot a \pm 2 \cdot b}{2} \Rightarrow x_{1,2} = \frac{2 \cdot (a \pm b)}{2} \Rightarrow x_{1,2} = \frac{2 \cdot (a \pm b)}{2} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow x_{1,2} = a \pm b \Rightarrow \left.\begin{array}{l} x_1 = a + b \\ x_2 = a - b \end{array}\right\}.$$

Vježba 193

Riješi jednadžbu pri čemu su a i b realni brojevi: $x^2 - 2 \cdot a \cdot x - \left(b^2 - a^2\right) = 0.$

Rezultat: $x_1 = a + b \;,\; x_2 = a - b.$

Zadatak 194 (2B, TUPŠ)

Zadana je kvadratna jednadžba i jedno njezino rješenje x_1. Izračunaj vrijednost parametra m.

$$(m+1) \cdot x^2 + 2 \cdot x - 6 \cdot m = 0 \;,\; x_1 = 3.$$

Rješenje 194

Ponovimo!

Parametar

Vladimir Anić, Ivo Goldstein, Rječnik stranih riječi, Novi Liber, Zagreb, 2002.

Veličina, obično realna varijabla, čije vrijednosti služe za razlikovanje elemenata nekog skupa točaka funkcija, jednadžbi ili drugih matematičkih objekata.

Bratoljub Klaić, Rječnik stranih riječi, Nakladni zavod MH, Zagreb, 1983.

Veličina o kojoj ovisi funkcija ili oblik krivulje.

Zakon distribucije množenja prema zbrajanju.

$$a \cdot (b + c) = a \cdot b + a \cdot c \quad , \quad a \cdot b + a \cdot c = a \cdot (b + c).$$

$$(m+1) \cdot x^2 + 2 \cdot x - 6 \cdot m = 0 \Rightarrow [x = 3] \Rightarrow (m+1) \cdot 3^2 + 2 \cdot 3 - 6 \cdot m = 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow (m+1) \cdot 9 + 6 - 6 \cdot m = 0 \Rightarrow 9 \cdot m + 9 + 6 - 6 \cdot m = 0 \Rightarrow 9 \cdot m - 6 \cdot m = -9 - 6 \Rightarrow 3 \cdot m = -15 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 3 \cdot m = -15 \;/ : 3 \Rightarrow m = -5.$$

Vježba 194

Zadana je kvadratna jednadžba i jedno njezino rješenje x_1. Izračunaj vrijednost parametra m.

$$(m+1)\cdot x^2+2\cdot x-6\cdot m=0 \ \ , \ \ x_1=2.$$

Rezultat: m = 4.

Zadatak 195 (2B, TUPŠ)

U ovisnosti o parametru m opiši vrstu rješenja kvadratne jednadžbe $(m+1)\cdot x^2+3\cdot x-2=0.$

Rješenje 195

Ponovimo!

$$a>b \ , \ c>0 \ \Rightarrow \ \frac{a}{c}>\frac{b}{c} \quad , \quad a<b \ , \ c>0 \ \Rightarrow \ \frac{a}{c}<\frac{b}{c}.$$

Parametar

Vladimir Anić, Ivo Goldstein, Rječnik stranih riječi, Novi Liber, Zagreb, 2002.

Veličina, obično realna varijabla, čije vrijednosti služe za razlikovanje elemenata nekog skupa točaka funkcija, jednadžbi ili drugih matematičkih objekata.

Bratoljub Klaić, Rječnik stranih riječi, Nakladni zavod MH, Zagreb, 1983.

Veličina o kojoj ovisi funkcija ili oblik krivulje.

Zakon distribucije množenja prema zbrajanju.

$$a\cdot(b+c)=a\cdot b+a\cdot c \quad , \quad a\cdot b+a\cdot c=a\cdot(b+c).$$

Diskriminanta kvadratne jednadžbe

$$a\cdot x^2+b\cdot x+c=0 \ , \ a\neq 0$$

je broj

$$D=b^2-4\cdot a\cdot c.$$

- Ako je D > 0, jednadžba ima dva realna i različita rješenja.
- Ako je D = 0, jednadžba ima jedno dvostruko realno rješenje.
- Ako je D < 0, jednadžba ima kompleksno – konjugirana rješenja.

Uočimo da mora biti

$$(m+1)\cdot x^2+3\cdot x-2=0 \ \Rightarrow \ m+1\neq 0 \ \Rightarrow \ m\neq -1.$$

Dalje imamo:

$$(m+1)\cdot x^2+3\cdot x-2=0 \ \Rightarrow \ \left.\begin{array}{l}(m+1)\cdot x^2+3\cdot x-2=0\\ a=m+1 \ , \ b=3 \ , \ c=-2\end{array}\right\} \Rightarrow \left.\begin{array}{l}a=m+1 \ , \ b=3 \ , \ c=-2\\ D=b^2-4\cdot a\cdot c\end{array}\right\} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \ D=3^2-4\cdot(m+1)\cdot(-2) \ \Rightarrow \ D=9+8\cdot(m+1) \ \Rightarrow \ D=9+8\cdot m+8 \ \Rightarrow \ D=8\cdot m+17.$$

Opisi:

- $D>0 \ \Rightarrow \ 8\cdot m+17>0 \ \Rightarrow \ 8\cdot m>-17 \ \Rightarrow \ 8\cdot m>-17 \ /:8 \ \Rightarrow \ m>-\frac{17}{8},$
  jednadžba ima dva realna i različita rješenja.
- $D=0 \ \Rightarrow \ 8\cdot m+17=0 \ \Rightarrow \ 8\cdot m=-17 \ \Rightarrow \ 8\cdot m=-17 \ /:8 \ \Rightarrow \ m=-\frac{17}{8},$
  jednadžba ima jedno dvostruko realno rješenje.
- $D<0 \ \Rightarrow \ 8\cdot m+17<0 \ \Rightarrow \ 8\cdot m<-17 \ \Rightarrow \ 8\cdot m<-17 \ /:8 \ \Rightarrow \ m<-\frac{17}{8},$
  jednadžba ima kompleksno – konjugirana rješenja.

Vježba 195

U ovisnosti o parametru m opiši vrstu rješenja kvadratne jednadžbe

$$(m-1)\cdot x^2+2\cdot m\cdot x+m+2=0.$$

Rezultat: $m \neq 1$

$m<2,$ jednadžba ima dva realna i različita rješenja,
$m=2,$ jednadžba ima jedno dvostruko realno rješenje,
$m>2,$ jednadžba ima kompleksno – konjugirana rješenja.

Zadatak 196 (2B, TUPŠ)

Odredi jednadžbe tangenata na parabolu $y=2\cdot x^2+2\cdot x+2$ koje prolaze točkom A(1, – 12).

Rješenje 196

Ponovimo!

$$(a-b)^2=a^2-2\cdot a\cdot b+b^2.$$

Zakon distribucije množenja prema zbrajanju.

$$a\cdot(b+c)=a\cdot b+a\cdot c \quad , \quad a\cdot b+a\cdot c=a\cdot(b+c).$$

Skratiti razlomak znači brojnik i nazivnik tog razlomka podijeliti istim brojem različitim od nule i jedinice

$$\frac{a\cdot n}{b\cdot n}=\frac{a}{b} \ , \ n\neq 0 \ , \ n\neq 1.$$

Jednadžba pravca oblika

$$y=k\cdot x+l$$

naziva se eksplicitni oblik jednadžbe pravca ili kraće, eksplicitna jednadžba pravca. Broj k naziva se koeficijent smjera pravca. Broj l nazivamo odsječak pravca na osi y.
Diskriminanta kvadratne jednadžbe

$$a\cdot x^2+b\cdot x+c=0 \ , \ a\neq 0$$

je broj

$$D=b^2-4\cdot a\cdot c.$$

- Ako je D > 0, jednadžba ima dva realna i različita rješenja.
- Ako je D = 0, jednadžba ima jedno dvostruko realno rješenje.
- Ako je D < 0, jednadžba ima kompleksno – konjugirana rješenja.

Budući da točka A pripada tangenti (pravcu), uvrstit ćemo njezine koordinate u jednadžbu pravca (tangente) y = k · x + l.

$$\left.\begin{array}{l} A(x,\ y)=A(1,\ -12) \\ y=k\cdot x+l \end{array}\right\} \Rightarrow -12=k\cdot 1+l \Rightarrow -12=k+l \Rightarrow k+l=-12 \Rightarrow l=-12-k.$$

Jednadžba tangente ima oblik

$$\left.\begin{array}{l} l=-12-k \\ y=k\cdot x+l \end{array}\right\} \Rightarrow y=k\cdot x-12-k.$$

Da bismo odredili presjek pravca (tangente) i parabole moramo riješiti sustav jednadžba.

$$\left.\begin{array}{l} y=2\cdot x^2+2\cdot x+2 \\ y=k\cdot x-12-k \end{array}\right\} \Rightarrow \left[\begin{array}{l} \text{metoda} \\ \text{komparacije} \end{array}\right] \Rightarrow 2\cdot x^2+2\cdot x+2=k\cdot x-12-k \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 2\cdot x^2+2\cdot x+2-k\cdot x+12+k=0 \Rightarrow 2\cdot x^2+(2-k)\cdot x+14+k=0.$$

Ova jednadžba ima jedno rješenje (dvostruko realno rješenje), ako je D = 0.

Zato slijedi:

$$2\cdot x^2+(2-k)\cdot x+14+k=0 \Rightarrow \left.\begin{matrix} 2\cdot x^2+(2-k)\cdot x+14+k=0 \\ a=2\ ,\ b=2-k\ ,\ c=14+k \end{matrix}\right\} \Rightarrow \begin{bmatrix} D>0 \\ b^2-4\cdot a\cdot c>0 \end{bmatrix} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow (2-k)^2-4\cdot 2\cdot(14+k)=0 \Rightarrow (2-k)^2-8\cdot(14+k)=0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 4-4\cdot k+k^2-112-8\cdot k=0 \Rightarrow k^2-12\cdot k-108=0 \Rightarrow \left.\begin{matrix} k^2-12\cdot k-108=0 \\ a=1\ ,\ b=-12\ ,\ c=-108 \end{matrix}\right\} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \left.\begin{matrix} a=1\ ,\ b=-12\ ,\ c=-108 \\ k_{1,2}=\dfrac{-b\pm\sqrt{b^2-4\cdot a\cdot c}}{2\cdot a} \end{matrix}\right\} \Rightarrow k_{1,2}=\frac{-(-12)\pm\sqrt{(-12)^2-4\cdot 1\cdot(-108)}}{2\cdot 1} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow k_{1,2}=\frac{12\pm\sqrt{144+432}}{2} \Rightarrow k_{1,2}=\frac{12\pm\sqrt{576}}{2} \Rightarrow k_{1,2}=\frac{12\pm 24}{2} \Rightarrow \left.\begin{matrix} k_1=\dfrac{12+24}{2} \\ k_2=\dfrac{12-24}{2} \end{matrix}\right\} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \left.\begin{matrix} k_1=\dfrac{36}{2} \\ k_2=-\dfrac{12}{2} \end{matrix}\right\} \Rightarrow \left.\begin{matrix} k_1=\dfrac{36}{2} \\ k_2=-\dfrac{12}{2} \end{matrix}\right\} \Rightarrow \left.\begin{matrix} k_1=18 \\ k_2=-6 \end{matrix}\right\}.$$

Računamo odsječak l.

- $\left.\begin{matrix} l=-12-k \\ k=18 \end{matrix}\right\} \Rightarrow l_1=-12-18 \Rightarrow l_1=-30$
- $\left.\begin{matrix} l=-12-k \\ k=-6 \end{matrix}\right\} \Rightarrow l_2=-12-(-6) \Rightarrow l_2=-12+6 \Rightarrow l_2=-6.$

Jednadžbe tangenata glase:

- $y=k\cdot x+l \Rightarrow \begin{bmatrix} k=18 \\ l=-30 \end{bmatrix} \Rightarrow y=18\cdot x-30$
- $y=k\cdot x+l \Rightarrow \begin{bmatrix} k=-6 \\ l=-6 \end{bmatrix} \Rightarrow y=-6\cdot x-6.$

Vježba 196

Odredi koeficijente smjerova tangenata na parabolu $y=2\cdot x^2+2\cdot x+2$ koje prolaze točkom A(1, 11).

Rezultat: $k_1=11,\ k_2=-5.$

Zadatak 197 (2B, TUPŠ)

Ako su x_1 i x_2 rješenja jednadžbe $x^2+p\cdot x+q=0$ izračunaj $(x_1+x_2)^{-2}$.

Rješenje 197

Ponovimo!

$$\left(\frac{a}{b}\right)^n=\frac{a^n}{b^n}\quad,\quad n=\frac{n}{1}\quad,\quad a^{-n}=\frac{1}{a^n}.$$

Jednadžba oblika

$$a \cdot x^2 + b \cdot x + c = 0,$$

($a \neq 0$, b i c su realni brojevi) naziva se kvadratna jednadžba. Svaki broj x (realan ili kompleksan) koji zadovoljava tu jednadžbu naziva se rješenje kvadratne jednadžbe.
Rješenja x_1 i x_2 kvadratne jednadžbe

$$a \cdot x^2 + b \cdot x + c = 0$$

zadovoljavaju Viète ove formule:

$$x_1 + x_2 = -\frac{b}{a} \quad , \quad x_1 \cdot x_2 = \frac{c}{a}.$$

$$x^2 + p \cdot x + q = 0 \Rightarrow \left.\begin{matrix} x^2 + p \cdot x + q = 0 \\ a = 1 \ , \ b = p \ , \ c = q \end{matrix}\right\} \Rightarrow \left.\begin{matrix} a = 1 \ , \ b = p \ , \ c = q \\ x_1 + x_2 = -\frac{b}{a} \end{matrix}\right\} \Rightarrow x_1 + x_2 = -\frac{p}{1} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow x_1 + x_2 = -p.$$

Sada je:

$$\left(x_1 + x_2\right)^{-2} = \frac{1}{\left(x_1 + x_2\right)^2} = \frac{1}{(-p)^2} = \frac{1}{p^2}.$$

Vježba 197

Ako su x_1 i x_2 rješenja jednadžbe $x^2 + p \cdot x + q = 0$ izračunaj $\left(x_1 + x_2\right)^{-1}$.

Rezultat: $-\frac{1}{p}.$

Zadatak 198 (2B, TUPŠ)

Znajući da su m i n rješenja jednadžbe $x^2 + x - c = 0$ pojednostavnite izraz $I = m^3 + n^3 - 5 \cdot m^2 \cdot n - 5 \cdot m \cdot n^2.$

Rješenje 198

Ponovimo!

$$a^3 + b^3 = (a+b) \cdot \left(a^2 - a \cdot b + b^2\right) \quad , \quad a^2 + 2 \cdot a \cdot b + b^2 = (a+b)^2 \quad , \quad n = \frac{n}{1}.$$

$$a^1 = a \quad , \quad a^n : a^m = a^{n-m}.$$

Zakon distribucije množenja prema zbrajanju.

$$a \cdot (b + c) = a \cdot b + a \cdot c \quad , \quad a \cdot b + a \cdot c = a \cdot (b + c).$$

Jednadžba oblika

$$a \cdot x^2 + b \cdot x + c = 0,$$

($a \neq 0$, b i c su realni brojevi) naziva se kvadratna jednadžba. Svaki broj x (realan ili kompleksan) koji zadovoljava tu jednadžbu naziva se rješenje kvadratne jednadžbe.
Rješenja x_1 i x_2 kvadratne jednadžbe

$$a \cdot x^2 + b \cdot x + c = 0$$

zadovoljavaju Viète ove formule:

$$x_1 + x_2 = -\frac{b}{a} \quad , \quad x_1 \cdot x_2 = \frac{c}{a}.$$

$$I = m^3 + n^3 - 5 \cdot m^2 \cdot n - 5 \cdot m \cdot n^2 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow\ I=(m+n)\cdot\left(m^2-m\cdot n+n^2\right)-5\cdot m\cdot n\cdot(m+n)\ \Rightarrow$$

$$\Rightarrow\ I=(m+n)\cdot\left(m^2+2\cdot m\cdot n+n^2-3\cdot m\cdot n\right)-5\cdot m\cdot n\cdot(m+n)\ \Rightarrow$$

$$\Rightarrow\ I=(m+n)\cdot\left(\left(m^2+2\cdot m\cdot n+n^2\right)-3\cdot m\cdot n\right)-5\cdot m\cdot n\cdot(m+n)\ \Rightarrow$$

$$\Rightarrow\ I=(m+n)\cdot\left((m+n)^2-3\cdot m\cdot n\right)-5\cdot m\cdot n\cdot(m+n)\ \Rightarrow\ \begin{bmatrix} m+n=-\frac{b}{a} \\ m\cdot n=\frac{c}{a}\end{bmatrix}\Rightarrow$$

$$\Rightarrow\ I=\left(-\frac{b}{a}\right)\cdot\left(\left(-\frac{b}{a}\right)^2-3\cdot\frac{c}{a}\right)-5\cdot\frac{c}{a}\cdot\left(-\frac{b}{a}\right)\ \Rightarrow\ \begin{bmatrix} x^2+x-c=0 \\ a=1\ ,\ b=1\ ,\ c=-c\end{bmatrix}\Rightarrow$$

$$\Rightarrow\ I=\left(-\frac{1}{1}\right)\cdot\left(\left(-\frac{1}{1}\right)^2-3\cdot\frac{-c}{1}\right)-5\cdot\frac{-c}{1}\cdot\left(-\frac{1}{1}\right)\ \Rightarrow\ I=(-1)\cdot\left((-1)^2-3\cdot(-c)\right)-5\cdot(-c)\cdot(-1)\ \Rightarrow$$

$$\Rightarrow\ I=(-1)\cdot(1+3\cdot c)-5\cdot c\ \Rightarrow\ I=-1-3\cdot c-5\cdot c\ \Rightarrow\ I=-1-8\cdot c.$$

Vježba 198

Znajući da su m i n rješenja jednadžbe $x^2+x-1=0$ pojednostavnite izraz $I=m^3+n^3-5\cdot m^2\cdot n-5\cdot m\cdot n^2$.

Rezultat: 7.

Zadatak 199 (Katarina, srednja škola)

Zadana je kvadratna jednadžba $p\cdot x\cdot(1+x)+2=2\cdot x\cdot(p+x)$ pri čemu je x nepoznanica, a p neki realni broj. Za koje p jednadžba ima realna rješenja?

Rješenje 199

Ponovimo!

$$a^1=a\quad,\quad a^n\cdot a^m=a^{n+m}\quad,\quad a^2-2\cdot a\cdot b+b^2=(a-b)^2\quad,\quad a^2\geq 0\ ,\ a\in R.$$

Zakon distribucije množenja prema zbrajanju.

$$a\cdot(b+c)=a\cdot b+a\cdot c\quad,\quad a\cdot b+a\cdot c=a\cdot(b+c).$$

Diskriminanta kvadratne jednadžbe

$$a\cdot x^2+b\cdot x+c=0\ ,\ a\neq 0$$

je broj

$$D=b^2-4\cdot a\cdot c.$$

- Ako je D > 0, jednadžba ima dva realna i različita rješenja.
- Ako je D = 0, jednadžba ima jedno dvostruko realno rješenje.
- Ako je D < 0, jednadžba ima kompleksno – konjugirana rješenja.

Preoblikujemo jednadžbu tako da je zapišemo u općem obliku:

$$p\cdot x\cdot(1+x)+2=2\cdot x\cdot(p+x)\ \Rightarrow\ p\cdot x+p\cdot x^2+2=2\cdot x\cdot p+2\cdot x^2\ \Rightarrow$$

$$\Rightarrow\ p\cdot x+p\cdot x^2+2-2\cdot x\cdot p-2\cdot x^2=0\ \Rightarrow\ p\cdot x^2-2\cdot x^2-p\cdot x+2=0\ \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \left(p\cdot x^2-2\cdot x^2\right)-p\cdot x+2=0 \Rightarrow (p-2)\cdot x^2-p\cdot x+2=0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \left.\begin{array}{l}(p-2)\cdot x^2-p\cdot x+2=0\\ a=p-2\ ,\ b=-p\ ,\ c=2\end{array}\right\} \Rightarrow \left.\begin{array}{l}a=p-2\ ,\ b=-p\ ,\ c=2\\ D=b^2-4\cdot a\cdot c\end{array}\right\} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow D=(-p)^2-4\cdot(p-2)\cdot 2 \Rightarrow D=p^2-8\cdot(p-2) \Rightarrow D=p^2-8\cdot p+16 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow D=(p-4)^2\geq 0.$$

Budući da je $D\geq 0$, zaključujemo da jednadžba uvijek ima realna rješenja za svaki realni broj p.

Vježba 199

Zadana je kvadratna jednadžba $p\cdot x\cdot(1+x)=2\cdot x\cdot(p+x)-2$ pri čemu je x nepoznanica, a p neki realni broj. Za koje p jednadžba ima realna rješenja?

Rezultat: $p\in R.$

Zadatak 200 (Sonja, maturantica)

Riješite jednadžbu: $12\cdot x^3-13\cdot x^2-13\cdot x+12=0.$

Rješenje 200

Ponovimo!

$$a^1=a\quad,\quad a^n:a^m=a^{n-m}\quad,\quad a^3+b^3=(a+b)\cdot\left(a^2-a\cdot b+b^2\right).$$

Zakon distribucije množenja prema zbrajanju.

$$a\cdot(b+c)=a\cdot b+a\cdot c\quad,\quad a\cdot b+a\cdot c=a\cdot(b+c).$$

Da bi umnožak bio jednak nuli, dovoljno je da jedan faktor bude jednak nuli.

$$a\cdot b=0 \Leftrightarrow a=0 \text{ ili } b=0 \text{ ili } a=b=0.$$

Skratiti razlomak znači brojnik i nazivnik tog razlomka podijeliti istim brojem različitim od nule i jedinice

$$\frac{a\cdot n}{b\cdot n}=\frac{a}{b}\ ,\ n\neq 0\ ,\ n\neq 1.$$

Kubna jednadžba ima oblik

$$a\cdot x^3+b\cdot x^2+c\cdot x+d=0\ ,\ a\neq 0.$$

Kubna jednadžba općenito ima tri rješenja.

$$12\cdot x^3-13\cdot x^2-13\cdot x+12=0 \Rightarrow \left(12\cdot x^3+12\right)+\left(-13\cdot x^2-13\cdot x\right)=0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 12\cdot\left(x^3+1\right)-13\cdot x\cdot(x+1)=0 \Rightarrow 12\cdot(x+1)\cdot\left(x^2-x+1\right)-13\cdot x\cdot(x+1)=0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow (x+1)\cdot\left(12\cdot\left(x^2-x+1\right)-13\cdot x\right)=0 \Rightarrow (x+1)\cdot\left(12\cdot x^2-12\cdot x+12-13\cdot x\right)=0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow (x+1)\cdot\left(12\cdot x^2-25\cdot x+12\right)=0 \Rightarrow \left.\begin{array}{l}x+1=0\\ 12\cdot x^2-25\cdot x+12=0\end{array}\right\}.$$

Riješimo prvu jednadžbu (linearnu jednadžbu).

$$x+1=0 \Rightarrow x_1=-1.$$

Riješimo drugu jednadžbu (kvadratnu jednadžbu).

$$12 \cdot x^2 - 25 \cdot x + 12 = 0 \Rightarrow \left.\begin{array}{l} 12 \cdot x^2 - 25 \cdot x + 12 = 0 \\ a = 12 \ , \ b = -25 \ , \ c = 12 \end{array}\right\} \Rightarrow \left.\begin{array}{l} a = 12 \ , \ b = -25 \ , \ c = 12 \\ x_{2,3} = \dfrac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4 \cdot a \cdot c}}{2 \cdot a} \end{array}\right\} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow x_{2,3} = \frac{-(-25) \pm \sqrt{(-25)^2 - 4 \cdot 12 \cdot 12}}{2 \cdot 12} \Rightarrow x_{2,3} = \frac{25 \pm \sqrt{625 - 576}}{24} \Rightarrow x_{2,3} = \frac{25 \pm \sqrt{49}}{24} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow x_{2,3} = \frac{25 \pm 7}{24} \Rightarrow \left.\begin{array}{l} x_2 = \dfrac{25+7}{24} \\ x_3 = \dfrac{25-7}{24} \end{array}\right\} \Rightarrow \left.\begin{array}{l} x_2 = \dfrac{32}{24} \\ x_3 = \dfrac{18}{24} \end{array}\right\} \Rightarrow \left.\begin{array}{l} x_2 = \dfrac{32}{24} \\ x_3 = \dfrac{18}{24} \end{array}\right\} \Rightarrow \left.\begin{array}{l} x_2 = \dfrac{4}{3} \\ x_3 = \dfrac{3}{4} \end{array}\right\}.$$

Vježba 200

Riješite jednadžbu: $6 \cdot x^3 - 7 \cdot x^2 - 7 \cdot x + 6 = 0.$

Rezultat: $x_1 = -1 \ , \ x_2 = \frac{2}{3} \ , \ x_3 = \frac{3}{2}.$