Zadatak 161 (Siniša, srednja škola)

Ako su a, b, c duljine stranica trokuta ΔABC, onda su rješenja kvadratne jednadžbe $b^2 \cdot x^2 + \left(b^2 + c^2 - a^2\right) \cdot x + c^2 = 0$ kompleksni brojevi. Dokažite.

Rješenje 161

Ponovimo!

Diskriminanta kvadratne jednadžbe

$$a \cdot x^2 + b \cdot x + c = 0$$

je broj

$$D = b^2 - 4 \cdot a \cdot c.$$

- Ako je D > 0, jednadžba ima dva realna rješenja.
- Ako je D = 0, jednadžba ima jedno dvostruko realno rješenje.
- Ako je D < 0, jednadžba ima kompleksno – konjugirana rješenja.

Zakon distribucije množenja prema zbrajanju.

$$a \cdot (b + c) = a \cdot b + a \cdot c \quad , \quad a \cdot b + a \cdot c = a \cdot (b + c).$$

$$a^2 - b^2 = (a - b) \cdot (a + b) \quad , \quad (a \cdot b)^n = a^n \cdot b^n \quad , \quad (a - b)^2 = a^2 - 2 \cdot a \cdot b + b^2.$$

$$(a + b)^2 = a^2 + 2 \cdot a \cdot b + b^2.$$

Nejednakost trokuta

Duljina svake stranice trokuta manja je od zbroja duljina preostalih dviju stranica.

$$a < b + c \quad , \quad b < a + c \quad , \quad c < a + b.$$

$$\left.\begin{array}{l} b^2 \cdot x^2 + \left(b^2 + c^2 - a^2\right) \cdot x + c^2 = 0 \\ a = b^2 \quad b = b^2 + c^2 - a^2, \ c = c^2 \end{array}\right\} \Rightarrow \left[D = b^2 - 4 \cdot a \cdot c\right] \Rightarrow$$

$$\Rightarrow D = \left(b^2 + c^2 - a^2\right)^2 - 4 \cdot b^2 \cdot c^2 \Rightarrow D = \left(b^2 + c^2 - a^2\right)^2 - (2 \cdot b \cdot c)^2 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow D = \left(b^2 + c^2 - a^2 - 2 \cdot b \cdot c\right) \cdot \left(b^2 + c^2 - a^2 + 2 \cdot b \cdot c\right) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow D = \left(b^2 - 2 \cdot b \cdot c + c^2 - a^2\right) \cdot \left(b^2 + 2 \cdot b \cdot c + c^2 - a^2\right) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow D = \left(\left(b^2 - 2 \cdot b \cdot c + c^2\right) - a^2\right) \cdot \left(\left(b^2 + 2 \cdot b \cdot c + c^2\right) - a^2\right) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow D = \left((b - c)^2 - a^2\right) \cdot \left((b + c)^2 - a^2\right) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow D = (b - c - a) \cdot (b - c + a) \cdot (b + c - a) \cdot (b + c + a).$$

Budući da je u svakom trokutu zbroj duljina dviju stranica veći od duljine treće stranice (nejednakost trokuta), vrijedi:

$$\left.\begin{array}{l} b - c - a < 0 \\ b - c + a > 0 \\ b + c - a > 0 \\ b + c + a > 0 \end{array}\right\} \Rightarrow D = \underbrace{(b - c - a)}_{-} \cdot \underbrace{(b - c + a)}_{+} \cdot \underbrace{(b + c - a)}_{+} \cdot \underbrace{(b + c + a)}_{+} < 0.$$

Diskriminanta D je negativna pa kvadratna jednadžba ima kompleksno – konjugirana rješenja.

Vježba 161

Ako su a, b, c duljine stranica trokuta ΔABC, onda su rješenja kvadratne jednadžbe $b^2 \cdot x^2 - \left(a^2 - b^2 - c^2\right) \cdot x + c^2 = 0$ kompleksni brojevi. Dokažite.

Rezultat: Dokaz analogan.

Zadatak 162 (Bare, gimnazija)

Ako jednadžba $x^2 + p \cdot x + q = 0$ ima realna i različita rješenja (p, q realni parametri), onda i jednadžba $x^2 + (p + 2 \cdot a) \cdot x + q + a \cdot p = 0$, gdje je a bilo koji realan broj ima, također, realna i različita rješenja. Dokazati.

Rješenje 162

Ponovimo!

Parametar

Vladimir Anić, Ivo Goldstein, Rječnik stranih riječi, Novi Liber, Zagreb, 2002.

Veličina, obično realna varijabla, čije vrijednosti služe za razlikovanje elemenata nekog skupa točaka funkcija, jednadžbi ili drugih matematičkih objekata.

Bratoljub Klaić, Rječnik stranih riječi, Nakladni zavod MH, Zagreb, 1983.

Veličina o kojoj ovisi funkcija ili oblik krivulje.

Diskriminanta kvadratne jednadžbe

$$a \cdot x^2 + b \cdot x + c = 0$$

je broj

$$D = b^2 - 4 \cdot a \cdot c.$$

- Ako je D > 0, jednadžba ima dva realna rješenja.
- Ako je D = 0, jednadžba ima jedno dvostruko realno rješenje.
- Ako je D < 0, jednadžba ima kompleksno – konjugirana rješenja.

Zakon distribucije množenja prema zbrajanju.

$$a \cdot (b + c) = a \cdot b + a \cdot c \quad , \quad a \cdot b + a \cdot c = a \cdot (b + c).$$

$$(a + b)^2 = a^2 + 2 \cdot a \cdot b + b^2 \quad , \quad (a \cdot b)^n = a^n \cdot b^n \quad , \quad a^2 \ge 0 \ , \ a \in R.$$

Budući da jednadžba $x^2 + p \cdot x + q = 0$ ima realna i različita rješenja, njezina je diskriminanta pozitivna.

$$\left.\begin{array}{l} x^2 + p \cdot x + q = 0 \\ a = 1 \ , \ b = p \ , \ c = q \end{array}\right\} \Rightarrow \left.\begin{array}{l} a = 1 \ , \ b = p \ , \ c = q \\ D = b^2 - 4 \cdot a \cdot c \end{array}\right\} \Rightarrow D = p^2 - 4 \cdot 1 \cdot q \Rightarrow$$

$$\Rightarrow D = p^2 - 4 \cdot q \Rightarrow D > 0.$$

Jednadžba $x^2 + (p + 2 \cdot a) \cdot x + q + a \cdot p = 0$, također, ima realna i različita rješenja pa je i njezina diskriminanta pozitivna.

$$\left.\begin{array}{l} x^2 + (p + 2 \cdot a) \cdot x + q + a \cdot p = 0 \\ a = 1 \ , \ b = p + 2 \cdot a \ , \ c = q + a \cdot p \end{array}\right\} \Rightarrow \left.\begin{array}{l} a = 1 \ , \ b = p + 2 \cdot a \ , \ c = q + a \cdot p \\ D_1 = b^2 - 4 \cdot a \cdot c \end{array}\right\} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow D_1 = (p + 2 \cdot a)^2 - 4 \cdot 1 \cdot (q + a \cdot p) \Rightarrow D_1 = p^2 + 4 \cdot a \cdot p + 4 \cdot a^2 - 4 \cdot q - 4 \cdot a \cdot p \Rightarrow$$

$$\Rightarrow D_1 = p^2 + 4 \cdot a \cdot p + 4 \cdot a^2 - 4 \cdot q - 4 \cdot a \cdot p \Rightarrow D_1 = p^2 + 4 \cdot a^2 - 4 \cdot q \Rightarrow$$

$$\Rightarrow D_1 = p^2 - 4\cdot q + 4\cdot a^2 \Rightarrow D_1 = \left(p^2 - 4\cdot q\right) + 4\cdot a^2 \Rightarrow \left[D = p^2 - 4\cdot q\right] \Rightarrow$$

$$\Rightarrow D_1 = D + 4\cdot a^2 \Rightarrow \begin{bmatrix} D > 0 \\ a^2 \ge 0 \end{bmatrix} \Rightarrow D_1 > 0.$$

Vježba 162

Ako jednadžba $x^2 + p\cdot x + q = 0$ ima realna i različita rješenja (p, q realni parametri), onda i jednadžba $x^2 + (p+2)\cdot x + q + p = 0$ ima, također, realna i različita rješenja. Dokazati.

Rezultat: Dokaz analogan.

Zadatak 163 (Marija, gimnazija)

Pokažite da kvadratna jednadžba $x^2 - 2\cdot a\cdot x + a^2 - b^2 - c^2 = 0$ ima rješenja u skupu R za sve $a, b, c \in R$.

Rješenje 163

Ponovimo!

$$(a\cdot b)^n = a^n \cdot b^n \quad , \quad a \in R \Rightarrow a^2 \ge 0.$$

Zakon distribucije množenja prema zbrajanju.

$$a\cdot(b+c) = a\cdot b + a\cdot c \quad , \quad a\cdot b + a\cdot c = a\cdot(b+c).$$

Diskriminanta kvadratne jednadžbe

$$a\cdot x^2 + b\cdot x + c = 0$$

je broj

$$D = b^2 - 4\cdot a\cdot c.$$

- Ako je D > 0, jednadžba ima dva realna rješenja.
- Ako je D = 0, jednadžba ima jedno dvostruko realno rješenje.
- Ako je D < 0, jednadžba ima kompleksno – konjugirana rješenja.
- Ako je D ≥ 0, jednadžba ima realna rješenja.

Pokažimo da je diskriminanta zadane jednadžbe nenegativan realan broj (broj veći od nule ili jednak nuli).

$$x^2 - 2\cdot a\cdot x + a^2 - b^2 - c^2 = 0 \Rightarrow \left.\begin{matrix} x^2 - 2\cdot a\cdot x + a^2 - b^2 - c^2 = 0 \\ a = 1 \ , \ b = -2\cdot a \ , \ c = a^2 - b^2 - c^2 \end{matrix}\right\} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \left.\begin{matrix} a = 1 \ , \ b = -2\cdot a \ , \ c = a^2 - b^2 - c^2 \\ D = b^2 - 4\cdot a\cdot c \end{matrix}\right\} \Rightarrow D = (-2\cdot a)^2 - 4\cdot 1\cdot\left(a^2 - b^2 - c^2\right) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow D = 4\cdot a^2 - 4\cdot a^2 + 4\cdot b^2 + 4\cdot c^2 \Rightarrow D = 4\cdot a^2 - 4\cdot a^2 + 4\cdot b^2 + 4\cdot c^2 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow D = 4\cdot b^2 + 4\cdot c^2 \Rightarrow D = 4\cdot\underbrace{\left(b^2 + c^2\right)}_{\ge 0} \Rightarrow D \ge 0.$$

Vježba 163

Pokažite da kvadratna jednadžba $x^2 - 2\cdot a\cdot x - a^2 - b^2 - c^2 = 0$ ima rješenja u skupu R za sve $a, b, c \in R$.

Rezultat: $D = 4\cdot\left(2\cdot a^2 + b^2 + c^2\right) \ge 0.$

Zadatak 164 (4A, TUPŠ)

Koji x predstavlja jedno od rješenja jednadžbe $\frac{1}{2}\cdot x^2+b\cdot x+3=0$?

$$A.\ x=b+\sqrt{b^2-6} \qquad B.\ x=b-\sqrt{b^2+6}$$
$$C.\ x=-b+\sqrt{b^2+6} \qquad D.\ x=-b-\sqrt{b^2-6}$$

Rješenje 164

Ponovimo!

$$(a\cdot b)^n=a^n\cdot b^n \quad , \quad \sqrt{a\cdot b}=\sqrt{a}\cdot\sqrt{b}.$$

Zakon distribucije množenja prema zbrajanju.

$$a\cdot(b+c)=a\cdot b+a\cdot c \quad , \quad a\cdot b+a\cdot c=a\cdot(b+c).$$

Skratiti razlomak znači brojnik i nazivnik tog razlomka podijeliti istim brojem različitim od nule i jedinice

$$\frac{a\cdot n}{b\cdot n}=\frac{a}{b} \ , \ n\neq 0 \ , \ n\neq 1.$$

Rješenja kvadratne jednadžbe

$$a\cdot x^2+b\cdot x+c=0$$

su brojevi

$$x_{1,2}=\frac{-b\pm\sqrt{b^2-4\cdot a\cdot c}}{2\cdot a} \Rightarrow \left.\begin{array}{l} x_1=\frac{-b+\sqrt{b^2-4\cdot a\cdot c}}{2\cdot a} \\ x_2=\frac{-b-\sqrt{b^2-4\cdot a\cdot c}}{2\cdot a}\end{array}\right\}.$$

Riješimo kvadratnu jednadžbu i rješenja usporedimo sa ponuđenim odgovorima.

$$\frac{1}{2}\cdot x^2+b\cdot x+3=0 \Rightarrow \frac{1}{2}\cdot x^2+b\cdot x+3=0 \ /\cdot 2 \Rightarrow x^2+2\cdot b\cdot x+6=0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \left.\begin{array}{l} x^2+2\cdot b\cdot x+6=0 \\ a=1 \ , \ b=2\cdot b \ , \ c=6\end{array}\right\} \Rightarrow \left.\begin{array}{l} a=1 \ , \ b=2\cdot b \ , \ c=6 \\ x_{1,2}=\frac{-b\pm\sqrt{b^2-4\cdot a\cdot c}}{2\cdot a}\end{array}\right\} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow x_{1,2}=\frac{-2\cdot b\pm\sqrt{(2\cdot b)^2-4\cdot 1\cdot 6}}{2\cdot 1} \Rightarrow x_{1,2}=\frac{-2\cdot b\pm\sqrt{4\cdot b^2-24}}{2} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow x_{1,2}=\frac{-2\cdot b\pm\sqrt{4\cdot\left(b^2-6\right)}}{2} \Rightarrow x_{1,2}=\frac{-2\cdot b\pm\sqrt{4}\cdot\sqrt{b^2-6}}{2} \Rightarrow x_{1,2}=\frac{-2\cdot b\pm 2\cdot\sqrt{b^2-6}}{2} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow x_{1,2}=\frac{2\cdot\left(-b\pm\sqrt{b^2-6}\right)}{2} \Rightarrow x_{1,2}=\frac{2\cdot\left(-b\pm\sqrt{b^2-6}\right)}{2} \Rightarrow x_{1,2}=-b\pm\sqrt{b^2-6} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \left.\begin{array}{l} x_1=-b+\sqrt{b^2-6} \\ x_2=-b-\sqrt{b^2-6}\end{array}\right\}.$$

Odgovor je pod D.

Vježba 164

Koji x predstavlja jedno od rješenja jednadžbe $\frac{1}{2}\cdot x^2+b\cdot x-3=0$?

$$A.\ x=b+\sqrt{b^2-6} \qquad B.\ x=b-\sqrt{b^2+6}$$

$$C.\ x=-b+\sqrt{b^2+6} \qquad D.\ x=-b-\sqrt{b^2-6}$$

Rezultat: C.

Zadatak 165 (Marijana 123, medicinska škola)

Riješite kvadratnu jednadžbu $x^2-4\cdot x+7=0$.

Rješenje 165

Ponovimo!

$$\sqrt{a\cdot b}=\sqrt{a}\cdot\sqrt{b} \quad , \quad \sqrt{-a}=i\cdot\sqrt{a}\ ,\ a>0 \quad , \quad \frac{a+b}{n}=\frac{a}{n}+\frac{b}{n} \quad , \quad \frac{a-b}{n}=\frac{a}{n}-\frac{b}{n}.$$

Skratiti razlomak znači brojnik i nazivnik tog razlomka podijeliti istim brojem različitim od nule i jedinice

$$\frac{a\cdot n}{b\cdot n}=\frac{a}{b}\ ,\ n\neq 0\ ,\ n\neq 1.$$

Rješenja kvadratne jednadžbe

$$a\cdot x^2+b\cdot x+c=0$$

su brojevi

$$x_{1,2}=\frac{-b\pm\sqrt{b^2-4\cdot a\cdot c}}{2\cdot a} \Rightarrow \left.\begin{array}{l} x_1=\frac{-b+\sqrt{b^2-4\cdot a\cdot c}}{2\cdot a} \\ x_2=\frac{-b-\sqrt{b^2-4\cdot a\cdot c}}{2\cdot a}\end{array}\right\}.$$

Rješenja kvadratne jednadžbe iznose:

$$x^2-4\cdot x+7=0 \Rightarrow \left.\begin{array}{l} x^2-4\cdot x+7=0 \\ a=1\ ,\ b=-4\ ,\ c=7\end{array}\right\} \Rightarrow \left.\begin{array}{l} a=1\ ,\ b=-4\ ,\ c=7 \\ x_{1,2}=\frac{-b\pm\sqrt{b^2-4\cdot a\cdot c}}{2\cdot a}\end{array}\right\} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow x_{1,2}=\frac{-(-4)\pm\sqrt{(-4)^2-4\cdot 1\cdot 7}}{2\cdot 1} \Rightarrow x_{1,2}=\frac{4\pm\sqrt{16-28}}{2} \Rightarrow x_{1,2}=\frac{4\pm\sqrt{-12}}{2} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow x_{1,2}=\frac{4\pm\sqrt{4\cdot(-3)}}{2} \Rightarrow x_{1,2}=\frac{4\pm\sqrt{4}\cdot\sqrt{-3}}{2} \Rightarrow x_{1,2}=\frac{4\pm 2\cdot\sqrt{-3}}{2} \Rightarrow x_{1,2}=\frac{4\pm 2\cdot i\cdot\sqrt{3}}{2} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \left.\begin{array}{l} x_1=\frac{4+2\cdot i\cdot\sqrt{3}}{2} \\ x_2=\frac{4-2\cdot i\cdot\sqrt{3}}{2}\end{array}\right\} \Rightarrow \left.\begin{array}{l} x_1=\frac{4}{2}+\frac{2\cdot i\cdot\sqrt{3}}{2} \\ x_2=\frac{4}{2}-\frac{2\cdot i\cdot\sqrt{3}}{2}\end{array}\right\} \Rightarrow \left.\begin{array}{l} x_1=\frac{4}{2}+\frac{2\cdot i\cdot\sqrt{3}}{2} \\ x_2=\frac{4}{2}-\frac{2\cdot i\cdot\sqrt{3}}{2}\end{array}\right\} \Rightarrow \left.\begin{array}{l} x_1=2+i\cdot\sqrt{3} \\ x_2=2-i\cdot\sqrt{3}\end{array}\right\}.$$

Vježba 165

Riješite kvadratnu jednadžbu $x^2+2\cdot x-8=0$.

Rezultat: $x_1=2,\ x_2=-4$.

Zadatak 166 (Tonio, srednja škola)

Riješite jednadžbu $2-\frac{3}{x-5}\cdot\left(\frac{x-5}{x-1}-2\cdot x+10\right)=-6\cdot x+11.$

Rješenje 166

Ponovimo!

$$n=\frac{n}{1}\quad,\quad\frac{a}{b}-\frac{c}{d}=\frac{a\cdot d-b\cdot c}{b\cdot d}\quad,\quad\frac{a}{b}+\frac{c}{d}=\frac{a\cdot d+b\cdot c}{b\cdot d}\quad,\quad a^{1}=a\quad,\quad a^{n}\cdot a^{m}=a^{n+m}.$$

$$\frac{a}{b}\cdot\frac{c}{d}=\frac{a\cdot c}{b\cdot d}\quad,\quad a^{n}:a^{m}=a^{n-m}\quad,\quad a=b\ \Rightarrow\ b=a.$$

Zakon distribucije množenja prema zbrajanju.

$$a\cdot(b+c)=a\cdot b+a\cdot c\quad,\quad a\cdot b+a\cdot c=a\cdot(b+c).$$

Skratiti razlomak znači brojnik i nazivnik tog razlomka podijeliti istim brojem različitim od nule i jedinice

$$\frac{a\cdot n}{b\cdot n}=\frac{a}{b}\ ,\ n\neq 0\ ,\ n\neq 1.$$

Množenje zagrada

$$(a+b)\cdot(c+d)=a\cdot c+a\cdot d+b\cdot c+b\cdot d.$$

Da bi umnožak bio jednak nuli, dovoljno je da jedan faktor bude jednak nuli.

$$a\cdot b=0\ \Leftrightarrow\ a=0\ \text{ ili }\ b=0\ \text{ ili }\ a=b=0.$$

S nulom se ne može dijeliti. Zato moramo odbaciti vrijednosti nepoznanice x za koje su nazivnici jednaki nuli.

$$2-\frac{3}{x-5}\cdot\left(\frac{x-5}{x-1}-2\cdot x+10\right)=-6\cdot x+11\ \Rightarrow\ \left[\begin{array}{c}\text{Diskusija!}\\ x-5\neq 0\ \Rightarrow\ x\neq 5\\ x-1\neq 0\ \Rightarrow\ x\neq 1\end{array}\right]\ \Rightarrow$$

$$\Rightarrow\ 2-\frac{3}{x-5}\cdot\left(\frac{x-5}{x-1}-2\cdot(x-5)\right)=-6\cdot x+11\ \Rightarrow\ 2-\frac{3}{x-5}\cdot\left(\frac{x-5}{x-1}-\frac{2\cdot(x-5)}{1}\right)=-6\cdot x+11\ \Rightarrow$$

$$\Rightarrow\ 2-\frac{3}{x-5}\cdot\frac{x-5}{x-1}+\frac{3}{x-5}\cdot\frac{2\cdot(x-5)}{1}=-6\cdot x+11\ \Rightarrow$$

$$\Rightarrow\ 2-\frac{3}{x-5}\cdot\frac{x-5}{x-1}+\frac{3}{x-5}\cdot\frac{2\cdot(x-5)}{1}=-6\cdot x+11\ \Rightarrow\ 2-\frac{3}{1}\cdot\frac{1}{x-1}+\frac{3}{1}\cdot\frac{2}{1}=-6\cdot x+11\ \Rightarrow$$

$$\Rightarrow\ 2-\frac{3}{x-1}+6=-6\cdot x+11\ \Rightarrow\ -\frac{3}{x-1}=-6\cdot x+11-2-6\ \Rightarrow\ -\frac{3}{x-1}=-6\cdot x+3\ \Rightarrow$$

$$\Rightarrow\ -\frac{3}{x-1}=-6\cdot x+3\ /:(-3)\ \Rightarrow\ \frac{1}{x-1}=2\cdot x-1\ \Rightarrow\ \frac{1}{x-1}=2\cdot x-1\ /\cdot(x-1)\ \Rightarrow$$

$$\Rightarrow\ 1=(2\cdot x-1)\cdot(x-1)\ \Rightarrow\ 1=2\cdot x^{2}-2\cdot x-x+1\ \Rightarrow\ 1=2\cdot x^{2}-2\cdot x-x+1\ \Rightarrow$$

$$\Rightarrow\ 0=2\cdot x^{2}-2\cdot x-x\ \Rightarrow\ 0=2\cdot x^{2}-3\cdot x\ \Rightarrow\ 2\cdot x^{2}-3\cdot x=0\ \Rightarrow\ x\cdot(2\cdot x-3)=0\ \Rightarrow$$

$$\Rightarrow\ \left.\begin{array}{c}x=0\\ 2\cdot x-3=0\end{array}\right\}\ \Rightarrow\ \left.\begin{array}{c}x_1=0\\ 2\cdot x=3\end{array}\right\}\ \Rightarrow\ \left.\begin{array}{c}x_1=0\\ 2\cdot x=3\ /:2\end{array}\right\}\ \Rightarrow\ \left.\begin{array}{c}x_1=0\\ x_2=\frac{3}{2}\end{array}\right\}.$$

Vježba 166

Riješite jednadžbu $2+\frac{3}{5-x}\cdot\left(\frac{5-x}{1-x}-2\cdot x+10\right)=-6\cdot x+11.$

Rezultat: $x_1=0\ ,\ x_2=\frac{3}{2}.$

Zadatak 167 (Domagoj, gimnazija)

Neka su $A(x_1, y_1)$ i $B(x_2, y_2)$ točke u kojima se sijeku grafovi funkcija $f(x) = -3\cdot x + 1$ i $g(x) = 2\cdot x^2 + 3\cdot x + 3$. Izračunajte $x_1 + x_2$.

Rješenje 167

Ponovimo!

$$n=\frac{n}{1}\quad,\quad\frac{a}{n}+\frac{b}{n}=\frac{a+b}{n}.$$

Sjecišta grafova zadanih funkcija f(x) i g(x) dobijemo izjednačavanjem izraza kojima su zadane te funkcije:

$$f(x)=g(x).$$

Skratiti razlomak znači brojnik i nazivnik tog razlomka podijeliti istim brojem različitim od nule i jedinice

$$\frac{a\cdot n}{b\cdot n}=\frac{a}{b}\ ,\ n\neq 0\ ,\ n\neq 1.$$

Jednadžba oblika

$$a\cdot x^2+b\cdot x+c=0,$$

($a\neq 0$, b i c su realni brojevi) naziva se kvadratna jednadžba. Svaki broj x (realan ili kompleksan) koji zadovoljava tu jednadžbu naziva se rješenje kvadratne jednadžbe.
Rješenja x_1 i x_2 kvadratne jednadžbe

$$a\cdot x^2+b\cdot x+c=0$$

zadovoljavaju Vièteove formule:

$$x_1+x_2=-\frac{b}{a}\quad,\quad x_1\cdot x_2=\frac{c}{a}.$$

Budući da tražimo sjecišta grafova zadanih funkcija, izjednačit ćemo izraze kojima su zadane te funkcije.

$$\left.\begin{array}{l}f(x)=-3\cdot x+1\\ g(x)=2\cdot x^2+3\cdot x+3\end{array}\right\}\Rightarrow\left[f(x)=g(x)\right]\Rightarrow -3\cdot x+1=2\cdot x^2+3\cdot x+3\Rightarrow$$

$$\Rightarrow -3\cdot x+1-2\cdot x^2-3\cdot x-3=0\Rightarrow -2\cdot x^2-6\cdot x-2=0\Rightarrow -2\cdot x^2-6\cdot x-2=0\ /:(-2)\Rightarrow$$

$$\Rightarrow x^2+3\cdot x+1=0.$$

Rješenja kvadratne jednadžbe upravo su vrijednosti koordinata x_1 i x_2.

1.inačica

$$x^2+3\cdot x+1=0\Rightarrow\left.\begin{array}{l}x^2+3\cdot x+1=0\\ a=1\ ,\ b=3\ ,\ c=1\end{array}\right\}\Rightarrow\left.\begin{array}{l}a=1\ ,\ b=3\ ,\ c=1\\ x_{1,2}=\frac{-b\pm\sqrt{b^2-4\cdot a\cdot c}}{2\cdot a}\end{array}\right\}\Rightarrow$$

$$\Rightarrow x_{1,2}=\frac{-3\pm\sqrt{3^2-4\cdot1\cdot1}}{2\cdot1} \Rightarrow x_{1,2}=\frac{-3\pm\sqrt{9-4}}{2} \Rightarrow x_{1,2}=\frac{-3\pm\sqrt{5}}{2} \Rightarrow \left.\begin{matrix} x_1=\frac{-3+\sqrt{5}}{2} \\ x_2=\frac{-3-\sqrt{5}}{2}\end{matrix}\right\}.$$

Sada je:

$$x_1+x_2=\frac{-3+\sqrt{5}}{2}+\frac{-3-\sqrt{5}}{2} \Rightarrow x_1+x_2=\frac{-3+\sqrt{5}-3-\sqrt{5}}{2} \Rightarrow$$

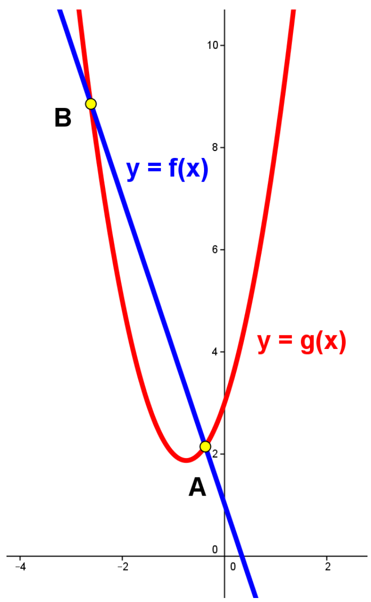
$$\Rightarrow x_1+x_2=\frac{-3+\sqrt{5}-3-\sqrt{5}}{2} \Rightarrow x_1+x_2=\frac{-3-3}{2} \Rightarrow x_1+x_2=\frac{-6}{2} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow x_1+x_2=\frac{-6}{2} \Rightarrow x_1+x_2=-3.$$

2.inačica

Iz kvadratne jednadžbe $x^2 + 3 \cdot x + 1 = 0$ pomoću prve Vièteove formule odmah dobijemo vrijednost izraza $x_1 + x_2$.

$$\left.\begin{matrix} x^2+3\cdot x+1=0 \\ a=1 \;,\; b=3 \;,\; c=1\end{matrix}\right\} \Rightarrow \left[x_1+x_2=-\frac{b}{a}\right] \Rightarrow x_1+x_2=-\frac{3}{1} \Rightarrow x_1+x_2=-3.$$



Vježba 167

Neka su $A(x_1, y_1)$ i $B(x_2, y_2)$ točke u kojima se sijeku grafovi funkcija $f(x) = -3 \cdot x + 5$ i $g(x) = 2 \cdot x^2 + 3 \cdot x + 7$. Izračunajte $x_1 + x_2$.

Rezultat: -3.

Zadatak 168 (Marina, ekonomska škola)

Odredimo $m \in R$ tako da jednadžba $3 \cdot x^2 - 4 \cdot x + m = 0$ ima:

a) dvostruko realno rješenje

b) dva realna različita rješenja

c) konjugirano kompleksna rješenja.

Rješenje 168

Ponovimo!

Diskriminanta kvadratne jednadžbe

$$a \cdot x^2 + b \cdot x + c = 0$$

je broj

$$D = b^2 - 4 \cdot a \cdot c.$$

- Ako je D > 0, jednadžba ima dva realna rješenja.
- Ako je D = 0, jednadžba ima jedno dvostruko realno rješenje.
- Ako je D < 0, jednadžba ima kompleksno – konjugirana rješenja.

$$a > b \ , \ c < 0 \ \Rightarrow \ \frac{a}{c} < \frac{b}{c} \quad , \quad a < b \ , \ c > 0 \ \Rightarrow \ a \cdot c < b \cdot c.$$

Skratiti razlomak znači brojnik i nazivnik tog razlomka podijeliti istim brojem različitim od nule i jedinice

$$\frac{a \cdot n}{b \cdot n} = \frac{a}{b} \ , \ n \neq 0 \ , \ n \neq 1.$$

a)
Da bi zadana jednadžba imala dvostruko realno rješenje mora biti D = 0.

$$D = 0 \ \Rightarrow \ b^2 - 4 \cdot a \cdot c = 0 \ \Rightarrow \ \left[\begin{matrix} 3 \cdot x^2 - 4 \cdot x + m = 0 \\ a = 3 \ , \ b = -4 \ , \ c = m \end{matrix}\right] \ \Rightarrow \ (-4)^2 - 4 \cdot 3 \cdot m = 0 \ \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \ 16 - 12 \cdot m = 0 \ \Rightarrow \ -12 \cdot m = -16 \ \Rightarrow \ -12 \cdot m = -16 \ /:(-12) \ \Rightarrow \ m = \frac{16}{12} \ \Rightarrow \ m = \frac{16}{12} \ \Rightarrow \ m = \frac{4}{3}.$$

b)
Da bi zadana jednadžba imala dva realna različita rješenja mora biti D > 0.

$$D > 0 \ \Rightarrow \ b^2 - 4 \cdot a \cdot c > 0 \ \Rightarrow \ \left[\begin{matrix} 3 \cdot x^2 - 4 \cdot x + m = 0 \\ a = 3 \ , \ b = -4 \ , \ c = m \end{matrix}\right] \ \Rightarrow \ (-4)^2 - 4 \cdot 3 \cdot m > 0 \ \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \ 16 - 12 \cdot m > 0 \ \Rightarrow \ -12 \cdot m > -16 \ \Rightarrow \ -12 \cdot m > -16 \ /:(-12) \ \Rightarrow \ m < \frac{16}{12} \ \Rightarrow \ m < \frac{16}{12} \ \Rightarrow \ m < \frac{4}{3}.$$

c)
Da bi zadana jednadžba imala konjugirano kompleksna rješenja mora biti D < 0.

$$D < 0 \ \Rightarrow \ b^2 - 4 \cdot a \cdot c < 0 \ \Rightarrow \ \left[\begin{matrix} 3 \cdot x^2 - 4 \cdot x + m = 0 \\ a = 3 \ , \ b = -4 \ , \ c = m \end{matrix}\right] \ \Rightarrow \ (-4)^2 - 4 \cdot 3 \cdot m < 0 \ \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \ 16 - 12 \cdot m < 0 \ \Rightarrow \ -12 \cdot m < -16 \ \Rightarrow \ -12 \cdot m < -16 \ /:(-12) \ \Rightarrow \ m > \frac{16}{12} \ \Rightarrow \ m > \frac{16}{12} \ \Rightarrow \ m > \frac{4}{3}.$$

Vježba 168

Odredimo $m \in R$ tako fa jednadžba $3 \cdot x^2 - 4 \cdot x + 2 \cdot m = 0$ ima:
a) dvostruko realno rješenje
b) dva realna različita rješenja
c) konjugirano kompleksna rješenja.

Rezultat: $m = \frac{2}{3}, \ m < \frac{2}{3}, \ m > \frac{2}{3}.$

Zadatak 169 (Torcida, gimnazija)

Ako koeficijenti jednadžbi $x^2 + p \cdot x + q = 0$ i $x^2 + m \cdot x + n = 0$ zadovoljavaju uvjet $m \cdot p = 2 \cdot (q + n)$, dokažite da su rješenja bar jedne od njih realna.

Rješenje 169

Ponovimo!

Diskriminanta kvadratne jednadžbe

$$a \cdot x^2 + b \cdot x + c = 0$$

je broj

$$D = b^2 - 4 \cdot a \cdot c.$$

- Ako je D > 0, jednadžba ima dva realna rješenja.
- Ako je D = 0, jednadžba ima jedno dvostruko realno rješenje.
- Ako je D < 0, jednadžba ima kompleksno – konjugirana rješenja.
- Ako je D ≥ 0, jednadžba ima realna rješenja.

$$a^2 - 2 \cdot a \cdot b + b^2 = (a-b)^2 \quad , \quad a^2 \geq 0 \ , \ a \in R.$$

Zakon distribucije množenja prema zbrajanju.

$$a \cdot (b+c) = a \cdot b + a \cdot c \quad , \quad a \cdot b + a \cdot c = a \cdot (b+c).$$

Odredimo diskriminante zadanih jednadžbi:

- $$\left.\begin{array}{l} x^2 + p \cdot x + q = 0 \\ a = 1 \ , \ b = p \ , \ c = q \end{array}\right\} \Rightarrow \left.\begin{array}{l} a = 1 \ , \ b = p \ , \ c = q \\ D_1 = b^2 - 4 \cdot a \cdot c \end{array}\right\} \Rightarrow D_1 = p^2 - 4 \cdot 1 \cdot q \Rightarrow$$
  $$\Rightarrow D_1 = p^2 - 4 \cdot q$$
- $$\left.\begin{array}{l} x^2 + m \cdot x + n = 0 \\ a = 1 \ , \ b = m \ , \ c = n \end{array}\right\} \Rightarrow \left.\begin{array}{l} a = 1 \ , \ b = m \ , \ c = n \\ D_2 = b^2 - 4 \cdot a \cdot c \end{array}\right\} \Rightarrow D_2 = m^2 - 4 \cdot 1 \cdot n \Rightarrow$$
  $$\Rightarrow D_2 = m^2 - 4 \cdot n.$$

Za njihov zbroj vrijedi:

$$D_1 + D_2 = p^2 - 4 \cdot q + m^2 - 4 \cdot n = p^2 + m^2 - 4 \cdot q - 4 \cdot n = p^2 + m^2 - 4 \cdot (q+n) =$$

$$= p^2 + m^2 - 2 \cdot 2 \cdot (q+n) = \left[\begin{array}{c} \text{uvjet} \\ m \cdot p = 2 \cdot (q+n) \end{array}\right] = p^2 + m^2 - 2 \cdot m \cdot p =$$

$$= p^2 - 2 \cdot m \cdot p + m^2 = (p-m)^2 \geq 0.$$

Budući da je zbroj $D_1 + D_2$ nenegativan broj, slijedi da je barem jedan od brojeva D_1 i D_2 nenegativan broj pa su tada rješenja odgovarajuće jednadžbe realna.

Vježba 169

Ako koeficijenti jednadžbi $x^2 + p \cdot x + q = 0$ i $x^2 + m \cdot x + n = 0$ zadovoljavaju uvjet $0.5 \cdot m \cdot p = n + q$, dokažite da su rješenja bar jedne od njih realna.

Rezultat: Dokaz analogan.

Zadatak 170 (Marin, gimnazija)

Odredi $k \in R$ tako da jednadžbe $x^2 - 3 \cdot x + k + 1 = 0$, $x^2 - 4 \cdot x + 2 \cdot k + 1 = 0$ imaju točno jedno zajedničko rješenje.

Rješenje 170

Ponovimo!

$$(a-b)^2 = a^2 - 2 \cdot a \cdot b + b^2.$$

Zakon distribucije množenja prema zbrajanju.

$$a \cdot (b+c) = a \cdot b + a \cdot c \quad , \quad a \cdot b + a \cdot c = a \cdot (b+c).$$

Neka je x_0 zajedničko rješenje zadanih jednadžbi. Onda vrijedi::

$$\left.\begin{array}{l} x_0^2-3\cdot x_0+k+1=0 \\ x_0^2-4\cdot x_0+2\cdot k+1=0 \end{array}\right\} \Rightarrow \left[\begin{array}{l}\text{oduzmemo} \\ \text{jednadžbe}\end{array}\right] \Rightarrow x_0^2-3\cdot x_0+k+1-\left(x_0^2-4\cdot x_0+2\cdot k+1\right)=0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow x_0^2-3\cdot x_0+k+1-x_0^2+4\cdot x_0-2\cdot k-1=0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow x_0^2-3\cdot x_0+k+1-x_0^2+4\cdot x_0-2\cdot k-1=0 \Rightarrow -3\cdot x_0+k+4\cdot x_0-2\cdot k=0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow x_0-k=0 \Rightarrow x_0=k.$$

Vrijednost parametra k odredimo tako da u jednu zadanu jednadžbu uvrstimo x = k.

$$\left.\begin{array}{l} x=k \\ x^2-3\cdot x+k+1=0 \end{array}\right\} \Rightarrow k^2-3\cdot k+k+1=0 \Rightarrow k^2-2\cdot k+1=0 \Rightarrow (k-1)^2=0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow (k-1)^2=0 \,/\sqrt{} \Rightarrow k-1=0 \Rightarrow k=1.$$

Vježba 170

Odredi $k\in R$ tako da jednadžbe $x^2-3\cdot x+k=-1,\ x^2-4\cdot x+2\cdot k=-1$ imaju točno jedno zajedničko rješenje.

Rezultat: k = 1.

Zadatak 171 (Marin, gimnazija)

Dokaži da jednadžba $x^2-(1+2\cdot a)\cdot x+a^2+a+1=0$ nema realnih rješenja.

Rješenje 171

Ponovimo!

$$(-a)^2=a^2 \quad , \quad (a+b)^2=a^2+2\cdot a\cdot b+b^2 \quad , \quad (a\cdot b)^n=a^n\cdot b^n.$$

Zakon distribucije množenja prema zbrajanju.

$$a\cdot(b+c)=a\cdot b+a\cdot c \quad , \quad a\cdot b+a\cdot c=a\cdot(b+c).$$

Diskriminanta kvadratne jednadžbe

$$a\cdot x^2+b\cdot x+c=0$$

je broj

$$D=b^2-4\cdot a\cdot c.$$

- Ako je D > 0, jednadžba ima dva realna rješenja.
- Ako je D = 0, jednadžba ima jedno dvostruko realno rješenje.
- Ako je D < 0, jednadžba ima kompleksno – konjugirana rješenja.
- Ako je D ≥ 0, jednadžba ima realna rješenja.

Računamo diskriminantu zadane jednadžbe.

$$x^2-(1+2\cdot a)\cdot x+a^2+a+1=0 \Rightarrow \left.\begin{array}{l} x^2-(1+2\cdot a)\cdot x+a^2+a+1=0 \\ a=1\ ,\ b=-(1+2\cdot a)\ ,\ c=a^2+a+1 \end{array}\right\} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \left.\begin{array}{l} a=1\ ,\ b=-(1+2\cdot a)\ ,\ c=a^2+a+1 \\ D=b^2-4\cdot a\cdot c \end{array}\right\} \Rightarrow D=(-(1+2\cdot a))^2-4\cdot 1\cdot\left(a^2+a+1\right) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow D=(-(1+2\cdot a))^2-4\cdot 1\cdot\left(a^2+a+1\right) \Rightarrow D=(1+2\cdot a)^2-4\cdot\left(a^2+a+1\right) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow D=1+4\cdot a+4\cdot a^2-4\cdot a^2-4\cdot a-4 \Rightarrow D=1+4\cdot a+4\cdot a^2-4\cdot a^2-4\cdot a-4 \Rightarrow$$
$$\Rightarrow D=1-4 \Rightarrow D=-3<0.$$

Budući da je diskriminanta negativna, jednadžba nema realnih rješenja.

Vježba 171

Dokaži da jednadžba $x^2-(1+2\cdot a)\cdot x+a^2+a=-1$ nema realnih rješenja.

Rezultat: Dokaz analogan.

Zadatak 172 (Katarina, maturantica)

Zadana je kvadratna jednadžba $m\cdot x^2-5\cdot x-(m+1)=0.$ Jedno rješenje je 3. Koliko iznosi drugo rješenje?

Rješenje 172

Ponovimo!

$$n=\frac{n}{1} \quad , \quad \frac{a}{b}-\frac{c}{d}=\frac{a\cdot d-b\cdot c}{b\cdot d}.$$

Zakon distribucije množenja prema zbrajanju.

$$a\cdot(b+c)=a\cdot b+a\cdot c \quad , \quad a\cdot b+a\cdot c=a\cdot(b+c).$$

Rješenja kvadratne jednadžbe

$$a\cdot x^2+b\cdot x+c=0$$

su brojevi

$$x_{1,2}=\frac{-b\pm\sqrt{b^2-4\cdot a\cdot c}}{2\cdot a} \Rightarrow \left.\begin{array}{l} x_1=\dfrac{-b+\sqrt{b^2-4\cdot a\cdot c}}{2\cdot a} \\ x_2=\dfrac{-b-\sqrt{b^2-4\cdot a\cdot c}}{2\cdot a} \end{array}\right\}.$$

Jednadžba oblika

$$a\cdot x^2+b\cdot x+c=0,$$

($a\neq 0$, b i c su realni brojevi) naziva se kvadratna jednadžba. Svaki broj x (realan ili kompleksan) koji zadovoljava tu jednadžbu naziva se rješenje kvadratne jednadžbe.

Rješenja x_1 i x_2 kvadratne jednadžbe

$$a\cdot x^2+b\cdot x+c=0$$

zadovoljavaju Vièteove formule:

$$x_1+x_2=-\frac{b}{a} \quad , \quad x_1\cdot x_2=\frac{c}{a}.$$

Skratiti razlomak znači brojnik i nazivnik tog razlomka podijeliti istim brojem različitim od nule i jedinice

$$\frac{a\cdot n}{b\cdot n}=\frac{a}{b} \ , \ n\neq 0 \ , \ n\neq 1.$$

Budući da je x = 3 jedno rješenje jednadžbe, uvrstit ćemo ga u nju i izračunati m.

$$\left.\begin{array}{l} x=3 \\ m\cdot x^2-5\cdot x-(m+1)=0 \end{array}\right\} \Rightarrow m\cdot 3^2-5\cdot 3-(m+1)=0 \Rightarrow 9\cdot m-15-m-1=0 \Rightarrow$$
$$\Rightarrow 9\cdot m-m=15+1 \Rightarrow 8\cdot m=16 \Rightarrow 8\cdot m=16 \ /:8 \Rightarrow m=2.$$

Kvadratna jednadžba glasi:

$$\left.\begin{array}{l} m=2 \\ m\cdot x^2-5\cdot x-(m+1)=0 \end{array}\right\} \Rightarrow 2\cdot x^2-5\cdot x-(2+1)=0 \Rightarrow 2\cdot x^2-5\cdot x-3=0.$$

Računamo drugo rješenje x_2 kvadratne jednadžbe.

1.inačica

$$2\cdot x^2-5\cdot x-3=0 \Rightarrow \left.\begin{array}{l} 2\cdot x^2-5\cdot x-3=0 \\ a=2\ ,\ b=-5\ ,\ c=-3 \end{array}\right\} \Rightarrow \left.\begin{array}{l} a=2\ ,\ b=-5\ ,\ c=-3 \\ x_{1,2}=\dfrac{-b\pm\sqrt{b^2-4\cdot a\cdot c}}{2\cdot a} \end{array}\right\} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow x_{1,2}=\frac{-(-5)\pm\sqrt{(-5)^2-4\cdot 2\cdot(-3)}}{2\cdot 2} \Rightarrow x_{1,2}=\frac{5\pm\sqrt{25+24}}{4} \Rightarrow x_{1,2}=\frac{5\pm\sqrt{49}}{4} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow x_{1,2}=\frac{5\pm 7}{4} \Rightarrow \left.\begin{array}{l} x_1=\dfrac{5+7}{4} \\ x_2=\dfrac{5-7}{4} \end{array}\right\} \Rightarrow \left.\begin{array}{l} x_1=\dfrac{12}{4} \\ x_2=-\dfrac{2}{4} \end{array}\right\} \Rightarrow \left.\begin{array}{l} x_1=\dfrac{12}{4} \\ x_2=-\dfrac{2}{4} \end{array}\right\} \Rightarrow \left.\begin{array}{l} x_1=3 \\ x_2=-\dfrac{1}{2} \end{array}\right\}.$$

2.inačica

Uporabit ćemo prvu Vièteovu formulu:

$$x_1+x_2=-\frac{b}{a} \Rightarrow \begin{bmatrix} x_1=3 \\ a=2 \\ b=-5 \end{bmatrix} \Rightarrow 3+x_2=-\frac{-5}{2} \Rightarrow 3+x_2=\frac{5}{2} \Rightarrow x_2=\frac{5}{2}-3 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow x_2=\frac{5}{2}-\frac{3}{1} \Rightarrow x_2=\frac{5-6}{2} \Rightarrow x_2=-\frac{1}{2}.$$

3.inačica

Uporabit ćemo drugu Vièteovu formulu:

$$x_1\cdot x_2=\frac{c}{a} \Rightarrow \begin{bmatrix} x_1=3 \\ a=2 \\ c=-3 \end{bmatrix} \Rightarrow 3\cdot x_2=\frac{-3}{2} \Rightarrow 3\cdot x_2=\frac{-3}{2}\ /:3 \Rightarrow x_2=-\frac{1}{2}.$$

Vježba 172

Zadana je kvadratna jednadžba $m\cdot x^2-5\cdot x-(m+1)=0.$ Jedno rješenje je $-\frac{1}{2}.$ Koliko iznosi drugo rješenje?

Rezultat: $x_2 = 3.$

Zadatak 173 (Mislav, srednja škola)

Za koji m jednadžba $x^3+2\cdot m\cdot x=0$ ima sva tri rješenja jednaka?

Rješenje 173

Ponovimo!

$$a^1=a \quad , \quad a^n:a^m=a^{n-m}.$$

Zakon distribucije množenja prema zbrajanju.

$$a\cdot(b+c)=a\cdot b+a\cdot c \quad , \quad a\cdot b+a\cdot c=a\cdot(b+c).$$

Da bi umnožak bio jednak nuli, dovoljno je da jedan faktor bude jednak nuli.

$$a \cdot b = 0 \Leftrightarrow a = 0 \text{ ili } b = 0 \text{ ili } a = b = 0.$$

$$x^3 + 2 \cdot m \cdot x = 0 \Rightarrow x \cdot \left(x^2 + 2 \cdot m\right) = 0 \Rightarrow \left.\begin{array}{l} x = 0 \text{ jedno rješenje} \\ x^2 + 2 \cdot m = 0 \end{array}\right\}.$$

Budući da sva tri rješenja moraju biti jednaka, mora biti m = 0.

$$\left.\begin{array}{l} x = 0 \\ x^2 + 2 \cdot m = 0 \end{array}\right\} \Rightarrow 0^2 + 2 \cdot m = 0 \Rightarrow 0 + 2 \cdot m = 0 \Rightarrow 2 \cdot m = 0 \Rightarrow m = 0.$$

Vježba 173

Za koji m jednadžba $x^3 - 7 \cdot m \cdot x = 0$ ima sva tri rješenja jednaka?

Rezultat: m = 0.

Zadatak 174 (Petar, maturant)

Skup svih vrijednosti q za koje je razmak korijena jednadžbe $x^2 + 6 \cdot x + q = 0$ veći od 4 je skup:

$$A. \left\langle -\infty, 5 \right\rangle \qquad B. \left\langle 0, 6 \right\rangle \qquad C. \left\langle 3, 7 \right\rangle \qquad D. \left\langle 5, +\infty \right\rangle$$

Rješenje 174

Ponovimo!

$$\sqrt{a^2} = |a| \quad , \quad (a-b)^2 = a^2 - 2 \cdot a \cdot b + b^2 \quad , \quad a^2 + 2 \cdot a \cdot b + b^2 = (a+b)^2.$$

$$\left(\sqrt{a}\right)^2 = a \quad , \quad a > b \, , \, c < 0 \Rightarrow \frac{a}{c} < \frac{b}{c}.$$

Jednadžba oblika

$$a \cdot x^2 + b \cdot x + c = 0,$$

(a ≠ 0, b i c su realni brojevi) naziva se kvadratna jednadžba. Svaki broj x (realan ili kompleksan) koji zadovoljava tu jednadžbu naziva se rješenje kvadratne jednadžbe.
Rješenja x_1 i x_2 kvadratne jednadžbe

$$a \cdot x^2 + b \cdot x + c = 0$$

zadovoljavaju Vièteove formule:

$$x_1 + x_2 = -\frac{b}{a} \quad , \quad x_1 \cdot x_2 = \frac{c}{a}.$$

Budući da tražimo sjecišta grafova zadanih funkcija, izjednačit ćemo izraze kojima su zadane te funkcije.
Za realni broj x njegova je apsolutna vrijednost (modul) broj $|x|$ koji određujemo na ovaj način:

$$|x| = \begin{cases} x, & x \geq 0 \\ -x, & x < 0. \end{cases}$$

Ako je broj x pozitivan ili nula, tada je on jednak svojoj apsolutnoj vrijednosti. Za svaki x, x ≥ 0, vrijedi $|x| = x$.
Ako je x negativan broj, njegova apsolutna vrijednost je suprotan broj – x koji je pozitivan. Za svaki x, x < 0, je $|x| = -x$.
Udaljenost točaka na brojevnom pravcu jednaka je apsolutnoj vrijednosti razlike njihovih koordinata.
Ako su točkama T_1 i T_2 pridruženi brojevi x_1 i x_2, tada vrijedi:

$$|T_1 T_2| = |x_2 - x_1|.$$

Za zadanu jednadžbu vrijede Vièteove formule:

$$x^2+6\cdot x+q=0 \Rightarrow \left.\begin{array}{l} x^2+6\cdot x+q=0 \\ a=1\ ,\ b=6\ ,\ c=q \end{array}\right\} \Rightarrow \left[\begin{array}{l} x_1+x_2=-\frac{b}{a} \\ x_1\cdot x_2=\frac{c}{a} \end{array}\right] \Rightarrow \left.\begin{array}{l} x_1+x_2=-\frac{6}{1} \\ x_1\cdot x_2=\frac{q}{1} \end{array}\right\} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \left.\begin{array}{l} x_1+x_2=-6 \\ x_1\cdot x_2=q \end{array}\right\}.$$

Budući da razmak korijena x_1 i x_2 kvadratne jednadžbe mora biti veći od 4, slijedi:

$$\left|x_1-x_2\right|>4 \Rightarrow \sqrt{\left(x_1-x_2\right)^2}>4 \Rightarrow \sqrt{\left(x_1-x_2\right)^2}>4\ /^2 \Rightarrow \left(\sqrt{\left(x_1-x_2\right)^2}\right)^2>4^2 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \left(x_1-x_2\right)^2>16 \Rightarrow x_1^2-2\cdot x_1\cdot x_2+x_2^2>16 \Rightarrow x_1^2+2\cdot x_1\cdot x_2+x_2^2-4\cdot x_1\cdot x_2>16 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \left(x_1^2+2\cdot x_1\cdot x_2+x_2^2\right)-4\cdot x_1\cdot x_2>16 \Rightarrow \left(x_1+x_2\right)^2-4\cdot x_1\cdot x_2>16 \Rightarrow \left[\begin{array}{l} x_1+x_2=-6 \\ x_1\cdot x_2=q \end{array}\right] \Rightarrow$$

$$\Rightarrow (-6)^2-4\cdot q>16 \Rightarrow 36-4\cdot q>16 \Rightarrow -4\cdot q>16-36 \Rightarrow -4\cdot q>-20 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow -4\cdot q>-20\ /:(-4) \Rightarrow q<5.$$

$$q\in\left\langle -\infty, 5\right\rangle.$$

Odgovor je pod A.

Vježba 174

Skup svih vrijednosti q za koje je razmak korijena jednadžbe $x^2+6\cdot x+q=0$ manji od 4 je skup:

A. $\left\langle -\infty, 5\right\rangle$ *B.* $\left\langle 0, 6\right\rangle$ *C.* $\left\langle 3, 7\right\rangle$ *D.* $\left\langle 5, +\infty\right\rangle$

Rezultat: D.

Zadatak 175 (Nina, gimnazija)

Odredite skup rješenja nejednadžbe $\frac{2}{x-1}\ge\frac{x+1}{x-2}$.

Rješenje 175

Ponovimo!

$$\frac{a}{b}-\frac{c}{d}=\frac{a\cdot d-b\cdot c}{b\cdot d}\quad,\quad (a+b)\cdot(a-b)=a^2-b^2\quad,\quad a\ge b\ ,\ c<0 \Rightarrow a\cdot c\le b\cdot c.$$

Zakon distribucije množenja prema zbrajanju.

$$a\cdot(b+c)=a\cdot b+a\cdot c\quad,\quad a\cdot b+a\cdot c=a\cdot(b+c).$$

$$\frac{a}{b}\cdot c=\frac{a\cdot c}{b}\quad,\quad \frac{a}{b}\le 0 \Rightarrow \left.\begin{array}{l} a\le 0\ ,\ b>0 \\ a\ge 0\ ,\ b<0 \end{array}\right\}\quad,\quad a\cdot b<0 \Rightarrow \left.\begin{array}{l} a>0\ ,\ b<0 \\ a<0\ ,\ b>0 \end{array}\right\}.$$

Polinom drugog stupnja (kvadratna funkcija) ima oblik

$$f(x)=a\cdot x^2+b\cdot x+c,$$

gdje su a ≠ 0, b i c realni brojevi. Broj a naziva se vodeći koeficijent polinoma drugog stupnja, b

linearni koeficijent, a c slobodni koeficijent polinoma.
Graf kvadratne funkcije

$$f(x)=a\cdot x^2+b\cdot x+c,\ a\neq 0$$

je parabola

$$y=a\cdot x^2+b\cdot x+c.$$

Diskriminanta kvadratne jednadžbe

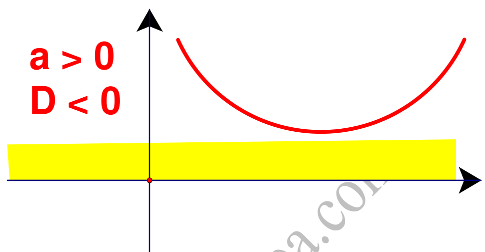
$$a\cdot x^2+b\cdot x+c=0$$

je broj

$$D=b^2-4\cdot a\cdot c.$$

- Ako je D > 0, jednadžba ima dva realna rješenja.
- Ako je D = 0, jednadžba ima jedno dvostruko realno rješenje.
- Ako je D < 0, jednadžba ima kompleksno – konjugirana rješenja.

Kada kvadratna funkcija nema realnih nultočaka parabola ne siječe os apscisa, tj. D < 0.
Ako je a > 0 parabola je okrenuta prema gore. Skup za koji je kvadratna funkcija f(x) > 0 iscrtan je iznad osi apscisa.



Dakle, kvadratna funkcija $f(x)=a\cdot x^2+b\cdot x+c,\ a\neq 0$ je pozitivna za svaki x, ako je a > 0 i D < 0.
Presjek ili zajednički dio dva skupa je skup koji čine elementi koji su u skupu A i u skupu B.
Unija skupova A i B je skup koji čine svi elementi koji pripadaju barem jednom od skupova A i B.
Preoblikujemo zadanu nejednadžbu.

$$\frac{2}{x-1}\geq\frac{x+1}{x-2}\ \Rightarrow\ \frac{2}{x-1}-\frac{x+1}{x-2}\geq 0\ \Rightarrow\ \frac{2\cdot(x-2)-(x+1)\cdot(x-1)}{(x-1)\cdot(x-2)}\geq 0\ \Rightarrow$$

$$\Rightarrow\ \frac{2\cdot x-4-\left(x^2-1\right)}{(x-1)\cdot(x-2)}\geq 0\ \Rightarrow\ \frac{2\cdot x-4-x^2+1}{(x-1)\cdot(x-2)}\geq 0\ \Rightarrow\ \frac{-x^2+2\cdot x-3}{(x-1)\cdot(x-2)}\geq 0\ \Rightarrow$$

$$\Rightarrow\ \frac{-x^2+2\cdot x-3}{(x-1)\cdot(x-2)}\geq 0\ /\cdot(-1)\ \Rightarrow\ \frac{x^2-2\cdot x+3}{(x-1)\cdot(x-2)}\leq 0.$$

Razlomak je manji ili jednak nuli. To je moguće ako su brojnik i nazivnik suprotnih predznaka.

$$\frac{+}{-}\leq 0\qquad,\qquad\frac{-}{+}\leq 0$$

Uočimo u brojniku kvadratni trinom $f(x)=x^2-2\cdot x+3.$ On prima samo pozitivne vrijednosti na cijelom području definicije jer je a > 0 i D < 0.

$$f(x)=x^2-2\cdot x+3\ \Rightarrow\ \left.\begin{array}{l} f(x)=x^2-2\cdot x+3 \\ a=1\ ,\ b=-2\ ,\ c=3\end{array}\right\}\ \Rightarrow\ \left.\begin{array}{l} a=1\ ,\ b=-2\ ,\ c=3 \\ D=b^2-4\cdot a\cdot c\end{array}\right\}\ \Rightarrow$$

$$\Rightarrow\ D=(-2)^2-4\cdot 1\cdot 3\ \Rightarrow\ D=4-12\ \Rightarrow\ D=-8\ \Rightarrow\ \left.\begin{array}{l} a=1>0 \\ D=-8<0\end{array}\right\}.$$

Dakle, brojnik razlomka

$$\frac{x^2 - 2\cdot x + 3}{(x-1)\cdot(x-2)}$$

je uvijek pozitivan broj

$$x^2 - 2\cdot x + 3 > 0$$

za svaki x, a to znači da nazivnik mora biti negativan broj jer će tada biti

$$\frac{x^2 - 2\cdot x + 3}{(x-1)\cdot(x-2)} \le 0.$$

Budući da je brojnik uvijek pozitivan broj, nazivnik mora biti negativan broj (nazivnik ne smije biti jednak nuli jer se s nulom ne može dijeliti).

$$(x-1)\cdot(x-2) < 0.$$

Dobivenu nejednadžbu riješit ćemo na dva načina (kako bi Nina što bolje naučila ☺)

$$\frac{(+)}{(+)\cdot(-)} \le 0 \qquad , \qquad \frac{(+)}{(-)\cdot(+)} \le 0$$

1.inačica

Zadatak ćemo riješiti koristeći se poznatom činjenicom da je umnožak dvaju brojeva suprotnih predznaka negativan broj. Zaključujemo da nejednadžbu

$$(x-1)\cdot(x-2) < 0$$

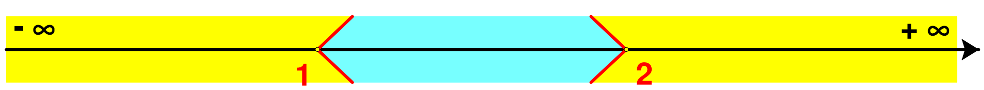
možemo rastaviti na dva sustava linearnih nejednadžbi.

$$\begin{cases} x-1>0 \\ x-2<0 \end{cases} \quad \text{ili} \quad \begin{cases} x-1<0 \\ x-2>0 \end{cases}.$$

Treba riješiti svaki od sustava, a zatim napraviti uniju njihovih rješenja.

1.slučaj

$$\left.\begin{matrix} x-1>0 \\ x-2<0 \end{matrix}\right\} \Rightarrow \left.\begin{matrix} x>1 \\ x<2 \end{matrix}\right\} \Rightarrow \left.\begin{matrix} x\in\langle 1, +\infty\rangle \\ x\in\langle -\infty, 2\rangle \end{matrix}\right\} \Rightarrow \begin{bmatrix} \text{presjek} \\ \text{skupova} \end{bmatrix} \Rightarrow x\in\langle 1, 2\rangle.$$



2.slučaj

$$\left.\begin{matrix} x-1<0 \\ x-2>0 \end{matrix}\right\} \Rightarrow \left.\begin{matrix} x<1 \\ x>2 \end{matrix}\right\} \Rightarrow \left.\begin{matrix} x\in\langle -\infty, 1\rangle \\ x\in\langle 2, +\infty\rangle \end{matrix}\right\} \Rightarrow \begin{bmatrix} \text{presjek} \\ \text{skupova} \end{bmatrix} \Rightarrow \text{prazan skup}, \varnothing.$$

Skup rješenja nejednadžbe

$$(x-1)\cdot(x-2) < 0$$

je interval

$$\langle 1, 2\rangle,$$

a to je ujedno i rješenje polazne nejednadžbe.

2.inačica

Nejednadžbu

$$(x-1)\cdot(x-2)<0$$

možemo riješiti i pomoću **tablice predznaka**. Odredimo one x za koji se pojedini faktor poništava.

$$\left.\begin{array}{l} x-1=0 \\ x-2=0 \end{array}\right\} \Rightarrow \left.\begin{array}{l} x=1 \\ x=2 \end{array}\right\}.$$

To su nultočke tih izraza i one dijele brojevni pravac na tri intervala:

$$\left\langle -\infty, 1\right\rangle \quad , \quad \left\langle 1, 2\right\rangle \quad , \quad \left\langle 2, +\infty\right\rangle.$$

Na tim intervalima nađemo predznake izraza x – 1 i x – 2. Zbog preglednosti podatke upišemo u tablicu predznaka.

	- ∞	1		2	+ ∞
x - 1					
x - 2					
(x - 1) · (x - 2)					

Predznak izraza na pojedinom intervalu dobijemo tako da uvrstimo bilo koji broj iz tog intervala. Izraz će imati jedan predznak lijevo od svoje nultočke, a suprotan desno od nje. Na primjer, iz intervala $\left\langle -\infty, 1\right\rangle$ uzmemo x = 0 pa je

$$\left.\begin{array}{l} x-1 \\ x-2 \end{array}\right\} \Rightarrow \left[\, x=0 \,\right] \Rightarrow \left.\begin{array}{l} 0-1 \\ 0-2 \end{array}\right\} \Rightarrow \left.\begin{array}{l} -1<0 \\ -2<0 \end{array}\right\}.$$

Izrazi će imati negativan predznak lijevo od svojih nultočaka.

	- ∞	1		2	+ ∞
x - 1	-				
x - 2	-		-		
(x - 1) · (x - 2)					

Izrazi će imati pozitivan predznak desno od svojih nultočaka.

	- ∞	1		2	+ ∞
x - 1	-		+		+
x - 2	-		-		+
(x - 1) · (x - 2)					

Rješenje uočavamo iz zadnjeg retka (treba paziti na umnožak predznaka).

	- ∞		1		2		+ ∞
x - 1		-		+		+	
x - 2		-		-		+	
(x - 1) · (x - 2)		+		-		+	

Treba nam negativan predznak.

	- ∞		1		2		+ ∞
x - 1		-		+		+	
x - 2		-		-		+	
(x - 1) · (x - 2)		+		-		+	

To je točno za interval $\langle 1,\ 2 \rangle$ što je i rješenje polazne nejednadžbe.

Vježba 175

Odredite skup rješenja nejednadžbe $\frac{-2}{1-x} \geq \frac{x+1}{x-2}$.

Rezultat: $\langle 1,\ 2 \rangle$.

Zadatak 176 (Miroslav, gimnazija)

Riješi zadanu jednadžbu po traženoj nepoznanici: $s = s_0 + v \cdot t - \frac{1}{2} \cdot g \cdot t^2$ (po t).

Rješenje 176

Ponovimo!

$$a^1 = a \quad , \quad (a \cdot b)^n = a^n \cdot b^n \quad , \quad \left(a^n\right)^m = a^{n \cdot m} \quad , \quad \sqrt{a \cdot b} = \sqrt{a} \cdot \sqrt{b}.$$

Rješenja kvadratne jednadžbe

$$a \cdot x^2 + b \cdot x + c = 0$$

su brojevi

$$x_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4 \cdot a \cdot c}}{2 \cdot a} \Rightarrow \left. \begin{array}{l} x_1 = \frac{-b + \sqrt{b^2 - 4 \cdot a \cdot c}}{2 \cdot a} \\ x_2 = \frac{-b - \sqrt{b^2 - 4 \cdot a \cdot c}}{2 \cdot a} \end{array} \right\}.$$

Zakon distribucije množenja prema zbrajanju.

$$a \cdot (b + c) = a \cdot b + a \cdot c \quad , \quad a \cdot b + a \cdot c = a \cdot (b + c).$$

Skratiti razlomak znači brojnik i nazivnik tog razlomka podijeliti istim brojem različitim od nule i jedinice

$$\frac{a \cdot n}{b \cdot n} = \frac{a}{b} \ , \ n \neq 0 \ , \ n \neq 1.$$

$$s=s_0+v\cdot t-\frac{1}{2}\cdot g\cdot t^2\ \Rightarrow\ s=s_0+v\cdot t-\frac{1}{2}\cdot g\cdot t^2\ /\cdot 2\ \Rightarrow\ 2\cdot s=2\cdot s_0+2\cdot v\cdot t-g\cdot t^2\ \Rightarrow$$

$$\Rightarrow\ 2\cdot s-2\cdot s_0-2\cdot v\cdot t+g\cdot t^2=0\ \Rightarrow\ g\cdot t^2-2\cdot v\cdot t+2\cdot s-2\cdot s_0=0\ \Rightarrow$$

$$\Rightarrow\ g\cdot t^2-2\cdot v\cdot t+2\cdot\left(s-s_0\right)=0\ \Rightarrow\ \left.\begin{array}{l} g\cdot t^2-2\cdot v\cdot t+2\cdot\left(s-s_0\right)=0 \\ a=g\ ,\ b=-2\cdot v\ ,\ c=2\cdot\left(s-s_0\right) \end{array}\right\}\ \Rightarrow$$

$$\Rightarrow\ \left.\begin{array}{l} a=g\ ,\ b=-2\cdot v\ ,\ c=2\cdot\left(s-s_0\right) \\ t_{1,2}=\dfrac{-b\pm\sqrt{b^2-4\cdot a\cdot c}}{2\cdot a} \end{array}\right\}\ \Rightarrow\ t_{1,2}=\frac{-(-2\cdot v)\pm\sqrt{(-2\cdot v)^2-4\cdot g\cdot 2\cdot\left(s-s_0\right)}}{2\cdot g}\ \Rightarrow$$

$$\Rightarrow\ t_{1,2}=\frac{2\cdot v\pm\sqrt{4\cdot v^2-8\cdot g\cdot\left(s-s_0\right)}}{2\cdot g}\ \Rightarrow\ t_{1,2}=\frac{2\cdot v\pm\sqrt{4\cdot\left(v^2-2\cdot g\cdot\left(s-s_0\right)\right)}}{2\cdot g}\ \Rightarrow$$

$$\Rightarrow\ t_{1,2}=\frac{2\cdot v\pm\sqrt{4}\cdot\sqrt{v^2-2\cdot g\cdot\left(s-s_0\right)}}{2\cdot g}\ \Rightarrow\ t_{1,2}=\frac{2\cdot v\pm 2\cdot\sqrt{v^2-2\cdot g\cdot\left(s-s_0\right)}}{2\cdot g}\ \Rightarrow$$

$$\Rightarrow\ t_{1,2}=\frac{2\cdot\left(v\pm\sqrt{v^2-2\cdot g\cdot\left(s-s_0\right)}\right)}{2\cdot g}\ \Rightarrow\ t_{1,2}=\frac{2\cdot\left(v\pm\sqrt{v^2-2\cdot g\cdot\left(s-s_0\right)}\right)}{2\cdot g}\ \Rightarrow$$

$$\Rightarrow\ t_{1,2}=\frac{v\pm\sqrt{v^2-2\cdot g\cdot\left(s-s_0\right)}}{g}.$$

Vježba 176

Riješi zadanu jednadžbu po traženoj nepoznanici: $\frac{1}{2}\cdot g\cdot t^2=s_0+v\cdot t-s$ (po t).

Rezultat: $$t_{1,2}=\frac{v\pm\sqrt{v^2-2\cdot g\cdot\left(s-s_0\right)}}{g}.$$

Zadatak 177 (Ivan, gimnazija)

Napiši u obliku umnoška polinom $(x+2)\cdot(x+3)-2.$

Rješenje 177

Ponovimo!

$$a^1=a\quad,\quad a^n\cdot a^m=a^{n+m}\quad,\quad a^n:a^m=a^{n-m}\quad,\quad a:a=1.$$

Rješenja kvadratne jednadžbe

$$a\cdot x^2+b\cdot x+c=0$$

su brojevi

$$x_{1,2}=\frac{-b\pm\sqrt{b^2-4\cdot a\cdot c}}{2\cdot a}.$$

Faktorizacija kvadratnog trinoma

Svaki se kvadratni trinom može napisati u obliku

$$a\cdot x^2+b\cdot x+c=a\cdot\left(x-x_1\right)\cdot\left(x-x_2\right),$$

gdje su x_1 i x_2 rješenja pripadne kvadratne jednadžbe

$$a\cdot x^2+b\cdot x+c=0.$$

Zakon distribucije množenja prema zbrajanju.

$$a\cdot(b+c)=a\cdot b+a\cdot c \quad , \quad a\cdot b+a\cdot c=a\cdot(b+c).$$

Skratiti razlomak znači brojnik i nazivnik tog razlomka podijeliti istim brojem različitim od nule i jedinice

$$\frac{a\cdot n}{b\cdot n}=\frac{a}{b} \ , \ n\neq 0 \ , \ n\neq 1.$$

Množenje zagrada

$$(a+b)\cdot(c+d)=a\cdot c+a\cdot d+b\cdot c+b\cdot d.$$

1.inačica

$$(x+2)\cdot(x+3)-2=x^2+3\cdot x+2\cdot x+6-2=x^2+5\cdot x+4=\begin{bmatrix}\text{metoda}\\ \text{grupiranja}\end{bmatrix}=$$

$$=x^2+x+4\cdot x+4=\left(x^2+x\right)+(4\cdot x+4)=x\cdot(x+1)+4\cdot(x+1)=x\cdot(x+1)+4\cdot(x+1)=$$

$$=(x+1)\cdot(x+4).$$

2.inačica

$$(x+2)\cdot(x+3)-2=x^2+3\cdot x+2\cdot x+6-2=x^2+5\cdot x+4=\begin{bmatrix}\text{metoda}\\ \text{grupiranja}\end{bmatrix}=$$

$$=x^2+4\cdot x+x+4=\left(x^2+4\cdot x\right)+(x+4)=x\cdot(x+4)+(x+4)=x\cdot(x+4)+(x+4)=$$

$$=(x+4)\cdot(x+1).$$

3.inačica

$$(x+2)\cdot(x+3)-2=((x+1)+1)\cdot((x+1)+2)-2=$$

$$=(x+1)^2+2\cdot(x+1)+(x+1)+2-2=(x+1)^2+2\cdot(x+1)+(x+1)+2-2=$$

$$=(x+1)^2+2\cdot(x+1)+(x+1)=(x+1)^2+3\cdot(x+1)=(x+1)\cdot((x+1)+3)=$$

$$=(x+1)\cdot(x+1+3)=(x+1)\cdot(x+4).$$

4.inačica

$$(x+2)\cdot(x+3)-2=((x+4)-2)\cdot((x+4)-1)-2=$$

$$=(x+4)^2-(x+4)-2\cdot(x+4)+2-2=(x+4)^2-(x+4)-2\cdot(x+4)+2-2=$$

$$=(x+4)^2-(x+4)-2\cdot(x+4)=(x+4)^2-3\cdot(x+4)=(x+4)\cdot((x+4)-3)=$$

$$=(x+4)\cdot(x+4-3)=(x+4)\cdot(x+1).$$

5.inačica

Budući da se svaki kvadratni trinom

$$a\cdot x^2+b\cdot x+c$$

može faktorizirati pomoću rješenja x_1, x_2 pripadajuće kvadratne jednadžbe

$$a\cdot x^2+b\cdot x+c=0,$$

moramo najprije odrediti rješenja pripadne kvadratne jednadžbe.

$$(x+2)\cdot(x+3)-2=x^2+3\cdot x+2\cdot x+6-2=x^2+5\cdot x+4.$$

Računamo rješenja kvadratne jednadžbe.

$$x^2+5\cdot x+4=0 \Rightarrow \left.\begin{array}{l} x^2+5\cdot x+4=0 \\ a=1\ ,\ b=5\ ,\ c=4 \end{array}\right\} \Rightarrow \left.\begin{array}{l} a=1\ ,\ b=5\ ,\ c=4 \\ x_{1,2}=\dfrac{-b\pm\sqrt{b^2-4\cdot a\cdot c}}{2\cdot a} \end{array}\right\} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow x_{1,2}=\frac{-5\pm\sqrt{5^2-4\cdot1\cdot4}}{2\cdot1} \Rightarrow x_{1,2}=\frac{-5\pm\sqrt{25-16}}{2} \Rightarrow x_{1,2}=\frac{-5\pm\sqrt{9}}{2} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow x_{1,2}=\frac{-5\pm3}{2} \Rightarrow \left.\begin{array}{l} x_1=\dfrac{-5+3}{2} \\ x_2=\dfrac{-5-3}{2} \end{array}\right\} \Rightarrow \left.\begin{array}{l} x_1=\dfrac{-2}{2} \\ x_2=\dfrac{-8}{2} \end{array}\right\} \Rightarrow \left.\begin{array}{l} x_1=\dfrac{-2}{2} \\ x_2=\dfrac{-8}{2} \end{array}\right\} \Rightarrow \left.\begin{array}{l} x_1=-1 \\ x_2=-4 \end{array}\right\}.$$

Sada je

$$x^2+5\cdot x+4=\left[\begin{array}{c} a=1\ ,\ x_1=-1\ ,\ x_2=-4 \\ a\cdot x^2+b\cdot x+c=a\cdot(x-x_1)\cdot(x-x_2) \end{array}\right]=1\cdot(x-(-1))\cdot(x-(-4))=(x+1)\cdot(x+4).$$

Vježba 177

Napiši u obliku umnoška polinom $(x+2)\cdot(x+6)+4.$

Rezultat: $(x+4)^2.$

Zadatak 178 (Edy, gimnazija)

Ako je $(x-1)\cdot(x-3)=4,$ koliko je $(x-2)$?

Rješenje 178

Ponovimo!

$$a^1=a \quad , \quad a^n\cdot a^m=a^{n+m} \quad , \quad (a-b)^2=a^2-2\cdot a\cdot b+b^2.$$

Zakon distribucije množenja prema zbrajanju.

$$a\cdot(b+c)=a\cdot b+a\cdot c \quad , \quad a\cdot b+a\cdot c=a\cdot(b+c).$$

Množenje zagrada

$$(a+b)\cdot(c+d)=a\cdot c+a\cdot d+b\cdot c+b\cdot d.$$

1.inačica

Preoblikujemo zadanu jednadžbu.

$$(x-1)\cdot(x-3)=4 \Rightarrow x^2-3\cdot x-x+3=4 \Rightarrow x^2-4\cdot x=4-3 \Rightarrow x^2-4\cdot x=1.$$

Sada je:

$$(x-2)=x^2-4\cdot x+4=\left(x^2-4\cdot x\right)+4=\left[x^2-4\cdot x=1\right]=1+4=5.$$

2.inačica

$$(x-2)=x^2-4\cdot x+4=x^2-x-3\cdot x+3+1=\left(x^2-x\right)+(-3\cdot x+3)+1=$$

$$=x\cdot(x-1)-3\cdot(x-1)+1=x\cdot(x-1)-3\cdot(x-1)+1=(x-1)\cdot(x-3)+1=$$

$$=\left[(x-1)\cdot(x-3)=4\right]=4+1=5.$$

Vježba 178

Ako je $(1-x)\cdot(3-x)=4,$ koliko je $(x-2)$?

Rezultat: 5.

Zadatak 179 (Ivan, gimnazija)

Nađi zbroj rješenja jednadžbe: $\dfrac{x}{1+\dfrac{x}{1+\dfrac{x}{1-x}}}=-1.$

Rješenje 179

Ponovimo!

$$n=\frac{n}{1} \quad , \quad \frac{a}{b}+\frac{c}{d}=\frac{a\cdot d+b\cdot c}{b\cdot d} \quad , \quad \frac{\frac{a}{b}}{\frac{c}{d}}=\frac{a\cdot d}{b\cdot c} \quad , \quad a^{1}=a \quad , \quad a^{n}\cdot a^{m}=a^{n+m}.$$

Zakon distribucije množenja prema zbrajanju.

$$a\cdot(b+c)=a\cdot b+a\cdot c \quad , \quad a\cdot b+a\cdot c=a\cdot(b+c).$$

Jednadžba oblika

$$a\cdot x^{2}+b\cdot x+c=0,$$

($a \neq 0$, b i c su realni brojevi) naziva se kvadratna jednadžba. Svaki broj x (realan ili kompleksan) koji zadovoljava tu jednadžbu naziva se rješenje kvadratne jednadžbe.
Rješenja x_1 i x_2 kvadratne jednadžbe

$$a\cdot x^{2}+b\cdot x+c=0$$

zadovoljavaju Vièteove formule:

$$x_1+x_2=-\frac{b}{a} \quad , \quad x_1\cdot x_2=\frac{c}{a}.$$

$$\frac{x}{1+\dfrac{x}{1+\dfrac{x}{1-x}}}=-1 \Rightarrow \frac{x}{1+\dfrac{x}{\dfrac{1}{1}+\dfrac{x}{1-x}}}=-1 \Rightarrow \frac{x}{1+\dfrac{x}{\dfrac{1-x+x}{1-x}}}=-1 \Rightarrow \frac{x}{1+\dfrac{x}{\dfrac{1-x+x}{1-x}}}=-1 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \frac{x}{1+\dfrac{x}{\dfrac{1}{1-x}}}=-1 \Rightarrow \frac{x}{1+\dfrac{\frac{x}{1}}{\dfrac{1}{1-x}}}=-1 \Rightarrow \frac{x}{1+x\cdot(1-x)}=-1 \Rightarrow \frac{x}{1+x-x^{2}}=-1 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \frac{x}{1+x-x^{2}}=-1 \;/\cdot\left(1+x-x^{2}\right) \Rightarrow x=-1\cdot\left(1+x-x^{2}\right) \Rightarrow x=-1-x+x^{2} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow x+1+x-x^{2} \Rightarrow -x^{2}+2\cdot x+1=0 \Rightarrow -x^{2}+2\cdot x+1=0 \;/\cdot(-1) \Rightarrow x^{2}-2\cdot x-1=0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \left.\begin{array}{l} x^{2}-2\cdot x-1=0 \\ a=1 \ , \ b=-2 \ , \ c=-1 \end{array}\right\} \Rightarrow \left[x_1+x_2=-\frac{b}{a}\right] \Rightarrow x_1+x_2=-\frac{-2}{1} \Rightarrow x_1+x_2=2.$$

Vježba 179

Nađi umnožak rješenja jednadžbe: $\dfrac{x}{1+\dfrac{x}{1+\dfrac{x}{1-x}}}=-1.$

Rezultat: $-1.$

Zadatak 180 (Dodo, gimnazija)

Ako je $a*b=a^2-a\cdot b+b^2$, rješenje jednadžbe $(2*4)*x=108$ je broj:

$A.\ 12 \qquad B.\ 10 \qquad C.\ 8 \qquad D.\ 6$

Rješenje 180

Ponovimo!

$$a^2-2\cdot a\cdot b+b^2=(a-b)^2 \quad , \quad a^n=0\ ,\ n\neq 0\ \Rightarrow\ a=0.$$

$$(2*4)*x=108\ \Rightarrow\ \left[\,a*b=a^2-a\cdot b+b^2\,\right]\ \Rightarrow\ \left(2^2-2\cdot 4+4^2\right)*x=108\ \Rightarrow$$

$$\Rightarrow\ (5-8+16)*x=108\ \Rightarrow\ 12*x=108\ \Rightarrow\ \left[\,a*b=a^2-a\cdot b+b^2\,\right]\ \Rightarrow$$

$$\Rightarrow\ 12^2-12\cdot x+x^2=108\ \Rightarrow\ 144-12\cdot x+x^2=108\ \Rightarrow\ 144-12\cdot x+x^2-108=0\ \Rightarrow$$

$$\Rightarrow\ x^2-12\cdot x+36=0\ \Rightarrow\ (x-6)^2=0\ \Rightarrow\ x-6=0\ \Rightarrow\ x=6.$$

Odgovor je pod D.

Vježba 180

Ako je $a*b=a^2-a\cdot b+b^2$, rješenje jednadžbe $(2*4)*x-108=0$ je broj:

$A.\ 12 \qquad B.\ 10 \qquad C.\ 8 \qquad D.\ 6$

Rezultat: D.