Zadatak 121 (Lidija, srednja škola)

Ne rješavajući jednadžbu $3 \cdot x^2 - 2 \cdot x + 1 = 0$ napiši novu kvadratnu jednadžbu čija su rješenja jednaka $x_1 + \frac{1}{x_2}$ i $x_2 + \frac{1}{x_1}$. Pritom su x_1 i x_2 rješenja zadane jednadžbe.

Rješenje 121

Ponovimo!

Rješenja (korijeni) x_1, x_2 kvadratne jednadžbe $a \cdot x^2 + b \cdot x + c = 0$ zadovoljavaju Vièteove formule:

$$x_1 + x_2 = -\frac{b}{a} \quad , \quad x_1 \cdot x_2 = \frac{c}{a}.$$

Ako vrijedi $x_1 + x_2 = m$ i $x_1 \cdot x_2 = n$, onda su x_1 i x_2 rješenja kvadratne jednadžbe

$$x^2 - m \cdot x + n = 0 \Rightarrow x^2 - (x_1 + x_2) \cdot x + x_1 \cdot x_2 = 0.$$

Množenje zagrada

$$(a+b) \cdot (c+d) = a \cdot c + a \cdot d + b \cdot c + b \cdot d.$$

$$\frac{\frac{a}{b}}{\frac{c}{d}} = \frac{a \cdot d}{b \cdot c} \quad , \quad n = \frac{n}{1} \quad , \quad \frac{a}{b} + \frac{c}{d} = \frac{a \cdot d + b \cdot c}{b \cdot d}.$$

Označimo s x_1 i x_2 rješenja jednadžbe $3 \cdot x^2 - 2 \cdot x + 1 = 0$. Tada je

$$3 \cdot x^2 - 2 \cdot x + 1 = 0 \Rightarrow \left.\begin{matrix} a = 3 \\ b = -2 \\ c = 1 \end{matrix}\right\}.$$

Po Vièteovim formulama vrijedi:

$$\left.\begin{matrix} a = 3 \ , \ b = -2 \ , \ c = 1 \\ x_1 + x_2 = -\frac{b}{a} \\ x_1 \cdot x_2 = \frac{c}{a} \end{matrix}\right\} \Rightarrow \left.\begin{matrix} x_1 + x_2 = -\frac{-2}{3} \\ x_1 \cdot x_2 = \frac{1}{3} \end{matrix}\right\} \Rightarrow \left.\begin{matrix} x_1 + x_2 = \frac{2}{3} \\ x_1 \cdot x_2 = \frac{1}{3} \end{matrix}\right\}.$$

Neka su

$$u_1 = x_1 + \frac{1}{x_2} \text{ i } u_2 = x_2 + \frac{1}{x_1}$$

rješenja tražene jednadžbe. Imamo:

$$\left.\begin{matrix} u_1 + u_2 = x_1 + \frac{1}{x_2} + x_2 + \frac{1}{x_1} \\ u_1 \cdot u_2 = \left(x_1 + \frac{1}{x_2}\right) \cdot \left(x_2 + \frac{1}{x_1}\right) \end{matrix}\right\} \Rightarrow \left.\begin{matrix} u_1 + u_2 = (x_1 + x_2) + \left(\frac{1}{x_1} + \frac{1}{x_2}\right) \\ u_1 \cdot u_2 = x_1 \cdot x_2 + x_1 \cdot \frac{1}{x_1} + \frac{1}{x_2} \cdot x_2 + \frac{1}{x_2} \cdot \frac{1}{x_1} \end{matrix}\right\} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \left.\begin{matrix} u_1 + u_2 = (x_1 + x_2) + \frac{x_2 + x_1}{x_2 \cdot x_1} \\ u_1 \cdot u_2 = x_1 \cdot x_2 + x_1 \cdot \frac{1}{x_1} + \frac{1}{x_2} \cdot x_2 + \frac{1}{x_2} \cdot \frac{1}{x_1} \end{matrix}\right\} \Rightarrow \left.\begin{matrix} u_1 + u_2 = (x_1 + x_2) + \frac{x_1 + x_2}{x_1 \cdot x_2} \\ u_1 \cdot u_2 = x_1 \cdot x_2 + 1 + 1 + \frac{1}{x_2} \cdot \frac{1}{x_1} \end{matrix}\right\} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \left.\begin{array}{l} u_1+u_2=\left(x_1+x_2\right)+\dfrac{x_1+x_2}{x_1\cdot x_2} \\ u_1\cdot u_2=x_1\cdot x_2+\dfrac{1}{x_2}\cdot\dfrac{1}{x_1}+2 \end{array}\right\} \Rightarrow \left.\begin{array}{l} u_1+u_2=\left(x_1+x_2\right)+\dfrac{x_1+x_2}{x_1\cdot x_2} \\ u_1\cdot u_2=x_1\cdot x_2+\dfrac{1}{x_1\cdot x_2}+2 \end{array}\right\} \Rightarrow \left.\begin{array}{l} u_1+u_2=\dfrac{2}{3}+\dfrac{\frac{2}{3}}{\frac{1}{3}} \\ u_1\cdot u_2=\dfrac{1}{3}+\dfrac{1}{\frac{1}{3}}+2 \end{array}\right\} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \left.\begin{array}{l} u_1+u_2=\left(x_1+x_2\right)+\dfrac{x_1+x_2}{x_1\cdot x_2} \\ u_1\cdot u_2=x_1\cdot x_2+\dfrac{1}{x_2}\cdot\dfrac{1}{x_1}+2 \end{array}\right\} \Rightarrow \left.\begin{array}{l} u_1+u_2=\left(x_1+x_2\right)+\dfrac{x_1+x_2}{x_1\cdot x_2} \\ u_1\cdot u_2=x_1\cdot x_2+\dfrac{1}{x_1\cdot x_2}+2 \end{array}\right\} \Rightarrow \left.\begin{array}{l} u_1+u_2=\dfrac{2}{3}+\dfrac{\frac{2}{3}}{\frac{1}{3}} \\ u_1\cdot u_2=\dfrac{1}{3}+\dfrac{\frac{1}{1}}{\frac{1}{3}}+2 \end{array}\right\} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \left.\begin{array}{l} u_1+u_2=\dfrac{2}{3}+2 \\ u_1\cdot u_2=\dfrac{1}{3}+3+2 \end{array}\right\} \Rightarrow \left.\begin{array}{l} u_1+u_2=\dfrac{2}{3}+2 \\ u_1\cdot u_2=\dfrac{1}{3}+5 \end{array}\right\} \Rightarrow \left.\begin{array}{l} u_1+u_2=\dfrac{2}{3}+\dfrac{2}{1} \\ u_1\cdot u_2=\dfrac{1}{3}+\dfrac{5}{1} \end{array}\right\} \Rightarrow \left.\begin{array}{l} u_1+u_2=\dfrac{2+6}{3} \\ u_1\cdot u_2=\dfrac{1+15}{3} \end{array}\right\} \Rightarrow \left.\begin{array}{l} u_1+u_2=\dfrac{8}{3} \\ u_1\cdot u_2=\dfrac{16}{3} \end{array}\right\}.$$

Tražena kvadratna jednadžba glasi:

$$\left.\begin{array}{l} u_1+u_2=\dfrac{8}{3}\ ,\ u_1\cdot u_2=\dfrac{16}{3} \\ x^2-\left(u_1+u_2\right)\cdot x+u_1\cdot u_2=0 \end{array}\right\} \Rightarrow x^2-\frac{8}{3}\cdot x+\frac{16}{3}=0 \Rightarrow x^2-\frac{8}{3}\cdot x+\frac{16}{3}=0\ /\cdot 3 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 3\cdot x^2-8\cdot x+16=0.$$

Vježba 121

Napišimo kvadratnu jednadžbu čija su rješenja za 1 veća od rješenja kvadratne jednadžbe $3\cdot x^2+2\cdot x-4=0.$

Rezultat: $3\cdot x^2-4\cdot x-3=0.$

Zadatak 122 (Mirela, gimnazija)

Jednadžba $\dfrac{\log x}{\log\left(x-a\right)}=2$ ima jedno rješenje ako je parametar a jednak:

$$A.\ \frac{1}{4} \qquad B.\ -\frac{1}{4} \qquad C.\ \frac{1}{2} \qquad D.\ -\frac{1}{2}$$

Rješenje 122

Ponovimo!

$$n=\frac{n}{1}\quad,\quad \frac{a}{b}=\frac{c}{d}\Rightarrow a\cdot d=b\cdot c\quad,\quad \log_{10}x=\log x\quad,\quad \log a^n=n\cdot\log a\quad,\quad \log\frac{a}{b}=\log a-\log b.$$

Logaritam broja a po bazi b je broj c kojim treba potencirati bazu b da se dobije broj a.

Mnemotehničko pravilo za pamćenje osnovne veze eksponencijalne i logaritamske funkcije:

$$\log_b a=c \qquad \log_b a=b^c \qquad a=b^c$$
$$\rightarrow$$

$$a^0=1\quad,\quad \log 1=0\quad,\quad \frac{a}{b}=1\Rightarrow a=b\quad,\quad (a-b)^2=a^2-2\cdot a\cdot b+b^2\quad,\quad (a+b)^2=a^2+2\cdot a\cdot b+b^2.$$

Diskriminanta kvadratne jednadžbe

$$a\cdot x^2+b\cdot x+c=0$$

je broj

$$D=b^2-4\cdot a\cdot c.$$

- Ako je D > 0, jednadžba ima dva realna rješenja.
- Ako je D = 0, jednadžba ima jedno dvostruko realno rješenje.
- Ako je D < 0, jednadžba ima kompleksno – konjugirana rješenja.

Zakon distribucije množenja prema zbrajanju.

$$a\cdot(b+c)=a\cdot b+a\cdot c \quad , \quad a\cdot b+a\cdot c=a\cdot(b+c).$$

$$\frac{\log x}{\log(x-a)}=2 \Rightarrow \frac{\log x}{\log(x-a)}=\frac{2}{1} \Rightarrow 2\cdot\log(x-a)=\log x \Rightarrow \log(x-a)^2=\log x \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \log(x-a)^2-\log x=0 \Rightarrow \log\frac{(x-a)^2}{x}=0 \Rightarrow \frac{(x-a)^2}{x}=10^0 \Rightarrow \frac{(x-a)^2}{x}=1 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow (x-a)^2=x \Rightarrow (x-a)^2-x=0 \Rightarrow x^2-2\cdot a\cdot x+a^2-x=0 \Rightarrow x^2-(2\cdot a+1)\cdot x+a^2=0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \left.\begin{array}{l} a=1 \\ b=-(2\cdot a+1) \\ c=a^2 \end{array}\right\}.$$

Budući da prema uvjetu zadatka mora biti jedno rješenje, diskriminanta kvadratne jednadžbe jednaka je nuli.

$$\left.\begin{array}{l} a=1 \;,\; b=-(2\cdot a+1) \;,\; c=a^2 \\ D=b^2-4\cdot a\cdot c \end{array}\right\} \Rightarrow \left[\begin{array}{c} \text{uvjet} \\ D=0 \end{array}\right] \Rightarrow (-(2\cdot a+1))^2-4\cdot 1\cdot a^2=0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow (2\cdot a+1)^2-4\cdot a^2=0 \Rightarrow 4\cdot a^2+4\cdot a+1-4\cdot a^2=0 \Rightarrow 4\cdot a^2+4\cdot a+1-4\cdot a^2=0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 4\cdot a+1=0 \Rightarrow 4\cdot a=-1 \Rightarrow 4\cdot a=-1 \;/:4 \Rightarrow a=-\frac{1}{4}.$$

Odgovor je pod C.

Vježba 122

Jednadžba $\frac{\log(x-a)}{\log x}=\frac{1}{2}$ ima jedno rješenje ako je parametar a jednak:

$$A.\ \frac{1}{4} \qquad B.\ -\frac{1}{4} \qquad C.\ \frac{1}{2} \qquad D.\ -\frac{1}{2}$$

Rezultat: B.

Zadatak 123 (Josip, gimnazija)

Rješenja kvadratne jednadžbe $3\cdot k\cdot x^2-x+k-2=0$ su recipročni brojevi ako parametar k ima vrijednost:

$$A.\ 1 \qquad B.\ -1 \qquad C.\ 2 \qquad D.\ -2$$

Rješenje 123

Ponovimo!

Rješenja (korijeni) x_1, x_2 kvadratne jednadžbe $a\cdot x^2+b\cdot x+c=0$ zadovoljavaju Vièteove formule:

$$x_1+x_2=-\frac{b}{a} \quad , \quad x_1\cdot x_2=\frac{c}{a}.$$

Za svaki realan broj x različit od 0 postoji jedan i samo jedan realan broj, označimo ga s x^{-1} ili $\frac{1}{x}$, takav da je

$$x \cdot x^{-1} = 1 \quad \text{ili} \quad x \cdot \frac{1}{x} = 1.$$

Broj x^{-1} ili $\frac{1}{x}$ zovemo inverz ili recipročni broj broja x.

Druga Vièteova formula za kvadratnu jednadžbu $3 \cdot k \cdot x^2 - x + k - 2 = 0$ glasi:

$$\left.\begin{array}{l} 3 \cdot k \cdot x^2 - x + k - 2 = 0 \\ a = 3 \cdot k \ , \ b = -1 \ , \ c = k - 2 \end{array}\right\} \Rightarrow \left[x_1 \cdot x_2 = \frac{c}{a} \right] \Rightarrow x_1 \cdot x_2 = \frac{k-2}{3 \cdot k}.$$

Budući da rješenja kvadratne jednadžbe moraju biti recipročni brojevi, slijedi:

$$x_1 = \frac{1}{x_2} \Rightarrow x_1 = \frac{1}{x_2} \ / \cdot x_2 \Rightarrow x_1 \cdot x_2 = 1.$$

Iz sustava jednadžbi dobije se vrijednost parametra k.

$$\left.\begin{array}{l} x_1 \cdot x_2 = \frac{k-2}{3 \cdot k} \\ x_1 \cdot x_2 = 1 \end{array}\right\} \Rightarrow \left[\begin{array}{l} \text{metoda} \\ \text{komparacije} \end{array} \right] \Rightarrow \frac{k-2}{3 \cdot k} = 1 \Rightarrow \frac{k-2}{3 \cdot k} = 1 \ / \cdot 3 \cdot k \Rightarrow k - 2 = 3 \cdot k \Rightarrow$$

$$\Rightarrow k - 3 \cdot k = 2 \Rightarrow -2 \cdot k = 2 \Rightarrow -2 \cdot k = 2 \ / : (-2) \Rightarrow k = -1.$$

Odgovor je pod B.

Vježba 123

Rješenja kvadratne jednadžbe $3 \cdot k \cdot x^2 - x + k + 2 = 0$ su recipročni brojevi ako parametar k ima vrijednost:

$A.\ 1 \qquad B.\ -1 \qquad C.\ 2 \qquad D.\ -2$

Rezultat: A.

Zadatak 124 (Sandra, srednja škola)

Ako su $tg\,\alpha$ i $tg\,\beta$ korijeni jednadžbe $a \cdot x^2 + b \cdot x + c = 0 \ (a, b, c \in R)$ i $a \neq 0$, koliko je $tg\,\alpha + tg\,\beta$?

$A.\ \frac{a}{c-b} \qquad B.\ \frac{b}{c+a} \qquad C.\ \frac{c}{b-a} \qquad D.\ \frac{b}{c-a}$

Rješenje 124

Ponovimo!

Rješenja (korijeni) x_1, x_2 kvadratne jednadžbe $a \cdot x^2 + b \cdot x + c = 0$ zadovoljavaju Vièteove formule:

$$x_1 + x_2 = -\frac{b}{a} \quad , \quad x_1 \cdot x_2 = \frac{c}{a}.$$

Tangens zbroja

$$tg\,(x + y) = \frac{tg\,x + tg\,y}{1 - tg\,x \cdot tg\,y}.$$

Budući da su tg α i tg β korijeni (rješenja) jednadžbe $a \cdot x^2 + b \cdot x + c = 0$, slijedi:

$$\left.\begin{array}{l} tg\,\alpha + tg\,\beta = -\frac{b}{a} \\ tg\,\alpha \cdot tg\,\beta = \frac{c}{a} \end{array}\right\}.$$

Sada je:

$$tg\left(\alpha+\beta\right)=\frac{tg\,\alpha+tg\,\beta}{1-tg\,\alpha\cdot tg\,\beta}=\frac{-\frac{b}{a}}{1-\frac{c}{a}}=\frac{-\frac{b}{a}}{\frac{1}{1}-\frac{c}{a}}=\frac{-\frac{b}{a}}{\frac{a-c}{a}}=\frac{-\frac{b}{a}}{\frac{a-c}{a}}=\frac{-\frac{b}{1}}{\frac{a-c}{1}}=-\frac{b}{a-c}=\frac{b}{c-a}.$$

Odgovor je pod D.

Vježba 124

Ako su $tg\,\alpha$ i $tg\,\beta$ korijeni jednadžbe $a\cdot x^2-b\cdot x+c=0\ \left(a,\ b,\ c\in R\right)$ i $a\neq 0,$ koliko je $tg\,\alpha+tg\,\beta$?

$$A.\ \frac{a}{c-b}\qquad B.\ \frac{b}{a-c}\qquad C.\ \frac{c}{b-a}\qquad D.\ \frac{b}{c+a}$$

Rezultat: B.

Zadatak 125 (Vesna, gimnazija)

Koliko iznosi zbroj rješenja jednadžbe $2\cdot\left(x+5\right)^3-7\cdot\left(x+5\right)^2+7\cdot\left(x+5\right)-2=0$?

$$A.\ -\frac{33}{2}\qquad B.\ -\frac{31}{2}\qquad C.\ -\frac{25}{2}\qquad D.\ -\frac{23}{2}$$

Rješenje 125

Ponovimo!

Zakon distribucije množenja prema zbrajanju.

$$a\cdot\left(b+c\right)=a\cdot b+a\cdot c\quad,\quad a\cdot b+a\cdot c=a\cdot\left(b+c\right).$$

Da bi umnožak bio jednak nuli, dovoljno je da jedan faktor bude jednak nuli.

$$a\cdot b=0\ \Leftrightarrow\ a=0\ \text{ili}\ b=0\ \text{ili}\ a=b=0.$$

$$n=\frac{n}{1}\quad,\quad\frac{a}{b}-\frac{c}{d}=\frac{a\cdot d-b\cdot c}{b\cdot d}.$$

Uvedemo zamjenu (supstituciju).

$$t=x+5.$$

Dalje slijedi:

$$2\cdot t^3-7\cdot t^2+7\cdot t-2=0\ \Rightarrow\ \left(2\cdot t^3-2\right)+\left(-7\cdot t^2+7\cdot t\right)=0\ \Rightarrow$$

$$\Rightarrow\ 2\cdot\left(t^3-1\right)-7\cdot t\cdot\left(t-1\right)=0\ \Rightarrow\ 2\cdot\left(t-1\right)\cdot\left(t^2+t+1\right)-7\cdot t\cdot\left(t-1\right)=0\ \Rightarrow$$

$$\Rightarrow\ \left(t-1\right)\cdot\left(2\cdot\left(t^2+t+1\right)-7\cdot t\right)=0\ \Rightarrow\ \left(t-1\right)\cdot\left(2\cdot t^2+2\cdot t+2-7\cdot t\right)=0\ \Rightarrow$$

$$\Rightarrow\ \left(t-1\right)\cdot\left(2\cdot t^2-5\cdot t+2\right)=0\ \Rightarrow\ \left.\begin{array}{l}t-1=0\\2\cdot t^2-5\cdot t+2=0\end{array}\right\}.$$

Riješimo linearnu jednadžbu.

$$t-1=0\ \Rightarrow\ t_1=1.$$

Riješimo kvadratnu jednadžbu.

$$2\cdot t^2-5\cdot t+2=0\ \Rightarrow\ \left.\begin{array}{l}2\cdot t^2-5\cdot t+2=0\\a=2\ ,\ b=-5\ ,\ c=2\end{array}\right\}\ \Rightarrow\ \left.\begin{array}{l}a=2\ ,\ b=-5\ ,\ c=2\\t_{2,3}=\dfrac{-b\pm\sqrt{b^2-4\cdot a\cdot c}}{2\cdot a}\end{array}\right\}\ \Rightarrow$$

$$\Rightarrow t_{2,3}=\frac{-(-5)\pm\sqrt{(-5)^2-4\cdot2\cdot2}}{2\cdot2} \Rightarrow t_{2,3}=\frac{5\pm\sqrt{25-16}}{4} \Rightarrow t_{2,3}=\frac{5\pm\sqrt{9}}{4} \Rightarrow t_{2,3}=\frac{5\pm3}{4} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \left.\begin{array}{l} t_2=\frac{5+3}{4} \\ t_3=\frac{5-3}{4} \end{array}\right\} \Rightarrow \left.\begin{array}{l} t_2=\frac{8}{4} \\ t_3=\frac{2}{4} \end{array}\right\} \Rightarrow \left.\begin{array}{l} t_2=2 \\ t_3=\frac{1}{2} \end{array}\right\}.$$

Vraćamo se supstituciji

$$t=x+5.$$

- $\left.\begin{array}{l} t=x+5 \\ t=1 \end{array}\right\} \Rightarrow x+5=1 \Rightarrow x=1-5 \Rightarrow x_1=-4.$
- $\left.\begin{array}{l} t=x+5 \\ t=2 \end{array}\right\} \Rightarrow x+5=2 \Rightarrow x=2-5 \Rightarrow x_2=-3.$
- $\left.\begin{array}{l} t=x+5 \\ t=\frac{1}{2} \end{array}\right\} \Rightarrow x+5=\frac{1}{2} \Rightarrow x=\frac{1}{2}-5 \Rightarrow x=\frac{1}{2}-\frac{5}{1} \Rightarrow x=\frac{1-10}{2} \Rightarrow x_3=-\frac{9}{2}.$

Zbroj rješenja iznosi:

$$x_1+x_2+x_3=-4-3-\frac{9}{2}=-\frac{4}{1}-\frac{3}{1}-\frac{9}{2}=\frac{-8-6-9}{2}=-\frac{23}{2}.$$

Odgovor je pod D.

Vježba 125

Koliko iznosi umnožak rješenja jednadžbe $2\cdot(x+5)^3-7\cdot(x+5)^2+7\cdot(x+5)-2=0$?

$A.\ 54 \qquad B.\ -54 \qquad C.\ -45 \qquad D.\ 45$

Rezultat: B.

Zadatak 126 (Marija, gimnazija)

Riješi jednadžbu $x^3-7\cdot x^2-4\cdot x+28=0.$

Rješenje 126

Ponovimo!

Zakon distribucije množenja prema zbrajanju.

$$a\cdot(b+c)=a\cdot b+a\cdot c \quad , \quad a\cdot b+a\cdot c=a\cdot(b+c).$$

Da bi umnožak bio jednak nuli, dovoljno je da jedan faktor bude jednak nuli.

$$a\cdot b=0 \Leftrightarrow a=0 \text{ ili } b=0 \text{ ili } a=b=0.$$

1.inačica

Metodom grupiranja članova rastavimo lijevu stranu jednadžbe na faktore.

$$x^3-7\cdot x^2-4\cdot x+28=0 \Rightarrow \left(x^3-7\cdot x^2\right)+(-4\cdot x+28)=0 \Rightarrow x^2\cdot(x-7)-4\cdot(x-7)=0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow (x-7)\cdot\left(x^2-4\right)=0 \Rightarrow \left.\begin{array}{l} x-7=0 \\ x^2-4=0 \end{array}\right\} \Rightarrow \left.\begin{array}{l} x_1=7 \\ x^2=4 \end{array}\right\} \Rightarrow \left.\begin{array}{l} x_1=7 \\ x^2=4 \ /\sqrt{\ } \end{array}\right\} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \left.\begin{array}{l} x_1=7 \\ x_{2,3}=\pm\sqrt{4} \end{array}\right\} \Rightarrow \left.\begin{array}{l} x_1=7 \\ x_{2,3}=\pm2 \end{array}\right\}.$$

2.inačica

Metodom grupiranja članova rastavimo lijevu stranu jednadžbe na faktore.

$$x^3-7\cdot x^2-4\cdot x+28=0 \Rightarrow \left(x^3-7\cdot x^2\right)+(-4\cdot x+28)=0 \Rightarrow x^2\cdot(x-7)-4\cdot(x-7)=0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow (x-7)\cdot\left(x^2-4\right)=0 \Rightarrow (x-7)\cdot(x-2)\cdot(x+2)=0 \Rightarrow \left.\begin{array}{l} x-7=0 \\ x-2=0 \\ x+2=0 \end{array}\right\} \Rightarrow \left.\begin{array}{l} x_1=7 \\ x_2=2 \\ x_3=-2 \end{array}\right\}.$$

3.inačica

Metodom grupiranja članova rastavimo lijevu stranu jednadžbe na faktore.

$$x^3-7\cdot x^2-4\cdot x+28=0 \Rightarrow x^3-2\cdot x^2-5\cdot x^2+10\cdot x-14\cdot x+28=0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \left(x^3-2\cdot x^2\right)+\left(-5\cdot x^2+10\cdot x\right)+(-14\cdot x+28)=0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow x^2\cdot(x-2)-5\cdot x\cdot(x-2)-14\cdot(x-2)=0 \Rightarrow (x-2)\cdot\left(x^2-5\cdot x-14\right)=0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \left.\begin{array}{l} x-2=0 \\ x^2-5\cdot x-14=0 \end{array}\right\}.$$

Računamo rješenje linearne jednadžbe.

$$x-2=0 \Rightarrow x_1=2.$$

Računamo rješenja kvadratne jednadžbe.

$$x^2-5\cdot x-14=0 \Rightarrow \left.\begin{array}{l} x^2-5\cdot x-14=0 \\ a=1\ ,\ b=-5\ ,\ c=-14 \end{array}\right\} \Rightarrow \left.\begin{array}{l} a=1\ ,\ b=-5\ ,\ c=-14 \\ x_{2,3}=\dfrac{-b\pm\sqrt{b^2-4\cdot a\cdot c}}{2\cdot a} \end{array}\right\} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow x_{2,3}=\frac{-(-5)\pm\sqrt{(-5)^2-4\cdot 1\cdot(-14)}}{2\cdot 1} \Rightarrow x_{2,3}=\frac{5\pm\sqrt{25+56}}{2} \Rightarrow x_{2,3}=\frac{5\pm\sqrt{81}}{2} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow x_{2,3}=\frac{5\pm 9}{2} \Rightarrow \left.\begin{array}{l} x_2=\dfrac{5+9}{2} \\ x_3=\dfrac{5-9}{2} \end{array}\right\} \Rightarrow \left.\begin{array}{l} x_2=\dfrac{14}{2} \\ x_3=-\dfrac{4}{2} \end{array}\right\} \Rightarrow \left.\begin{array}{l} x_2=7 \\ x_3=-2 \end{array}\right\}.$$

4.inačica

Metodom grupiranja članova rastavimo lijevu stranu jednadžbe na faktore.

$$x^3-7\cdot x^2-4\cdot x+28=0 \Rightarrow x^3+2\cdot x^2-9\cdot x^2-18\cdot x+14\cdot x+28=0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \left(x^3+2\cdot x^2\right)+\left(-9\cdot x^2-18\cdot x\right)+(14\cdot x+28)=0 \Rightarrow x^2\cdot(x+2)-9\cdot x\cdot(x+2)+14\cdot(x+2)=0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow (x+2)\cdot\left(x^2-9\cdot x+14\right)=0 \Rightarrow \left.\begin{array}{l} x+2=0 \\ x^2-9\cdot x+14=0 \end{array}\right\}.$$

Računamo rješenje linearne jednadžbe.

$$x+2=0 \Rightarrow x_1=-2.$$

Računamo rješenja kvadratne jednadžbe.

$$x^2-9\cdot x+14=0 \Rightarrow \left.\begin{matrix} x^2-9\cdot x+14=0 \\ a=1 \ , \ b=-9 \ , \ c=14 \end{matrix}\right\} \Rightarrow \left.\begin{matrix} a=1 \ , \ b=-9 \ , \ c=14 \\ x_{2,3}=\dfrac{-b\pm\sqrt{b^2-4\cdot a\cdot c}}{2\cdot a} \end{matrix}\right\} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow x_{2,3}=\frac{-(-9)\pm\sqrt{(-9)^2-4\cdot 1\cdot 14}}{2\cdot 1} \Rightarrow x_{2,3}=\frac{9\pm\sqrt{81-56}}{2} \Rightarrow x_{2,3}=\frac{9\pm\sqrt{25}}{2} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow x_{2,3}=\frac{9\pm 5}{2} \Rightarrow \left.\begin{matrix} x_2=\dfrac{9+5}{2} \\ x_3=\dfrac{9-5}{2} \end{matrix}\right\} \Rightarrow \left.\begin{matrix} x_2=\dfrac{14}{2} \\ x_3=\dfrac{4}{2} \end{matrix}\right\} \Rightarrow \left.\begin{matrix} x_2=7 \\ x_3=2 \end{matrix}\right\}.$$

Vježba 126

Riješi jednadžbu $x^3-x^2-4\cdot x+4=0.$

Rezultat: $x_1 = 1,\ x_2 = 2,\ x_3 = -2.$

Zadatak 127 (Petra, gimnazija)

Jednadžba $3\cdot x^2+b\cdot x-30=0$ ima rješenja $x=-2$ i $x=5$. Tada je b jednako:

$A.\ 9 \qquad B.\ \frac{1}{9} \qquad C.\ -\frac{1}{9} \qquad D.\ -9$

Rješenje 127

Ponovimo!

Rješenja (korijeni) x_1, x_2 kvadratne jednadžbe $a\cdot x^2+b\cdot x+c=0$ zadovoljavaju Vièteove formule:

$$x_1+x_2=-\frac{b}{a}, \quad x_1\cdot x_2=\frac{c}{a}.$$

Dva polinoma jednaka su ako i samo ako su istog stupnja i ako su im koeficijenti uz iste potencije jednaki.

Svaki se kvadratni trinom može napisati u obliku

$$a\cdot x^2+b\cdot x+c=a\cdot(x-x_1)\cdot(x-x_2),$$

gdje su x_1 i x_2 rješenja pripadne kvadratne jednadžbe

$$a\cdot x^2+b\cdot x+c=0.$$

Zakon distribucije množenja prema zbrajanju.

$$a\cdot(b+c)=a\cdot b+a\cdot c \quad , \quad a\cdot b+a\cdot c=a\cdot(b+c).$$

1.inačica

Budući da je $x = -2$ rješenje zadane kvadratne jednadžbe, uvrstit ćemo ga u nju i izračunati koeficijent b.

$$\left.\begin{matrix} 3\cdot x^2+b\cdot x-30=0 \\ x=-2 \end{matrix}\right\} \Rightarrow 3\cdot(-2)^2+b\cdot(-2)-30=0 \Rightarrow 3\cdot 4-2\cdot b-30=0 \Rightarrow 12-2\cdot b-30=0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow -2\cdot b=-12+30 \Rightarrow -2\cdot b=18 \Rightarrow -2\cdot b=18 \ /:(-2) \Rightarrow b=-9.$$

Odgovor je pod D.

2.inačica

Budući da je $x = 5$ rješenje zadane kvadratne jednadžbe, uvrstit ćemo ga u nju i izračunati koeficijent b.

$$\left.\begin{array}{l} 3\cdot x^2+b\cdot x-30=0 \\ x=5 \end{array}\right\} \Rightarrow 3\cdot 5^2+b\cdot 5-30=0 \Rightarrow 3\cdot 25+5\cdot b-30=0 \Rightarrow 75+5\cdot b-30=0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 5\cdot b=-75+30 \Rightarrow 5\cdot b=-45 \Rightarrow 5\cdot b=-45 \;/:5 \Rightarrow b=-9.$$

Odgovor je pod D.

3.inačica

Uporabom prve Vièteove formule izračuna se koeficijent b.

$$\left.\begin{array}{l} 3\cdot x^2+b\cdot x-30=0 \\ a=3 \;,\; b=b \;,\; c=-30 \\ x_1=-2 \;,\; x_2=5 \end{array}\right\} \Rightarrow \left[\begin{array}{c} \text{Vièteova formula} \\ x_1+x_2=-\frac{b}{a} \end{array}\right] \Rightarrow -2+5=-\frac{b}{3} \Rightarrow 3=-\frac{b}{3} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \frac{b}{3}=-3 \Rightarrow \frac{b}{3}=-3 \;/\cdot 3 \Rightarrow b=-9.$$

Odgovor je pod D.

4.inačica

Budući da su $x_1 = -2$ i $x_2 = 5$ rješenja zadane kvadratne jednadžbe, vrijedi:

$$\left.\begin{array}{l} 3\cdot x^2+b\cdot x-30=0 \\ a=3 \;,\; b=b \;,\; c=-30 \\ x_1=-2 \;,\; x_2=5 \end{array}\right\} \Rightarrow \left[3\cdot x^2+b\cdot x-30=a\cdot\left(x-x_1\right)\cdot\left(x-x_2\right)\right] \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 3\cdot x^2+b\cdot x-30=3\cdot\left(x-(-2)\right)\cdot\left(x-5\right) \Rightarrow 3\cdot x^2+b\cdot x-30=3\cdot\left(x+2\right)\cdot\left(x-5\right) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 3\cdot x^2+b\cdot x-30=3\cdot\left(x^2-5\cdot x+2\cdot x-10\right) \Rightarrow 3\cdot x^2+b\cdot x-30=3\cdot\left(x^2-3\cdot x-10\right) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 3\cdot x^2+b\cdot x-30=3\cdot x^2-9\cdot x-30 \Rightarrow \left[\begin{array}{c} \text{jednakost} \\ \text{polinoma} \end{array}\right] \Rightarrow b=-9.$$

Odgovor je pod D.

Vježba 127

Jednadžba $3\cdot x^2+b\cdot x-30=0$ ima rješenja $x=2$ i $x=-5$. Tada je b jednako:

$$A.\ 9 \qquad B.\ \frac{1}{9} \qquad C.\ -\frac{1}{9} \qquad D.\ -9$$

Rezultat: A.

Zadatak 128 (Tina, srednja škola)

Riješite kvadratnu jednadžbu $x^2-2\cdot\sqrt{3}\cdot x+2=0.$ U zapisu rješenja rabite $\sqrt{3}$ **ne računajući** njegovu vrijednost.

Rješenje 128

Ponovimo!

Rješenja (korijeni) x_1, x_2 kvadratne jednadžbe

$$a\cdot x^2+b\cdot x+c=0$$

dana su izrazima

$$x_1=\frac{-b+\sqrt{b^2-4\cdot a\cdot c}}{2\cdot a} \quad , \quad x_2=\frac{-b-\sqrt{b^2-4\cdot a\cdot c}}{2\cdot a}$$

ili kraće

$$x_{1,2}=\frac{-b\pm\sqrt{b^2-4\cdot a\cdot c}}{2\cdot a}.$$

$$(a\cdot b)^n=a^n\cdot b^n \quad , \quad \left(\sqrt{a}\right)^2=a.$$

Zakon distribucije množenja prema zbrajanju.

$$a\cdot(b+c)=a\cdot b+a\cdot c \quad , \quad a\cdot b+a\cdot c=a\cdot(b+c).$$

$$x^2-2\cdot\sqrt{3}\cdot x+2=0 \Rightarrow \left.\begin{matrix} x^2-2\cdot\sqrt{3}\cdot x+2=0 \\ a=1 \ , \ b=-2\cdot\sqrt{3} \ , \ c=2\end{matrix}\right\} \Rightarrow \left.\begin{matrix} a=1 \ , \ b=-2\cdot\sqrt{3} \ , \ c=2 \\ x_{1,2}=\frac{-b\pm\sqrt{b^2-4\cdot a\cdot c}}{2\cdot a}\end{matrix}\right\} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow x_{1,2}=\frac{-\left(-2\cdot\sqrt{3}\right)\pm\sqrt{\left(-2\cdot\sqrt{3}\right)^2-4\cdot 1\cdot 2}}{2\cdot 1} \Rightarrow x_{1,2}=\frac{2\cdot\sqrt{3}\pm\sqrt{2^2\cdot\left(\sqrt{3}\right)^2-8}}{2} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow x_{1,2}=\frac{2\cdot\sqrt{3}\pm\sqrt{4\cdot 3-8}}{2} \Rightarrow x_{1,2}=\frac{2\cdot\sqrt{3}\pm\sqrt{12-8}}{2} \Rightarrow x_{1,2}=\frac{2\cdot\sqrt{3}\pm\sqrt{4}}{2} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow x_{1,2}=\frac{2\cdot\sqrt{3}\pm 2}{2} \Rightarrow x_{1,2}=\frac{2\cdot\left(\sqrt{3}\pm 1\right)}{2} \Rightarrow x_{1,2}=\frac{2\cdot\left(\sqrt{3}\pm 1\right)}{2} \Rightarrow \left.\begin{matrix} x_1=\sqrt{3}+1 \\ x_2=\sqrt{3}-1\end{matrix}\right\}.$$

Vježba 128

Riješite kvadratnu jednadžbu $x^2-2\cdot\sqrt{5}\cdot x+4=0$. U zapisu rješenja rabite $\sqrt{5}$ **ne računajući** njegovu vrijednost.

Rezultat: $x_1=\sqrt{5}+1 \ , \ x_2=\sqrt{5}-1.$

Zadatak 129 (Mare ☺, gimnazija)

U jednadžbi 2 · (p · x – 1) = p · (2 · x – 1)², p ≠ 0, odredi realni parametar p iz uvjeta da je jedan korijen jednadžbe jednak 1.

Rješenje 129

Ponovimo!

Parametar

Vladimir Anić, Ivo Goldstein, Rječnik stranih riječi, Novi Liber, Zagreb, 2002.

Veličina, obično realna varijabla, čije vrijednosti služe za razlikovanje elemenata nekog skupa točaka funkcija, jednadžbi ili drugih matematičkih objekata.

Bratoljub Klaić, Rječnik stranih riječi, Nakladni zavod MH, Zagreb, 1983.

Veličina o kojoj ovisi funkcija ili oblik krivulje.

$$(a-b)^2=a^2-2\cdot a\cdot b+b^2.$$

Rješenja (korijeni) x_1, x_2 kvadratne jednadžbe

$$a\cdot x^2+b\cdot x+c=0$$

dana su izrazima

$$x_1=\frac{-b+\sqrt{b^2-4\cdot a\cdot c}}{2\cdot a} \quad , \quad x_2=\frac{-b-\sqrt{b^2-4\cdot a\cdot c}}{2\cdot a}$$

ili kraće

$$x_{1,2}=\frac{-b\pm\sqrt{b^2-4\cdot a\cdot c}}{2\cdot a}.$$

Rješenja (korijeni) x_1, x_2 kvadratne jednadžbe $a \cdot x^2 + b \cdot x + c = 0$ zadovoljavaju Vièteove formule:

$$x_1 + x_2 = -\frac{b}{a} \quad , \quad x_1 \cdot x_2 = \frac{c}{a}.$$

Zakon distribucije množenja prema zbrajanju.

$$a \cdot (b+c) = a \cdot b + a \cdot c \quad , \quad a \cdot b + a \cdot c = a \cdot (b+c).$$

1.inačica

Transformiramo zadanu kvadratnu jednadžbu kako bismo mogli odrediti koeficijente a, b i c.

$$2 \cdot (p \cdot x - 1) = p \cdot (2 \cdot x - 1)^2 \Rightarrow 2 \cdot (p \cdot x - 1) = p \cdot \left(4 \cdot x^2 - 4 \cdot x + 1\right) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 2 \cdot p \cdot x - 2 = 4 \cdot p \cdot x^2 - 4 \cdot p \cdot x + p \Rightarrow 2 \cdot p \cdot x - 2 - 4 \cdot p \cdot x^2 + 4 \cdot p \cdot x - p = 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow -4 \cdot p \cdot x^2 + 6 \cdot p \cdot x - 2 - p = 0 \Rightarrow -4 \cdot p \cdot x^2 + 6 \cdot p \cdot x - 2 - p = 0 \; / \cdot (-1) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 4 \cdot p \cdot x^2 - 6 \cdot p \cdot x + 2 + p = 0 \Rightarrow \left.\begin{array}{l} 4 \cdot p \cdot x^2 - 6 \cdot p \cdot x + 2 + p = 0 \\ a = 4 \cdot p \; , \; b = -6 \cdot p \; , \; c = 2 + p \end{array}\right\}.$$

Prema uvjetu zadatka neka je $x_1 = 1$. Tada iz Vièteovih formula slijedi:

$$\left.\begin{array}{l} x_1 + x_2 = -\frac{b}{a} \\ x_1 \cdot x_2 = \frac{c}{a} \\ x_1 = 1 \end{array}\right\} \Rightarrow \left.\begin{array}{l} 1 + x_2 = -\frac{b}{a} \\ 1 \cdot x_2 = \frac{c}{a} \end{array}\right\} \Rightarrow \left.\begin{array}{l} x_2 = -\frac{b}{a} - 1 \\ x_2 = \frac{c}{a} \end{array}\right\} \Rightarrow \left[\begin{array}{l} \text{metoda} \\ \text{komparacije} \end{array}\right] \Rightarrow -\frac{b}{a} - 1 = \frac{c}{a} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow -\frac{b}{a} - 1 = \frac{c}{a} \; / \cdot (-a) \Rightarrow b + a = -c \Rightarrow b + a + c = 0 \Rightarrow \left.\begin{array}{l} b + a + c = 0 \\ b = -6 \cdot p \; , \; a = 4 \cdot p \; , \; c = 2 + p \end{array}\right\} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow -6 \cdot p + 4 \cdot p + 2 + p = 0 \Rightarrow -6 \cdot p + 4 \cdot p + p = -2 \Rightarrow -p = -2 \Rightarrow -p = -2 \; / \cdot (-1) \Rightarrow p = 2.$$

2.inačica

Budući da je jedan korijen jednadžbe jednak 1, uvrstit ćemo $x = 1$ u zadanu jednadžbu i izračunati parametar p.

$$\left.\begin{array}{l} 2 \cdot (p \cdot x - 1) = p \cdot (2 \cdot x - 1)^2 \\ x = 1 \end{array}\right\} \Rightarrow \left[\begin{array}{l} \text{metoda} \\ \text{supstitucije} \end{array}\right] \Rightarrow 2 \cdot (p \cdot 1 - 1) = p \cdot (2 \cdot 1 - 1)^2 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 2 \cdot (p - 1) = p \cdot (2 - 1)^2 \Rightarrow 2 \cdot (p - 1) = p \cdot 1^2 \Rightarrow 2 \cdot p - 2 = p \Rightarrow 2 \cdot p - p = 2 \Rightarrow p = 2.$$

Vježba 129

U jednadžbi $2 \cdot (p \cdot x - 1) = p \cdot (2 \cdot x - 1)^2$, $p \neq 0$, odredi realni parametar p iz uvjeta da je jedan korijen jednadžbe jednak 0.

Rezultat: $p = -2$.

Zadatak 130 (Mare ☺, gimnazija)

U jednadžbi $2 \cdot (p \cdot x - 1) = p \cdot (2 \cdot x - 1)^2$, $p \neq 0$, odredi realni parametar p iz uvjeta da je zbroj rješenja jednadžbe četverostruko veći od umnoška.

Rješenje 130

Ponovimo!

Parametar

Vladimir Anić, Ivo Goldstein, Rječnik stranih riječi, Novi Liber, Zagreb, 2002.

Veličina, obično realna varijabla, čije vrijednosti služe za razlikovanje elemenata nekog skupa točaka funkcija, jednadžbi ili drugih matematičkih objekata.

Bratoljub Klaić, Rječnik stranih riječi, Nakladni zavod MH, Zagreb, 1983.
Veličina o kojoj ovisi funkcija ili oblik krivulje.
Kako zapisati da je broj a n puta veći od broja b?

$$a = n \cdot b \quad , \quad \frac{a}{n} = b \quad , \quad \frac{a}{b} = n.$$

Rješenja (korijeni) x_1, x_2 kvadratne jednadžbe

$$a \cdot x^2 + b \cdot x + c = 0$$

dana su izrazima

$$x_1 = \frac{-b + \sqrt{b^2 - 4 \cdot a \cdot c}}{2 \cdot a} \quad , \quad x_2 = \frac{-b - \sqrt{b^2 - 4 \cdot a \cdot c}}{2 \cdot a}$$

ili kraće

$$x_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4 \cdot a \cdot c}}{2 \cdot a}.$$

Rješenja (korijeni) x_1, x_2 kvadratne jednadžbe $a \cdot x^2 + b \cdot x + c = 0$ zadovoljavaju Vièteove formule:

$$x_1 + x_2 = -\frac{b}{a} \quad , \quad x_1 \cdot x_2 = \frac{c}{a}.$$

Zakon distribucije množenja prema zbrajanju.

$$a \cdot (b + c) = a \cdot b + a \cdot c \quad , \quad a \cdot b + a \cdot c = a \cdot (b + c).$$

Transformiramo zadanu kvadratnu jednadžbu kako bismo mogli odrediti koeficijente a, b i c.

$$2 \cdot (p \cdot x - 1) = p \cdot (2 \cdot x - 1)^2 \Rightarrow 2 \cdot (p \cdot x - 1) = p \cdot \left(4 \cdot x^2 - 4 \cdot x + 1\right) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 2 \cdot p \cdot x - 2 = 4 \cdot p \cdot x^2 - 4 \cdot p \cdot x + p \Rightarrow 2 \cdot p \cdot x - 2 - 4 \cdot p \cdot x^2 + 4 \cdot p \cdot x - p = 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow -4 \cdot p \cdot x^2 + 6 \cdot p \cdot x - 2 - p = 0 \Rightarrow -4 \cdot p \cdot x^2 + 6 \cdot p \cdot x - 2 - p = 0 \;/ \cdot (-1) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 4 \cdot p \cdot x^2 - 6 \cdot p \cdot x + 2 + p = 0 \Rightarrow \left.\begin{array}{l} 4 \cdot p \cdot x^2 - 6 \cdot p \cdot x + 2 + p = 0 \\ a = 4 \cdot p \;,\; b = -6 \cdot p \;,\; c = 2 + p \end{array}\right\}.$$

Prema uvjetu zadatka je:

$$x_1 + x_2 = 4 \cdot x_1 \cdot x_2.$$

Tada iz Vièteovih formula slijedi:

$$\left.\begin{array}{l} x_1 + x_2 = -\frac{b}{a} \\ x_1 \cdot x_2 = \frac{c}{a} \\ x_1 + x_2 = 4 \cdot x_1 \cdot x_2 \end{array}\right\} \Rightarrow \left[\begin{array}{l} \text{metoda} \\ \text{komparacije} \end{array}\right] \Rightarrow -\frac{b}{a} = 4 \cdot \frac{c}{a} \Rightarrow -\frac{b}{a} = 4 \cdot \frac{c}{a} \;/ \cdot (-a) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow b = -4 \cdot c \Rightarrow b + 4 \cdot c = 0 \Rightarrow \left.\begin{array}{l} b + 4 \cdot c = 0 \\ b = -6 \cdot p \;,\; c = 2 + p \end{array}\right\} \Rightarrow -6 \cdot p + 4 \cdot (2 + p) = 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow -6 \cdot p + 8 + 4 \cdot p = 0 \Rightarrow -6 \cdot p + 4 \cdot p = -8 \Rightarrow -2 \cdot p = -8 \Rightarrow -2 \cdot p = -8 \;/ : (-2) \Rightarrow p = 4.$$

Vježba 130

U jednadžbi $2 \cdot (p \cdot x - 1) = p \cdot (2 \cdot x - 1)^2$, $p \neq 0$, odredi realni parametar p iz uvjeta da je zbroj rješenja jednadžbe dvostruko veći od umnoška.

Rezultat: $p = 1$.

Zadatak 131 (Franjo, srednja škola)

Koliko iznosi zbroj rješenja jednadžbe $2\cdot(x+5)^3-7\cdot(x+5)^2+7\cdot(x+5)-2=0$?

$$A.\ -\frac{33}{2}\qquad B.\ -\frac{31}{2}\qquad C.\ -\frac{25}{2}\qquad D.\ -\frac{23}{2}$$

Rješenje 131

Ponovimo!

Rješenja (korijeni) x_1, x_2 kvadratne jednadžbe

$$a\cdot x^2+b\cdot x+c=0$$

dana su izrazima

$$x_1=\frac{-b+\sqrt{b^2-4\cdot a\cdot c}}{2\cdot a}\quad,\quad x_2=\frac{-b-\sqrt{b^2-4\cdot a\cdot c}}{2\cdot a}$$

ili kraće

$$x_{1,2}=\frac{-b\pm\sqrt{b^2-4\cdot a\cdot c}}{2\cdot a}.$$

Zakon distribucije množenja prema zbrajanju.

$$a\cdot(b+c)=a\cdot b+a\cdot c\quad,\quad a\cdot b+a\cdot c=a\cdot(b+c).$$

Da bi umnožak bio jednak nuli, dovoljno je da jedan faktor bude jednak nuli.

$$a\cdot b=0\ \Leftrightarrow\ a=0\ \text{ili}\ b=0\ \text{ili}\ a=b=0.$$

$$a^3-b^3=(a-b)\cdot\left(a^2+a\cdot b+b^2\right)\quad,\quad n=\frac{n}{1}\quad,\quad(-a)^2=a^2\quad,\quad \frac{a}{b}-\frac{c}{d}=\frac{a\cdot d-b\cdot c}{b\cdot d}.$$

Uvedemo zamjenu (supstituciju).

$$t=x+5.$$

$$\left.\begin{array}{l}2\cdot(x+5)^3-7\cdot(x+5)^2+7\cdot(x+5)-2=0\\ t=x+5\end{array}\right\}\Rightarrow\ 2\cdot t^3-7\cdot t^2+7\cdot t-2=0\ \Rightarrow$$

$$\Rightarrow\ 2\cdot t^3-2-7\cdot t^2+7\cdot t=0\ \Rightarrow\ 2\cdot\left(t^3-1\right)-7\cdot t\cdot(t-1)=0\ \Rightarrow\ 2\cdot(t-1)\cdot\left(t^2+t+1\right)-7\cdot t\cdot(t-1)=0\ \Rightarrow$$

$$\Rightarrow\ (t-1)\cdot\left(2\cdot\left(t^2+t+1\right)-7\cdot t\right)=0\ \Rightarrow\ (t-1)\cdot\left(2\cdot t^2+2\cdot t+2-7\cdot t\right)=0\ \Rightarrow\ (t-1)\cdot\left(2\cdot t^2-5\cdot t+2\right)=0\ \Rightarrow$$

$$\Rightarrow\left.\begin{array}{l}t-1=0\\ 2\cdot t^2-5\cdot t+2=0\end{array}\right\}.$$

- $t-1=0\ \Rightarrow\ t_1=1$
- $2\cdot t^2-5\cdot t+2=0\ \Rightarrow\ \left.\begin{array}{l}2\cdot t^2-5\cdot t+2=0\\ a=2\ ,\ b=-5\ ,\ c=2\end{array}\right\}\Rightarrow\left.\begin{array}{l}a=2\ ,\ b=-5\ ,\ c=2\\ t_{2,3}=\dfrac{-b\pm\sqrt{b^2-4\cdot a\cdot c}}{2\cdot a}\end{array}\right\}\Rightarrow$

$$\Rightarrow\ t_{2,3}=\frac{-(-5)\pm\sqrt{(-5)^2-4\cdot2\cdot2}}{2\cdot2}\ \Rightarrow\ t_{2,3}=\frac{5\pm\sqrt{25-16}}{4}\ \Rightarrow\ t_{2,3}=\frac{5\pm\sqrt{9}}{4}\ \Rightarrow\ t_{2,3}=\frac{5\pm3}{4}\ \Rightarrow$$

$$\Rightarrow\left.\begin{array}{l}t_2=\dfrac{5+3}{4}\\ t_3=\dfrac{5-3}{4}\end{array}\right\}\Rightarrow\left.\begin{array}{l}t_2=\dfrac{8}{4}\\ t_3=\dfrac{2}{4}\end{array}\right\}\Rightarrow\left.\begin{array}{l}t_2=2\\ t_3=\dfrac{1}{2}\end{array}\right\}.$$

Vraćamo se zamjeni (supstituciji).

- $$\left.\begin{array}{l} x+5=t \\ t=1 \end{array}\right\} \Rightarrow x+5=1 \Rightarrow x=1-5 \Rightarrow x_1=-4$$
- $$\left.\begin{array}{l} x+5=t \\ t=2 \end{array}\right\} \Rightarrow x+5=2 \Rightarrow x=2-5 \Rightarrow x_2=-3$$
- $$\left.\begin{array}{l} x+5=t \\ t=\frac{1}{2} \end{array}\right\} \Rightarrow x+5=\frac{1}{2} \Rightarrow x=\frac{1}{2}-5 \Rightarrow x=\frac{1}{2}-\frac{5}{1} \Rightarrow x=\frac{1-10}{2} \Rightarrow x_3=-\frac{9}{2}.$$

Zbroj rješenja jednadžbe jednak je:

$$x_1+x_2+x_3=-4-3-\frac{9}{2}=-\frac{4}{1}-\frac{3}{1}-\frac{9}{2}=\frac{-8-6-9}{2}=-\frac{23}{2}.$$

Odgovor je pod D.

Vježba 131

Koliko iznosi umnožak rješenja jednadžbe $2\cdot(x+5)^3-7\cdot(x+5)^2+7\cdot(x+5)-2=0$?

$A.\ -54 \qquad B.\ 54 \qquad C.\ \frac{33}{2} \qquad D.\ -\frac{33}{2}$

Rezultat: A.

Zadatak 132 (Maturantice, ekonomska škola)

Odredite sva tri rješenja jednadžbe $x^3+a\cdot x^2-x-a=0.$

Rješenje 132

Ponovimo!

Zakon distribucije množenja prema zbrajanju.

$$a\cdot(b+c)=a\cdot b+a\cdot c \quad , \quad a\cdot b+a\cdot c=a\cdot(b+c).$$

Da bi umnožak bio jednak nuli, dovoljno je da jedan faktor bude jednak nuli.

$$a\cdot b=0 \Leftrightarrow a=0 \text{ ili } b=0 \text{ ili } a=b=0.$$

1.inačica

Pomoću metode grupiranja lijevu stranu jednadžbe rastavimo na faktore.

$$x^3+a\cdot x^2-x-a=0 \Rightarrow \left(x^3+a\cdot x^2\right)-(x+a)=0 \Rightarrow x^2\cdot(x+a)-(x+a)=0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow (x+a)\cdot\left(x^2-1\right)=0 \Rightarrow \left.\begin{array}{l} x+a=0 \\ x^2-1=0 \end{array}\right\} \Rightarrow \left.\begin{array}{l} x=-a \\ x^2=1 \end{array}\right\} \Rightarrow \left.\begin{array}{l} x=-a \\ x^2=1 \ /\sqrt{\ } \end{array}\right\} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \left.\begin{array}{l} x_1=-a \\ x_{2,3}=\pm\sqrt{1} \end{array}\right\} \Rightarrow \left.\begin{array}{l} x_1=-a \\ x_{2,3}=\pm 1 \end{array}\right\}.$$

2.inačica

Pomoću metode grupiranja lijevu stranu jednadžbe rastavimo na faktore.

$$x^3+a\cdot x^2-x-a=0 \Rightarrow \left(x^3-x\right)+\left(a\cdot x^2-a\right)=0 \Rightarrow x\cdot\left(x^2-1\right)+a\cdot\left(x^2-1\right)=0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \left(x^2-1\right)\cdot(x+a)=0 \Rightarrow \left.\begin{array}{l} x^2-1=0 \\ x+a=0 \end{array}\right\} \Rightarrow \left.\begin{array}{l} x^2=1 \\ x=-a \end{array}\right\} \Rightarrow \left.\begin{array}{l} x^2=1 \ /\sqrt{\ } \\ x=-a \end{array}\right\} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \left.\begin{array}{l} x_{1,2}=\pm\sqrt{1} \\ x_3=-a \end{array}\right\} \Rightarrow \left.\begin{array}{l} x_{1,2}=\pm 1 \\ x_3=-a \end{array}\right\}.$$

Vježba 132

Odredite sva tri rješenja jednadžbe $x^3+2\cdot x^2-x-2=0.$

Rezultat: $x_1 = 1$, $x_2 = -1$, $x_3 = -2$.

Zadatak 133 (Viki, ekonomska škola)

Riješite kvadratnu jednadžbu $x^2-\sqrt{5}\cdot x+1=0.$ U zapisu rješenja rabite $\sqrt{5}$ ne računajući njegovu vrijednost.

Rješenje 133

Ponovimo!

$$\left(\sqrt{a}\right)^2=a.$$

Rješenja kvadratne jednadžbe $a\cdot x^2+b\cdot x+c=0,\ a\neq 0$ su brojevi

$$x_{1,2}=\frac{-b\pm\sqrt{b^2-4\cdot a\cdot c}}{2\cdot a}.$$

$$x^2-\sqrt{5}\cdot x+1=0 \Rightarrow \left.\begin{array}{l} x^2-\sqrt{5}\cdot x+1=0 \\ a=1\ ,\ b=-\sqrt{5}\ ,\ c=1 \end{array}\right\} \Rightarrow \left.\begin{array}{l} a=1\ ,\ b=-\sqrt{5}\ ,\ c=1 \\ x_{1,2}=\dfrac{-b\pm\sqrt{b^2-4\cdot a\cdot c}}{2\cdot a} \end{array}\right\} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow x_{1,2}=\frac{-\left(-\sqrt{5}\right)\pm\sqrt{\left(-\sqrt{5}\right)^2-4\cdot 1\cdot 1}}{2\cdot 1} \Rightarrow x_{1,2}=\frac{\sqrt{5}\pm\sqrt{5-4}}{2} \Rightarrow x_{1,2}=\frac{\sqrt{5}\pm\sqrt{1}}{2} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow x_{1,2}=\frac{\sqrt{5}\pm 1}{2} \Rightarrow \left.\begin{array}{l} x_1=\dfrac{\sqrt{5}+1}{2} \\ x_2=\dfrac{\sqrt{5}-1}{2} \end{array}\right\}.$$

Vježba 133

Riješite kvadratnu jednadžbu $x^2+\sqrt{5}\cdot x+1=0.$ U zapisu rješenja rabite $\sqrt{5}$ ne računajući njegovu vrijednost.

Rezultat: $x_1=\dfrac{-\sqrt{5}+1}{2}\ ,\ x_2=\dfrac{-\sqrt{5}-1}{2}.$

Zadatak 134 (Goran, srednja škola)

Zbroj rješenja jednadžbe $\frac{1}{3}\cdot(x-1)^2-3=0$ je:

$A.\ -6 \qquad B.\ -2 \qquad C.\ 2 \qquad D.\ 6$

Rješenje 134

Ponovimo!

$$\sqrt{a^2}=|a| \quad , \quad (a-b)^2=a^2-2\cdot a\cdot b+b^2 \quad , \quad n=\frac{n}{1}.$$

Rješenja kvadratne jednadžbe $a\cdot x^2+b\cdot x+c=0,\ a\neq 0$ su brojevi

$$x_{1,2}=\frac{-b\pm\sqrt{b^2-4\cdot a\cdot c}}{2\cdot a}.$$

Rješenja (korijeni) x_1, x_2 kvadratne jednadžbe $a\cdot x^2+b\cdot x+c=0$ zadovoljavaju Vièteove formule:

$$x_1+x_2=-\frac{b}{a}\quad,\quad x_1\cdot x_2=\frac{c}{a}.$$

1.inačica

$$\frac{1}{3}\cdot(x-1)^2-3=0\Rightarrow\frac{1}{3}\cdot(x-1)^2-3=0\ /\cdot 3\Rightarrow(x-1)^2-9=0\Rightarrow(x-1)^2=9\Rightarrow$$

$$\Rightarrow(x-1)^2=9\ /\sqrt{\ }\Rightarrow x-1=\pm\sqrt{9}\Rightarrow x-1=\pm 3\Rightarrow\left.\begin{matrix}x-1=3\\x-1=-3\end{matrix}\right\}\Rightarrow\left.\begin{matrix}x=3+1\\x=-3+1\end{matrix}\right\}\Rightarrow$$

$$\Rightarrow\left.\begin{matrix}x_1=4\\x_2=-2\end{matrix}\right\}\Rightarrow x_1+x_2=4+(-2)\Rightarrow x_1+x_2=4-2\Rightarrow x_1+x_2=2.$$

Odgovor je pod C.

2.inačica

$$\frac{1}{3}\cdot(x-1)^2-3=0\Rightarrow\frac{1}{3}\cdot(x-1)^2-3=0\ /\cdot 3\Rightarrow(x-1)^2-9=0\Rightarrow x^2-2\cdot x+1-9=0\Rightarrow$$

$$\Rightarrow x^2-2\cdot x-8=0\Rightarrow\left.\begin{matrix}x^2-2\cdot x-8=0\\a=1\ ,\ b=-2\ ,\ c=-8\end{matrix}\right\}\Rightarrow\left[x_1+x_2=-\frac{b}{a}\right]\Rightarrow$$

$$\Rightarrow x_1+x_2=-\frac{-2}{1}\Rightarrow x_1+x_2=2.$$

Odgovor je pod C.

Vježba 134

Umnožak rješenja jednadžbe $\frac{1}{3}\cdot(x-1)^2-3=0$ je:

$A.\ -8\qquad B.\ -6\qquad C.\ 6\qquad D.\ 8$

Rezultat: A.

Zadatak 135 (Josip, strukovna škola)

Koliki je umnožak rješenja jednadžbe $10\cdot\left(x^2-1\right)=21\cdot x$?

Rješenje 135

Ponovimo!

Rješenja kvadratne jednadžbe $a\cdot x^2+b\cdot x+c=0,\ a\neq 0$ su brojevi

$$x_{1,2}=\frac{-b\pm\sqrt{b^2-4\cdot a\cdot c}}{2\cdot a}.$$

Rješenja (korijeni) x_1, x_2 kvadratne jednadžbe $a\cdot x^2+b\cdot x+c=0$ zadovoljavaju Vièteove formule:

$$x_1+x_2=-\frac{b}{a}\quad,\quad x_1\cdot x_2=\frac{c}{a}.$$

Zakon distribucije množenja prema zbrajanju.

$$a\cdot(b+c)=a\cdot b+a\cdot c\quad,\quad a\cdot b+a\cdot c=a\cdot(b+c).$$

Skratiti razlomak znači brojnik i nazivnik tog razlomka podijeliti istim brojem različitim od nule i jedinice

$$\frac{a \cdot n}{b \cdot n} = \frac{a}{b} \quad , \quad n \neq 0 \quad , \quad n \neq 1.$$

1.inačica

Riješimo kvadratnu jednadžbu i rješenja međusobno pomnožimo.

$$10 \cdot \left(x^2 - 1\right) = 21 \cdot x \;\Rightarrow\; 10 \cdot x^2 - 10 = 21 \cdot x \;\Rightarrow\; 10 \cdot x^2 - 21 \cdot x - 10 = 0 \;\Rightarrow$$

$$\Rightarrow \left.\begin{array}{l} 10 \cdot x^2 - 21 \cdot x - 10 = 0 \\ a = 10 \;,\; b = -21 \;,\; c = -10 \end{array}\right\} \Rightarrow \left.\begin{array}{l} a = 10 \;,\; b = -21 \;,\; c = -10 \\ x_{1,2} = \dfrac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4 \cdot a \cdot c}}{2 \cdot a} \end{array}\right\} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow x_{1,2} = \frac{-(-21) \pm \sqrt{(-21)^2 - 4 \cdot 10 \cdot (-10)}}{2 \cdot 10} \Rightarrow x_{1,2} = \frac{21 \pm \sqrt{441 + 400}}{20} \Rightarrow x_{1,2} = \frac{21 \pm \sqrt{841}}{20} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow x_{1,2} = \frac{21 \pm 29}{20} \Rightarrow \left.\begin{array}{l} x_1 = \dfrac{21 + 29}{20} \\ x_2 = \dfrac{21 - 29}{20} \end{array}\right\} \Rightarrow \left.\begin{array}{l} x_1 = \dfrac{50}{20} \\ x_2 = -\dfrac{8}{20} \end{array}\right\} \Rightarrow \left.\begin{array}{l} x_1 = \dfrac{50}{20} \\ x_2 = -\dfrac{8}{20} \end{array}\right\} \Rightarrow \left.\begin{array}{l} x_1 = \dfrac{5}{2} \\ x_2 = -\dfrac{2}{5} \end{array}\right\} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow x_1 \cdot x_2 = \frac{5}{2} \cdot \left(-\frac{2}{5}\right) \Rightarrow x_1 \cdot x_2 = \frac{5}{2} \cdot \left(-\frac{2}{5}\right) \Rightarrow x_1 \cdot x_2 = -1.$$

2.inačica

Uporabom Vièteove formule dobije se traženi umnožak.

$$10 \cdot \left(x^2 - 1\right) = 21 \cdot x \;\Rightarrow\; 10 \cdot x^2 - 10 = 21 \cdot x \;\Rightarrow\; 10 \cdot x^2 - 21 \cdot x - 10 = 0 \;\Rightarrow$$

$$\Rightarrow \left.\begin{array}{l} 10 \cdot x^2 - 21 \cdot x - 10 = 0 \\ a = 10 \;,\; b = -21 \;,\; c = -10 \end{array}\right\} \Rightarrow \left[x_1 \cdot x_2 = \frac{c}{a}\right] \Rightarrow x_1 \cdot x_2 = \frac{-10}{10} \Rightarrow x_1 \cdot x_2 = -\frac{10}{10} \Rightarrow x_1 \cdot x_2 = -1.$$

Vježba 135

Koliki je umnožak rješenja jednadžbe $12 \cdot \left(x^2 - 1\right) = -7 \cdot x$?

Rezultat: –1.

Zadatak 136 (Vesna, srednja škola)

Rješenja jednadžbe $x^2 - 7 \cdot x + m = 0$ su x_1 i x_2, a rješenja jednadžbe $x^2 + 7 \cdot x + n = 0$ su x_3 i x_4. Koliko je $x_1 + x_2 + x_3 + x_4$?

A. 0 *B.* 1 *C.* 2 *D.* 3

Rješenje 136

Ponovimo!

$$\frac{\frac{a}{b}}{\frac{c}{d}} = \frac{a \cdot d}{b \cdot c} \quad , \quad n = \frac{n}{1}.$$

Rješenja (korijeni) x_1, x_2 kvadratne jednadžbe $a \cdot x^2 + b \cdot x + c = 0$ zadovoljavaju Vièteove formule:

$$x_1 + x_2 = -\frac{b}{a} \quad , \quad x_1 \cdot x_2 = \frac{c}{a}.$$

Kako glasi zakon asocijacije (združivanja) za zbrajanje?

Zbroj se ne mijenja združimo li pribrojnike na bilo koji način:

$$(a+b)+c=a+(b+c).$$

Za prvu jednadžbu vrijedi:

$$x^2-7\cdot x+m=0 \;\Rightarrow\; \left.\begin{array}{l} x^2-7\cdot x+m=0 \\ a=1\ ,\ b=-7\ ,\ c=m \end{array}\right\} \Rightarrow \left[x_1+x_2=-\frac{b}{a}\right] \Rightarrow x_1+x_2=-\frac{-7}{1} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow x_1+x_2=7.$$

Za drugu jednadžbu vrijedi:

$$x^2+7\cdot x+n=0 \;\Rightarrow\; \left.\begin{array}{l} x^2+7\cdot x+n=0 \\ a=1\ ,\ b=7\ ,\ c=n \end{array}\right\} \Rightarrow \left[x_3+x_4=-\frac{b}{a}\right] \Rightarrow x_3+x_4=-\frac{7}{1} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow x_3+x_4=-7.$$

Tada je:

$$x_1+x_2+x_3+x_4=(x_1+x_2)+(x_3+x_4)=7+(-7)=7-7=0.$$

Odgovor je pod A.

Vježba 136

Rješenja jednadžbe $x^2 - 5 \cdot x + m = 0$ su x_1 i x_2, a rješenja jednadžbe $x^2 + 5 \cdot x + n = 0$ su x_3 i x_4. Koliko je $x_1 + x_2 + x_3 + x_4$?

A. 0 *B.* 1 *C.* 2 *D.* 3

Rezultat: A.

Zadatak 137 (Vesna, srednja škola)

Rješenja jednadžbe $x^2+m\cdot x+\frac{3}{4}=0$ su x_1 i x_2, a rješenja jednadžbe $x^2+n\cdot x-\frac{8}{3}=0$ su x_3 i x_4. Koliko je $x_1 \cdot x_2 \cdot x_3 \cdot x_4$?

A. -2 *B.* -1 *C.* 0 *D.* 1

Rješenje 137

Ponovimo!

$$\frac{\frac{a}{b}}{\frac{c}{d}}=\frac{a\cdot d}{b\cdot c} \quad , \quad n=\frac{n}{1}.$$

Rješenja (korijeni) x_1, x_2 kvadratne jednadžbe $a \cdot x^2 + b \cdot x + c = 0$ zadovoljavaju Vièteove formule:

$$x_1+x_2=-\frac{b}{a} \quad , \quad x_1\cdot x_2=\frac{c}{a}.$$

Skratiti razlomak znači brojnik i nazivnik tog razlomka podijeliti istim brojem različitim od nule i jedinice

$$\frac{a\cdot n}{b\cdot n}=\frac{a}{b}\ ,\ n\neq 0\ ,\ n\neq 1.$$

Kako glasi zakon asocijacije (združivanja) za množenje?
Umnožak se ne mijenja združimo li faktore na bilo koji način:

$$(a\cdot b)\cdot c=a\cdot(b\cdot c).$$

Za prvu jednadžbu vrijedi:

$$x^2+m\cdot x+\frac{3}{4}=0 \Rightarrow \left.\begin{matrix} x^2+m\cdot x+\frac{3}{4}=0 \\ a=1 \ , \ b=m \ , \ c=\frac{3}{4} \end{matrix}\right\} \Rightarrow \left[x_1\cdot x_2=\frac{c}{a}\right] \Rightarrow x_1\cdot x_2=\frac{\frac{3}{4}}{1} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow x_1\cdot x_2=\frac{\frac{3}{4}}{\frac{1}{1}} \Rightarrow x_1\cdot x_2=\frac{3}{4}.$$

Za drugu jednadžbu vrijedi:

$$x^2+n\cdot x-\frac{8}{3}=0 \Rightarrow \left.\begin{matrix} x^2+n\cdot x-\frac{8}{3}=0 \\ a=1 \ , \ b=n \ , \ c=-\frac{8}{3} \end{matrix}\right\} \Rightarrow \left[x_3\cdot x_4=\frac{c}{a}\right] \Rightarrow x_3\cdot x_4=\frac{-\frac{8}{3}}{1} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow x_3\cdot x_4=\frac{-\frac{8}{3}}{\frac{1}{1}} \Rightarrow x_3\cdot x_4=-\frac{8}{3}.$$

Tada je:

$$x_1\cdot x_2\cdot x_3\cdot x_4=\left(x_1\cdot x_2\right)\cdot\left(x_3\cdot x_4\right)=\frac{3}{4}\cdot\left(-\frac{8}{3}\right)=\frac{3}{4}\cdot\left(-\frac{8}{3}\right)=-2.$$

Odgovor je pod A.

Vježba 137

Rješenja jednadžbe $x^2+m\cdot x+\frac{3}{4}=0$ su x_1 i x_2, a rješenja jednadžbe $x^2+n\cdot x-\frac{4}{3}=0$ su x_3 i x_4. Koliko je $x_1\cdot x_2\cdot x_3\cdot x_4$?

$A.\ -2 \qquad B.\ -1 \qquad C.\ 0 \qquad D.\ 1$

Rezultat: B.

Zadatak 138 (Mario, strukovna škola)

Ako je $2\cdot x^2-5=17$, koliko je $2\cdot x^2-1$?

$A.\ 12 \qquad B.\ 20 \qquad C.\ 21 \qquad D.\ 29$

Rješenje 138

Ponovimo!

$$-(a+b)=-a-b.$$

Kako glasi zakon asocijacije (združivanja) za zbrajanje?
Zbroj se ne mijenja združimo li pribrojnike na bilo koji način:

$$(a+b)+c=a+(b+c).$$

1.inačica

Izračunamo vrijednost od x^2 iz jednadžbe

$$2\cdot x^2-5=17$$

pa to uvrstimo u izraz

$$2\cdot x^2-1.$$

$$2\cdot x^2-5=17 \Rightarrow 2\cdot x^2=17+5 \Rightarrow 2\cdot x^2=22 \Rightarrow 2\cdot x^2=22 \ /:2 \Rightarrow x^2=11.$$

Sada je:

$$2 \cdot x^2 - 1 = 2 \cdot 11 - 1 = 22 - 1 = 21.$$

Odgovor je pod C.

2.inačica

Lijevu stranu jednadžbe rastavimo na dva člana od kojih je jedan traženi izraz

$$2 \cdot x^2 - 1.$$

Dakle,

$$2 \cdot x^2 - 5 = \left(2 \cdot x^2 - 1\right) - 4 = 2 \cdot x^2 - 1 - 4.$$

Sada je:

$$2 \cdot x^2 - 5 = 17 \Rightarrow 2 \cdot x^2 - 1 - 4 = 17 \Rightarrow 2 \cdot x^2 - 1 = 17 + 4 \Rightarrow 2 \cdot x^2 - 1 = 21.$$

Odgovor je pod C.

Vježba 138

Ako je $3 \cdot x^2 - 5 = 17$, koliko je $3 \cdot x^2 - 1$?

$A.\ 12 \qquad B.\ 20 \qquad C.\ 21 \qquad D.\ 29$

Rezultat: C.

Zadatak 139 (Vlado, srednja škola)

Odredite sve parametre $a \in R$ takve da graf funkcije $f(x) = a \cdot x^3 + 2 \cdot x^2 + x$ ima samo jednu nultočku.

Rješenje 139

Ponovimo!

$$a < b \ , \ c < 0 \Rightarrow a \cdot c > b \cdot c.$$

Parametar

Vladimir Anić, Ivo Goldstein, Rječnik stranih riječi, Novi Liber, Zagreb, 2002.

Veličina, obično realna varijabla, čije vrijednosti služe za razlikovanje elemenata nekog skupa točaka funkcija, jednadžbi ili drugih matematičkih objekata.

Bratoljub Klaić, Rječnik stranih riječi, Nakladni zavod MH, Zagreb, 1983.

Veličina o kojoj ovisi funkcija ili oblik krivulje.

Zakon distribucije množenja prema zbrajanju.

$$a \cdot (b + c) = a \cdot b + a \cdot c \quad , \quad a \cdot b + a \cdot c = a \cdot (b + c).$$

Da bi umnožak bio jednak nuli, dovoljno je da jedan faktor bude jednak nuli.

$$a \cdot b = 0 \Leftrightarrow a = 0 \text{ ili } b = 0 \text{ ili } a = b = 0.$$

Diskriminanta kvadratne jednadžbe

$$a \cdot x^2 + b \cdot x + c = 0$$

je broj

$$D = b^2 - 4 \cdot a \cdot c.$$

- Ako je D > 0, jednadžba ima dva realna rješenja.
- Ako je D = 0, jednadžba ima jedno dvostruko realno rješenje.
- Ako je D < 0, jednadžba ima kompleksno – konjugirana rješenja.

Nultočka funkcije y = f(x) je ona točka x za koju vrijedi:

$$f(x) = 0.$$

Nultočke zadane funkcije

$$f(x) = a \cdot x^3 + 2 \cdot x^2 + x$$

su rješenja jednadžbe

$$a\cdot x^3+2\cdot x^2+x=0.$$

Dakle,

$$a\cdot x^3+2\cdot x^2+x=0 \Rightarrow x\cdot\left(a\cdot x^2+2\cdot x+1\right)=0 \Rightarrow \left.\begin{array}{l} x=0 \\ a\cdot x^2+2\cdot x+1=0 \end{array}\right\} \Rightarrow x_1=0 \;\Big|\; \text{jedna nultočka}.$$

Kvadratna jednadžba

$$a\cdot x^2+2\cdot x+1=0$$

ima dva rješenja (dvije nultočke), ali prema uvjetu zadatka ona ne smiju biti realna (to znači da su konjugirano – kompleksna). Zato diskriminanta mora biti negativna. Tada parametar a iznosi:

$$\left.\begin{array}{l} a\cdot x^2+2\cdot x+1=0 \\ a=a \;,\; b=2 \;,\; c=1 \\ D<0 \end{array}\right\} \Rightarrow \left.\begin{array}{l} a=a \;,\; b=2 \;,\; c=1 \\ b^2-4\cdot a\cdot c<0 \end{array}\right\} \Rightarrow 2^2-4\cdot a\cdot 1<0 \Rightarrow 4-4\cdot a<0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow -4\cdot a<-4 \Rightarrow -4\cdot a<-4 \;/:(-4) \Rightarrow a>1.$$

Vježba 139

Odredite sve parametre $a\in R$ takve da graf funkcije $f(x)=a\cdot x^3+4\cdot x^2+2\cdot x$ ima samo jednu nultočku.

Rezultat: a > 2.

Zadatak 140 (Doc, gimnazija)

Dokaži: ako su korijeni jednadžbe $x^2 + a\cdot x + 1 = b$ prirodni brojevi, onda je broj $a^2 + b^2$ složen.

Rješenje 140

Ponovimo!

Skup prirodnih brojeva označavamo slovom N, a zapisujemo

$$N=\{1,\ 2,\ 3,\ 4,\ 5,\ \dots,n,\ n+1,\ \dots\}.$$

Prost ili prim broj je prirodan broj veći od 1 koji je djeljiv samo s 1 i samim sobom (ima točno dva djelitelja)

2, 3, 5, 7, 11, 13, 17, 19, 23, 29, 31, 37, ...

Složeni broj je broj koji ima tri ili više djelitelja.

Prosti brojevi služe za rastavljanje složenih brojeva na proste faktore. Svaki složeni broj može se na jedinstven način rastaviti na proste faktore.

$$(a+b)^2=a^2+2\cdot a\cdot b+b^2 \quad,\quad (a-b)^2=a^2-2\cdot a\cdot b+b^2 \quad,\quad (-a-b)^2=(a+b)^2.$$

$$(a\cdot b)^n=a^n\cdot b^n \quad,\quad \left.\begin{array}{l} a=b \\ c=d \end{array}\right\} \Rightarrow a+c=b+d.$$

Rješenja (korijeni) x_1, x_2 kvadratne jednadžbe $a\cdot x^2 + b\cdot x + c = 0$ zadovoljavaju Vièteove formule:

$$x_1+x_2=-\frac{b}{a} \quad,\quad x_1\cdot x_2=\frac{c}{a}.$$

Zakon distribucije množenja prema zbrajanju.

$$a\cdot(b+c)=a\cdot b+a\cdot c \quad,\quad a\cdot b+a\cdot c=a\cdot(b+c).$$

Neka su prirodni brojevi x_1 i x_2 korijeni jednadžbe $x^2 + a\cdot x + 1 = b$. Tada vrijede Vièteove formule:

$$x^2+a\cdot x+1=b \Rightarrow x^2+a\cdot x+1-b=0 \Rightarrow \left.\begin{array}{l} x^2+a\cdot x+1-b=0 \\ a=1\ ,\ b=a\ ,\ c=1-b \end{array}\right\} \Rightarrow \left[\begin{array}{l} x_1+x_2=-\frac{b}{a} \\ x_1\cdot x_2=\frac{c}{a} \end{array}\right] \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \left.\begin{array}{l} x_1+x_2=-\frac{a}{1} \\ x_1\cdot x_2=\frac{1-b}{1} \end{array}\right\} \Rightarrow \left.\begin{array}{l} x_1+x_2=-a \\ x_1\cdot x_2=1-b \end{array}\right\} \Rightarrow \left.\begin{array}{l} a=-x_1-x_2 \\ b=1-x_1\cdot x_2 \end{array}\right\} \Rightarrow \left[\begin{array}{l} \text{kvadriramo} \\ \text{jednadžbe} \end{array}\right] \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \left.\begin{array}{l} a=-x_1-x_2\ /^2 \\ b=1-x_1\cdot x_2\ /^2 \end{array}\right\} \Rightarrow \left.\begin{array}{l} a^2=\left(-x_1-x_2\right)^2 \\ b^2=\left(1-x_1\cdot x_2\right)^2 \end{array}\right\} \Rightarrow \left.\begin{array}{l} a^2=\left(x_1+x_2\right)^2 \\ b^2=\left(1-x_1\cdot x_2\right)^2 \end{array}\right\} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \left.\begin{array}{l} a^2=x_1^2+2\cdot x_1\cdot x_2+x_2^2 \\ b^2=1-2\cdot x_1\cdot x_2+x_1^2\cdot x_2^2 \end{array}\right\} \Rightarrow \left[\begin{array}{l} \text{zbrojimo} \\ \text{jednadžbe} \end{array}\right] \Rightarrow$$

$$\Rightarrow a^2+b^2=x_1^2+2\cdot x_1\cdot x_2+x_2^2+1-2\cdot x_1\cdot x_2+x_1^2\cdot x_2^2 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow a^2+b^2=x_1^2+2\cdot x_1\cdot x_2+x_2^2+1-2\cdot x_1\cdot x_2+x_1^2\cdot x_2^2 \Rightarrow a^2+b^2=x_1^2+x_2^2+1+x_1^2\cdot x_2^2 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow a^2+b^2=\left(x_1^2+x_1^2\cdot x_2^2\right)+\left(x_2^2+1\right) \Rightarrow a^2+b^2=x_1^2\cdot\left(1+x_2^2\right)+\left(1+x_2^2\right) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow a^2+b^2=x_1^2\cdot\left(1+x_2^2\right)+\left(1+x_2^2\right) \Rightarrow a^2+b^2=\left(1+x_2^2\right)\cdot\left(x_1^2+1\right) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow a^2+b^2=\left(1+x_2^2\right)\cdot\left(1+x_1^2\right) \Rightarrow a^2+b^2=\left(1+x_1^2\right)\cdot\left(1+x_2^2\right) \Rightarrow a^2+b^2=\underbrace{\left(1+x_1^2\right)\cdot\left(1+x_2^2\right)}_{\text{složen broj}}.$$

Vježba 140

Dokaži: ako su korijeni jednadžbe $x^2 + b \cdot x = c - 1$ prirodni brojevi, onda je broj $b^2 + c^2$ složen.

Rezultat: Dokaz analogan.