Zadatak 101 (Josip, gimnazija)

Riješi jednadžbu : $x^4 - 1 = 0.$

Rješenje 101

Ponovimo!

$$a^2 - b^2 = (a-b)\cdot(a+b) \quad , \quad a\cdot b = 0 \Leftrightarrow a = 0 \text{ ili } b = 0 \text{ ili } a = b = 0.$$

$$a^4 - b^4 = \left(a^2 - b^2\right)\cdot\left(a^2 + b^2\right) = (a-b)\cdot(a+b)\cdot\left(a^2 + b^2\right).$$

Imaginarna jedinica:

$$i = \sqrt{-1}.$$

Rješavamo jednadžbu.

$$x^4 - 1 = 0 \Rightarrow \left(x^2 - 1\right)\cdot\left(x^2 + 1\right) = 0 \Rightarrow (x-1)\cdot(x+1)\cdot\left(x^2 + 1\right) = 0 \Rightarrow \left.\begin{matrix} x - 1 = 0 \\ x + 1 = 0 \\ x^2 + 1 = 0 \end{matrix}\right\} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \left.\begin{matrix} x_1 = 1 \\ x_2 = -1 \\ x^2 = -1 \end{matrix}\right\} \Rightarrow \left.\begin{matrix} x_1 = 1 \\ x_2 = -1 \\ x^2 = -1 \; / \sqrt{} \end{matrix}\right\} \Rightarrow \left.\begin{matrix} x_1 = 1 \\ x_2 = -1 \\ x_{3,4} = \pm\sqrt{-1} \end{matrix}\right\} \Rightarrow \left.\begin{matrix} x_1 = 1 \\ x_2 = -1 \\ x_{3,4} = \pm i \end{matrix}\right\}.$$

Vježba 101

Riješi jednadžbu : $2\cdot x^4 - 2 = 0.$

Rezultat: $x_1 = 1 \; , \; x_2 = -1 \; , \; x_{3,4} = \pm i.$

www.halapa.com

Zadatak 102 (Mario, gimnazija)

Riješi jednadžbu : $x^3 + x^2 + x - 3 = 0.$

Rješenje 102

Ponovimo!

$$a^3 - b^3 = (a-b)\cdot\left(a^2 + a\cdot b + b^2\right) \quad , \quad a^2 - b^2 = (a-b)\cdot(a+b).$$

$$a\cdot b = 0 \Leftrightarrow a = 0 \text{ ili } b = 0 \text{ ili } a = b = 0.$$

Zakon distribucije množenja prema zbrajanju.

$$a\cdot(b+c) = a\cdot b + a\cdot c \quad , \quad a\cdot b + a\cdot c = a\cdot(b+c).$$

Grupiranjem članova dobije se:

$$x^3 + x^2 + x - 3 = 0 \Rightarrow x^3 - 1 + x^2 - 1 + x - 1 = 0 \Rightarrow \left(x^3 - 1\right) + \left(x^2 - 1\right) + (x-1) = 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow (x-1)\cdot\left(x^2 + x + 1\right) + (x-1)\cdot(x+1) + (x-1) = 0 \Rightarrow (x-1)\cdot\left(\left(x^2 + x + 1\right) + (x+1) + 1\right) = 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow (x-1)\cdot\left(x^2 + x + 1 + x + 1 + 1\right) = 0 \Rightarrow (x-1)\cdot\left(x^2 + 2\cdot x + 3\right) = 0 \Rightarrow \left.\begin{matrix} x - 1 = 0 \\ x^2 + 2\cdot x + 3 = 0 \end{matrix}\right\}.$$

Prvo rješenje

$$x - 1 = 0 \Rightarrow x_1 = 1.$$

Ostala dva rješenja

$$x^2+2\cdot x+3=0 \Rightarrow \left.\begin{matrix} x^2+2\cdot x+3=0 \\ a=1 \;,\; b=2 \;,\; c=3 \end{matrix}\right\} \Rightarrow \left.\begin{matrix} a=1 \;,\; b=2 \;,\; c=3 \\ x_{2,3}=\dfrac{-b\pm\sqrt{b^2-4\cdot a\cdot c}}{2\cdot a} \end{matrix}\right\} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow x_{2,3}=\frac{-2\pm\sqrt{4-4\cdot 1\cdot 3}}{2\cdot 1} \Rightarrow x_{2,3}=\frac{-2\pm\sqrt{4-12}}{2} \Rightarrow x_{2,3}=\frac{-2\pm\sqrt{-8}}{2} \Rightarrow \begin{bmatrix}\text{djelomično} \\ \text{korjenovanje}\end{bmatrix} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow x_{2,3}=\frac{-2\pm\sqrt{-4\cdot 2}}{2} \Rightarrow x_{2,3}=\frac{-2\pm 2\cdot i\cdot\sqrt{2}}{2} \Rightarrow x_{2,3}=-\frac{2}{2}\pm\frac{2\cdot i\cdot\sqrt{2}}{2} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow x_{2,3}=-\frac{2}{2}\pm\frac{2\cdot i\cdot\sqrt{2}}{2} \Rightarrow x_{2,3}=-1\pm i\cdot\sqrt{2}.$$

Vježba 102

Riješi jednadžbu : $x^2\cdot(x+1)=3-x.$

Rezultat: $x_1=1 \;,\; x_{2,3}=-1\pm i\cdot\sqrt{2}.$

Zadatak 103 (Mario, gimnazija)

Riješi jednadžbu : $x^3-x^2=100.$

Rješenje 103

Ponovimo!

$$a^3-b^3=(a-b)\cdot\left(a^2+a\cdot b+b^2\right) \quad , \quad a^2-b^2=(a-b)\cdot(a+b).$$

$$a\cdot b=0 \Leftrightarrow a=0 \text{ ili } b=0 \text{ ili } a=b=0.$$

Zakon distribucije množenja prema zbrajanju.

$$a\cdot(b+c)=a\cdot b+a\cdot c \quad , \quad a\cdot b+a\cdot c=a\cdot(b+c).$$

Grupiranjem članova dobije se:

$$x^3-x^2=100 \Rightarrow x^3-x^2-100=0 \Rightarrow x^3-x^2-125+25=0 \Rightarrow x^3-125-x^2+25=0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \left(x^3-125\right)-\left(x^2-25\right)=0 \Rightarrow \left(x^3-5^3\right)-\left(x^2-5^2\right)=0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow (x-5)\cdot\left(x^2+5\cdot x+25\right)-(x-5)\cdot(x+5)=0 \Rightarrow (x-5)\cdot\left(\left(x^2+5\cdot x+25\right)-(x+5)\right)=0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow (x-5)\cdot\left(x^2+5\cdot x+25-x-5\right)=0 \Rightarrow (x-5)\cdot\left(x^2+4\cdot x+20\right)=0 \Rightarrow \left.\begin{matrix} x-5=0 \\ x^2+4\cdot x+20=0 \end{matrix}\right\}.$$

Prvo rješenje

$$x-5=0 \Rightarrow x_1=5.$$

Ostala dva rješenja

$$x^2+4\cdot x+20=0 \Rightarrow \left.\begin{matrix} x^2+4\cdot x+20=0 \\ a=1 \;,\; b=4 \;,\; c=20 \end{matrix}\right\} \Rightarrow \left.\begin{matrix} a=1 \;,\; b=4 \;,\; c=20 \\ x_{2,3}=\dfrac{-b\pm\sqrt{b^2-4\cdot a\cdot c}}{2\cdot a} \end{matrix}\right\} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow x_{2,3}=\frac{-4\pm\sqrt{16-4\cdot 1\cdot 20}}{2\cdot 1} \Rightarrow x_{2,3}=\frac{-4\pm\sqrt{16-80}}{2} \Rightarrow x_{2,3}=\frac{-4\pm\sqrt{-64}}{2} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow x_{2,3}=\frac{-4\pm 8\cdot i}{2} \Rightarrow x_{2,3}=-\frac{4}{2}\pm\frac{8\cdot i}{2} \Rightarrow x_{2,3}=-\frac{4}{2}\pm\frac{8\cdot i}{2} \Rightarrow x_{2,3}=-2\pm 4\cdot i.$$

www.halapa.com

Vježba 103

Riješi jednadžbu : $x^2 \cdot (x-1) - 100 = 0.$

Rezultat: $x_1 = 5 \; , \; x_{2,3} = -2 \pm 4 \cdot i.$

Zadatak 104 (Andrija, gimnazija)

Zadana je jednadžba

$$x^2 - 10 \cdot x + 2 \cdot x \cdot y - y + y^2 = 0.$$

Odredi sva njezina rješenja u skupu cijelih brojeva.

Rješenje 104

Ponovimo!

Skup cijelih brojeva

$$Z = \{ \ldots -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, \ldots \}.$$

$$(a \cdot b)^n = a^n \cdot b^n \quad , \quad (a-b)^2 = a^2 - 2 \cdot a \cdot b + b^2 \quad , \quad \sqrt{a \cdot b} = \sqrt{a} \cdot \sqrt{b}.$$

Zakon distribucije množenja prema zbrajanju.

$$a \cdot (b+c) = a \cdot b + a \cdot c \quad , \quad a \cdot b + a \cdot c = a \cdot (b+c).$$

Napišemo zadanu jednadžbu u obliku

$$x^2 - 10 \cdot x + 2 \cdot x \cdot y - y + y^2 = 0 \;\Rightarrow\; x^2 - 2 \cdot (5-y) \cdot x - y + y^2 = 0$$

i riješimo je kao kvadratnu jednadžbu po varijabli x.

$$x^2 - 2 \cdot (5-y) \cdot x - y + y^2 = 0 \;\Rightarrow\; \left. \begin{array}{l} x^2 - 2 \cdot (5-y) \cdot x - y + y^2 = 0 \\ a = 1 \; , \; b = -2 \cdot (5-y) \; , \; c = -y + y^2 \end{array} \right\} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \left. \begin{array}{l} a = 1 \; , \; b = -2 \cdot (5-y) \; , \; c = -y + y^2 \\ x_{1,2} = \dfrac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4 \cdot a \cdot c}}{2 \cdot a} \end{array} \right\} \Rightarrow x_{1,2} = \frac{2 \cdot (5-y) \pm \sqrt{\left(-2 \cdot (5-y)\right)^2 - 4 \cdot 1 \cdot \left(-y + y^2\right)}}{2 \cdot 1} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow x_{1,2} = \frac{2 \cdot (5-y) \pm \sqrt{4 \cdot (5-y)^2 - 4 \cdot \left(-y + y^2\right)}}{2} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow x_{1,2} = \frac{2 \cdot (5-y) \pm \sqrt{4 \cdot \left(25 - 10 \cdot y + y^2\right) + 4 \cdot y - 4 \cdot y^2}}{2} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow x_{1,2} = \frac{2 \cdot (5-y) \pm \sqrt{100 - 40 \cdot y + 4 \cdot y^2 + 4 \cdot y - 4 \cdot y^2}}{2} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow x_{1,2} = \frac{2 \cdot (5-y) \pm \sqrt{100 - 40 \cdot y + 4 \cdot y^2 + 4 \cdot y - 4 \cdot y^2}}{2} \Rightarrow x_{1,2} = \frac{2 \cdot (5-y) \pm \sqrt{100 - 40 \cdot y + 4 \cdot y}}{2} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow x_{1,2} = \frac{2 \cdot (5-y) \pm \sqrt{100 - 36 \cdot y}}{2} \Rightarrow x_{1,2} = \frac{2 \cdot (5-y) \pm \sqrt{4 \cdot (25 - 9 \cdot y)}}{2} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow x_{1,2} = \frac{2 \cdot (5-y) \pm \sqrt{4} \cdot \sqrt{25 - 9 \cdot y}}{2} \Rightarrow x_{1,2} = \frac{2 \cdot (5-y) \pm 2 \cdot \sqrt{25 - 9 \cdot y}}{2} \Rightarrow$$

www.halapa.com

$$\Rightarrow x_{1,2}=\frac{2\cdot\left[(5-y)\pm\sqrt{25-9\cdot y}\right]}{2} \Rightarrow x_{1,2}=\frac{2\cdot\left[(5-y)\pm\sqrt{25-9\cdot y}\right]}{2} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow x_{1,2}=5-y\pm\sqrt{25-9\cdot y}. \qquad (1)$$

Budući da x mora biti cijeli broj, radikand (izraz pod korijenom) 25 – 9 · y mora biti potpuni kvadrat. To će biti za:

- $y=0 \Rightarrow 25-9\cdot 0=25-0=25=5^2$
- $y=1 \Rightarrow 25-9\cdot 1=25-9=16=4^2.$

Ako je y = 0, tada zbog (1) slijedi:

$$\left.\begin{array}{l} x_{1,2}=5-y\pm\sqrt{25-9\cdot y} \\ y=0 \end{array}\right\} \Rightarrow x_{1,2}=5-0\pm\sqrt{25-9\cdot 0} \Rightarrow x_{1,2}=5\pm\sqrt{25-0} \Rightarrow x_{1,2}=5\pm\sqrt{25} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow x_{1,2}=5\pm 5 \Rightarrow \left.\begin{array}{l} x_1=5+5 \\ x_2=5-5 \end{array}\right\} \Rightarrow \left.\begin{array}{l} x_1=10 \\ x_2=0 \end{array}\right\}.$$

Rješenja su:

$$(x_1,\ y_1)=(10,\ 0) \quad , \quad (x_2,\ y_2)=(0,\ 0).$$

Ako je y = 1, tada zbog (1) slijedi:

$$\left.\begin{array}{l} x_{3,4}=5-y\pm\sqrt{25-9\cdot y} \\ y=1 \end{array}\right\} \Rightarrow x_{3,4}=5-1\pm\sqrt{25-9\cdot 1} \Rightarrow x_{3,4}=4\pm\sqrt{25-9} \Rightarrow x_{3,4}=4\pm\sqrt{16} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow x_{3,4}=4\pm 4 \Rightarrow \left.\begin{array}{l} x_3=4+4 \\ x_4=4-4 \end{array}\right\} \Rightarrow \left.\begin{array}{l} x_3=8 \\ x_4=0 \end{array}\right\}.$$

Rješenja su:

$$(x_3,\ y_3)=(8,\ 1) \quad , \quad (x_4,\ y_4)=(0,\ 1).$$

www.halapa.com

Vježba 104

Zadana je jednadžba

$$(x+y)^2=10\cdot x+y.$$

Odredi sva njezina rješenja u skupu cijelih brojeva.

Rezultat: $(x_1,\ y_1)=(10,\ 0)$, $(x_2,\ y_2)=(0,\ 0)$, $(x_3,\ y_3)=(8,\ 1)$, $(x_4,\ y_4)=(0,\ 1)$.

Zadatak 105 (Iva, gimnazija)

Ako su tg α i tg β korijeni jednadžbe $a\cdot x^2+b\cdot x+c=0$ (a, b, c realni brojevi, $a\neq 0$), onda je tg (α + β) jednako:

$$A)\ \frac{c-a}{b} \qquad B)\ \frac{b}{c-a} \qquad C)\ \frac{b}{a-c} \qquad D)\ \frac{b}{a+c} \qquad E)\ \frac{a+c}{b}$$

Rješenje 105

Ponovimo!

$$tg(\alpha+\beta)=\frac{tg\,\alpha+tg\,\beta}{1-tg\,\alpha\cdot tg\,\beta}.$$

Rješenja (korijeni) x_1, x_2 kvadratne jednadžbe $a\cdot x^2+b\cdot x+c=0$ zadovoljavaju Vièteove formule:

$$x_1 + x_2 = -\frac{b}{a} \quad , \quad x_1 \cdot x_2 = \frac{c}{a}.$$

Zakon distribucije množenja prema zbrajanju.

$$a \cdot (b + c) = a \cdot b + a \cdot c \quad , \quad a \cdot b + a \cdot c = a \cdot (b + c).$$

$$n = \frac{n}{1} \quad , \quad \frac{a}{b} - \frac{c}{d} = \frac{a \cdot d - b \cdot c}{b \cdot d} \quad , \quad \frac{\frac{a}{b}}{\frac{c}{d}} = \frac{a \cdot d}{b \cdot c}.$$

Ako su tg α i tg β korijeni kvadratne jednadžbe

$$a \cdot x^2 + b \cdot x + c = 0,$$

slijedi:

$$\left.\begin{matrix} x_1 = tg\,\alpha \\ x_2 = tg\,\beta \end{matrix}\right\} \Rightarrow \left[\begin{matrix} \text{Vièteove formule} \\ x_1 + x_2 = -\frac{b}{a} \\ x_1 + x_2 = \frac{c}{a} \end{matrix}\right] \Rightarrow \left.\begin{matrix} tg\,\alpha + tg\,\beta = -\frac{b}{a} \\ tg\,\alpha + tg\,\beta = \frac{c}{a} \end{matrix}\right\}.$$

Tada je

$$tg\,(\alpha + \beta) = \frac{tg\,\alpha + tg\,\beta}{1 - tg\,\alpha \cdot tg\,\beta} = \frac{-\frac{b}{a}}{1 - \frac{c}{a}} = \frac{-\frac{b}{a}}{\frac{1}{1} - \frac{c}{a}} = \frac{-\frac{b}{a}}{\frac{a-c}{a}} = \frac{-\frac{b}{a}}{\frac{a-c}{a}} = \frac{-\frac{b}{1}}{\frac{a-c}{1}} = \frac{-b}{a-c} = \frac{b}{c-a}.$$

Odgovor je pod B.

Vježba 105

Ako su ctg α i ctg β korijeni jednadžbe $a \cdot x^2 + b \cdot x + c = 0$ (a, b, c realni brojevi, $a \neq 0$) onda je ctg (α + β) jednako:

$$A)\ \frac{a-c}{b} \qquad B)\ \frac{c}{b-a} \qquad C)\ \frac{a}{b-c} \qquad D)\ \frac{b+c}{a} \qquad E)\ \frac{a+c}{b}$$

Rezultat: A.

Zadatak 106 (Tomislav, srednja škola)

Riješi kvadratnu jednadžbu: $4 \cdot (x - 3) - \left(x^2 + 4 \cdot x + 2\right) = x^2.$

Rješenje 106

Ponovimo!

$$-x + x = 0 \quad , \quad \sqrt{-a} = \sqrt{a} \cdot i \ , \ a > 0.$$

Zakon distribucije množenja prema zbrajanju.

$$a \cdot (b + c) = a \cdot b + a \cdot c \quad , \quad a \cdot b + a \cdot c = a \cdot (b + c).$$

$$4 \cdot (x - 3) - \left(x^2 + 4 \cdot x + 2\right) = x^2 \Rightarrow 4 \cdot x - 12 - x^2 - 4 \cdot x - 2 = x^2 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 4 \cdot x - 12 - x^2 - 4 \cdot x - 2 - x^2 = 0 \Rightarrow 4 \cdot x - 12 - x^2 - 4 \cdot x - 2 - x^2 = 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow -12 - x^2 - 2 - x^2 = 0 \Rightarrow -2 \cdot x^2 - 14 = 0 \Rightarrow -2 \cdot x^2 = 14 \Rightarrow -2 \cdot x^2 = 14 \ /: (-2) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow x^2 = -7 \Rightarrow x^2 = -7 \ / \sqrt{\ } \Rightarrow x_{1,2} = \pm\sqrt{-7} \Rightarrow x_{1,2} = \pm\sqrt{7} \cdot i \Rightarrow \left.\begin{matrix} x_1 = \sqrt{7} \cdot i \\ x_2 = -\sqrt{7} \cdot i \end{matrix}\right\}.$$

www.halapa.com

Vježba 106

Riješi kvadratnu jednadžbu: $4\cdot(x-1)-\left(x^2+4\cdot x+10\right)=x^2$.

Rezultat: $x_1=\sqrt{7}\cdot i\ ,\ x_2=-\sqrt{7}\cdot i.$

Zadatak 107 (Vedrana, gimnazija)

Napiši u obliku umnoška polinoma prvog stupnja sljedeći polinom: $2\cdot x^2+7\cdot x-15$.

Rješenje 107

Ponovimo!

Rješenja kvadratne jednadžbe $a\cdot x^2+b\cdot x+c=0,\ a\neq 0$ su brojevi

$$x_{1,2}=\frac{-b\pm\sqrt{b^2-4\cdot a\cdot c}}{2\cdot a}.$$

Zakon distribucije množenja prema zbrajanju.

$$a\cdot(b+c)=a\cdot b+a\cdot c\quad ,\quad a\cdot b+a\cdot c=a\cdot(b+c).$$

Svaki se kvadratni trinom može napisati u obliku

$$a\cdot x^2+b\cdot x+c=a\cdot\left(x-x_1\right)\cdot\left(x-x_2\right),$$

gdje su x_1 i x_2 rješenja pripadne kvadratne jednadžbe

$$a\cdot x^2+b\cdot x+c=0.$$

Moramo odrediti rješenja pripadne kvadratne jednadžbe.

$$2\cdot x^2+7\cdot x-15=0\ \Rightarrow\ \left.\begin{array}{l}2\cdot x^2+7\cdot x-15=0\\ a=2\ ,\ b=7\ ,\ c=-15\end{array}\right\}\Rightarrow\ \left.\begin{array}{l}a=2\ ,\ b=7\ ,\ c=-15\\ x_{1,2}=\dfrac{-b\pm\sqrt{b^2-4\cdot a\cdot c}}{2\cdot a}\end{array}\right\}\Rightarrow$$

$$\Rightarrow\ x_{1,2}=\frac{-7\pm\sqrt{7^2-4\cdot 2\cdot(-15)}}{2\cdot 2}\ \Rightarrow\ x_{1,2}=\frac{-7\pm\sqrt{49+120}}{4}\ \Rightarrow\ x_{1,2}=\frac{-7\pm\sqrt{169}}{4}\ \Rightarrow$$

$$\Rightarrow\ x_{1,2}=\frac{-7\pm 13}{4}\ \Rightarrow\ \left.\begin{array}{l}x_1=\dfrac{-7+13}{4}\\ x_2=\dfrac{-7-13}{4}\end{array}\right\}\Rightarrow\ \left.\begin{array}{l}x_1=\dfrac{6}{4}\\ x_2=\dfrac{-20}{4}\end{array}\right\}\Rightarrow\ \left.\begin{array}{l}x_1=\dfrac{3}{2}\\ x_2=-5\end{array}\right\}.$$

Zato je:

$$2\cdot x^2+7\cdot x-15=2\cdot\left(x-\frac{3}{2}\right)\cdot(x-(-5))=2\cdot\left(x-\frac{3}{2}\right)\cdot(x+5)=(2\cdot x-3)\cdot(x+5).$$

Vježba 107

Napiši u obliku umnoška polinoma prvog stupnja sljedeći polinom: $2\cdot x^2+7\cdot x+3$.

Rezultat: $(2\cdot x+1)\cdot(x+3).$

Zadatak 108 (Tomislav, ekonomska škola)

Riješi kvadratnu jednadžbu: $\dfrac{x}{4\cdot x^2-4\cdot x-3}-\dfrac{x-1}{4\cdot x^2-8\cdot x+3}=\dfrac{3\cdot x-4}{4\cdot x^2-1}$.

Rješenje 108

Ponovimo!

$$a^2-b^2=(a-b)\cdot(a+b).$$

www.halapa.com

Rješenja kvadratne jednadžbe $a \cdot x^2 + b \cdot x + c = 0$, $a \neq 0$ su brojevi

$$x_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4 \cdot a \cdot c}}{2 \cdot a}.$$

Zakon distribucije množenja prema zbrajanju.

$$a \cdot (b+c) = a \cdot b + a \cdot c \quad , \quad a \cdot b + a \cdot c = a \cdot (b+c).$$

Svaki se kvadratni trinom može napisati u obliku

$$a \cdot x^2 + b \cdot x + c = a \cdot (x - x_1) \cdot (x - x_2),$$

gdje su x_1 i x_2 rješenja pripadne kvadratne jednadžbe

$$a \cdot x^2 + b \cdot x + c = 0.$$

Da bi umnožak bio jednak nuli, dovoljno je da jedan faktor bude jednak nuli.

$$a \cdot b = 0 \Leftrightarrow a = 0 \text{ ili } b = 0 \text{ ili } a = b = 0.$$

Svaki nazivnik moramo rastaviti na faktore.

- Nazivnik

$$4 \cdot x^2 - 4 \cdot x - 3$$

rastavimo na faktore.

1.inačica

$$4 \cdot x^2 - 4 \cdot x - 3 = \begin{bmatrix} \text{metoda} \\ \text{grupiranja} \end{bmatrix} = 4 \cdot x^2 - 4 \cdot x - 3 = 4 \cdot x^2 - 4 \cdot x - 9 + 6 = 4 \cdot x^2 - 9 - 4 \cdot x + 6 =$$

$$= \left(4 \cdot x^2 - 9\right) - (4 \cdot x - 6) = (2 \cdot x - 3) \cdot (2 \cdot x + 3) - 2 \cdot (2 \cdot x - 3) = (2 \cdot x - 3) \cdot (2 \cdot x + 3 - 2) = (2 \cdot x - 3) \cdot (2 \cdot x + 1).$$

2.inačica

Moramo odrediti rješenja pripadne kvadratne jednadžbe.

$$4 \cdot x^2 - 4 \cdot x - 3 = 0 \Rightarrow \left.\begin{array}{l} 4 \cdot x^2 - 4 \cdot x - 3 = 0 \\ a = 4 \ , \ b = -4 \ , \ c = -3 \end{array}\right\} \Rightarrow \left.\begin{array}{l} a = 4 \ , \ b = -4 \ , \ c = -3 \\ x_{1,2} = \dfrac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4 \cdot a \cdot c}}{2 \cdot a} \end{array}\right\} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow x_{1,2} = \frac{-(-4) \pm \sqrt{(-4)^2 - 4 \cdot 4 \cdot (-3)}}{2 \cdot 4} \Rightarrow x_{1,2} = \frac{4 \pm \sqrt{16 + 48}}{8} \Rightarrow x_{1,2} = \frac{4 \pm \sqrt{64}}{8} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow x_{1,2} = \frac{4 \pm 8}{8} \Rightarrow \left.\begin{array}{l} x_1 = \dfrac{4+8}{8} \\ x_2 = \dfrac{4-8}{8} \end{array}\right\} \Rightarrow \left.\begin{array}{l} x_1 = \dfrac{12}{8} \\ x_2 = -\dfrac{4}{8} \end{array}\right\} \Rightarrow \left.\begin{array}{l} x_1 = \dfrac{3}{2} \\ x_2 = -\dfrac{1}{2} \end{array}\right\}.$$

Sada je:

$$4 \cdot x^2 - 4 \cdot x - 3 = 4 \cdot \left(x - \frac{3}{2}\right) \cdot \left(x - \left(-\frac{1}{2}\right)\right) = 4 \cdot \left(x - \frac{3}{2}\right) \cdot \left(x + \frac{1}{2}\right) = 2 \cdot 2 \cdot \left(x - \frac{3}{2}\right) \cdot \left(x + \frac{1}{2}\right) =$$

$$= 2 \cdot \left(x - \frac{3}{2}\right) \cdot 2 \cdot \left(x + \frac{1}{2}\right) = (2 \cdot x - 3) \cdot (2 \cdot x + 1).$$

- Nazivnik

$$4 \cdot x^2 - 8 \cdot x + 3$$

rastavimo na faktore.

1.inačica

www.halapa.com

$$4\cdot x^2-8\cdot x+3=\left[\begin{matrix}\text{metoda}\\\text{grupiranja}\end{matrix}\right]=4\cdot x^2-8\cdot x+3=4\cdot x^2-8\cdot x+12-9=4\cdot x^2-9-8\cdot x+12=$$

$$=\left(4\cdot x^2-9\right)-(8\cdot x-12)=(2\cdot x-3)\cdot(2\cdot x+3)-4\cdot(2\cdot x-3)=(2\cdot x-3)\cdot(2\cdot x+3-4)=(2\cdot x-3)\cdot(2\cdot x-1).$$

2.inačica

Moramo odrediti rješenja pripadne kvadratne jednadžbe.

$$4\cdot x^2-8\cdot x+3=0\;\Rightarrow\;\left.\begin{matrix}4\cdot x^2-8\cdot x+3=0\\a=4\;,\;b=-8\;,\;c=3\end{matrix}\right\}\;\Rightarrow\;\left.\begin{matrix}a=4\;,\;b=-8\;,\;c=3\\x_{1,2}=\dfrac{-b\pm\sqrt{b^2-4\cdot a\cdot c}}{2\cdot a}\end{matrix}\right\}\;\Rightarrow$$

$$\Rightarrow\;x_{1,2}=\frac{-(-8)\pm\sqrt{(-8)^2-4\cdot4\cdot3}}{2\cdot4}\;\Rightarrow\;x_{1,2}=\frac{8\pm\sqrt{64-48}}{8}\;\Rightarrow\;x_{1,2}=\frac{8\pm\sqrt{16}}{8}\;\Rightarrow$$

$$\Rightarrow\;x_{1,2}=\frac{8\pm4}{8}\;\Rightarrow\;\left.\begin{matrix}x_1=\dfrac{8+4}{8}\\x_2=\dfrac{8-4}{8}\end{matrix}\right\}\;\Rightarrow\;\left.\begin{matrix}x_1=\dfrac{12}{8}\\x_2=\dfrac{4}{8}\end{matrix}\right\}\;\Rightarrow\;\left.\begin{matrix}x_1=\dfrac{3}{2}\\x_2=\dfrac{1}{2}\end{matrix}\right\}.$$

Sada je:

$$4\cdot x^2-8\cdot x+3=4\cdot\left(x-\frac{3}{2}\right)\cdot\left(x-\frac{1}{2}\right)=2\cdot2\cdot\left(x-\frac{3}{2}\right)\cdot\left(x-\frac{1}{2}\right)=$$

$$=2\cdot\left(x-\frac{3}{2}\right)\cdot2\cdot\left(x-\frac{1}{2}\right)=(2\cdot x-3)\cdot(2\cdot x-1).$$

- Nazivnik

$$4\cdot x^2-1$$

rastavimo na faktore.

$$4\cdot x^2-1=(2\cdot x-1)\cdot(2\cdot x+1).$$

www.halapa.com

Diskusija

S nulom se ne može dijeliti. Zato moramo odbaciti vrijednosti nepoznanice x za koje su nazivnici jednaki nuli.

$$\left.\begin{matrix}(2\cdot x-3)\cdot(2\cdot x+1)=0\\(2\cdot x-3)\cdot(2\cdot x-1)=0\\(2\cdot x-1)\cdot(2\cdot x+1)=0\end{matrix}\right\}\Rightarrow\left.\begin{matrix}2\cdot x-3=0\\2\cdot x+1=0\\2\cdot x-1=0\end{matrix}\right\}\Rightarrow\left.\begin{matrix}2\cdot x=3\\2\cdot x=-1\\2\cdot x=1\end{matrix}\right\}\Rightarrow\left.\begin{matrix}2\cdot x=3\;/:2\\2\cdot x=-1\;/:2\\2\cdot x=1\;/:2\end{matrix}\right\}\Rightarrow\left.\begin{matrix}x=\dfrac{3}{2}\\x=-\dfrac{1}{2}\\x=\dfrac{1}{2}\end{matrix}\right\}.\;\text{To odbacujemo.}$$

Sada rješavamo jednadžbu.

$$\frac{x}{4\cdot x^2-4\cdot x-3}-\frac{x-1}{4\cdot x^2-8\cdot x+3}=\frac{3\cdot x-4}{4\cdot x^2-1}\;\Rightarrow$$

$$\Rightarrow\;\frac{x}{(2\cdot x-3)\cdot(2\cdot x+1)}-\frac{x-1}{(2\cdot x-3)\cdot(2\cdot x-1)}=\frac{3\cdot x-4}{(2\cdot x-1)\cdot(2\cdot x+1)}\;\Rightarrow\;\left[\begin{matrix}\text{jednadžbu množimo sa}\\\text{zajedničkim nazivnikom}\end{matrix}\right]\Rightarrow$$

$$\Rightarrow\;\frac{x}{(2\cdot x-3)\cdot(2\cdot x+1)}-\frac{x-1}{(2\cdot x-3)\cdot(2\cdot x-1)}=\frac{3\cdot x-4}{(2\cdot x-1)\cdot(2\cdot x+1)}\;/\cdot\;(2\cdot x-3)\cdot(2\cdot x+1)\cdot(2\cdot x-1)\;\Rightarrow$$

$$\Rightarrow\;x\cdot(2\cdot x-1)-(x-1)\cdot(2\cdot x+1)=(3\cdot x-4)\cdot(2\cdot x-3)\;\Rightarrow$$

$$\Rightarrow 2\cdot x^2 - x - \left(2\cdot x^2 + x - 2\cdot x - 1\right) = 6\cdot x^2 - 9\cdot x - 8\cdot x + 12 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 2\cdot x^2 - x - 2\cdot x^2 - x + 2\cdot x + 1 = 6\cdot x^2 - 9\cdot x - 8\cdot x + 12 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 2\cdot x^2 - x - 2\cdot x^2 - x + 2\cdot x + 1 = 6\cdot x^2 - 9\cdot x - 8\cdot x + 12 \Rightarrow 1 = 6\cdot x^2 - 17\cdot x + 12 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 1 - 6\cdot x^2 + 17\cdot x - 12 = 0 \Rightarrow -6\cdot x^2 + 17\cdot x - 11 = 0 \Rightarrow -6\cdot x^2 + 17\cdot x - 11 = 0 \;/\cdot(-1) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 6\cdot x^2 - 17\cdot x + 11 = 0 \Rightarrow \left.\begin{matrix} 6\cdot x^2 - 17\cdot x + 11 = 0 \\ a = 6 \;,\; b = -17 \;,\; c = 11 \end{matrix}\right\} \Rightarrow \left.\begin{matrix} a = 6 \;,\; b = -17 \;,\; c = 11 \\ x_{1,2} = \dfrac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4\cdot a\cdot c}}{2\cdot a} \end{matrix}\right\} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow x_{1,2} = \frac{-(-17) \pm \sqrt{(-17)^2 - 4\cdot 6\cdot 11}}{2\cdot 6} \Rightarrow x_{1,2} = \frac{17 \pm \sqrt{289 - 264}}{12} \Rightarrow x_{1,2} = \frac{17 \pm \sqrt{25}}{12} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow x_{1,2} = \frac{17 \pm 5}{12} \Rightarrow \left.\begin{matrix} x_1 = \dfrac{17+5}{12} \\ x_2 = \dfrac{17-5}{12} \end{matrix}\right\} \Rightarrow \left.\begin{matrix} x_1 = \dfrac{22}{12} \\ x_2 = \dfrac{12}{12} \end{matrix}\right\} \Rightarrow \left.\begin{matrix} x_1 = \dfrac{11}{6} \\ x_2 = 1 \end{matrix}\right\}.$$

Vježba 108

Riješi kvadratnu jednadžbu: $\dfrac{x}{4\cdot x^2 - 4\cdot x - 3} + \dfrac{1-x}{4\cdot x^2 - 8\cdot x + 3} - \dfrac{3\cdot x - 4}{4\cdot x^2 - 1} = 0.$

Rezultat: $x_1 = \dfrac{11}{6} \;,\; x_2 = 1.$

www.halapa.com

Zadatak 109 (Mia, studentica)

Riješite računski sustav: $\left\{\begin{matrix} y - 2\cdot x - 2 = 0 \\ y = -x^2 + x + 2. \end{matrix}\right.$

Rješenje 109

Ponovimo!

Da bi umnožak bio jednak nuli, dovoljno je da jedan faktor bude jednak nuli.

$$a\cdot b = 0 \Leftrightarrow a = 0 \text{ ili } b = 0 \text{ ili } a = b = 0.$$

$$a\cdot x^2 + b\cdot x = 0 \Rightarrow x\cdot(a\cdot x + b) = 0 \Rightarrow \left.\begin{matrix} x = 0 \\ a\cdot x + b = 0 \end{matrix}\right\} \Rightarrow \left.\begin{matrix} x_1 = 0 \\ x_2 = -\dfrac{b}{a} \end{matrix}\right\}.$$

Zakon distribucije množenja prema zbrajanju.

$$a\cdot(b + c) = a\cdot b + a\cdot c \quad , \quad a\cdot b + a\cdot c = a\cdot(b + c).$$

$$\left.\begin{matrix} y - 2\cdot x - 2 = 0 \\ y = -x^2 + x + 2 \end{matrix}\right\} \Rightarrow \left.\begin{matrix} y = 2\cdot x + 2 \\ y = -x^2 + x + 2 \end{matrix}\right\} \Rightarrow \begin{bmatrix} \text{metoda} \\ \text{komparacije} \end{bmatrix} \Rightarrow 2\cdot x + 2 = -x^2 + x + 2 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 2\cdot x + 2 + x^2 - x - 2 = 0 \Rightarrow 2\cdot x + 2 + x^2 - x - 2 = 0 \Rightarrow 2\cdot x + x^2 - x = 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow x^2 + x = 0 \Rightarrow x\cdot(x + 1) = 0 \Rightarrow \left.\begin{matrix} x = 0 \\ x + 1 = 0 \end{matrix}\right\} \Rightarrow \left.\begin{matrix} x_1 = 0 \\ x_2 = -1 \end{matrix}\right\}.$$

Sada računamo y_1 i y_2.

$$\left.\begin{matrix} x_1 = 0 \\ x_2 = -1 \end{matrix}\right\} \Rightarrow [\, y = 2 \cdot x + 2 \,] \Rightarrow \left.\begin{matrix} y_1 = 2 \cdot 0 + 2 \\ y_2 = 2 \cdot (-1) + 2 \end{matrix}\right\} \Rightarrow \left.\begin{matrix} y_1 = 0 + 2 \\ y_2 = -2 + 2 \end{matrix}\right\} \Rightarrow \left.\begin{matrix} y_1 = 2 \\ y_2 = 0 \end{matrix}\right\}.$$

Rješenja sustava glase:

$$(x_1,\, y_1) = (0,\, 2) \quad , \quad (x_2,\, y_2) = (-1,\, 0).$$

Vježba 109

Riješite računski sustav: $\begin{cases} y = 2 \cdot x + 2 \\ y + x^2 = x + 2. \end{cases}$

Rezultat: $(x_1,\, y_1) = (0,\, 2) \quad , \quad (x_2,\, y_2) = (-1,\, 0).$

Zadatak 110 (Računalni tehničar, tehnička škola)

Zadana je jednadžba $(x-1)^2 = p \cdot (x+1)$, gdje je p realan broj. Za koju vrijednost broja p ova jednadžba ima dvostruko realno rješenje?

Rješenje 110

Ponovimo!

$$(a-b)^2 = a^2 - 2 \cdot a \cdot b + b^2 \quad , \quad (a+b)^2 = a^2 + 2 \cdot a \cdot b + b^2 \quad , \quad (-a)^2 = a^2.$$

Da bi umnožak bio jednak nuli, dovoljno je da jedan faktor bude jednak nuli.

$$a \cdot b = 0 \Leftrightarrow a = 0 \text{ ili } b = 0 \text{ ili } a = b = 0.$$

$$a \cdot x^2 + b \cdot x = 0 \Rightarrow x \cdot (a \cdot x + b) = 0 \Rightarrow \left.\begin{matrix} x = 0 \\ a \cdot x + b = 0 \end{matrix}\right\} \Rightarrow \left.\begin{matrix} x_1 = 0 \\ x_2 = -\dfrac{b}{a} \end{matrix}\right\}.$$

Zakon distribucije množenja prema zbrajanju.

$$a \cdot (b+c) = a \cdot b + a \cdot c \quad , \quad a \cdot b + a \cdot c = a \cdot (b+c).$$

Diskriminanta kvadratne jednadžbe

$$a \cdot x^2 + b \cdot x + c = 0$$

je broj

$$D = b^2 - 4 \cdot a \cdot c.$$

- Ako je D > 0, jednadžba ima dva realna rješenja.
- Ako je D = 0, jednadžba ima jedno dvostruko realno rješenje.
- Ako je D < 0, jednadžba ima kompleksno – konjugirana rješenja.

$$(x-1)^2 = p \cdot (x+1) \Rightarrow x^2 - 2 \cdot x + 1 = p \cdot x + p \Rightarrow x^2 - 2 \cdot x + 1 - p \cdot x - p = 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow x^2 - (p+2) \cdot x + 1 - p = 0 \Rightarrow \left.\begin{matrix} x^2 - (p+2) \cdot x + 1 - p = 0 \\ a = 1 \;,\; b = -(p+2) \;,\; c = 1 - p \end{matrix}\right\}.$$

Budući da kvadratna jednadžba mora imati dvostruko realno rješenje, njezina diskriminanta bit će jednaka nuli.

$$\left.\begin{matrix} b^2 - 4 \cdot a \cdot c = 0 \\ a = 1 \;,\; b = -(p+2) \;,\; c = 1 - p \end{matrix}\right\} \Rightarrow (-(p+2))^2 - 4 \cdot 1 \cdot (1-p) = 0 \Rightarrow (p+2)^2 - 4 \cdot (1-p) = 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow p^2 + 4 \cdot p + 4 - 4 + 4 \cdot p = 0 \Rightarrow p^2 + 4 \cdot p + 4 - 4 + 4 \cdot p = 0 \Rightarrow p^2 + 8 \cdot p = 0 \Rightarrow p \cdot (p+8) = 0 \Rightarrow$$

www.halapa.com

$$\Rightarrow \left.\begin{matrix} p=0 \\ p+8=0 \end{matrix}\right\} \Rightarrow \left.\begin{matrix} p_1=0 \\ p_2=-8 \end{matrix}\right\}.$$

Vježba 110

Zadana je jednadžba $(1-x)^2 = p\cdot(x+1)$, gdje je p realan broj. Za koju vrijednost broja p ova jednadžba ima dvostruko realno rješenje?

Rezultat: $p_1 = 0 \quad , \quad p_2 = -8.$

Zadatak 111 (Vedran, tehnička škola)

Zadana je jednadžba $(x+p)^2 = 2\cdot(x-p)$, gdje je p realan broj. Za koji p rješenja jednadžbe nisu realna?

Rješenje 111

Ponovimo!

$$(a+b)^2 = a^2 + 2\cdot a\cdot b + b^2 \quad , \quad (a\cdot b)^n = a^n \cdot b^n \quad , \quad a<b \Rightarrow a\cdot c > b\cdot c \ , \ c<0.$$

$$(a-b)^2 = a^2 - 2\cdot a\cdot b + b^2.$$

Zakon distribucije množenja prema zbrajanju.

$$a\cdot(b+c) = a\cdot b + a\cdot c \quad , \quad a\cdot b + a\cdot c = a\cdot(b+c).$$

Diskriminanta kvadratne jednadžbe

$$a\cdot x^2 + b\cdot x + c = 0$$

je broj

$$D = b^2 - 4\cdot a\cdot c.$$

- Ako je D > 0, jednadžba ima dva realna rješenja.
- Ako je D = 0, jednadžba ima jedno dvostruko realno rješenje.
- Ako je D < 0, jednadžba ima kompleksno – konjugirana rješenja.

www.halapa.com

$$(x+p)^2 = 2\cdot(x-p) \Rightarrow x^2 + 2\cdot p\cdot x + p^2 = 2\cdot x - 2\cdot p \Rightarrow x^2 + 2\cdot p\cdot x + p^2 - 2\cdot x + 2\cdot p = 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow x^2 + 2\cdot(p-1)\cdot x + p^2 + 2\cdot p = 0 \Rightarrow \left.\begin{matrix} x^2 + 2\cdot(p-1)\cdot x + p^2 + 2\cdot p = 0 \\ a=1 \ , \ b = 2\cdot(p-1) \ , \ c = p^2 + 2\cdot p \end{matrix}\right\}.$$

Budući da kvadratna jednadžba ne smije imati realna rješenja, njezina rješenja bit će kompleksno – konjugirani brojevi pa diskriminanta mora biti negativna.

$$\left.\begin{matrix} b^2 - 4\cdot a\cdot c < 0 \\ a=1 \ , \ b = 2\cdot(p-1) \ , \ c = p^2 + 2\cdot p \end{matrix}\right\} \Rightarrow (2\cdot(p-1))^2 - 4\cdot 1\cdot\left(p^2 + 2\cdot p\right) < 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 4\cdot(p-1)^2 - 4\cdot\left(p^2 + 2\cdot p\right) < 0 \Rightarrow 4\cdot\left(p^2 - 2\cdot p + 1\right) - 4\cdot p^2 - 8\cdot p < 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 4\cdot p^2 - 8\cdot p + 4 - 4\cdot p^2 - 8\cdot p < 0 \Rightarrow 4\cdot p^2 - 8\cdot p + 4 - 4\cdot p^2 - 8\cdot p < 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow -8\cdot p + 4 - 8\cdot p < 0 \Rightarrow -16\cdot p + 4 < 0 \Rightarrow -16\cdot p < -4 \Rightarrow -16\cdot p < -4 \ /:(-16) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow p > \frac{4}{16} \Rightarrow p > \frac{1}{4}.$$

Vježba 111

Zadana je jednadžba $(x+p)^2+2\cdot(p-x)=0,$ gdje je p realan broj. Za koji p rješenja jednadžbe nisu realna?

Rezultat: $p>\frac{1}{4}.$

Zadatak 112 (Bella, gimnazija)

Dokaži da jednadžba

$$2\cdot x^2-(m-3)\cdot x-m+1=0$$

ima realne korijene za svaki izbor realnog parametra m.

Rješenje 112

Ponovimo!

$$(-a)^2=a^2 \quad , \quad (a-b)^2=a^2-2\cdot a\cdot b+b^2 \quad , \quad (a+b)^2=a^2+2\cdot a\cdot b+b^2.$$

$$a^2\geq 0 \text{ za svaki realni broj a}$$

Kvadrat realnog broja je nenegativan broj (nula ili pozitivan broj).

Zakon distribucije množenja prema zbrajanju.

$$a\cdot(b+c)=a\cdot b+a\cdot c \quad , \quad a\cdot b+a\cdot c=a\cdot(b+c).$$

Parametar: veličina, obično realna varijabla, čije vrijednosti služe za razlikovanje elemenata nekog skupa točaka, funkcija, jednadžbi ili drugih matematičkih objekata; veličina o kojoj ovisi funkcija ili oblik krivulje.

Diskriminanta kvadratne jednadžbe

$$a\cdot x^2+b\cdot x+c=0$$

je broj

$$D=b^2-4\cdot a\cdot c.$$

- Ako je D > 0, jednadžba ima dva realna rješenja.
- Ako je D = 0, jednadžba ima jedno dvostruko realno rješenje.
- Ako je D < 0, jednadžba ima kompleksno – konjugirana rješenja.

$$2\cdot x^2-(m-3)\cdot x-m+1=0 \Rightarrow \left.\begin{array}{l} 2\cdot x^2-(m-3)\cdot x-m+1=0 \\ a=2 \ , \ b=-(m-3) \ , \ c=-m+1 \end{array}\right\}.$$

Računamo diskriminantu zadane kvadratne jednadžbe.

$$\left.\begin{array}{l} D=b^2-4\cdot a\cdot c \\ a=2 \ , \ b=-(m-3) \ , \ c=-m+1 \end{array}\right\} \Rightarrow D=(-(m-3))^2-4\cdot 2\cdot(-m+1) \Rightarrow D=(m-3)^2-8\cdot(-m+1) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow D=m^2-6\cdot m+9+8\cdot m-8 \Rightarrow D=m^2+2\cdot m+1 \Rightarrow D=(m+1)^2 \Rightarrow (m+1)^2\geq 0.$$

Budući da je

$$D=(m+1)^2\geq 0$$

za svaki izbor realnog parametra m, kvadratna jednadžba ima realne korijene (nema kompleksno – konjugirana rješenja)

Vježba 112

Dokaži da jednadžba

$$2\cdot x^2+(3-m)\cdot x+1-m=0$$

ima realne korijene za svaki izbor realnog parametra m.

www.halapa.com

Rezultat: Dokaz analogan.

Zadatak 113 (Mirna, srednja škola)

Za kvadratnu jednadžbu $\frac{1}{9}\cdot x^2-\frac{4}{3}\cdot x+4=0$ vrijedi tvrdnja:

$A.$ jednadžba ima dva (različita) realna rješenja
$B.$ jednadžba nema realnih rješenja
$C.$ jednadžba ima samo jedno (dvostruko) rješenje
$D.$ jednadžba se ne može riješiti

Rješenje 113

Ponovimo!

$$(-a)^2=a^2.$$

Diskriminanta kvadratne jednadžbe

$$a\cdot x^2+b\cdot x+c=0$$

je broj

$$D=b^2-4\cdot a\cdot c.$$

- Ako je D > 0, jednadžba ima dva realna rješenja.
- Ako je D = 0, jednadžba ima jedno dvostruko realno rješenje.
- Ako je D < 0, jednadžba ima kompleksno – konjugirana rješenja.

$$\frac{1}{9}\cdot x^2-\frac{4}{3}\cdot x+4=0 \Rightarrow \frac{1}{9}\cdot x^2-\frac{4}{3}\cdot x+4=0 \;/\cdot 9 \Rightarrow x^2-12\cdot x+36=0 \Rightarrow \left.\begin{array}{l} x^2-12\cdot x+36=0 \\ a=1\ ,\ b=-12\ ,\ c=36 \end{array}\right\}.$$

Računamo diskriminantu zadane kvadratne jednadžbe.

$$\left.\begin{array}{l} D=b^2-4\cdot a\cdot c \\ a=1\ ,\ b=-12\ ,\ c=36 \end{array}\right\} \Rightarrow D=(-12)^2-4\cdot 1\cdot 36 \Rightarrow D=144-144 \Rightarrow D=0.$$

Budući da je

$$D=0,$$

jednadžba ima jedno dvostruko realno rješenje. Odgovor je pod C.

Vježba 113

Za kvadratnu jednadžbu $\frac{1}{9}\cdot x^2-\frac{4}{3}\cdot x-4=0$ vrijedi tvrdnja:

$A.$ jednadžba ima dva (različita) realna rješenja
$B.$ jednadžba nema realnih rješenja
$C.$ jednadžba ima samo jedno (dvostruko) rješenje
$D.$ jednadžba se ne može riješiti

Rezultat: A.

Zadatak 114 (Ella, srednja škola)

Riješi kvadratnu jednadžbu: $x^2 - 81 = 0$.

Rješenje 114

Ponovimo!

$$\sqrt{a^2}=a\ ,\ a\geq .$$

Nepotpuna kvadratna jednadžba

$$a\cdot x^2+c=0$$

ima rješenja

www.halapa.com

$$x_{1,2}=\pm\sqrt{-\frac{c}{a}}.$$

Jednadžba oblika

$$a\cdot x^{n}+c=0\ ,\ n\in N$$

zove se binomna jednadžba.
Jedan način rješavanja je rastavljanje binoma na faktore uporabom formula:

$$a^{2}-b^{2}=(a-b)\cdot(a+b)\quad,\quad a^{2}+b^{2}=(a-b\cdot i)\cdot(a+b\cdot i)\ ,\ i=\sqrt{-1}.$$

$$a^{3}-b^{3}=(a-b)\cdot\left(a^{2}+a\cdot b+b^{2}\right)\quad,\quad a^{3}+b^{3}=(a+b)\cdot\left(a^{2}-a\cdot b+b^{2}\right)\ \text{itd.}$$

Da bi umnožak bio jednak nuli, dovoljno je da jedan faktor bude jednak nuli.

$$a\cdot b=0\ \Leftrightarrow\ a=0\ \text{ili}\ b=0\ \text{ili}\ a=b=0.$$

1.inačica

$$x^{2}-81=0\ \Rightarrow\ x^{2}=81\ \Rightarrow\ x^{2}=81\ /\sqrt{\ }\ \Rightarrow\ x_{1,2}=\pm\sqrt{81}\ \Rightarrow\ x_{1,2}=\pm\sqrt{9^{2}}\ \Rightarrow\ x_{1,2}=\pm 9.$$

2.inačica

$$x^{2}-81=0\ \Rightarrow\ x^{2}-9^{2}=0\ \Rightarrow\ (x-9)\cdot(x+9)=0\ \Rightarrow\ \left.\begin{array}{l}x-9=0\\x+9=0\end{array}\right\}\ \Rightarrow\ \left.\begin{array}{l}x_{1}=9\\x_{2}=-9\end{array}\right\}.$$

Vježba 114

Riješi kvadratnu jednadžbu: $x^2 - 16 = 0$.

Rezultat: $x_1 = 4$, $x_2 = -4$.

Zadatak 115 (Ella, srednja škola)

Riješi kvadratnu jednadžbu: $x^2 + 9 = 0$.

Rješenje 115

Ponovimo!

$$\sqrt{a^{2}}=a\ ,\ a\geq 0\quad,\quad\sqrt{-p}=i\cdot\sqrt{p}\ ,\ p>0\quad,\quad i^{2}=-1.$$

www.halapa.com

Nepotpuna kvadratna jednadžba

$$a\cdot x^{2}+c=0$$

ima rješenja

$$x_{1,2}=\pm\sqrt{-\frac{c}{a}}.$$

Jednadžba oblika

$$a\cdot x^{n}+c=0\ ,\ n\in N$$

zove se binomna jednadžba.
Jedan način rješavanja je rastavljanje binoma na faktore uporabom formula:

$$a^{2}-b^{2}=(a-b)\cdot(a+b)\quad,\quad a^{2}+b^{2}=(a-b\cdot i)\cdot(a+b\cdot i)\ ,\ i=\sqrt{-1}.$$

$$a^{3}-b^{3}=(a-b)\cdot\left(a^{2}+a\cdot b+b^{2}\right)\quad,\quad a^{3}+b^{3}=(a+b)\cdot\left(a^{2}-a\cdot b+b^{2}\right)\ \text{itd.}$$

Da bi umnožak bio jednak nuli, dovoljno je da jedan faktor bude jednak nuli.

$$a\cdot b=0\ \Leftrightarrow\ a=0\ \text{ili}\ b=0\ \text{ili}\ a=b=0.$$

1.inačica

$$x^{2}+9=0\ \Rightarrow\ x^{2}=-9\ \Rightarrow\ x^{2}=-9\ /\sqrt{\ }\ \Rightarrow\ x_{1,2}=\pm\sqrt{-9}\ \Rightarrow\ x_{1,2}=\pm i\cdot\sqrt{3^{2}}\ \Rightarrow\ x_{1,2}=\pm 3\cdot i.$$

2.inačica

$$x^2+9=0 \Rightarrow x^2-(3\cdot i)^2=0 \Rightarrow (x-3\cdot i)\cdot(x+3\cdot i)=0 \Rightarrow \left.\begin{matrix} x-3\cdot i=0 \\ x+3\cdot i=0 \end{matrix}\right\} \Rightarrow \left.\begin{matrix} x_1=3\cdot i \\ x_2=-3\cdot i \end{matrix}\right\}.$$

Vježba 115

Riješi kvadratnu jednadžbu: $x^2 + 16 = 0$.

Rezultat: $x_1 = 4 \cdot i$, $x_2 = -4 \cdot i$.

Zadatak 116 (Iva, srednja škola)

Što je od navedenog točno za broj $a=1+\sqrt{5}$?

$A.\ a^2+2\cdot a+4=0$ $\quad B.\ a^2+2\cdot a-4=0$ $\quad C.\ a^2-2\cdot a+4=0$ $\quad D.\ a^2-2\cdot a-4=0$

Rješenje 116

Ponovimo!

$$(x-y)^2=x^2-2\cdot x\cdot y+y^2 \quad , \quad \left(\sqrt{x}\right)^2=x.$$

1.inačica

$$a=1+\sqrt{5} \Rightarrow a-1=\sqrt{5} \Rightarrow \begin{bmatrix} \text{kvadriramo} \\ \text{jednadžbu} \end{bmatrix} \Rightarrow a-1=\sqrt{5} \ /^2 \Rightarrow (a-1)^2=\left(\sqrt{5}\right)^2 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow a^2-2\cdot a+1=5 \Rightarrow a^2-2\cdot a+1-5=0 \Rightarrow a^2-2\cdot a-4=0.$$

Odgovor je pod D.

2.inačica

Broj $a=1+\sqrt{5}$ uvrstimo u ponuđene jednadžbe da bismo se uvjerili u točnost odgovora pod D. Ali, oduzima dosta vremena.

3.inačica

Riješimo ponuđene kvadratne jednadžbe da bismo se uvjerili u točnost odgovora pod D. Ali, oduzima dosta vremena.

www.halapa.com

Vježba 116

Što je od navedenog točno za broj $a=1+\sqrt{2}$?

$A.\ a^2+2\cdot a+1=0$ $\quad B.\ a^2+2\cdot a-1=0$ $\quad C.\ a^2-2\cdot a+1=0$ $\quad D.\ a^2-2\cdot a-1=0$

Rezultat: D.

Zadatak 117 (Ante, srednja škola)

Zadan je izraz $x-16=\frac{m^2}{4\cdot y}+12$. Izračunaj m.

Rješenje 117

Ponovimo!

$$a=b \Rightarrow b=a \quad , \quad \sqrt{a\cdot b}=\sqrt{a}\cdot\sqrt{b} \quad , \quad \sqrt{a^2}=a \ , \ a\geq 0.$$

$$x-16=\frac{m^2}{4\cdot y}+12 \Rightarrow \frac{m^2}{4\cdot y}+12=x-16 \Rightarrow \frac{m^2}{4\cdot y}=x-16-12 \Rightarrow \frac{m^2}{4\cdot y}=x-28 \Rightarrow \frac{m^2}{4\cdot y}=x-28 \ /\cdot 4\cdot y \Rightarrow$$

$$\Rightarrow m^2=4\cdot y\cdot(x-28) \Rightarrow m^2=4\cdot y\cdot(x-28) \ /\sqrt{} \Rightarrow m=\sqrt{4\cdot y\cdot(x-28)} \Rightarrow m=\sqrt{4}\cdot\sqrt{y\cdot(x-28)} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow m=\sqrt{2^2}\cdot\sqrt{y\cdot(x-28)} \Rightarrow m=2\cdot\sqrt{y\cdot(x-28)}.$$

Vježba 117

Zadan je izraz $x-16=\frac{m^2}{4\cdot y}+10$. Izračunaj m.

Rezultat: $2\cdot\sqrt{y\cdot(x-26)}$.

Zadatak 118 (Ante, srednja škola)

Zadan je izraz $x-16=\frac{m^2}{4\cdot y+12}$. Izračunaj m.

Rješenje 118

Ponovimo!

$$a=b\ \Rightarrow\ b=a\quad,\quad\sqrt{a\cdot b}=\sqrt{a}\cdot\sqrt{b}\quad,\quad\sqrt{a^2}=a\ ,\ a\geq 0.$$

Zakon distribucije množenja prema zbrajanju.

$$a\cdot(b+c)=a\cdot b+a\cdot c\quad,\quad a\cdot b+a\cdot c=a\cdot(b+c).$$

$$x-16=\frac{m^2}{4\cdot y+12}\ \Rightarrow\ \frac{m^2}{4\cdot y+12}=x-16\ \Rightarrow\ \frac{m^2}{4\cdot y+12}=x-16\ /\cdot(4\cdot y+12)\ \Rightarrow\ m^2=(x-16)\cdot(4\cdot y+12)\ \Rightarrow$$

$$\Rightarrow\ m^2=(x-16)\cdot 4\cdot(y+3)\ \Rightarrow\ m^2=4\cdot(x-16)\cdot(y+3)\ \Rightarrow\ m^2=4\cdot(x-16)\cdot(y+3)\ /\sqrt{\ }\ \Rightarrow$$

$$\Rightarrow\ m=\sqrt{4\cdot(x-16)\cdot(y+3)}\ \Rightarrow\ m=\sqrt{4}\cdot\sqrt{(x-16)\cdot(y+3)}\ \Rightarrow\ m=\sqrt{2^2}\cdot\sqrt{(x-16)\cdot(y+3)}\ \Rightarrow$$

$$\Rightarrow\ m=2\cdot\sqrt{(x-16)\cdot(y+3)}.$$

www.halapa.com

Vježba 118

Zadan je izraz $x+10=\frac{m^2}{4\cdot y+12}$. Izračunaj m.

Rezultat: $2\cdot\sqrt{(x+10)\cdot(y+3)}$.

Zadatak 119 (Ninoslav, srednja škola)

Zadane su jednadžbe $x^2+k\cdot x+6=0$ i $x^2-k\cdot x+6=0$. Ako su rješenja druge jednadžbe za 5 veća od rješenja prve jednadžbe nađi k.

Rješenje 119

Ponovimo!

Rješenja (korijeni) x_1, x_2 kvadratne jednadžbe $a\cdot x^2+b\cdot x+c=0$ zadovoljavaju Vièteove formule:

$$x_1+x_2=-\frac{b}{a}\quad,\quad x_1\cdot x_2=\frac{c}{a}.$$

Neka su x_1 i x_2 rješenja jednadžbe $x^2+k\cdot x+6=0$, a x_1' i x_2' rješenja jednadžbe $x^2-k\cdot x+6=0$. Budući da rješenja x_1' i x_2' moraju biti za 5 veća od rješenja x_1 i x_2, vrijedi:

$$\left.\begin{array}{l}x_1'=x_1+5\\x_2'=x_2+5\end{array}\right\}.$$

Uporabom prve Vièteove formule dobije se:

$$\left.\begin{array}{l}x^2+k\cdot x+6=0\\x^2-k\cdot x+6=0\end{array}\right\}\ \Rightarrow\ \left.\begin{array}{l}x_1+x_2=-k\\x_1'+x_2'=-(-k)\end{array}\right\}\ \Rightarrow\ \left.\begin{array}{l}x_1+x_2=-k\\x_1'+x_2'=k\end{array}\right\}\ \Rightarrow\ \left[\begin{array}{l}x_1'=x_1+5\\x_2'=x_2+5\end{array}\right]\ \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \left.\begin{array}{l} x_1 + x_2 = -k \\ x_1 + 5 + x_2 + 5 = k \end{array}\right\} \Rightarrow \left.\begin{array}{l} x_1 + x_2 = -k \\ x_1 + x_2 + 10 = k \end{array}\right\} \Rightarrow \left.\begin{array}{l} x_1 + x_2 = -k \\ x_1 + x_2 = k - 10 \end{array}\right\} \Rightarrow \left[\begin{array}{l} \text{metoda} \\ \text{komparacije} \end{array}\right] \Rightarrow$$

$$\Rightarrow -k = k - 10 \Rightarrow -k - k = -10 \Rightarrow -2 \cdot k = -10 \Rightarrow -2 \cdot k = -10 \; /: (-2) \Rightarrow k = 5.$$

Vježba 119

Zadane su jednadžbe $x^2 + k \cdot x + 6 = 0$ i $x^2 - k \cdot x + 6 = 0$. Ako su rješenja prve jednadžbe za 5 manja od rješenja druge jednadžbe nađi k.

Rezultat: 5.

Zadatak 120 (July, gimnazija)

Realni broj a za koji je jedno rješenje jednadžbe $a \cdot x^2 - 6 \cdot a \cdot x + 144 = 0$ dvostruko veće od drugog iznosi:

A. 24 *B.* 18 *C.* 9 *D.* 6

Rješenje 120

Ponovimo!

Jednadžba oblika

$$a \cdot x^2 + b \cdot x + c = 0$$

($a \neq 0$, b i c realni brojevi) naziva se kvadratna jednadžba. Svaki broj x (realni ili kompleksni) koji zadovoljava tu jednadžbu naziva se rješenje kvadratne jednadžbe. Pri tome je:

- a – vodeći koeficijent
- b – linearni koeficijent
- c – slobodni koeficijent.

Rješenja (korijeni) x_1, x_2 kvadratne jednadžbe $a \cdot x^2 + b \cdot x + c = 0$ zadovoljavaju Vièteove formule:

$$x_1 + x_2 = -\frac{b}{a} \quad , \quad x_1 \cdot x_2 = \frac{c}{a}.$$

Nultočke funkcije

Broj x_0 je nultočka funkcije f ako vrijedi

$$f(x_0) = 0.$$

www.halapa.com

Prvo odredimo koeficijente kvadratne jednadžbe.

$$a \cdot x^2 - 6 \cdot a \cdot x + 144 = 0 \Rightarrow \left.\begin{array}{l} a = a \\ b = -6 \cdot a \\ c = 144 \end{array}\right\}.$$

1.inačica

Pomoću prve Vièteove formule i uvjeta iz zadatka dobije se sustav jednadžbi i rješenja za x_1 i x_2.

$$\left.\begin{array}{l} a = a \;\; , \;\; b = -6 \cdot a \\ x_1 + x_2 = -\frac{b}{a} \\ x_1 = 2 \cdot x_2 \end{array}\right\} \Rightarrow \left.\begin{array}{l} x_1 + x_2 = -\frac{-6 \cdot a}{a} \\ x_1 = 2 \cdot x_2 \end{array}\right\} \Rightarrow \left.\begin{array}{l} x_1 + x_2 = 6 \\ x_1 = 2 \cdot x_2 \end{array}\right\} \Rightarrow \left[\begin{array}{l} \text{metoda} \\ \text{supstitucije} \end{array}\right] \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 2 \cdot x_2 + x_2 = 6 \Rightarrow 3 \cdot x_2 = 6 \Rightarrow 3 \cdot x_2 = 6 \; /: 3 \Rightarrow x_2 = 2 \Rightarrow \left.\begin{array}{l} x_2 = 2 \\ x_1 = 2 \cdot x_2 \end{array}\right\} \Rightarrow x_1 = 2 \cdot 2 \Rightarrow x_1 = 4.$$

Rješenja kvadratne jednadžbe su

$$(x_1, x_2) = (4, 2).$$

Pomoću druge Vièteove formule izračunamo a.

$$\left.\begin{array}{l} a=a \;\;,\;\; c=144 \\ x_1=4 \;\;,\;\; x_2=2 \\ x_1\cdot x_2=\frac{c}{a} \end{array}\right\} \Rightarrow 4\cdot 2=\frac{144}{a} \Rightarrow 8=\frac{144}{a} \Rightarrow 8=\frac{144}{a} \;/\cdot\frac{a}{8} \Rightarrow a=\frac{144}{8} \Rightarrow a=18.$$

Odgovor je pod B.

2.inačica

Pomoću prve Vièteove formule i uvjeta iz zadatka dobije se sustav jednadžbi i rješenja za x_1 i x_2. Dovoljno je uzeti samo jedno rješenje i uvrstiti ga u kvadratnu jednadžbu da se dobije a.

$$\left.\begin{array}{l} a=a \;\;,\;\; b=-6\cdot a \\ x_1+x_2=-\frac{b}{a} \\ x_1=2\cdot x_2 \end{array}\right\} \Rightarrow \left.\begin{array}{l} x_1+x_2=-\frac{-6\cdot a}{a} \\ x_1=2\cdot x_2 \end{array}\right\} \Rightarrow \left.\begin{array}{l} x_1+x_2=6 \\ x_1=2\cdot x_2 \end{array}\right\} \Rightarrow \left[\begin{array}{l} \text{metoda} \\ \text{supstitucije} \end{array}\right] \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 2\cdot x_2+x_2=6 \Rightarrow 3\cdot x_2=6 \Rightarrow 3\cdot x_2=6 \;/:3 \Rightarrow x_2=2.$$

Dobiveno rješenje uvrstimo u jednadžbu.

$$\left.\begin{array}{l} a\cdot x^2-6\cdot a\cdot x+144=0 \\ x=2 \end{array}\right\} \Rightarrow a\cdot 2^2-6\cdot a\cdot 2+144=0 \Rightarrow 4\cdot a-12\cdot a+144=0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 4\cdot a-12\cdot a=-144 \Rightarrow -8\cdot a=-144 \Rightarrow -8\cdot a=-144 \;/:(-8) \Rightarrow a=18.$$

Odgovor je pod B.

Vježba 120

Realni broj a za koji je jedno rješenje jednadžbe $a \cdot x^2 - 6 \cdot a \cdot x + 144 = 0$ dvostruko manje od drugog iznosi:

A. 24 *B.* 18 *C.* 9 *D.* 6

Rezultat: B.

www.halapa.com