Zadatak 081 (2A, TUPŠ)

Skrati razlomak: $\frac{x^2 - 22 \cdot x + 40}{x^2 - 5 \cdot x + 6}$.

Rješenje 081

Ponovimo!

Svaki se kvadratni trinom može napisati u obliku

$$a \cdot x^2 + b \cdot x + c = a \cdot \left(x - x_1\right) \cdot \left(x - x_2\right),$$

gdje su x_1 i x_2 rješenja pripadne kvadratne jednadžbe

$$a \cdot x^2 + b \cdot x + c = 0.$$

Moramo odrediti rješenja pripadne kvadratne jednadžbe.

- $$\left.\begin{array}{l} x^2 - 22 \cdot x + 40 = 0 \\ a = 1 \ , \ b = -22 \ , \ c = 40 \end{array}\right\} \Rightarrow \left.\begin{array}{c} a = 1 \ , \ b = -22 \ , \ c = 40 \\ x_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4 \cdot a \cdot c}}{2 \cdot a} \end{array}\right\} \Rightarrow x_{1,2} = \frac{22 \pm \sqrt{484 - 4 \cdot 1 \cdot 40}}{2 \cdot 1} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow x_{1,2} = \frac{22 \pm \sqrt{484 - 160}}{2} \Rightarrow x_{1,2} = \frac{22 \pm \sqrt{324}}{2} \Rightarrow x_{1,2} = \frac{22 \pm 18}{2} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \left.\begin{array}{l} x_1 = \frac{22 + 18}{2} \\ x_2 = \frac{22 - 18}{2} \end{array}\right\} \Rightarrow \left.\begin{array}{l} x_1 = \frac{40}{2} \\ x_2 = \frac{4}{2} \end{array}\right\} \Rightarrow \left.\begin{array}{l} x_1 = 20 \\ x_2 = 2 \end{array}\right\}.$$

Zato je:

$$x^2 - 22 \cdot x + 40 = (x - 20) \cdot (x - 2).$$

- $$\left.\begin{array}{l} x^2 - 5 \cdot x + 6 = 0 \\ a = 1 \ , \ b = -5 \ , \ c = 6 \end{array}\right\} \Rightarrow \left.\begin{array}{c} a = 1 \ , \ b = -5 \ , \ c = 6 \\ x_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4 \cdot a \cdot c}}{2 \cdot a} \end{array}\right\} \Rightarrow x_{1,2} = \frac{5 \pm \sqrt{25 - 4 \cdot 1 \cdot 6}}{2 \cdot 1} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow x_{1,2} = \frac{5 \pm \sqrt{25 - 24}}{2} \Rightarrow x_{1,2} = \frac{5 \pm \sqrt{1}}{2} \Rightarrow x_{1,2} = \frac{5 \pm 1}{2} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \left.\begin{array}{l} x_1 = \frac{5 + 1}{2} \\ x_2 = \frac{5 - 1}{2} \end{array}\right\} \Rightarrow \left.\begin{array}{l} x_1 = \frac{6}{2} \\ x_2 = \frac{4}{2} \end{array}\right\} \Rightarrow \left.\begin{array}{l} x_1 = 3 \\ x_2 = 2 \end{array}\right\}.$$

Zato je:

$$x^2 - 5 \cdot x + 6 = (x - 3) \cdot (x - 2).$$

Kratimo zadani razlomak:

$$\frac{x^2 - 22 \cdot x + 40}{x^2 - 5 \cdot x + 6} = \frac{(x - 20) \cdot (x - 2)}{(x - 3) \cdot (x - 2)} = \frac{(x - 20) \cdot (x - 2)}{(x - 3) \cdot (x - 2)} = \frac{x - 20}{x - 3}.$$

Vježba 081

Skrati razlomak: $\frac{x^2 - 6 \cdot x + 8}{x^2 - 5 \cdot x + 6}$.

Rezultat: $\frac{x - 4}{x - 3}$.

Zadatak 082 (Anita, gimnazija)

Riješi jednadžbu: $(x+1)^2+(x+2)^2+(x+3)^2+\ ...\ +(x+11)^2=385.$

Rješenje 082

Ponovimo!

$$(a+b)^2=a^2+2\cdot a\cdot b+b^2.$$

$$1+2+3+\ ...\ +n=\frac{n\cdot(n+1)}{2} \quad , \quad 1^2+2^2+3^2+\ ...\ +n^2=\frac{n\cdot(n+1)\cdot(2\cdot n+1)}{6}.$$

Uočimo da se na lijevoj strani zadane jednadžbe nalazi 11 članova (kvadrata binoma) koje treba kvadrirati.

$$(x+1)^2+(x+2)^2+(x+3)^2+\ ...\ +(x+11)^2=385 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow x^2+2\cdot x+1+x^2+4\cdot x+4+x^2+6\cdot x+9+\ ...\ +x^2+22\cdot x+121=385 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 11\cdot x^2+(2\cdot x+4\cdot x+6\cdot x+\ ...+\ 22\cdot x)+(1+4+9+\ ...\ +121)=385 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 11\cdot x^2+2\cdot x\cdot(1+2+3+\ ...+\ 11)+\left(1^2+2^2+3^2+\ ...\ +11^2\right)=385 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 11\cdot x^2+2\cdot x\cdot\frac{11\cdot(11+1)}{2}+\frac{11\cdot(11+1)\cdot(2\cdot 11+1)}{6}=385 \Rightarrow 11\cdot x^2+2\cdot x\cdot\frac{11\cdot 12}{2}+\frac{11\cdot 12\cdot 23}{6}=385 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 11\cdot x^2+132\cdot x+506=385 \Rightarrow 11\cdot x^2+132\cdot x+506-385=0 \Rightarrow 11\cdot x^2+132\cdot x+121=0 \quad /:11 \Rightarrow$$

$$\left.\begin{array}{l} x^2+12\cdot x+11=0 \\ a=1\ ,\ b=12\ ,\ c=11 \end{array}\right\} \Rightarrow \left.\begin{array}{l} a=1\ ,\ b=12\ ,\ c=11 \\ x_{1,2}=\dfrac{-b\pm\sqrt{b^2-4\cdot a\cdot c}}{2\cdot a} \end{array}\right\} \Rightarrow x_{1,2}=\frac{-12\pm\sqrt{144-4\cdot 1\cdot 11}}{2\cdot 1} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow x_{1,2}=\frac{-12\pm\sqrt{144-44}}{2} \Rightarrow x_{1,2}=\frac{-12\pm\sqrt{100}}{2} \Rightarrow x_{1,2}=\frac{-12\pm 10}{2} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \left.\begin{array}{l} x_1=\dfrac{-12+10}{2} \\ x_2=\dfrac{-12-10}{2} \end{array}\right\} \Rightarrow \left.\begin{array}{l} x_1=\dfrac{-2}{2} \\ x_2=\dfrac{-22}{2} \end{array}\right\} \Rightarrow \left.\begin{array}{l} x_1=-1 \\ x_2=-11 \end{array}\right\}.$$

Vježba 082

Riješi jednadžbu: $(x+1)^2+(x+2)^2+(x+3)^2=14.$

Rezultat: $x_1=0\ ,\ x_2=-4.$

Zadatak 083 (Cure iz hotelijerske škole, TUPŠ)

Za koju je vrijednost parametra m zbroj rješenja kvadratne jednadžbe $m\cdot x^2-2\cdot(m-1)\cdot x+5=0$ jednak 1?

Rješenje 083

Ponovimo!

Rješenja (korijeni) x_1, x_2 kvadratne jednadžbe $a\cdot x^2+b\cdot x+c=0$ zadovoljavaju Vièteove formule:

$$x_1+x_2=-\frac{b}{a} \quad , \quad x_1\cdot x_2=\frac{c}{a}.$$

$$\left.\begin{array}{l} m\cdot x^2-2\cdot(m-1)\cdot x+5=0 \\ a=m\ ,\ b=-2\cdot(m-1)\ ,\ c=5 \end{array}\right\} \Rightarrow \left.\begin{array}{l} x_1+x_2=-\frac{b}{a} \\ x_1+x_2=1 \end{array}\right\} \Rightarrow \left.\begin{array}{l} -\frac{b}{a}=1 \\ a=m\ ,\ b=-2\cdot(m-1) \end{array}\right\} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow -\frac{-2\cdot(m-1)}{m}=1 \Rightarrow \frac{2\cdot(m-1)}{m}=1\ /\cdot m \Rightarrow 2\cdot(m-1)=m \Rightarrow 2\cdot m-2=m \Rightarrow 2\cdot m-m=2 \Rightarrow m=2.$$

Vježba 083

Za koju je vrijednost parametra m zbroj rješenja kvadratne jednadžbe $m\cdot x^2-2\cdot(m-1)\cdot x+5=0$ jednak 0?

Rezultat: $m = 1$.

Zadatak 084 (Boris, srednja škola)

Dokaži da su rješenja jednadžbe $(a-1)\cdot x^2-a\cdot x+1=0$, $a\neq 1$, realna za sve realne vrijednosti parametra a.

Rješenje 084

Ponovimo!

Kvadratna jednadžba $a\cdot x^2+b\cdot x+c=0$, $a\neq 0$ ima realna rješenja ako je njezina diskriminanta nenegativan broj, tj. ako vrijedi

$$D\geq 0 \Rightarrow b^2-4\cdot a\cdot c\geq 0.$$

Kvadrat razlike:

$$x^2-2\cdot x\cdot y+y^2=(x-y)^2.$$

Za svaki realan broj x vrijedi:

$$x\in R \Rightarrow x^2\geq 0.$$

$$\left.\begin{array}{l} (a-1)\cdot x^2-a\cdot x+1=0 \\ a=a-1\ ,\ b=-a\ ,\ c=1 \end{array}\right\} \Rightarrow \left.\begin{array}{l} a=a-1\ ,\ b=-a\ ,\ c=1 \\ b^2-4\cdot a\cdot c\geq 0 \end{array}\right\} \Rightarrow (-a)^2-4\cdot(a-1)\cdot 1\geq 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow a^2-4\cdot a+4\geq 0 \Rightarrow (a-2)^2\geq 0.$$

Vidimo da izraz $(a-2)^2$ nije negativan niti za koji a.

Vježba 084

Dokaži da su rješenja jednadžbe $(a-1)\cdot x^2+a\cdot x+1=0$, $a\neq 1$, realna za sve realne vrijednosti parametra a.

Rezultat: Dokaz analogan.

Zadatak 085 (Anita, gimnazija)

Riješi jednadžbu: $\left(x^2+x-2\right)\cdot\left(x^2+x-3\right)=12.$

Rješenje 085

Uvodimo supstituciju (zamjenu):

$$t=x^2+x-2.$$

$$\left(x^2+x-2\right)\cdot\left(x^2+x-3\right)=12 \Rightarrow \left(x^2+x-2\right)\cdot\left(x^2+x-2-1\right)=12 \Rightarrow \left[\begin{array}{c} \text{supstitucija} \\ t=x^2+x-2 \end{array}\right] \Rightarrow t\cdot(t-1)=12 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow t^2-t=12 \Rightarrow t^2-t-12=0 \Rightarrow \left.\begin{array}{l} t^2-t-12=0 \\ a=1\ ,\ b=-1\ ,\ c=-12 \end{array}\right\} \Rightarrow \left.\begin{array}{l} a=1\ ,\ b=-1\ ,\ c=-12 \\ t_{1,2}=\frac{-b\pm\sqrt{b^2-4\cdot a\cdot c}}{2\cdot a} \end{array}\right\} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow t_{1,2}=\frac{1\pm\sqrt{1-4\cdot1\cdot(-12)}}{2\cdot1}\Rightarrow t_{1,2}=\frac{1\pm\sqrt{1+48}}{2}\Rightarrow t_{1,2}=\frac{1\pm\sqrt{49}}{2}\Rightarrow t_{1,2}=\frac{1\pm7}{2}\Rightarrow\left.\begin{array}{l}t_1=\frac{1+7}{2}\\t_2=\frac{1-7}{2}\end{array}\right\}\Rightarrow$$

$$\Rightarrow\left.\begin{array}{l}t_1=\frac{8}{2}\\t_2=\frac{-6}{2}\end{array}\right\}\Rightarrow\left.\begin{array}{l}t_1=4\\t_2=-3\end{array}\right\}.$$

Sada se vraćamo na supstituciju i rješavamo dvije kvadratne jednadžbe:

- $\left.\begin{array}{l}t=x^2+x-2\\t=4\end{array}\right\}\Rightarrow x^2+x-2=4\Rightarrow x^2+x-2-4=0\Rightarrow x^2+x-6=0\Rightarrow$

$$\left.\begin{array}{l}x^2+x-6=0\\a=1\ ,\ b=1\ ,\ c=-6\end{array}\right\}\Rightarrow\left.\begin{array}{l}a=1\ ,\ b=1\ ,\ c=-6\\x_{1,2}=\frac{-b\pm\sqrt{b^2-4\cdot a\cdot c}}{2\cdot a}\end{array}\right\}\Rightarrow x_{1,2}=\frac{-1\pm\sqrt{1-4\cdot1\cdot(-6)}}{2\cdot1}\Rightarrow$$

$$\Rightarrow x_{1,2}=\frac{-1\pm\sqrt{1+24}}{2}\Rightarrow x_{1,2}=\frac{-1\pm\sqrt{25}}{2}\Rightarrow x_{1,2}=\frac{-1\pm5}{2}\Rightarrow\left.\begin{array}{l}x_1=\frac{-1+5}{2}\\x_2=\frac{-1-5}{2}\end{array}\right\}\Rightarrow\left.\begin{array}{l}x_1=\frac{4}{2}\\x_2=\frac{-6}{2}\end{array}\right\}\Rightarrow\left.\begin{array}{l}x_1=2\\x_2=-3\end{array}\right\}.$$

- $\left.\begin{array}{l}t=x^2+x-2\\t=-3\end{array}\right\}\Rightarrow x^2+x-2=-3\Rightarrow x^2+x-2+3=0\Rightarrow x^2+x+1=0\Rightarrow$

$$\left.\begin{array}{l}x^2+x+1=0\\a=1\ ,\ b=1\ ,\ c=1\end{array}\right\}\Rightarrow\left.\begin{array}{l}a=1\ ,\ b=1\ ,\ c=1\\x_{3,4}=\frac{-b\pm\sqrt{b^2-4\cdot a\cdot c}}{2\cdot a}\end{array}\right\}\Rightarrow x_{3,4}=\frac{-1\pm\sqrt{1-4\cdot1\cdot1}}{2\cdot1}\Rightarrow$$

$$\Rightarrow x_{3,4}=\frac{-1\pm\sqrt{1-4}}{2}\Rightarrow x_{3,4}=\frac{-1\pm\sqrt{-3}}{2}\Rightarrow x_{3,4}=\frac{-1\pm\sqrt{3}\cdot i}{2}\Rightarrow\left.\begin{array}{l}x_3=\frac{-1+\sqrt{3}\cdot i}{2}\\x_4=\frac{-1-\sqrt{3}\cdot i}{2}\end{array}\right\}\Rightarrow\left.\begin{array}{l}x_3=-\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}\cdot i\\x_4=-\frac{1}{2}-\frac{\sqrt{3}}{2}\cdot i\end{array}\right\}.$$

Vježba 085

Riješi jednadžbu: $\left(x^2-x+1\right)\cdot\left(x^2-x+3\right)=15.$

Rezultat: $x_1=-1\ ,\ x_2=2\ ,\ x_3=\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{23}}{2}\cdot i\ ,\ x_4=\frac{1}{2}-\frac{\sqrt{23}}{2}\cdot i.$

Zadatak 086 (2A, TUPŠ)

Riješi bikvadratnu jednadžbu: $x^4+10\cdot x^2+9=0.$

Rješenje 086

Ponovimo!

Bikvadratna jednadžba je jednadžba četvrtog stupnja oblika

$$a\cdot x^4+b\cdot x^2+c=0\ ,\ a\neq0,$$

gdje su koeficijenti a, b i c realni brojevi. Zamjenom

$$x^2=t$$

rješavanje bikvadratne jednadžbe prevodimo na rješavanje kvadratne jednadžbe

$$a \cdot t^2 + b \cdot t + c = 0 \ , \ a \neq 0.$$

Bikvadratna jednadžba ima uvijek četiri rješenja. Iz kvadratne jednadžbe dobiju se rješenja t_1 i t_2 pa bikvadratna jednadžba ima rješenja

$$x_{1,2} = \pm\sqrt{t_1} \quad , \quad x_{3,4} = \pm\sqrt{t_2}.$$

Pritom vrijedi:

- ako je $t_1 \geq 0$ i $t_2 \geq 0$, sva su četiri rješenja realna,
- ako je $t_1 \geq 0$ i $t_2 < 0$ (ili $t_1 < 0$ i $t_2 \geq 0$) dva su rješenja realna, a dva su konjugirano kompleksni brojevi,
- ako je $t_1 < 0$ i $t_2 < 0$ rješenja su dva para konjugirano kompleksnih brojeva.

'Ajmo curice, 'ajmo dječaci, riješiti bikvadratnu jednadžbu

$$x^4 + 10 \cdot x^2 + 9 = 0.$$

Zamjenom

$$x^2 = t$$

bikvadratnu jednadžbu prevedemo u kvadratnu jednadžbu:

$$\left.\begin{array}{l} x^4 + 10 \cdot x^2 + 9 = 0 \\ x^2 = t \end{array}\right\} \Rightarrow t^2 + 10 \cdot t + 9 = 0 \Rightarrow \left.\begin{array}{l} t^2 + 10 \cdot t + 9 = 0 \\ a = 1 \ , \ b = 10 \ , \ c = 9 \end{array}\right\} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \left.\begin{array}{l} a = 1 \ , \ b = 10 \ , \ c = 9 \\ t_{1,2} = \dfrac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4 \cdot a \cdot c}}{2 \cdot a} \end{array}\right\} \Rightarrow t_{1,2} = \frac{-10 \pm \sqrt{100 - 4 \cdot 1 \cdot 9}}{2 \cdot 1} \Rightarrow t_{1,2} = \frac{-10 \pm \sqrt{100 - 36}}{2} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow t_{1,2} = \frac{-10 \pm \sqrt{64}}{2} \Rightarrow t_{1,2} = \frac{-10 \pm 8}{2} \Rightarrow \left.\begin{array}{l} t_1 = \dfrac{-10+8}{2} \\ t_2 = \dfrac{-10-8}{2} \end{array}\right\} \Rightarrow \left.\begin{array}{l} t_1 = -\dfrac{2}{2} \\ t_2 = -\dfrac{18}{2} \end{array}\right\} \Rightarrow \left.\begin{array}{l} t_1 = -1 \\ t_2 = -9 \end{array}\right\}.$$

Sada se vraćamo na zamjenu:

- $\left.\begin{array}{l} x^2 = t \\ t = -1 \end{array}\right\} \Rightarrow x^2 = -1 \ / \sqrt{\ } \Rightarrow x_{1,2} = \pm\sqrt{-1} \Rightarrow x_{1,2} = \pm i,$
- $\left.\begin{array}{l} x^2 = t \\ t = -9 \end{array}\right\} \Rightarrow x^2 = -9 \ / \sqrt{\ } \Rightarrow x_{3,4} = \pm\sqrt{-9} \Rightarrow x_{3,4} = \pm 3 \cdot i.$

Vježba 086

Riješi bikvadratnu jednadžbu: $x^4 - 10 \cdot x^2 + 9 = 0.$

Rezultat: $x_{1,2} = \pm 1 \quad , \quad x_{3,4} = \pm 3.$

Zadatak 087 (Branka, srednja škola)

Za koje vrijednosti parametra a jednadžba tg x + ctg x = a ima rješenja?

Rješenje 087

Ponovimo!

$$tg\,\alpha \cdot ctg\,\alpha = 1.$$

Diskriminanta kvadratne jednadžbe

$$a \cdot x^2 + b \cdot x + c = 0$$

je broj

$$D = b^2 - 4 \cdot a \cdot c.$$

- Ako je D > 0, jednadžba ima dva realna rješenja.
- Ako je D = 0, jednadžba ima jedno dvostruko realno rješenje.
- Ako je D < 0, jednadžba ima kompleksno – konjugirana rješenja.

$$tg\,x+ctg\,x=a \;\Rightarrow\; tg\,x+\frac{1}{tg\,x}=a\;/\cdot tg\,x \;\Rightarrow\; tg^2 x+1=a\cdot tg\,x \;\Rightarrow\; tg^2 x-a\cdot tg\,x+1=0 \;\Rightarrow$$

$$\Rightarrow \left.\begin{array}{l} tg^2 x-a\cdot tg\,x+1=0 \\ a=1\ ,\ b=-a\ ,\ c=1 \end{array}\right\}.$$

Kvadratna jednadžba imat će realna rješenja ako je

$$b^2-4\cdot a\cdot c\ge 0.$$

Zato vrijedi:

$$\left.\begin{array}{l} b^2-4\cdot a\cdot c\ge 0 \\ a=1\ ,\ b=-a\ ,\ c=1 \end{array}\right\} \Rightarrow (-a)^2-4\cdot 1\cdot 1\ge 0 \Rightarrow a^2-4\ge 0 \Rightarrow a^2\ge 4\;/\sqrt{\ } \;\Rightarrow |a|\ge 2.$$

Parametar a iznosi:

$$|a|\ge 2 \text{ ili } a\in\left\langle -\infty,-2\right]\cup\left[2,+\infty\right\rangle \text{ ili } a\in R\setminus\left\langle -2,2\right\rangle.$$

Vježba 087

Za koje vrijednosti parametra a jednadžba tg x + ctg x = a nema rješenja?

Rezultat: $a\in\left\langle -2,2\right\rangle.$

Zadatak 088 (Valentina, maturantica)

Ako su a i b rješenja kvadratne jednadžbe $x^2 + p\cdot x + q = 0$, nađite koliko iznosi $\frac{a}{b}+\frac{b}{a}$.

Rješenje 088

Ponovimo!

$$(x+y)^2=x^2+2\cdot x\cdot y+y^2 \;\Rightarrow\; x^2+y^2=(x+y)^2-2\cdot x\cdot y \quad , \quad \frac{a-b}{n}=\frac{a}{n}-\frac{b}{n}.$$

Rješenja (korijeni) x_1, x_2 kvadratne jednadžbe $a\cdot x^2 + b\cdot x + c = 0$ zadovoljavaju Vièteove formule:

$$x_1+x_2=-\frac{b}{a} \quad , \quad x_1\cdot x_2=\frac{c}{a}.$$

Rješenja (korijeni) x_1, x_2 kvadratne jednadžbe $x^2 + b\cdot x + c = 0$ zadovoljavaju Vièteove formule:

$$x_1+x_2=-b \quad , \quad x_1\cdot x_2=c.$$

Budući da su a i b rješenja kvadratne jednadžbe $x^2 + p\cdot x + q = 0$, slijedi:

$$\left.\begin{array}{l} a+b=-p \\ a\cdot b=q \end{array}\right\}.$$

Sada računamo:

$$\frac{a}{b}+\frac{b}{a}=\frac{a^2+b^2}{a\cdot b}=\left[a^2+b^2=(a+b)^2-2\cdot a\cdot b\right]=\frac{(a+b)^2-2\cdot a\cdot b}{a\cdot b}=\frac{(a+b)^2}{a\cdot b}-\frac{2\cdot a\cdot b}{a\cdot b}=$$

$$=\frac{(a+b)^2}{a\cdot b}-\frac{2\cdot a\cdot b}{a\cdot b}=\frac{(a+b)^2}{a\cdot b}-2=\frac{(-p)^2}{q}-2=\frac{p^2}{q}-2.$$

Vježba 088

Ako su a i b rješenja kvadratne jednadžbe $x^2 - p\cdot x + q = 0$, nađite koliko iznosi $\frac{b}{a}+\frac{a}{b}$.

Rezultat: $\frac{p^2}{q}-2.$

Zadatak 089 (Zabrinuta, gimnazija)

Nađi rješenja, u skupu nenegativnih cijelih brojeva, jednadžbe

$x^2-10\cdot x+2\cdot x\cdot y-y+y^2=0.$

Rješenje 089

Ponovimo!

$$(a-b)^2=a^2-2\cdot a\cdot b+b^2 \quad , \quad \sqrt{a^2}=a \ , \ a\geq 0 \quad , \quad (a\cdot b)^n=a^n\cdot b^n.$$

$$x^2-10\cdot x+2\cdot x\cdot y-y+y^2=0 \Rightarrow x^2-5\cdot 2\cdot x+2\cdot x\cdot y-y+y^2=0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow x^2-5\cdot 2\cdot x+2\cdot x\cdot y-y+y^2=0 \Rightarrow x^2-2\cdot x\cdot(5-y)+y^2-y=0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow x^2-2\cdot(5-y)\cdot x+y^2-y=0 \Rightarrow \begin{bmatrix}\text{kvadratna}\\ \text{jednadžba po } x\end{bmatrix} \Rightarrow \left.\begin{matrix} x^2-2\cdot(5-y)\cdot x+y^2-y=0 \\ a=1 \ , \ b=-2\cdot(5-y) \ , \ c=y^2-y\end{matrix}\right\} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \left.\begin{matrix} a=1 \ , \ b=-2\cdot(5-y) \ , \ c=y^2-y \\ x_{1,2}=\frac{-b\pm\sqrt{b^2-4\cdot a\cdot c}}{2\cdot a}\end{matrix}\right\} \Rightarrow x_{1,2}=\frac{2\cdot(5-y)\pm\sqrt{(2\cdot(5-y))^2-4\cdot 1\cdot\left(y^2-y\right)}}{2\cdot 1} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow x_{1,2}=\frac{2\cdot(5-y)\pm\sqrt{4\cdot(5-y)^2-4\cdot\left(y^2-y\right)}}{2} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow x_{1,2}=\frac{2\cdot(5-y)\pm\sqrt{4\cdot\left(25-10\cdot y+y^2\right)-4\cdot y^2+4\cdot y}}{2} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow x_{1,2}=\frac{2\cdot(5-y)\pm\sqrt{100-40\cdot y+4\cdot y^2-4\cdot y^2+4\cdot y}}{2} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow x_{1,2}=\frac{2\cdot(5-y)\pm\sqrt{100-40\cdot y+4\cdot y^2-4\cdot y^2+4\cdot y}}{2} \Rightarrow x_{1,2}=\frac{2\cdot(5-y)\pm\sqrt{100-36\cdot y}}{2} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow x_{1,2}=\frac{2\cdot(5-y)\pm\sqrt{4\cdot(25-9\cdot y)}}{2} \Rightarrow x_{1,2}=\frac{2\cdot(5-y)\pm 2\cdot\sqrt{25-9\cdot y}}{2} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow x_{1,2}=\frac{2\cdot\left[(5-y)\pm\sqrt{25-9\cdot y}\right]}{2} \Rightarrow x_{1,2}=\frac{2\cdot\left[(5-y)\pm\sqrt{25-9\cdot y}\right]}{2} \Rightarrow x_{1,2}=5-y\pm\sqrt{25-9\cdot y}.$$

Da bismo dobili cijele brojeve, binom 25 – 9 · y mora biti potpuni kvadrat.

Probom ("metodom ćorave koke" ) dobije se $y_1 = 0$ i $y_2 = 1$:

$$\left.\begin{matrix} y_1=0 \\ y_2=1\end{matrix}\right\} \Rightarrow \left.\begin{matrix} 25-9\cdot 0 \\ 25-9\cdot 1\end{matrix}\right\} \Rightarrow \left.\begin{matrix} 25-0 \\ 25-9\end{matrix}\right\} \Rightarrow \left.\begin{matrix} 25 \\ 16\end{matrix}\right\} \Rightarrow \left.\begin{matrix} 5^2 \\ 4^2\end{matrix}\right\}. \text{ potpuni kvadrati}$$

Računamo vrijednosti za varijablu x:

- $$\left.\begin{array}{l} y=0 \\ x_{1,2}=5-y\pm\sqrt{25-9\cdot y} \end{array}\right\} \Rightarrow x_{1,2}=5-0\pm\sqrt{25-9\cdot 0} \Rightarrow x_{1,2}=5\pm\sqrt{25-0} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow x_{1,2}=5\pm\sqrt{25} \Rightarrow x_{1,2}=5\pm 5 \Rightarrow \left.\begin{array}{l} x_1=5+5 \\ x_2=5-5 \end{array}\right\} \Rightarrow \left.\begin{array}{l} x_1=10 \\ x_2=0 \end{array}\right\} \Rightarrow \left.\begin{array}{l} (x_1,\ y_1)=(10,\ 0) \\ (x_2,\ y_1)=(0,\ 0) \end{array}\right\}.$$

- $$\left.\begin{array}{l} y=1 \\ x_{3,4}=5-y\pm\sqrt{25-9\cdot y} \end{array}\right\} \Rightarrow x_{3,4}=5-1\pm\sqrt{25-9\cdot 1} \Rightarrow x_{3,4}=4\pm\sqrt{25-9} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow x_{3,4}=4\pm\sqrt{16} \Rightarrow x_{3,4}=4\pm 4 \Rightarrow \left.\begin{array}{l} x_3=4+4 \\ x_4=4-4 \end{array}\right\} \Rightarrow \left.\begin{array}{l} x_3=8 \\ x_4=0 \end{array}\right\} \Rightarrow \left.\begin{array}{l} (x_3,\ y_2)=(8,\ 1) \\ (x_4,\ y_2)=(0,\ 1) \end{array}\right\}.$$

Vježba 089

Odredi rješenja, u skupu nenegativnih cijelih brojeva, jednadžbe $(x+y)^2=10\cdot x+y$.

Rezultat: (10, 0) , (0, 0) , (8, 1) , (0, 1).

Zadatak 090 (Lidija, gimnazija)

Riješi jednadžbu $a^2 \cdot (x + 1) = 2 \cdot (a + 2 \cdot x)$. Pritom je broj a realni parametar.

Rješenje 090

Ponovimo!

$$x^2-y^2=(x-y)\cdot(x+y).$$

Parametar

Vladimir Anić, Ivo Goldstein, Rječnik stranih riječi, Novi Liber, Zagreb, 2002.

Veličina, obično realna varijabla, čije vrijednosti služe za razlikovanje elemenata nekog skupa točaka funkcija, jednadžbi ili drugih matematičkih objekata.

Bratoljub Klaić, Rječnik stranih riječi, Nakladni zavod MH, Zagreb, 1983.

Veličina o kojoj ovisi funkcija ili oblik krivulje.

$$a^2\cdot(x+1)=2\cdot(a+2\cdot x) \Rightarrow a^2\cdot x+a^2=2\cdot a+4\cdot x \Rightarrow a^2\cdot x-4\cdot x=2\cdot a-a^2 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \left(a^2-4\right)\cdot x=a\cdot(2-a) \Rightarrow (a-2)\cdot(a+2)\cdot x=a\cdot(2-a).$$

Promatramo jednadžbu:

$$(a-2)\cdot(a+2)\cdot x=a\cdot(2-a).$$

Uočimo faktore koji su uz nepoznanicu x:

$$a-2 \text{ i } a+2.$$

Svaki faktor izjednačimo s nulom, riješimo dobivene jednadžbe, a zatim provedemo diskusiju.

- $a-2=0 \Rightarrow a=2.$

Za a = 2 jednadžba

$$(a-2)\cdot(a+2)\cdot x=a\cdot(2-a)$$

prima oblik

$$(2-2)\cdot(2+2)\cdot x=2\cdot(2-2) \Rightarrow 0\cdot 4\cdot x=2\cdot 0 \Rightarrow 0=0.$$

Ova je jednakost ispunjena za svaki realni broj x. Za a = 2 jednadžba ima beskonačno mnogo rješenja. Ona je neodređena.

- $a+2=0 \Rightarrow a=-2.$

Za a = – 2 jednadžba

$$(a-2)\cdot(a+2)\cdot x=a\cdot(2-a)$$

prima oblik

$$(-2-2)\cdot(-2+2)\cdot x=2\cdot(-2-2)\ \Rightarrow\ -4\cdot 0\cdot x=2\cdot(-4)\ \Rightarrow\ 0=-8.$$

Ova jednakost nije ispunjena niti za koji realni broj x. Naime, s njezine je lijeve strane nula, a s desne – 8. Za a = – 2 jednadžba nema rješenja.

•

Za a ≠ 2 i a ≠ – 2 rješenje jednadžbe iznosi:

$$(a-2)\cdot(a+2)\cdot x=a\cdot(2-a)\ \Rightarrow\ (a-2)\cdot(a+2)\cdot x=a\cdot(2-a)\ /\cdot\frac{1}{(a-2)\cdot(a+2)}\ \Rightarrow$$

$$x=\frac{a\cdot(2-a)}{(a-2)\cdot(a+2)}\ \Rightarrow\ x=\frac{-a\cdot(a-2)}{(a-2)\cdot(a+2)}\ \Rightarrow\ x=\frac{-a\cdot(a-2)}{(a-2)\cdot(a+2)}\ \Rightarrow\ x=\frac{-a}{a+2}.$$

Vježba 090

Riješi jednadžbu a · (x + 1) = x + a. Pritom je broj a realni parametar.

Rezultat: a = 1 => jednadžba je neodređena , a ≠ 1 => x = 0.

Zadatak 091 (Miroslav, gimnazija)

Je li broj 3 između rješenja kvadratne jednadžbe $2\cdot x^2-5\cdot x-6=0$?

Rješenje 091

Ponovimo!

Neka je zadan kvadratni trinom

$$f(x)=a\cdot x^2+b\cdot x+c$$

i neka su x_1 i x_2 rješenja kvadratne jednadžbe

$$a\cdot x^2+b\cdot x+c=0$$

pri čemu je $x_1 < x_2$.

Broj α nalazi se između rješenja kvadratne jednadžbe, tj. vrijedi

$$x_1<\alpha<x_2$$

ako i samo ako je

$$a\cdot f(\alpha)<0.$$

$$\left.\begin{array}{l}\alpha=3\\ f(x)=2\cdot x^2-5\cdot x-6\\ a=2\end{array}\right\}\Rightarrow\ \left.\begin{array}{l}\alpha=3\\ f(\alpha)=2\cdot\alpha^2-5\cdot\alpha-6\\ a=2\end{array}\right\}\Rightarrow\ \left.\begin{array}{l}f(3)=2\cdot 3^2-5\cdot 3-6\\ a=2\end{array}\right\}\Rightarrow$$

$$\Rightarrow\ \left.\begin{array}{l}f(3)=2\cdot 9-5\cdot 3-6\\ a=2\end{array}\right\}\Rightarrow\ \left.\begin{array}{l}f(3)=18-15-6\\ a=2\end{array}\right\}\Rightarrow\ \left.\begin{array}{l}f(3)=-3\\ a=2\end{array}\right\}\Rightarrow\ a\cdot f(3)=2\cdot(-3)\ \Rightarrow$$

$$\Rightarrow\ a\cdot f(3)=-6\ \Rightarrow\ a\cdot f(3)<0.$$

Broj 3 nalazi se između rješenja zadane kvadratne jednadžbe.

Vježba 091

Je li broj 2 između rješenja kvadratne jednadžbe $2\cdot x^2-5\cdot x-6=0$?

Rezultat: Da.

Zadatak 092 (Cazim, srednja škola)

Riješi nejednadžbu : $\frac{15}{4+3\cdot x-x^2}>1.$

Rješenje 092

Ponovimo!

Razlomak je pozitivan ako su:

- brojnik i nazivnik pozitivni,
- brojnik i nazivnik negativni.

$$\frac{a}{b}>0 \;\Rightarrow\; \left.\begin{matrix} a>0 \\ b>0 \end{matrix}\right\} \text{ ili } \left.\begin{matrix} a<0 \\ b<0 \end{matrix}\right\}.$$

Diskriminanta kvadratne jednadžbe $a \cdot x^2 + b \cdot x + c = 0$ je broj

$$D=b^2-4\cdot a\cdot c.$$

- Ako je $D > 0$, jednadžba ima dva realna rješenja.
- Ako je $D = 0$, jednadžba ima jedno dvostruko realno rješenje.
- Ako je $D < 0$, jednadžba ima kompleksno konjugirana rješenja.

Kvadratne nejednadžbe su nejednadžbe oblika

$$a\cdot x^2+b\cdot x+c<0 \quad , \quad a\cdot x^2+b\cdot x+c\le 0 \quad , \quad a\cdot x^2+b\cdot x+c>0 \quad , \quad a\cdot x^2+b\cdot x+c\ge 0.$$

Kvadratne nejednadžbe najlakše rješavamo metodom testiranja točaka:

① odredimo realne nultočke kvadratne funkcije $f(x) = a \cdot x^2 + b \cdot x + c$

② dobivene nultočke dijele skup R (brojevni pravac) na intervale

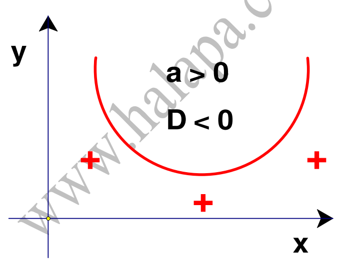
③ iz svakog intervala odaberemo po jedan x i uvrstimo ga u $f(x) = a \cdot x^2 + b \cdot x + c$

④ predznak dobivene vrijednosti određuje predznak za cijeli interval

⑤ rješenje problema čine intervali koji imaju traženi predznak.

Graf kvadratne funkcije $f(x) = a \cdot x^2 + b \cdot x + c$ prima pozitivne vrijednosti za svaki realni broj x ako je

$$a>0 \quad , \quad D<0.$$



$$\frac{15}{4+3\cdot x-x^2}>1 \Rightarrow \frac{15}{4+3\cdot x-x^2}-1>0 \Rightarrow \frac{15}{4+3\cdot x-x^2}-\frac{1}{1}>0 \Rightarrow \frac{15-1\cdot\left(4+3\cdot x-x^2\right)}{4+3\cdot x-x^2}>0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \frac{15-4-3\cdot x+x^2}{4+3\cdot x-x^2}>0 \Rightarrow \frac{x^2-3\cdot x+11}{4+3\cdot x-x^2}>0 \Rightarrow \frac{x^2-3\cdot x+11}{-x^2+3\cdot x+4}>0.$$

Uočimo da je brojnik $x^2 - 3 \cdot x + 11$ pozitivan za svaki realni broj x.

Kvadratna funkcija $f(x) = x^2 - 3 \cdot x + 11$ prima pozitivne vrijednosti za svaki realni broj x jer je:

$$\left.\begin{matrix} f(x)=x^2-3\cdot x+11 \\ a=1 \;,\; b=-3 \;,\; c=11 \\ D=b^2-4\cdot a\cdot c \end{matrix}\right\} \Rightarrow \left.\begin{matrix} a=1 \\ D=(-3)^2-4\cdot 1\cdot 11 \end{matrix}\right\} \Rightarrow \left.\begin{matrix} a=1 \\ D=9-44 \end{matrix}\right\} \Rightarrow \left.\begin{matrix} a=1>0 \\ D=-35<0 \end{matrix}\right\}.$$

Budući da je brojnik $x^2 - 3 \cdot x + 11$ uvijek pozitivan i nazivnik $-x^2 + 3 \cdot x + 4$ mora biti pozitivan pa je dovoljno riješiti nejednadžbu:

$$-x^2+3\cdot x+4>0 \Rightarrow -x^2+3\cdot x+4>0 \;/\cdot(-1) \Rightarrow x^2-3\cdot x-4<0.$$

Najprije riješimo kvadratnu jednadžbu:

$$x^2-3\cdot x-4=0 \Rightarrow \left.\begin{matrix} x^2-3\cdot x-4=0 \\ a=1\ ,\ b=-3\ ,\ c=-4 \end{matrix}\right\} \Rightarrow \left.\begin{matrix} a=1\ ,\ b=-3\ ,\ c=-4 \\ x_{1,2}=\dfrac{-b\pm\sqrt{b^2-4\cdot a\cdot c}}{2\cdot a} \end{matrix}\right\} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow x_{1,2}=\frac{3\pm\sqrt{(-3)^2-4\cdot 1\cdot(-4)}}{2\cdot 1} \Rightarrow x_{1,2}=\frac{3\pm\sqrt{9+16}}{2} \Rightarrow x_{1,2}=\frac{3\pm\sqrt{25}}{2} \Rightarrow x_{1,2}=\frac{3\pm 5}{2} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \left.\begin{matrix} x_1=\dfrac{3+5}{2} \\ x_2=\dfrac{3-5}{2} \end{matrix}\right\} \Rightarrow \left.\begin{matrix} x_1=\dfrac{8}{2} \\ x_2=-\dfrac{2}{2} \end{matrix}\right\} \Rightarrow \left.\begin{matrix} x_1=4 \\ x_2=-1 \end{matrix}\right\}.$$

Nultočke – 1 i 4 ucrtamo na os x.

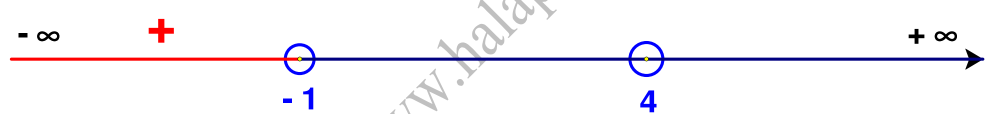
U točkama – 1 i 4 vrijedi jednakost = pa one nisu rješenje naše stroge nejednakosti >. Zato ih nismo popunili (kružići su prazni).

- Odaberemo x manji od – 1, na primjer x = – 10 i uvrstimo ga u $x^2 - 3 \cdot x - 4$:

$$(-10)^2-3\cdot(-10)-4=100+30-4=126>0.$$

Rezultat je pozitivan, što znači da je $x^2 - 3 \cdot x - 4$ pozitivan na cijelom intervalu $\langle -\infty, -1 \rangle$.

Upišimo simbol **+** iznad tog intervala.

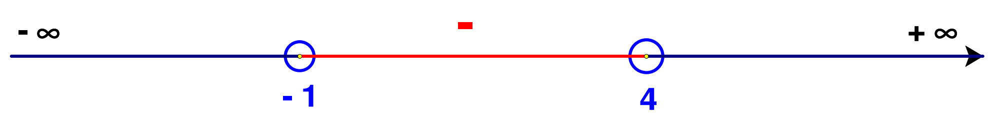


- Odaberemo x između – 1 i 4, na primjer x = 0 i uvrstimo ga u $x^2 - 3 \cdot x - 4$:

$$0^2-3\cdot 0-4=0-0-4=-4<0.$$

Rezultat je negativan, što znači da je $x^2 - 3 \cdot x - 4$ negativan na cijelom intervalu $\langle -1, 4 \rangle$.

Upišimo simbol **-** iznad tog intervala.

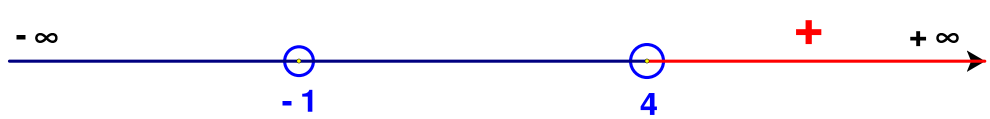


- Odaberemo x veći od 4, na primjer x = 10 i uvrstimo ga u $x^2 - 3 \cdot x - 4$:

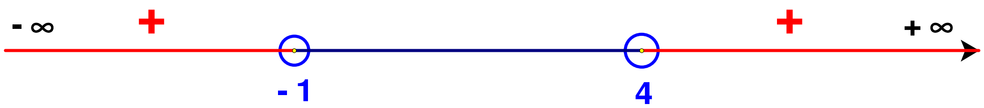
$$10^2-3\cdot 10-4=100-30-4=66>0.$$

Rezultat je pozitivan, što znači da je $x^2 - 3 \cdot x - 4$ pozitivan na cijelom intervalu $\langle 4, +\infty \rangle$.

Upišimo simbol **+** iznad tog intervala.



Dakle, nejednadžba $x^2 - 3 \cdot x - 4 > 0$ vrijedi za $x \in \langle -\infty, -1 \rangle \cup \langle 4, +\infty \rangle$.



Rješenje zadane nejednadžbe iznosi:

$$x \in \langle -\infty, -1 \rangle \cup \langle 4, +\infty \rangle.$$

Vježba 092

Riješi nejednadžbu : $x^2 - 7 \cdot x - 8 > 0.$

Rezultat: $x \in \langle -\infty, -1 \rangle \cup \langle 8, +\infty \rangle.$

Zadatak 093 (Jurica, srednja škola)

Zadana je jednadžba:

$$(k - x)^2 = 2 \cdot k \cdot (1 + k) \ , \ k \in R.$$

a) Za koje k jednadžba nema realna rješenja?
b) Za koje je k suma recipročnih vrijednosti rješenja jednadže pozitivan broj?
c) Za koje je k jedno rješenje jednadžbe jednako 0?

Rješenje 093

Ponovimo!

$$(a-b)^2 = a^2 - 2 \cdot a \cdot b + b^2 \quad , \quad a \cdot b = 0 \Leftrightarrow a = 0 \text{ ili } b = 0 \text{ ili } a = b = 0.$$

Umnožak dva broja je negativan ako su brojevi različitih predznaka.

$$a \cdot b < 0 \Rightarrow \left.\begin{matrix} a > 0 \\ b < 0 \end{matrix}\right\} \text{ ili } \left.\begin{matrix} a < 0 \\ b > 0 \end{matrix}\right\}.$$

Diskriminanta kvadratne jednadžbe $a \cdot x^2 + b \cdot x + c = 0$ je broj

$$D = b^2 - 4 \cdot a \cdot c.$$

- Ako je D > 0, jednadžba ima dva realna rješenja.
- Ako je D = 0, jednadžba ima jedno dvostruko realno rješenje.
- Ako je D < 0, jednadžba ima kompleksno konjugirana rješenja.

Rješenja (korijeni) x_1, x_2 kvadratne jednadžbe $a \cdot x^2 + b \cdot x + c = 0$ zadovoljavaju Vièteove formule:

$$x_1 + x_2 = -\frac{b}{a} \quad , \quad x_1 \cdot x_2 = \frac{c}{a}.$$

Rješenja (korijeni) x_1, x_2 kvadratne jednadžbe $x^2 + b \cdot x + c = 0$ zadovoljavaju Vièteove formule:

$$x_1 + x_2 = -b \quad , \quad x_1 \cdot x_2 = c.$$

a) Računamo k za koje jednadžba nema realna rješenja.

$$(k - x)^2 = 2 \cdot k \cdot (1 + k) \Rightarrow k^2 - 2 \cdot k \cdot x + x^2 = 2 \cdot k + 2 \cdot k^2 = 0 \Rightarrow k^2 - 2 \cdot k \cdot x + x^2 - 2 \cdot k - 2 \cdot k^2 = 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow x^2 - 2 \cdot k \cdot x - 2 \cdot k - k^2 = 0 \Rightarrow \left.\begin{matrix} x^2 - 2 \cdot k \cdot x - 2 \cdot k - k^2 = 0 \\ a = 1 \ , \ b = -2 \cdot k \ , \ c = -2 \cdot k - k^2 \end{matrix}\right\}.$$

Ako kvadratna jednadžba nema realna rješenja znači da su joj rješenja konjugirano kompleksni brojevi pa diskriminanta mora biti negativna.

$$\left.\begin{matrix} a = 1 \ , \ b = -2 \cdot k \ , \ c = -2 \cdot k - k^2 \\ D = b^2 - 4 \cdot a \cdot c < 0 \end{matrix}\right\} \Rightarrow (-2 \cdot k)^2 - 4 \cdot 1 \cdot \left(-2 \cdot k - k^2\right) < 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 4 \cdot k^2 + 8 \cdot k + 4 \cdot k^2 < 0 \Rightarrow 8 \cdot k^2 + 8 \cdot k < 0 \ /:8 \Rightarrow k^2 + k < 0 \Rightarrow k \cdot (k + 1) < 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \left.\begin{matrix} k > 0 \\ k+1 < 0 \end{matrix}\right\} \text{ ili } \left.\begin{matrix} k < 0 \\ k+1 > 0 \end{matrix}\right\}.$$

Prvi slučaj

$$\left.\begin{matrix} k > 0 \\ k+1 < 0 \end{matrix}\right\} \Rightarrow \left.\begin{matrix} k > 0 \\ k < -1 \end{matrix}\right\} \Rightarrow \begin{bmatrix} \text{gledamo presjek} \\ \text{rješenja, zajednički dio} \end{bmatrix} \Rightarrow \varnothing, \text{ prazan skup}$$

Nema rješenja.

Drugi slučaj

$$\left.\begin{matrix} k < 0 \\ k+1 > 0 \end{matrix}\right\} \Rightarrow \left.\begin{matrix} k < 0 \\ k > -1 \end{matrix}\right\} \Rightarrow \begin{bmatrix} \text{gledamo presjek} \\ \text{rješenja, zajednički dio} \end{bmatrix} \Rightarrow k \in \langle -1, 0 \rangle.$$

Jednadžba nema realna rješenja za

$$k \in \langle -1, 0 \rangle.$$

b) Računamo za koje je k suma (zbroj) recipročnih vrijednosti rješenja jednadže pozitivan broj.

$$\frac{1}{x_1} + \frac{1}{x_2} > 0 \Rightarrow \frac{x_2 + x_1}{x_1 \cdot x_2} > 0 \Rightarrow \frac{x_1 + x_2}{x_1 \cdot x_2} > 0 \Rightarrow \begin{bmatrix} \text{Vièteove} \\ \text{formule} \end{bmatrix} \Rightarrow \frac{-\frac{b}{a}}{\frac{c}{a}} > 0 \Rightarrow \frac{-\frac{b}{a}}{\frac{c}{a}} > 0 \Rightarrow -\frac{b}{c} > 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow -\frac{b}{c} > 0 \; / \cdot (-1) \Rightarrow \frac{b}{c} < 0 \Rightarrow \begin{bmatrix} b = -2 \cdot k \\ c = -2 \cdot k - k^2 \end{bmatrix} \Rightarrow \frac{-2 \cdot k}{-2 \cdot k - k^2} < 0 \Rightarrow \frac{-2 \cdot k}{-\left(2 \cdot k + k^2\right)} < 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \frac{2 \cdot k}{2 \cdot k + k^2} < 0 \Rightarrow \frac{2 \cdot k}{k \cdot (2+k)} < 0.$$

Uz pretpostavku da je

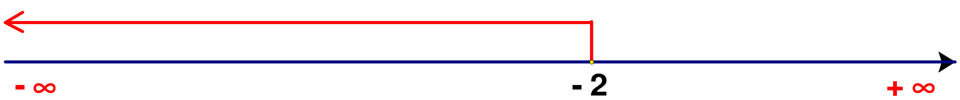
$$k \neq 0$$

slijedi:

$$\frac{2 \cdot k}{k \cdot (2+k)} < 0 \Rightarrow \frac{2 \cdot k}{k \cdot (2+k)} < 0 \Rightarrow \frac{2}{2+k} < 0.$$

Vidimo da je razlomak negativan. Budući da je brojnik uvijek pozitivan (2 > 0), mora nazivnik biti negativan.

$$2 + k < 0 \Rightarrow k < -2 \Rightarrow k \in \langle -\infty, -2 \rangle.$$



Suma recipročnih vrijednosti rješenja jednadžbe bit će pozitivna ako je

$$k \in \langle -\infty, -2 \rangle.$$

c) Računamo za koje je k jedno rješenje jednadžbe jednako 0.

$$\left.\begin{matrix} x = 0 \\ (k-x)^2 = 2 \cdot k \cdot (1+k) \end{matrix}\right\} \Rightarrow (k-0)^2 = 2 \cdot k \cdot (1+k) \Rightarrow k^2 = 2 \cdot k + 2 \cdot k^2 \Rightarrow k^2 - 2 \cdot k - 2 \cdot k^2 = 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow -k^2 - 2\cdot k = 0 \;/\cdot(-1) \Rightarrow k^2 + 2\cdot k = 0 \Rightarrow k\cdot(k+2) = 0 \Rightarrow \left.\begin{matrix} k=0 \\ k+2=0 \end{matrix}\right\} \Rightarrow \left.\begin{matrix} k_1 = 0 \\ k_2 = -2 \end{matrix}\right\}.$$

Vježba 093

Zadana je jednadžba:

$$(k-x)^2 = k\cdot(1+k) \;,\; k \in R.$$

Za koje je k jedno rješenje jednadžbe jednako 1?

Rezultat: $k = \frac{1}{3}.$

Zadatak 094 (Robertin bratić ☺, srednja škola)

Za koje vrijednosti parametra $m \in R$ jednadžba $3\cdot x^2 - 2\cdot x + m = 0$ nema realna rješenja?

Rješenje 094

Ponovimo!

Parametar: veličina, obično realna varijabla, čije vrijednosti služe za razlikovanje elemenata nekog skupa točaka, funkcija, jednadžbi ili drugih matematičkih objekata; veličina o kojoj ovisi funkcija ili oblik krivulje.

Diskriminanta kvadratne jednadžbe $a\cdot x^2 + b\cdot x + c = 0$ je broj $D = b^2 - 4\cdot a\cdot c$.

Ako je $D > 0$, jednadžba ima dva realna rješenja.
Ako je $D = 0$, jednadžba ima jedno dvostruko realno rješenje.
Ako je $D < 0$, jednadžba ima kompleksno-konjugirana rješenja.

O čemu ovisi vrsta rješenja zadane kvadratne jednadžbe?

Vrsta rješenja jednadžbe $3\cdot x^2 - 2\cdot x + m = 0$ ovisi o predznaku njezine diskriminante

$$D = b^2 - 4\cdot a\cdot c.$$

Jednadžba nema realna rješenja (ima kompleksno-konjugirana) ako je diskriminanta negativna, $D < 0$.

- Zanima nas kada je $D < 0$.

$$\left.\begin{matrix} 3\cdot x^2 - 2\cdot x + m = 0 \\ a=3 \;,\; b=-2 \;,\; c=m \end{matrix}\right\} \Rightarrow \left.\begin{matrix} a=3 \;,\; b=-2 \;,\; c=m \\ b^2 - 4\cdot a\cdot c < 0 \end{matrix}\right\} \Rightarrow (-2)^2 - 4\cdot 3\cdot m < 0 \Rightarrow 4 - 12\cdot m < 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{bmatrix} \text{nejednadžba se dijeli} \\ \text{negativnim brojem} \end{bmatrix} \Rightarrow -12\cdot m < -4 \;/:(-12) \Rightarrow m > \frac{4}{12} \Rightarrow m > \frac{1}{3} \Rightarrow m \in \left\langle \frac{1}{3}, +\infty \right\rangle.$$

Dakle, jednadžba nema realna rješenja ako je $m > \frac{1}{3}$ ili $m \in \left\langle \frac{1}{3}, +\infty \right\rangle.$

Vježba 094

Za koje vrijednosti parametra $m \in R$ jednadžba $3\cdot x^2 - 3\cdot x + m = 0$ nema realna rješenja?

Rezultat: $m > \frac{3}{4}$ ili $m \in \left\langle \frac{3}{4}, +\infty \right\rangle.$

Zadatak 094 (Robertin bratić ☺, srednja škola)

Za koje vrijednosti parametra $m \in R$ jednadžba $m\cdot x^2 - 6\cdot x + 1 = 0$ ima realna rješenja?

Rješenje 094

Ponovimo!

Parametar: veličina, obično realna varijabla, čije vrijednosti služe za razlikovanje elemenata nekog skupa točaka, funkcija, jednadžbi ili drugih matematičkih objekata; veličina o kojoj ovisi funkcija ili oblik krivulje.

Diskriminanta kvadratne jednadžbe $a\cdot x^2 + b\cdot x + c = 0$ je broj $D = b^2 - 4\cdot a\cdot c$.

Ako je $D > 0$, jednadžba ima dva realna rješenja.

Ako je D = 0, jednadžba ima jedno dvostruko realno rješenje.
Ako je D < 0, jednadžba ima kompleksno-konjugirana rješenja.

O čemu ovisi vrsta rješenja zadane kvadratne jednadžbe?

Vrsta rješenja jednadžbe $m \cdot x^2 - 6 \cdot x + 1 = 0$ ovisi o predznaku njezine diskriminante

$$D = b^2 - 4 \cdot a \cdot c.$$

Jednadžba ima realna rješenja u dva slučaja (znači da nema kompleksno-konjugirana) ako je diskriminanta pozitivna ili jednaka nuli, $D \geq 0$.

- Zanima nas kada je $D \geq 0$.

$$\left.\begin{array}{l} m \cdot x^2 - 6 \cdot x + 1 = 0 \\ a = m \ , \ b = -6 \ , \ c = 1 \end{array}\right\} \Rightarrow \left.\begin{array}{l} a = m \ , \ b = -6 \ , \ c = 1 \\ b^2 - 4 \cdot a \cdot c \geq 0 \end{array}\right\} \Rightarrow (-6)^2 - 4 \cdot m \cdot 1 \geq 0 \Rightarrow 36 - 4 \cdot m \geq 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \left[\begin{array}{l} \text{nejednadžba se dijeli} \\ \text{negativnim brojem} \end{array}\right] \Rightarrow -4 \cdot m \geq -36 \ /:(-4) \Rightarrow m \leq 9 \Rightarrow m \in \langle -\infty, \ 9].$$

Dakle, jednadžba ima realna rješenja ako je $m \leq 9 \Rightarrow m \in \langle -\infty, \ 9]$.

Vježba 094

Za koje vrijednosti parametra $m \in R$ jednadžba $m \cdot x^2 - 4 \cdot x + 1 = 0$ ima realna rješenja?

Rezultat: $m \leq 4 \Rightarrow m \in \langle -\infty, \ 4]$.

Zadatak 094 (Robertin bratić ☺, srednja škola)

Za koje vrijednosti parametra $m \in R$ jednadžba $2 \cdot x^2 - (m-2) \cdot x - m = 0$ ima dvostruko realno rješenje?

Rješenje 094

Ponovimo!

$$(a-b)^2 = a^2 - 2 \cdot a \cdot b + b^2 \quad , \quad a^2 + 2 \cdot a \cdot b + b^2 = (a+b)^2.$$

Parametar: veličina, obično realna varijabla, čije vrijednosti služe za razlikovanje elemenata nekog skupa točaka, funkcija, jednadžbi ili drugih matematičkih objekata; veličina o kojoj ovisi funkcija ili oblik krivulje.

Diskriminanta kvadratne jednadžbe $a \cdot x^2 + b \cdot x + c = 0$ je broj $D = b^2 - 4 \cdot a \cdot c$.
Ako je D > 0, jednadžba ima dva realna rješenja.
Ako je D = 0, jednadžba ima jedno dvostruko realno rješenje.
Ako je D < 0, jednadžba ima kompleksno-konjugirana rješenja.

O čemu ovisi vrsta rješenja zadane kvadratne jednadžbe?

Vrsta rješenja jednadžbe $2 \cdot x^2 - (m-2) \cdot x - m = 0$ ovisi o predznaku njezine diskriminante

$$D = b^2 - 4 \cdot a \cdot c.$$

Jednadžba ima dvostruko realno rješenje ako je diskriminanta jednaka nuli, D = 0.

- Zanima nas kada je D = 0.

$$\left.\begin{array}{l} 2 \cdot x^2 - (m-2) \cdot x - m = 0 \\ a = 2 \ , \ b = -(m-2) = 2 - m \ , \ c = -m \end{array}\right\} \Rightarrow \left.\begin{array}{l} a = 2 \ , \ b = -(m-2) = 2 - m \ , \ c = -m \\ b^2 - 4 \cdot a \cdot c = 0 \end{array}\right\} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow (2-m)^2 - 4 \cdot 2 \cdot (-m) = 0 \Rightarrow 4 - 4 \cdot m + m^2 + 8 \cdot m = 0 \Rightarrow m^2 + 4 \cdot m + 4 = 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow (m+2)^2 = 0 \Rightarrow (m+2)^2 = 0 \ /\sqrt{\ } \Rightarrow m + 2 = 0 \Rightarrow m_{1,2} = -2.$$

Vježba 094

Za koje vrijednosti parametra $m \in R$ jednadžba $2 \cdot x^2 + (2 - m) \cdot x - m = 0$ ima dvostruko realno rješenje?

Rezultat: $m_{1,2} = -2.$

Zadatak 095 (Tony, gimnazija)

Jednadžba $2 \cdot x^2 - 3 \cdot x + k = 0$ ima samo jedno rješenje ako je:

$A.\ 6 - 4 \cdot k = 0$ $\quad B.\ 6 + 8 \cdot k = 0$ $\quad C.\ 9 + 4 \cdot k = 0$ $\quad D.\ 9 - 8 \cdot k = 0$

Rješenje 095

Ponovimo!

Diskriminanta kvadratne jednadžbe $a \cdot x^2 + b \cdot x + c = 0$ je broj $D = b^2 - 4 \cdot a \cdot c$.

1) Ako je $D > 0$, jednadžba ima dva realna različita rješenja.
2) Ako je $D = 0$, jednadžba ima jedno dvostruko realno rješenje.
3) Ako je $D < 0$, jednadžba ima kompleksno-konjugirana rješenja.

Zadana jednadžba ima samo jedno rješenje (jedno dvostruko realno rješenje) pa vrijedi:

$$\left.\begin{array}{l} 2 \cdot x^2 - 3 \cdot x + k = 0 \\ a = 2\ ,\ b = -3\ ,\ c = k \\ b^2 - 4 \cdot a \cdot c = 0 \end{array}\right\} \Rightarrow (-3)^2 - 4 \cdot 2 \cdot k = 0 \Rightarrow 9 - 8 \cdot k = 0.$$

Odgovor je pod D.

Vježba 095

Jednadžba $x^2 - 3 \cdot x - k = 0$ ima samo jedno rješenje ako je:

$A.\ 6 - 4 \cdot k = 0$ $\quad B.\ 6 + 8 \cdot k = 0$ $\quad C.\ 9 + 4 \cdot k = 0$ $\quad D.\ 9 - 8 \cdot k = 0$

Rezultat: C.

Zadatak 096 (Valentina, gimnazija)

Jedno rješenje jednadžbe $x^2 + p \cdot x + 1 = 0$ jest x_1. Odredi drugo rješenje.

Rješenje 096

Ponovimo!

Rješenja (korijeni) x_1, x_2 kvadratne jednadžbe $a \cdot x^2 + b \cdot x + c = 0$ zadovoljavaju Vièteove formule:

$$x_1 + x_2 = -\frac{b}{a} \quad , \quad x_1 \cdot x_2 = \frac{c}{a}.$$

Rješenja (korijeni) x_1, x_2 kvadratne jednadžbe $x^2 + b \cdot x + c = 0$ zadovoljavaju Vièteove formule:

$$x_1 + x_2 = -b \quad , \quad x_1 \cdot x_2 = c.$$

Drugo rješenje jednadžbe glasi:

$$\left.\begin{array}{l} x^2 + p \cdot x + 1 = 0 \\ c = 1 \end{array}\right\} \Rightarrow x_1 \cdot x_2 = 1 \Rightarrow x_1 \cdot x_2 = 1 \ / \cdot \frac{1}{x_1} \Rightarrow x_2 = \frac{1}{x_1}.$$

Vježba 096

Jedno rješenje jednadžbe $x^2 + p \cdot x + 1 = 0$ jest $x_1 = 0.2$. Odredi drugo rješenje.

Rezultat: 5.

Zadatak 097 (Tina, gimnazija)

Dokažite da za svaki realni broj x vrijedi $x^2 - x + 1 > 0.$

Rješenje 097

Ponovimo!

$$a \in R \Rightarrow a^2 \geq 0 \quad , \quad (a-b)^2 = a^2 - 2 \cdot a \cdot b + b^2.$$

$$x^2 - x + 1 = x^2 - x + \frac{1}{4} - \frac{1}{4} + 1 = \left(x^2 - x + \frac{1}{4}\right) - \frac{1}{4} + 1 = \left(x - \frac{1}{2}\right)^2 - \frac{1}{4} + 1 = \left(x - \frac{1}{2}\right)^2 + \frac{3}{4}.$$

Za svaki realni broj x vrijedi

$$\left(x - \frac{1}{2}\right)^2 + \frac{3}{4} \geq \frac{3}{4} > 0$$

pa je

$$x^2 - x + 1 > 0.$$

Vježba 097

Dokažite da za svaki realni broj x vrijedi $x^2 - 2 \cdot x + 2 > 0.$

Rezultat: Dokaz analogan: $(x-1)^2 + 1 \geq 1 > 0.$

Zadatak 098 (Mateo, gimnazija)

Riješi jednadžbu: $\left(x^{-2} - 2\right)^{-2} - 2^{-2} = 0.$

Rješenje 098

Ponovimo!

$$a^{-n} = \frac{1}{a^n} \quad , \quad \left(a^n\right)^m = a^{n \cdot m} \quad , \quad \left(\frac{a}{b}\right)^{-n} = \left(\frac{b}{a}\right)^n \quad , \quad \left(\frac{a}{b}\right)^n = \frac{a^n}{b^n}.$$

$$(a-b)^2 = a^2 - 2 \cdot a \cdot b + b^2 \quad , \quad \frac{a}{b} = \frac{c}{d} \Rightarrow a \cdot d = b \cdot c \quad , \quad a^2 = b^2 \Rightarrow \left.\begin{matrix} a = b \\ \text{ili} \\ a = -b \end{matrix}\right\}.$$

$$a^{-2} = b^{-2} \Rightarrow a^2 = b^2.$$

1.inačica

$$\left(x^{-2} - 2\right)^{-2} - 2^{-2} = 0 \Rightarrow \left(x^{-2} - 2\right)^{-2} = 2^{-2} \Rightarrow \left(\frac{1}{x^2} - 2\right)^{-2} = \frac{1}{2^2} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \left(\frac{1 - 2 \cdot x^2}{x^2}\right)^{-2} = \frac{1}{4} \Rightarrow \left(\frac{x^2}{1 - 2 \cdot x^2}\right)^2 = \frac{1}{4} \Rightarrow \frac{\left(x^2\right)^2}{\left(1 - 2 \cdot x^2\right)^2} = \frac{1}{4} \Rightarrow \frac{x^4}{1 - 4 \cdot x^2 + 4 \cdot x^4} = \frac{1}{4} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 4 \cdot x^4 = 1 - 4 \cdot x^2 + 4 \cdot x^4 \Rightarrow 4 \cdot x^4 = 1 - 4 \cdot x^2 + 4 \cdot x^4 \Rightarrow 0 = 1 - 4 \cdot x^2 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 4 \cdot x^2 = 1 \Rightarrow 4 \cdot x^2 = 1 \; / : 4 \Rightarrow x^2 = \frac{1}{4} \Rightarrow x^2 = \frac{1}{4} \; / \sqrt{\ } \Rightarrow x_{1,2} = \pm\sqrt{\frac{1}{4}} \Rightarrow \left.\begin{matrix} x_1 = \frac{1}{2} \\ x_2 = -\frac{1}{2} \end{matrix}\right\}.$$

2.inačica

$$\left(x^{-2} - 2\right)^{-2} - 2^{-2} = 0 \Rightarrow \left(x^{-2} - 2\right)^{-2} = 2^{-2} \Rightarrow \left(\frac{1}{x^2} - 2\right)^{-2} = \frac{1}{2^2} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \left(\frac{1-2\cdot x^2}{x^2}\right)^{-2}=\frac{1}{4} \Rightarrow \left(\frac{x^2}{1-2\cdot x^2}\right)^{2}=\frac{1}{4} \Rightarrow \left(\frac{x^2}{1-2\cdot x^2}\right)^{2}=\frac{1}{4}\ /\sqrt{\ } \Rightarrow \frac{x^2}{1-2\cdot x^2}=\pm\sqrt{\frac{1}{4}} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \frac{x^2}{1-2\cdot x^2}=\pm\frac{1}{2} \Rightarrow \left.\begin{array}{l}\dfrac{x^2}{1-2\cdot x^2}=\dfrac{1}{2}\\ \dfrac{x^2}{1-2\cdot x^2}=-\dfrac{1}{2}\end{array}\right\} \Rightarrow \left.\begin{array}{l}2\cdot x^2=1-2\cdot x^2\\ -2\cdot x^2=1-2\cdot x^2\end{array}\right\} \Rightarrow \left.\begin{array}{l}2\cdot x^2+2\cdot x^2=1\\ -2\cdot x^2=1-2\cdot x^2\end{array}\right\} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \left.\begin{array}{l}4\cdot x^2=1\\ 0=1 \text{ nema smisla}\end{array}\right\} \Rightarrow 4\cdot x^2=1 \Rightarrow 4\cdot x^2=1\ /:4 \Rightarrow x^2=\frac{1}{4} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow x^2=\frac{1}{4}\ /\sqrt{\ } \Rightarrow x_{1,2}=\pm\sqrt{\frac{1}{4}} \Rightarrow \left.\begin{array}{l}x_1=\dfrac{1}{2}\\ x_2=-\dfrac{1}{2}\end{array}\right\}.$$

3.inačica

$$\left(x^{-2}-2\right)^{-2}-2^{-2}=0 \Rightarrow \left(x^{-2}-2\right)^{-2}=2^{-2} \Rightarrow \left.\begin{array}{l}x^{-2}-2=2\\ x^{-2}-2=-2\end{array}\right\} \Rightarrow \left.\begin{array}{l}x^{-2}=2+2\\ x^{-2}=-2+2\end{array}\right\} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \left.\begin{array}{l}x^{-2}=4\\ x^{-2}=0\end{array}\right\} \Rightarrow \left.\begin{array}{l}\dfrac{1}{x^2}=4\\ \dfrac{1}{x^2}=0 \text{ nema rješenja}\end{array}\right\} \Rightarrow \frac{1}{x^2}=4 \Rightarrow 4\cdot x^2=1 \Rightarrow 4\cdot x^2=1\ /:4 \Rightarrow x^2=\frac{1}{4} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow x^2=\frac{1}{4}\ /\sqrt{\ } \Rightarrow x_{1,2}=\pm\sqrt{\frac{1}{4}} \Rightarrow \left.\begin{array}{l}x_1=\dfrac{1}{2}\\ x_2=-\dfrac{1}{2}\end{array}\right\}.$$

Vježba 098

Riješi jednadžbu: $\left(x^{-1}-2\right)^{-1}-2^{-1}=0.$

Rezultat: 0.25.

Zadatak 099 (Ella, gimnazija)

Koliko iznosi realni broj a za koji je jedno rješenje jednadžbe $a\cdot x^2-6\cdot a\cdot x+144=0$ dvostruko veće od drugog?

Rješenje 099

Ponovimo!

$$\left(\sqrt{a}\right)^2=a \quad , \quad \sqrt{a}\cdot\sqrt{b}=\sqrt{a\cdot b} \quad , \quad \sqrt{\frac{a}{b}}=\frac{\sqrt{a}}{\sqrt{b}} \quad , \quad (a\cdot b)^n=a^n\cdot b^n.$$

$$a\cdot b=0 \Leftrightarrow a=0 \text{ ili } b=0 \text{ ili } a=b=0.$$

Rješenja (korijeni) x_1, x_2 kvadratne jednadžbe $a\cdot x^2+b\cdot x+c=0$ zadovoljavaju Vièteove formule:

$$x_1+x_2=-\frac{b}{a} \quad , \quad x_1\cdot x_2=\frac{c}{a}.$$

1.inačica

Pomoću prve Vièteove formule izračunamo jedno rješenje kvadratne jednadžbe.

$$a\cdot x^2-6\cdot a\cdot x+144=0 \Rightarrow \left.\begin{array}{l} a\cdot x^2-6\cdot a\cdot x+144=0 \\ a=a \;,\; b=-6\cdot a \;,\; c=144 \end{array}\right\} \Rightarrow \begin{bmatrix} x_1+x_2=-\frac{b}{a} \\ x_1=2\cdot x_2 \end{bmatrix} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 2\cdot x_2+x_2=-\frac{-6\cdot a}{a} \Rightarrow 3\cdot x_2=\frac{6\cdot a}{a} \Rightarrow 3\cdot x_2=\frac{6\cdot a}{a} \Rightarrow 3\cdot x_2=6 \Rightarrow 3\cdot x_2=6 \;/:3 \Rightarrow x_2=2.$$

Dobiveno rješenje uvrstimo u zadanu kvadratnu jednadžbu da bismo izračunali realni broj a.

$$\left.\begin{array}{l} a\cdot x^2-6\cdot a\cdot x+144=0 \\ x=2 \end{array}\right\} \Rightarrow a\cdot 2^2-6\cdot a\cdot 2+144=0 \Rightarrow 4\cdot a-12\cdot a+144=0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 4\cdot a-12\cdot a=-144 \Rightarrow -8\cdot a=-144 \Rightarrow -8\cdot a=-144 \;/:(-8) \Rightarrow a=18.$$

2.inačica

Pomoću druge Vièteove formule izračunamo jedno rješenje kvadratne jednadžbe.

$$a\cdot x^2-6\cdot a\cdot x+144=0 \Rightarrow \left.\begin{array}{l} a\cdot x^2-6\cdot a\cdot x+144=0 \\ a=a \;,\; b=-6\cdot a \;,\; c=144 \end{array}\right\} \Rightarrow \begin{bmatrix} x_1\cdot x_2=\frac{c}{a} \\ x_1=2\cdot x_2 \end{bmatrix} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 2\cdot x_2\cdot x_2=\frac{144}{a} \Rightarrow 2\cdot x_2^2=\frac{144}{a} \Rightarrow 2\cdot x_2^2=\frac{144}{a} \;/:2 \Rightarrow x_2^2=\frac{72}{a} \Rightarrow x_2^2=\frac{72}{a} \;/\sqrt{\;} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow x_{2_{1/2}}=\pm\sqrt{\frac{72}{a}} \Rightarrow x_{2_{1/2}}=\pm\frac{\sqrt{72}}{\sqrt{a}} \Rightarrow \begin{bmatrix} \text{djelomično} \\ \text{korjenovanje} \end{bmatrix} \Rightarrow x_{2_{1/2}}=\pm\frac{\sqrt{36\cdot 2}}{\sqrt{a}} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow x_{2_{1/2}}=\pm\frac{6\cdot\sqrt{2}}{\sqrt{a}} \Rightarrow \left.\begin{array}{l} x_{2_1}=\frac{6\cdot\sqrt{2}}{\sqrt{a}} \\ x_{2_2}=-\frac{6\cdot\sqrt{2}}{\sqrt{a}} \quad \text{nema smisla} \end{array}\right\} \Rightarrow x=\frac{6\cdot\sqrt{2}}{\sqrt{a}}.$$

Dobiveno rješenje uvrstimo u zadanu kvadratnu jednadžbu da bismo izračunali realni broj a.

$$\left.\begin{array}{l} a\cdot x^2-6\cdot a\cdot x+144=0 \\ x=\frac{6\cdot\sqrt{2}}{\sqrt{a}} \;,\; x^2=\frac{72}{a} \end{array}\right\} \Rightarrow a\cdot\frac{72}{a}-6\cdot a\cdot\frac{6\cdot\sqrt{2}}{\sqrt{a}}+144=0 \Rightarrow a\cdot\frac{72}{a}-6\cdot\left(\sqrt{a}\right)^2\cdot\frac{6\cdot\sqrt{2}}{\sqrt{a}}+144=0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow a\cdot\frac{72}{a}-6\cdot\left(\sqrt{a}\right)^2\cdot\frac{6\cdot\sqrt{2}}{\sqrt{a}}+144=0 \Rightarrow 72-6\cdot\sqrt{a}\cdot 6\cdot\sqrt{2}+144=0 \Rightarrow 72-36\cdot\sqrt{2\cdot a}+144=0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow -36\cdot\sqrt{2\cdot a}=-72-144 \Rightarrow -36\cdot\sqrt{2\cdot a}=-216 \Rightarrow -36\cdot\sqrt{2\cdot a}=-216 \;/:(-36) \Rightarrow \sqrt{2\cdot a}=6 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \sqrt{2\cdot a}=6 \;/^2 \Rightarrow \left(\sqrt{2\cdot a}\right)^2=6^2 \Rightarrow 2\cdot a=36 \Rightarrow 2\cdot a=36 \;/:2 \Rightarrow a=18.$$

3.inačica

Riješimo zadanu kvadratnu jednadžbu.

$$\left.\begin{array}{l} a\cdot x^2-6\cdot a\cdot x+144=0 \\ a=a\ ,\ b=-6\cdot a\ ,\ c=144 \end{array}\right\} \Rightarrow \left.\begin{array}{l} a=a\ ,\ b=-6\cdot a\ ,\ c=144 \\ x_{1/2}=\dfrac{-b\pm\sqrt{b^2-4\cdot a\cdot c}}{2\cdot a} \end{array}\right\} \Rightarrow x_{1/2}=\frac{6\cdot a\pm\sqrt{36\cdot a^2-4\cdot a\cdot 144}}{2\cdot a} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow x_{1/2}=\frac{6\cdot a\pm\sqrt{36\cdot a^2-576\cdot a}}{2\cdot a} \Rightarrow \left.\begin{array}{l} x_1=\dfrac{6\cdot a+\sqrt{36\cdot a^2-576\cdot a}}{2\cdot a} \\ x_2=\dfrac{6\cdot a-\sqrt{36\cdot a^2-576\cdot a}}{2\cdot a} \end{array}\right\}.$$

Iz uvjeta zadatka slijedi:

$$x_1=2\cdot x_2 \Rightarrow \frac{6\cdot a+\sqrt{36\cdot a^2-576\cdot a}}{2\cdot a}=2\cdot\frac{6\cdot a-\sqrt{36\cdot a^2-576\cdot a}}{2\cdot a} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \frac{6\cdot a+\sqrt{36\cdot a^2-576\cdot a}}{2\cdot a}=2\cdot\frac{6\cdot a-\sqrt{36\cdot a^2-576\cdot a}}{2\cdot a}\ /\cdot 2\cdot a \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 6\cdot a+\sqrt{36\cdot a^2-576\cdot a}=2\cdot\left(6\cdot a-\sqrt{36\cdot a^2-576\cdot a}\right) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 6\cdot a+\sqrt{36\cdot a^2-576\cdot a}=12\cdot a-2\cdot\sqrt{36\cdot a^2-576\cdot a} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \sqrt{36\cdot a^2-576\cdot a}+2\cdot\sqrt{36\cdot a^2-576\cdot a}=12\cdot a-6\cdot a \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 3\cdot\sqrt{36\cdot a^2-576\cdot a}=6\cdot a \Rightarrow 3\cdot\sqrt{36\cdot a^2-576\cdot a}=6\cdot a\ /:3 \Rightarrow \sqrt{36\cdot a^2-576\cdot a}=2\cdot a \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \sqrt{36\cdot a^2-576\cdot a}=2\cdot a\ /^2 \Rightarrow \left(\sqrt{36\cdot a^2-576\cdot a}\right)^2=(2\cdot a)^2 \Rightarrow 36\cdot a^2-576\cdot a=4\cdot a^2 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 36\cdot a^2-576\cdot a-4\cdot a^2=0 \Rightarrow 32\cdot a^2-576\cdot a=0 \Rightarrow 32\cdot a^2-576\cdot a=0\ /:32 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow a^2-18\cdot a=0 \Rightarrow a\cdot(a-18)=0 \Rightarrow \left.\begin{array}{l} a=0 \\ a-18=0 \end{array}\right\} \Rightarrow \left.\begin{array}{l} a_1=0\ \text{nema smisla} \\ a_2=18 \end{array}\right\} \Rightarrow a=18.$$

4.inačica

Neka je x prvo rješenje kvadratne jednadžbe. Prema uvjetu zadatka drugo rješenje je 2 · x.
Uvrstimo oba rješenja u kvadratnu jednadžbu i dobijemo sustav jednadžbi.

$$\left.\begin{array}{l} a\cdot x^2-6\cdot a\cdot x+144=0 \\ a\cdot(2\cdot x)^2-6\cdot a\cdot(2\cdot x)+144=0 \end{array}\right\} \Rightarrow \left.\begin{array}{l} a\cdot x^2-6\cdot a\cdot x+144=0 \\ 4\cdot a\cdot x^2-12\cdot a\cdot x+144=0 \end{array}\right\} \Rightarrow \left[\begin{array}{l} \text{oduzmemo} \\ \text{jednadžbe} \end{array}\right] \Rightarrow$$

$$4\cdot a\cdot x^2-12\cdot a\cdot x+144-\left(a\cdot x^2-6\cdot a\cdot x+144\right)=0 \Rightarrow 4\cdot a\cdot x^2-12\cdot a\cdot x+144-a\cdot x^2+6\cdot a\cdot x-144=0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 4\cdot a\cdot x^2-12\cdot a\cdot x+144-a\cdot x^2+6\cdot a\cdot x-144=0 \Rightarrow 3\cdot a\cdot x^2-6\cdot a\cdot x=0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 3\cdot a\cdot x^2-6\cdot a\cdot x=0\ /:3 \Rightarrow a\cdot x^2-2\cdot a\cdot x=0 \Rightarrow a\cdot x\cdot(x-2)=0 \Rightarrow \left.\begin{array}{l} a=0 \\ x=0 \\ x-2=0 \end{array}\right\} \Rightarrow$$

$$\left.\begin{array}{l} a=0 \ \ \text{nema smisla} \\ \Rightarrow \ x_1=0 \ \ \text{nema smisla} \\ x_2=2 \end{array}\right\} \Rightarrow \ x=2.$$

Dobiveno rješenje uvrstimo u zadanu kvadratnu jednadžbu da bismo izračunali realni broj a.

$$\left.\begin{array}{l} a\cdot x^2-6\cdot a\cdot x+144=0 \\ x=2 \end{array}\right\} \Rightarrow \ a\cdot 2^2-6\cdot a\cdot 2+144=0 \ \Rightarrow \ 4\cdot a-12\cdot a+144=0 \ \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \ 4\cdot a-12\cdot a=-144 \ \Rightarrow \ -8\cdot a=-144 \ \Rightarrow \ -8\cdot a=-144 \ /:(-8) \ \Rightarrow \ a=18.$$

5.inačica

Sorry, ali moram na ručak!

Vježba 099

Koliko iznosi realni broj a za koji je jedno rješenje jednadžbe $a\cdot x^2-6\cdot a\cdot x+16=0$ dvostruko veće od drugog?

Rezultat: 2.

Zadatak 100 (Matija, gimnazija)

Riješi simetričnu jednadžbu $2\cdot x^3+3\cdot x^2-3\cdot x-2=0$.

Rješenje 100

Ponovimo!

$$a\cdot b=0 \ \Leftrightarrow \ a=0 \ \text{ili} \ b=0 \ \text{ili} \ a=b=0.$$

Simetrična jednadžba trećeg stupnja ima oblik

$$a\cdot x^3+b\cdot x^2+b\cdot x+a=0.$$

Zakon distribucije množenja prema zbrajanju:

$$a\cdot(b+c)=a\cdot b+a\cdot c \quad , \quad a\cdot b+a\cdot c=a\cdot(b+c).$$

Rješavamo jednadžbu

$$2\cdot x^3+3\cdot x^2-3\cdot x-2=0.$$

① Grupiramo članove sa suprotnim koeficijentima.

$$2\cdot x^3+3\cdot x^2-3\cdot x-2=0 \ \Rightarrow \ 2\cdot x^3-2+3\cdot x^2-3\cdot x=0.$$

② Izlučimo zajednički faktor.

$$2\cdot x^3-2+3\cdot x^2-3\cdot x=0 \ \Rightarrow \ 2\cdot\left(x^3-1\right)+3\cdot x\cdot(x-1)=0 \ \Rightarrow \ 2\cdot(x-1)\cdot\left(x^2+x+1\right)+3\cdot x\cdot(x-1)=0 \ \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \ (x-1)\cdot\left(2\cdot\left(x^2+x+1\right)+3\cdot x\right)=0 \ \Rightarrow \ (x-1)\cdot\left(2\cdot x^2+2\cdot x+2+3\cdot x\right)=0 \ \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \ (x-1)\cdot\left(2\cdot x^2+5\cdot x+2\right)=0.$$

③ Jednadžba se raspada na dvije jednadžbe: linearnu i kvadratnu.

$$(x-1)\cdot\left(2\cdot x^2+5\cdot x+2\right)=0 \ \Rightarrow \ \left.\begin{array}{l} x-1=0 \\ 2\cdot x^2+5\cdot x+2=0 \end{array}\right\}.$$

④ Rješavamo linearnu jednadžbu (jedno rješenje) i kvadratnu jednadžbu (dva rješenja).

- linearna jednadžba

$$x - 1 = 0 \Rightarrow x_1 = 1.$$

- kvadratna jednadžba

$$2 \cdot x^2 + 5 \cdot x + 2 = 0 \Rightarrow \left.\begin{array}{l} 2 \cdot x^2 + 5 \cdot x + 2 = 0 \\ a = 2 \ , \ b = 5 \ , \ c = 2 \end{array}\right\} \Rightarrow \left.\begin{array}{l} a = 2 \ , \ b = 5 \ , \ c = 2 \\ x_{2,3} = \dfrac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4 \cdot a \cdot c}}{2 \cdot a} \end{array}\right\} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow x_{2,3} = \frac{-5 \pm \sqrt{25 - 4 \cdot 2 \cdot 2}}{2 \cdot 2} \Rightarrow x_{2,3} = \frac{-5 \pm \sqrt{25 - 16}}{4} \Rightarrow x_{2,3} = \frac{-5 \pm \sqrt{9}}{4} \Rightarrow x_{2,3} = \frac{-5 \pm 3}{4} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \left.\begin{array}{l} x_2 = \dfrac{-5 + 3}{4} \\ x_3 = \dfrac{-5 - 3}{4} \end{array}\right\} \Rightarrow \left.\begin{array}{l} x_2 = -\dfrac{2}{4} \\ x_3 = -\dfrac{8}{4} \end{array}\right\} \Rightarrow \left.\begin{array}{l} x_2 = -\dfrac{1}{2} \\ x_3 = -2 \end{array}\right\}.$$

Vježba 100

Riješi simetričnu jednadžbu $2 \cdot x^3 + 7 \cdot x^2 + 7 \cdot x + 2 = 0$.

Rezultat: $x_1 = -1 \ , \ x_2 = -\frac{1}{2} \ , \ x_3 = -2.$