Zadatak 061 (Ivek s gitarom, gimnazija)

Riješi jednadžbu: $a\cdot b\cdot x^2-\left(a^2-b^2\right)\cdot x+(a-b)^2=0.$

Rješenje 061

Ponovimo!

$$a^2-b^2=(a-b)\cdot(a+b)\quad,\quad a^2-2\cdot a\cdot b+b^2=(a-b)^2\quad,\quad (a\cdot b)^2=a^2\cdot b^2$$

$$(a+b)^2=a^2+2\cdot a\cdot b+b^2\quad,\quad (a-b)^4=a^4-4\cdot a^3\cdot b+6\cdot a^2\cdot b^2-4\cdot a\cdot b^3+b^4.$$

1.inačica

$$\left.\begin{array}{l} a\cdot b\cdot x^2-\left(a^2-b^2\right)\cdot x+(a-b)^2=0 \\ a=a\cdot b\ ,\ b=-\left(a^2-b^2\right)\ ,\ c=(a-b)^2 \end{array}\right\}\Rightarrow \left.\begin{array}{l} a=a\cdot b\ ,\ b=-\left(a^2-b^2\right)\ ,\ c=(a-b)^2 \\ x_{1,2}=\dfrac{-b\pm\sqrt{b^2-4\cdot a\cdot c}}{2\cdot a} \end{array}\right\}\Rightarrow$$

$$\Rightarrow x_{1,2}=\frac{\left(a^2-b^2\right)\pm\sqrt{\left(a^2-b^2\right)^2-4\cdot a\cdot b\cdot(a-b)^2}}{2\cdot a\cdot b}\Rightarrow$$

$$\Rightarrow x_{1,2}=\frac{\left(a^2-b^2\right)\pm\sqrt{((a-b)\cdot(a+b))^2-4\cdot a\cdot b\cdot(a-b)^2}}{2\cdot a\cdot b}\Rightarrow$$

$$\Rightarrow x_{1,2}=\frac{\left(a^2-b^2\right)\pm\sqrt{(a-b)^2\cdot(a+b)^2-4\cdot a\cdot b\cdot(a-b)^2}}{2\cdot a\cdot b}\Rightarrow$$

$$\Rightarrow x_{1,2}=\frac{\left(a^2-b^2\right)\pm\sqrt{(a-b)^2\cdot\left[(a+b)^2-4\cdot a\cdot b\right]}}{2\cdot a\cdot b}\Rightarrow\left[\begin{array}{l}\text{djelomično}\\ \text{korjenovanje}\end{array}\right]\Rightarrow$$

$$\Rightarrow x_{1,2}=\frac{\left(a^2-b^2\right)\pm(a-b)\cdot\sqrt{(a+b)^2-4\cdot a\cdot b}}{2\cdot a\cdot b}\Rightarrow$$

$$\Rightarrow x_{1,2}=\frac{\left(a^2-b^2\right)\pm(a-b)\cdot\sqrt{a^2+2\cdot a\cdot b+b^2-4\cdot a\cdot b}}{2\cdot a\cdot b}\Rightarrow$$

$$\Rightarrow x_{1,2}=\frac{\left(a^2-b^2\right)\pm(a-b)\cdot\sqrt{a^2-2\cdot a\cdot b+b^2}}{2\cdot a\cdot b}\Rightarrow x_{1,2}=\frac{\left(a^2-b^2\right)\pm(a-b)\cdot\sqrt{(a-b)^2}}{2\cdot a\cdot b}\Rightarrow$$

$$\Rightarrow x_{1,2}=\frac{\left(a^2-b^2\right)\pm(a-b)\cdot(a-b)}{2\cdot a\cdot b}\Rightarrow x_{1,2}=\frac{\left(a^2-b^2\right)\pm(a-b)^2}{2\cdot a\cdot b}\Rightarrow$$

$$\Rightarrow x_{1,2}=\frac{\left(a^2-b^2\right)\pm\left(a^2-2\cdot a\cdot b+b^2\right)}{2\cdot a\cdot b}\Rightarrow \left.\begin{array}{l} x_1=\dfrac{\left(a^2-b^2\right)+\left(a^2-2\cdot a\cdot b+b^2\right)}{2\cdot a\cdot b} \\ x_2=\dfrac{\left(a^2-b^2\right)-\left(a^2-2\cdot a\cdot b+b^2\right)}{2\cdot a\cdot b} \end{array}\right\}\Rightarrow$$

$$\Rightarrow \left.\begin{array}{l} x_1=\dfrac{a^2-b^2+a^2-2\cdot a\cdot b+b^2}{2\cdot a\cdot b} \\ x_2=\dfrac{a^2-b^2-a^2+2\cdot a\cdot b-b^2}{2\cdot a\cdot b}\end{array}\right\} \Rightarrow \left.\begin{array}{l} x_1=\dfrac{2\cdot a^2-2\cdot a\cdot b}{2\cdot a\cdot b} \\ x_2=\dfrac{2\cdot a\cdot b-2\cdot b^2}{2\cdot a\cdot b}\end{array}\right\} \Rightarrow \left.\begin{array}{l} x_1=\dfrac{2\cdot a\cdot (a-b)}{2\cdot a\cdot b} \\ x_2=\dfrac{2\cdot b\cdot (a-b)}{2\cdot a\cdot b}\end{array}\right\} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \left.\begin{array}{l} x_1=\dfrac{a-b}{b} \\ x_2=\dfrac{a-b}{a}\end{array}\right\}.$$

2.inačica

$$\left.\begin{array}{l} a\cdot b\cdot x^2-\left(a^2-b^2\right)\cdot x+(a-b)^2=0 \\ a=a\cdot b\ ,\ b=-\left(a^2-b^2\right)\ ,\ c=(a-b)^2\end{array}\right\} \Rightarrow \left.\begin{array}{l} a=a\cdot b\ ,\ b=-\left(a^2-b^2\right)\ ,\ c=(a-b)^2 \\ x_{1,2}=\dfrac{-b\pm\sqrt{b^2-4\cdot a\cdot c}}{2\cdot a}\end{array}\right\} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow x_{1,2}=\frac{\left(a^2-b^2\right)\pm\sqrt{\left(a^2-b^2\right)^2-4\cdot a\cdot b\cdot (a-b)^2}}{2\cdot a\cdot b} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow x_{1,2}=\frac{\left(a^2-b^2\right)\pm\sqrt{a^4-2\cdot a^2\cdot b^2+b^4-4\cdot a\cdot b\cdot\left(a^2-2\cdot a\cdot b+b^2\right)}}{2\cdot a\cdot b} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow x_{1,2}=\frac{\left(a^2-b^2\right)\pm\sqrt{a^4-2\cdot a^2\cdot b^2+b^4-4\cdot a^3\cdot b+8\cdot a^2\cdot b^2-4\cdot a\cdot b^3}}{2\cdot a\cdot b} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow x_{1,2}=\frac{\left(a^2-b^2\right)\pm\sqrt{a^4-4\cdot a^3\cdot b+6\cdot a^2\cdot b^2-4\cdot a\cdot b^3+b^4}}{2\cdot a\cdot b} \Rightarrow x_{1,2}=\frac{\left(a^2-b^2\right)\pm\sqrt{(a-b)^4}}{2\cdot a\cdot b} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow x_{1,2}=\frac{\left(a^2-b^2\right)\pm(a-b)^2}{2\cdot a\cdot b} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow x_{1,2}=\frac{\left(a^2-b^2\right)\pm\left(a^2-2\cdot a\cdot b+b^2\right)}{2\cdot a\cdot b} \Rightarrow \left.\begin{array}{l} x_1=\dfrac{\left(a^2-b^2\right)+\left(a^2-2\cdot a\cdot b+b^2\right)}{2\cdot a\cdot b} \\ x_2=\dfrac{\left(a^2-b^2\right)-\left(a^2-2\cdot a\cdot b+b^2\right)}{2\cdot a\cdot b}\end{array}\right\} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \left.\begin{array}{l} x_1=\dfrac{a^2-b^2+a^2-2\cdot a\cdot b+b^2}{2\cdot a\cdot b} \\ x_2=\dfrac{a^2-b^2-a^2+2\cdot a\cdot b-b^2}{2\cdot a\cdot b}\end{array}\right\} \Rightarrow \left.\begin{array}{l} x_1=\dfrac{2\cdot a^2-2\cdot a\cdot b}{2\cdot a\cdot b} \\ x_2=\dfrac{2\cdot a\cdot b-2\cdot b^2}{2\cdot a\cdot b}\end{array}\right\} \Rightarrow \left.\begin{array}{l} x_1=\dfrac{2\cdot a\cdot (a-b)}{2\cdot a\cdot b} \\ x_2=\dfrac{2\cdot b\cdot (a-b)}{2\cdot a\cdot b}\end{array}\right\} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \left.\begin{array}{l} x_1=\dfrac{a-b}{b} \\ x_2=\dfrac{a-b}{a}\end{array}\right\}.$$

Vježba 061

Riješi jednadžbu: $x^2 - (a+b) \cdot x + a \cdot b = 0.$

Rezultat: $x_1 = a \ , \ x_2 = b.$

Zadatak 062 (2A, 2C, TUPŠ)

Odredi vrijednost parametra p za koji će jednadžba $x^2 - 6 \cdot x + p = 0$ imati:

- dva različita realna rješenja
- jedno (tzv. dvostruko) realno rješenje
- dva konjugirano kompleksna rješenja (rješenja koja nisu realna).

Rješenje 062

Ponovimo!

Parametar: veličina, obično realna varijabla, čije vrijednosti služe za razlikovanje elemenata nekog skupa točaka, funkcija, jednadžbi ili drugih matematičkih objekata; veličina o kojoj ovisi funkcija ili oblik krivulje.

Diskriminanta kvadratne jednadžbe $a \cdot x^2 + b \cdot x + c = 0$ je broj $D = b^2 - 4 \cdot a \cdot c$.

Ako je $D > 0$, jednadžba ima dva realna rješenja.
Ako je $D = 0$, jednadžba ima jedno dvostruko realno rješenje.
Ako je $D < 0$, jednadžba ima kompleksno-konjugirana rješenja.

O čemu ovisi vrsta rješenja zadane kvadratne jednadžbe?

Vrsta rješenja jednadžbe $x^2 - 6 \cdot x + p = 0$ ovisi o predznaku njezine diskriminante $D = b^2 - 4 \cdot a \cdot c$.

- Zanima nas kada je $D > 0$.

$$\left.\begin{array}{l} x^2 - 6 \cdot x + p = 0 \\ a = 1 \ , \ b = -6 \ , \ c = p \end{array}\right\} \Rightarrow \left.\begin{array}{l} a = 1 \ , \ b = -6 \ , \ c = p \\ b^2 - 4 \cdot a \cdot c > 0 \end{array}\right\} \Rightarrow (-6)^2 - 4 \cdot 1 \cdot p > 0 \Rightarrow 36 - 4 \cdot p > 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow -4 \cdot p > -36 \ /:(-4) \Rightarrow p < 9 \Rightarrow p \in \langle -\infty, 9 \rangle.$$

Dakle, jednadžba ima dva realna rješenja ako je $p < 9$ ili $p \in \langle -\infty, 9 \rangle$.

- Zanima nas kada je $D = 0$.

$$\left.\begin{array}{l} x^2 - 6 \cdot x + p = 0 \\ a = 1 \ , \ b = -6 \ , \ c = p \end{array}\right\} \Rightarrow \left.\begin{array}{l} a = 1 \ , \ b = -6 \ , \ c = p \\ b^2 - 4 \cdot a \cdot c = 0 \end{array}\right\} \Rightarrow (-6)^2 - 4 \cdot 1 \cdot p = 0 \Rightarrow 36 - 4 \cdot p = 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow -4 \cdot p = -36 \ /:(-4) \Rightarrow p = 9.$$

Dakle, jednadžba ima jedno (tzv. dvostruko) realno rješenje ako je $p = 9$.

- Zanima nas kada je $D < 0$.

$$\left.\begin{array}{l} x^2 - 6 \cdot x + p = 0 \\ a = 1 \ , \ b = -6 \ , \ c = p \end{array}\right\} \Rightarrow \left.\begin{array}{l} a = 1 \ , \ b = -6 \ , \ c = p \\ b^2 - 4 \cdot a \cdot c < 0 \end{array}\right\} \Rightarrow (-6)^2 - 4 \cdot 1 \cdot p < 0 \Rightarrow 36 - 4 \cdot p < 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow -4 \cdot p < -36 \ /:(-4) \Rightarrow p > 9 \Rightarrow p \in \langle 9, +\infty \rangle.$$

Dakle, jednadžba ima dva konjugirano kompleksna rješenja ako je $p > 9$ ili $p \in \langle 9, +\infty \rangle$.

Vježba 062

Odredi vrijednost parametra p za koji će jednadžba $x^2 - 4 \cdot x + p = 0$ imati:

- dva različita realna rješenja
- jedno (tzv. dvostruko) realno rješenje
- dva konjugirano kompleksna rješenja (rješenja koja nisu realna).

Rezultat: $p < 4 \ , \ p = 4 \ , \ p > 4.$

Zadatak 063 (2A, 2C, TUPŠ)

Dokaži da jednadžba $x^2 - (1 + 2 \cdot a) \cdot x + a^2 + a + 1 = 0$ nema realnih rješenja.

Rješenje 063

Ponovimo!

$$(-a)^{2\cdot n} = -a^{2\cdot n} \quad , \quad (a+b)^2 = a^2 + 2\cdot a\cdot b + b^2.$$

Diskriminanta kvadratne jednadžbe $a \cdot x^2 + b \cdot x + c = 0$ je broj $D = b^2 - 4 \cdot a \cdot c$.
Ako je $D > 0$, jednadžba ima dva realna rješenja.
Ako je $D = 0$, jednadžba ima jedno dvostruko realno rješenje.
Ako je $D < 0$, jednadžba ima kompleksno-konjugirana rješenja.

Najprije izračunamo vrijednost diskriminante zadane jednadžbe:

$$\left.\begin{array}{l} x^2 - (1+2\cdot a)\cdot x + a^2 + a + 1 = 0 \\ a = 1 \;,\; b = -(1+2\cdot a) \;,\; c = a^2 + a + 1 \end{array}\right\} \Rightarrow \left.\begin{array}{l} a = 1 \;,\; b = -(1+2\cdot a) \;,\; c = a^2 + a + 1 \\ D = b^2 - 4\cdot a\cdot c \end{array}\right\} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow D = \left(-(1+2\cdot a)\right)^2 - 4\cdot 1\cdot\left(a^2 + a + 1\right) \Rightarrow D = (1+2\cdot a)^2 - 4\cdot\left(a^2 + a + 1\right) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow D = 1 + 4\cdot a + 4\cdot a^2 - 4\cdot a^2 - 4\cdot a - 4 \Rightarrow D = 1 + 4\cdot a + 4\cdot a^2 - 4\cdot a^2 - 4\cdot a - 4 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow D = -3 < 0 \Rightarrow \text{diskriminanta je negativan.}$$

Budući da je diskriminanta negativna, znači da kvadratna jednadžba ima konjugirano kompleksna rješenja, tj. jednadžba nema realnih rješenja.

Vježba 063

Dokaži da jednadžba $x^2 - (1 + 2 \cdot a) \cdot x + a^2 + a + 2 = 0$ nema realnih rješenja.

Rezultat: $D = -7 < 0$.

Zadatak 064 (2A, 2C, TUPŠ)

Odredi vrijednost parametra p za koji će jednadžba $4 \cdot p \cdot x^2 - 2 \cdot (2 \cdot p + 1) \cdot x + p = 0$ imati:

- dva različita realna rješenja
- jedno (tzv. dvostruko) realno rješenje
- dva konjugirano kompleksna rješenja (rješenja koja nisu realna).

Rješenje 064

Ponovimo!

$$(-a)^{2\cdot n} = a^{2\cdot n} \quad , \quad (a\cdot b)^n = a^n \cdot b^n \quad , \quad (a+b)^2 = a^2 + 2\cdot a\cdot b + b^2.$$

Parametar: veličina, obično realna varijabla, čije vrijednosti služe za razlikovanje elemenata nekog skupa točaka, funkcija, jednadžbi ili drugih matematičkih objekata; veličina o kojoj ovisi funkcija ili oblik krivulje.

Diskriminanta kvadratne jednadžbe $a \cdot x^2 + b \cdot x + c = 0$ je broj $D = b^2 - 4 \cdot a \cdot c$.
Ako je $D > 0$, jednadžba ima dva realna rješenja.
Ako je $D = 0$, jednadžba ima jedno dvostruko realno rješenje.
Ako je $D < 0$, jednadžba ima kompleksno-konjugirana rješenja.

O čemu ovisi vrsta rješenja zadane kvadratne jednadžbe?

Vrsta rješenja jednadžbe $4 \cdot p \cdot x^2 - 2 \cdot (2 \cdot p + 1) \cdot x + p = 0$ ovisi o predznaku njezine diskriminante $D = b^2 - 4 \cdot a \cdot c$.

- Zanima nas kada je $D > 0$.

$$\left.\begin{array}{l} 4\cdot p\cdot x^2 - 2\cdot(2\cdot p+1)\cdot x + p = 0 \\ a = 4\cdot p \;,\; b = -2\cdot(2\cdot p+1) \;,\; c = p \end{array}\right\} \Rightarrow \left.\begin{array}{l} a = 4\cdot p \;,\; b = -2\cdot(2\cdot p+1) \;,\; c = p \\ b^2 - 4\cdot a\cdot c > 0 \end{array}\right\} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \left(-2\cdot(2\cdot p+1)\right)^2 - 4\cdot 4\cdot p\cdot p > 0 \Rightarrow \left(2\cdot(2\cdot p+1)\right)^2 - 16\cdot p^2 > 0 \Rightarrow 2^2\cdot(2\cdot p+1)^2 - 16\cdot p^2 > 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 4\cdot\left(4\cdot p^2+4\cdot p+1\right)-16\cdot p^2>0 \Rightarrow 16\cdot p^2+16\cdot p+4-16\cdot p^2>0 \Rightarrow 16\cdot p+4>0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 16\cdot p>-4 \;/:16 \Rightarrow p>-\frac{4}{16} \Rightarrow p>-\frac{1}{4} \Rightarrow p\in\left\langle -\frac{1}{4}, +\infty\right\rangle.$$

Dakle, jednadžba ima dva realna rješenja ako je $p>-\frac{1}{4}$ ili $p\in\left\langle -\frac{1}{4}, +\infty\right\rangle$.

- Zanima nas kada je D = 0.

$$\left.\begin{matrix} 4\cdot p\cdot x^2-2\cdot(2\cdot p+1)\cdot x+p=0 \\ a=4\cdot p\ ,\ b=-2\cdot(2\cdot p+1)\ ,\ c=p \end{matrix}\right\} \Rightarrow \left.\begin{matrix} a=4\cdot p\ ,\ b=-2\cdot(2\cdot p+1)\ ,\ c=p \\ b^2-4\cdot a\cdot c=0 \end{matrix}\right\} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \left(-2\cdot(2\cdot p+1)\right)^2-4\cdot 4\cdot p\cdot p=0 \Rightarrow \left(2\cdot(2\cdot p+1)\right)^2-16\cdot p^2=0 \Rightarrow 2^2\cdot(2\cdot p+1)^2-16\cdot p^2=0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 4\cdot\left(4\cdot p^2+4\cdot p+1\right)-16\cdot p^2=0 \Rightarrow 16\cdot p^2+16\cdot p+4-16\cdot p^2=0 \Rightarrow 16\cdot p+4=0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 16\cdot p=-4 \;/:16 \Rightarrow p=-\frac{4}{16} \Rightarrow p=-\frac{1}{4}.$$

Dakle, jednadžba ima jedno (tzv. dvostruko) realno rješenje ako je $p=-\frac{1}{4}$.

- Zanima nas kada je D < 0.

$$\left.\begin{matrix} 4\cdot p\cdot x^2-2\cdot(2\cdot p+1)\cdot x+p=0 \\ a=4\cdot p\ ,\ b=-2\cdot(2\cdot p+1)\ ,\ c=p \end{matrix}\right\} \Rightarrow \left.\begin{matrix} a=4\cdot p\ ,\ b=-2\cdot(2\cdot p+1)\ ,\ c=p \\ b^2-4\cdot a\cdot c<0 \end{matrix}\right\} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \left(-2\cdot(2\cdot p+1)\right)^2-4\cdot 4\cdot p\cdot p<0 \Rightarrow \left(2\cdot(2\cdot p+1)\right)^2-16\cdot p^2<0 \Rightarrow 2^2\cdot(2\cdot p+1)^2-16\cdot p^2<0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 4\cdot\left(4\cdot p^2+4\cdot p+1\right)-16\cdot p^2<0 \Rightarrow 16\cdot p^2+16\cdot p+4-16\cdot p^2<0 \Rightarrow 16\cdot p+4<0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 16\cdot p<-4 \;/:16 \Rightarrow p<-\frac{4}{16} \Rightarrow p<-\frac{1}{4} \Rightarrow p\in\left\langle -\infty, -\frac{1}{4}\right\rangle.$$

Dakle, jednadžba ima dva konjugirano kompleksna rješenja ako je $p<-\frac{1}{4}$ ili $p\in\left\langle -\infty, -\frac{1}{4}\right\rangle$.

Vježba 064

Odredi vrijednost parametra m za koji će jednadžba $x^2 + 2\cdot(m+2)\cdot x + m^2 + 8 = 0$ imati:

- dva različita realna rješenja
- jedno (tzv. dvostruko) realno rješenje
- dva konjugirano kompleksna rješenja (rješenja koja nisu realna).

Rezultat: $m < 1$, $m = 1$, $m > 1$.

Zadatak 065 (Ivana, gimnazija)

Zadana je kvadratna jednadžba $x^2 - x + m = 0$. Odredite m tako da je razlika korijena ove jednadžbe imaginarni broj.

Rješenje 065

Ponovimo!

$$\left.\begin{matrix} z=a+b\cdot i \\ \bar{z}=a-b\cdot i \end{matrix}\right\} \Rightarrow z-\bar{z}=2\cdot b\cdot i.$$

Diskriminanta kvadratne jednadžbe $a\cdot x^2 + b\cdot x + c = 0$ je broj $D = b^2 - 4\cdot a\cdot c$.
Ako je D > 0, jednadžba ima dva realna rješenja (korijena).
Ako je D = 0, jednadžba ima jedno dvostruko realno rješenje (korijen).
Ako je D < 0, jednadžba ima kompleksno-konjugirana rješenja (korijena).

Razlika kompleksnog broja i njegovog konjugirano kompleksnog broja je imaginarni broj. Zato kvadratna jednadžba mora imati dva konjugirano kompleksna rješenja (korijena), tj. njezina diskriminanta mora biti negativna:

$$b^2 - 4 \cdot a \cdot c < 0.$$

$$\left.\begin{array}{l} x^2 - x + m = 0 \\ a = 1 \ , \ b = -1 \ , \ c = m \end{array}\right\} \Rightarrow (-1)^2 - 4 \cdot 1 \cdot m < 0 \Rightarrow 1 - 4 \cdot m < 0 \Rightarrow -4 \cdot m < -1 \ / : (-4) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow m > \frac{1}{4} \Rightarrow m \in \left\langle \frac{1}{4}, +\infty \right\rangle.$$

Vježba 065

Zadana je kvadratna jednadžba $x^2 - 2 \cdot x + 4 \cdot m = 0$. Odredite m tako da je razlika korijena ove jednadžbe imaginarni broj.

Rezultat: $m > \frac{1}{4} \Rightarrow m \in \left\langle \frac{1}{4}, +\infty \right\rangle.$

Zadatak 066 (Marijan, srednja škola)

Riješi jednadžbu: $x^2 + \left(\frac{2}{x}\right)^2 = 5.$

Rješenje 066

Ponovimo!

$$\left(\frac{a}{b}\right)^2 = \frac{a^2}{b^2}.$$

Kada se jednadžba koju rješavamo može prikladnom zamjenom (supstitucijom) svesti na kvadratnu jednadžbu kažemo da je kvadratnog tipa.
Bikvadratna jednadžba je jednadžba oblika

$$a \cdot x^4 + b \cdot x^2 + c = 0 \ , \ a \neq 0.$$

Ovo je jednadžba četvrtog stupnja koja podsjeća na kvadratnu jednadžbu

$$a \cdot x^2 + b \cdot x + c = 0 \ , \ a \neq 0$$

na koju se nakon zamjene (supstitucije), $x^2 = t$, i svodi.

$$x^2 + \left(\frac{2}{x}\right)^2 = 5 \Rightarrow x^2 + \frac{4}{x^2} = 5 \ / \cdot x^2 \Rightarrow x^4 + 4 = 5 \cdot x^2 \Rightarrow x^4 - 5 \cdot x^2 + 4 = 0.$$

Ako uvrstimo $x^2 = t$, dobit ćemo kvadratnu jednadžbu:

$$x^4 - 5 \cdot x^2 + 4 = 0 \Rightarrow \left[\begin{array}{c} \text{supstitucija} \\ x^2 = t \end{array}\right] \Rightarrow t^2 - 5 \cdot t + 4 = 0 \Rightarrow \left.\begin{array}{l} t^2 - 5 \cdot t + 4 = 0 \\ a = 1 \ , \ b = -5 \ , \ c = 4 \end{array}\right\} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \left.\begin{array}{l} a = 1 \ , \ b = -5 \ , \ c = 4 \\ t_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4 \cdot a \cdot c}}{2 \cdot a} \end{array}\right\} \Rightarrow t_{1,2} = \frac{5 \pm \sqrt{25 - 4 \cdot 1 \cdot 4}}{2 \cdot 1} \Rightarrow t_{1,2} = \frac{5 \pm \sqrt{25 - 16}}{2} \Rightarrow t_{1,2} = \frac{5 \pm \sqrt{9}}{2} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow t_{1,2} = \frac{5 \pm 3}{2} \Rightarrow \left.\begin{array}{l} t_1 = \frac{5+3}{2} \\ t_2 = \frac{5-3}{2} \end{array}\right\} \Rightarrow \left.\begin{array}{l} t_1 = \frac{8}{2} \\ t_2 = \frac{2}{2} \end{array}\right\} \Rightarrow \left.\begin{array}{l} t_1 = 4 \\ t_2 = 1 \end{array}\right\}.$$

Dobivena rješenja t = 4 i t = 1 izjednačimo s izrazom koji t zamjenjuje ($x^2 = t$). Dakle, vraćamo se na zamjenu (supstituciju):

- $\left.\begin{matrix} t=4 \\ x^2=t \end{matrix}\right\} \Rightarrow x^2=4\ /\sqrt{\ } \Rightarrow x_{1,2}=\pm\sqrt{4} \Rightarrow \left.\begin{matrix} x_1=2 \\ x_2=-2 \end{matrix}\right\}.$
- $\left.\begin{matrix} t=1 \\ x^2=t \end{matrix}\right\} \Rightarrow x^2=1\ /\sqrt{\ } \Rightarrow x_{3,4}=\pm\sqrt{1} \Rightarrow \left.\begin{matrix} x_3=1 \\ x_4=-1 \end{matrix}\right\}.$

Vježba 066

Riješi jednadžbu: $x^2+\left(\frac{4}{x}\right)^2=8.$

Rezultat: $2, -2.$

Zadatak 067 (Tea, TUPŠ)

Koliko različitih rješenja u skupu R^2 ima jednadžba $x^2 + y^2 + 2 \cdot x - 4 \cdot y + 5 = 0$?

Rješenje 067

Ponovimo!

$$a^2+2\cdot a\cdot b+b^2=(a+b)^2 \quad , \quad a^2-2\cdot a\cdot b+b^2=(a-b)^2 \quad , \quad a^2+b^2=0 \Leftrightarrow a=b=0.$$

$$x^2+y^2+2\cdot x-4\cdot y+5=0 \Rightarrow x^2+2\cdot x+y^2-4\cdot y+5=0 \Rightarrow [1+4=5] \Rightarrow$$

$$\Rightarrow x^2+2\cdot x+1+y^2-4\cdot y+4=0 \Rightarrow \left(x^2+2\cdot x+1\right)+\left(y^2-4\cdot y+4\right)=0 \Rightarrow (x+1)^2+(y-2)^2=0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \left.\begin{matrix} x+1=0 \\ y-2=0 \end{matrix}\right\} \Rightarrow \left.\begin{matrix} x=-1 \\ y=2 \end{matrix}\right\} \Rightarrow (x, y)=(-1, 2).$$

Jednadžba ima jedno rješenje.

Vježba 067

Koliko različitih rješenja u skupu R^2 ima jednadžba $x^2 + y^2 + 2 \cdot x + 4 \cdot y + 5 = 0$?

Rezultat: Jednadžba ima jedno rješenje.

Zadatak 068 (Marijan, srednja škola)

U jednadžbi $x^2 + 2 \cdot (m - 5) \cdot x + m^2 - 6 = 0$ odredi parametar m tako da vrijedi $x_1^2+x_2^2=10.$

Rješenje 068

Ponovimo!

$$a^2+2\cdot a\cdot b+b^2=(a+b)^2 \quad , \quad \frac{a}{1}=a.$$

Rješenja x_1, x_2 kvadratne jednadžbe $a \cdot x^2 + b \cdot x + c = 0$ zadovoljavaju Vièteove formule:

$$x_1+x_2=-\frac{b}{a} \quad , \quad x_1\cdot x_2=\frac{c}{a}.$$

U zadanoj kvadratnoj jednadžbi odredimo koeficijente a, b i c:

$$\left.\begin{matrix} a\cdot x^2+b\cdot x+c=0 \\ x^2+2\cdot(m-5)\cdot x+m^2-6=0 \end{matrix}\right\} \Rightarrow \left.\begin{matrix} a=1 \\ b=2\cdot(m-5)=2\cdot m-10 \\ c=m^2-6 \end{matrix}\right\}.$$

Uporabom formule za kvadrat zbroja i Vièteovih formula dobije se:

$$x_1^2+x_2^2=10 \Rightarrow \left[\begin{matrix} \text{lijevoj strani jednakosti dodamo i oduzmemo} \\ 2\cdot x_1\cdot x_2 \end{matrix}\right] \Rightarrow x_1^2+x_2^2+2\cdot x_1\cdot x_2-2\cdot x_1\cdot x_2=10 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \left(x_1^2+2\cdot x_1\cdot x_2+x_2^2\right)-2\cdot x_1\cdot x_2=10 \Rightarrow \left(x_1+x_2\right)^2-2\cdot x_1\cdot x_2=10 \Rightarrow \left(-\frac{b}{a}\right)^2-2\cdot\frac{c}{a}=10 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \left(\frac{b}{a}\right)^2-2\cdot\frac{c}{a}=10 \Rightarrow \left(\frac{2\cdot m-10}{1}\right)^2-2\cdot\frac{m^2-6}{1}=10 \Rightarrow (2\cdot m-10)^2-2\cdot\left(m^2-6\right)=10 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 4\cdot m^2-40\cdot m+100-2\cdot m^2+12=10 \Rightarrow 4\cdot m^2-40\cdot m+100-2\cdot m^2+12-10=0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 2\cdot m^2-40\cdot m+102=0\ /:2 \Rightarrow \left.\begin{array}{l} m^2-20\cdot m+51=0 \\ a=1\ ,\ b=-20\ ,\ c=51\end{array}\right\} \Rightarrow \left.\begin{array}{l} a=1\ ,\ b=-20\ ,\ c=51 \\ m_{1,2}=\dfrac{-b\pm\sqrt{b^2-4\cdot a\cdot c}}{2\cdot a}\end{array}\right\} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow m_{1,2}=\frac{20\pm\sqrt{400-4\cdot1\cdot51}}{2\cdot1} \Rightarrow m_{1,2}=\frac{20\pm\sqrt{400-204}}{2} \Rightarrow m_{1,2}=\frac{20\pm\sqrt{196}}{2} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow m_{1,2}=\frac{20\pm14}{2} \Rightarrow \left.\begin{array}{l} m_1=\dfrac{20+14}{2} \\ m_2=\dfrac{20-14}{2}\end{array}\right\} \Rightarrow \left.\begin{array}{l} m_1=\dfrac{34}{2} \\ m_2=\dfrac{6}{2}\end{array}\right\} \Rightarrow \left.\begin{array}{l} m_1=17 \\ m_2=3\end{array}\right\}.$$

Vježba 068

U jednadžbi $2\cdot x^2-4\cdot x+9=0$ odredi $x_1^2+x_2^2$.

Rezultat: -5.

Zadatak 069 (Marijan, srednja škola)

U jednadžbi $k\cdot x^2-(2\cdot k+1)\cdot x-1=0$ odredi parametar k tako da je umnožak njezinih rješenja tri puta veći od zbroja.

Rješenje 069

Ponovimo!

Rješenja x_1, x_2 kvadratne jednadžbe $a\cdot x^2+b\cdot x+c=0$ zadovoljavaju Vièteove formule:

$$x_1+x_2=-\frac{b}{a}\quad,\quad x_1\cdot x_2=\frac{c}{a}.$$

U zadanoj kvadratnoj jednadžbi odredimo koeficijente a, b i c:

$$\left.\begin{array}{l} a\cdot x^2+b\cdot x+c=0 \\ k\cdot x^2-(2\cdot k+1)\cdot x-1=0\end{array}\right\} \Rightarrow \left.\begin{array}{l} a=k \\ b=-(2\cdot k+1)=-2\cdot k-1 \\ c=-1\end{array}\right\}.$$

Uporabom Vièteovih formula dobije se:

$$x_1\cdot x_2=3\cdot\left(x_1+x_2\right) \Rightarrow \frac{c}{a}=3\cdot\left(-\frac{b}{a}\right) \Rightarrow \frac{c}{a}=-3\cdot\frac{b}{a}\ /\cdot a \Rightarrow c=-3\cdot b \Rightarrow$$

$$\Rightarrow -1=-3\cdot(-2\cdot k-1) \Rightarrow -1=6\cdot k+3 \Rightarrow -6\cdot k=3+1 \Rightarrow -6\cdot k=4\ /:(-6) \Rightarrow k=-\frac{4}{6} \Rightarrow k=-\frac{2}{3}.$$

Vježba 069

U jednadžbi $k\cdot x^2-(2\cdot k+1)\cdot x-1=0$ odredi parametar k tako da je umnožak njezinih rješenja dva puta veći od zbroja.

Rezultat: $k=-\frac{3}{4}$.

Zadatak 070 (Marijan, srednja škola)

Nađi dva uzastopna cijela broja ako je kvadrat njihove sume za 112 veći od sume njihovih kvadrata.

Rješenje 070

Ponovimo!

$$(a+b)^2 = a^2 + 2 \cdot a \cdot b + b^2.$$

- Kako zapisati: dva uzastopna cijela broja?
  Odgovor: x , x + 1.
- Kako zapisati: kvadrat zbroja brojeva x i y?
  Odgovor: $(x + y)^2$.
- Kako zapisati: broj x je za n veći od broja y?
  Odgovor: x – n = y , x = y + n , x – y = n.
- Kako zapisati: zbroj kvadrata brojeva x i y?
  Odgovor: $x^2 + y^2$.

Budući da je za dva uzastopna cijela broja kvadrat njihovog zbroja za 112 veći od zbroja njihovih kvadrata, slijedi:

$$(x+x+1)^2 - 112 = x^2 + (x+1)^2 \Rightarrow (2 \cdot x+1)^2 - 112 = x^2 + (x+1)^2 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 4 \cdot x^2 + 4 \cdot x + 1 - 112 = x^2 + x^2 + 2 \cdot x + 1 \Rightarrow 4 \cdot x^2 + 4 \cdot x + 1 - 112 - x^2 - x^2 - 2 \cdot x - 1 = 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 2 \cdot x^2 + 2 \cdot x - 112 = 0 \;/:2 \Rightarrow x^2 + x - 56 = 0 \Rightarrow \left.\begin{array}{l} x^2 + x - 56 = 0 \\ a = 1 \;,\; b = 1 \;,\; c = -56 \end{array}\right\} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \left.\begin{array}{l} a = 1 \;,\; b = 1 \;,\; c = -56 \\ x_{1,2} = \dfrac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4 \cdot a \cdot c}}{2 \cdot a} \end{array}\right\} \Rightarrow x_{1,2} = \frac{-1 \pm \sqrt{1 - 4 \cdot 1 \cdot (-56)}}{2 \cdot 1} \Rightarrow x_{1,2} = \frac{-1 \pm \sqrt{1+224}}{2} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow x_{1,2} = \frac{-1 \pm \sqrt{225}}{2} \Rightarrow x_{1,2} = \frac{-1 \pm 15}{2} \Rightarrow \left.\begin{array}{l} x_1 = \dfrac{-1+15}{2} \\ x_2 = \dfrac{-1-15}{2} \end{array}\right\} \Rightarrow \left.\begin{array}{l} x_1 = \dfrac{14}{2} \\ x_2 = \dfrac{-16}{2} \end{array}\right\} \Rightarrow \left.\begin{array}{l} x_1 = 7 \\ x_2 = -8 \end{array}\right\}.$$

Postoje dva rješenja.
Dva uzastopna cijela broja su: 7, 8 i – 8, – 7 .

Vježba 070

Nađi dva uzastopna cijela broja ako je kvadrat njihove sume za 60 veći od sume njihovih kvadrata.

Rezultat: 5, 6 i – 6, – 5.

Zadatak 071 (Marijan, srednja škola)

Riješi jednadžbu: $12 \cdot x^3 - 8 \cdot x^2 + x = 0.$

Rješenje 071

Ponovimo!

Ako su A i B algebarski izrazi, onda je jednadžba

$$A \cdot B = 0$$

ekvivalentna (ima isti skup rješenja) s

$$A = 0 \text{ ili } B = 0.$$

$$12 \cdot x^3 - 8 \cdot x^2 + x = 0 \Rightarrow \left[\begin{array}{l} \text{faktoriziramo lijevu stranu} \\ \text{jednadžbe tako da izlučimo } x \end{array}\right] \Rightarrow x \cdot \left(12 \cdot x^2 - 8 \cdot x + 1\right) = 0.$$

Umnožak na lijevoj strani jednak je nuli samo ako je jedan od faktora jednak nuli:

$$x = 0 \text{ ili } 12 \cdot x^2 - 8 \cdot x + 1 = 0.$$

Rješenje prve jednadžbe je

$$x_1 = 0.$$

Sada rješavamo kvadratnu jednadžbu:

$$\left.\begin{array}{l} 12 \cdot x^2 - 8 \cdot x + 1 = 0 \\ a = 12 \ , \ b = -8 \ , \ c = 1 \end{array}\right\} \Rightarrow \left.\begin{array}{l} a = 12 \ , \ b = -8 \ , \ c = 1 \\ x_{2,3} = \dfrac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4 \cdot a \cdot c}}{2 \cdot a} \end{array}\right\} \Rightarrow x_{2,3} = \frac{8 \pm \sqrt{64 - 4 \cdot 12 \cdot 1}}{2 \cdot 12} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow x_{2,3} = \frac{8 \pm \sqrt{64 - 48}}{24} \Rightarrow x_{2,3} = \frac{8 \pm \sqrt{16}}{24} \Rightarrow x_{2,3} = \frac{8 \pm 4}{24} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \left.\begin{array}{l} x_2 = \dfrac{8+4}{24} \\ x_3 = \dfrac{8-4}{24} \end{array}\right\} \Rightarrow \left.\begin{array}{l} x_2 = \dfrac{12}{24} \\ x_3 = \dfrac{4}{24} \end{array}\right\} \Rightarrow \left.\begin{array}{l} x_2 = \dfrac{1}{2} \\ x_3 = \dfrac{1}{6} \end{array}\right\}.$$

Vježba 071

Riješi jednadžbu: $x^3 - 3 \cdot x^2 + 2 \cdot x = 0.$

Rezultat: $x_1 = 0, x_2 = 2, x_3 = 1.$

Zadatak 072 (Marijan, srednja škola)

Riješi jednadžbu: $\sqrt{x+1} - \sqrt{x-3} = 1.$

Rješenje 072

Ponovimo!

$$(a+b)^2 = a^2 + 2 \cdot a \cdot b + b^2 \quad , \quad \left(\sqrt{a}\right)^2 = a.$$

Jednadžbe u kojima se pojavljuje nepoznanica pod znakom korijena odnosno s nekim racionalnim eksponentom, nazivamo iracionalne jednadžbe.
Ako jednadžba sadrži drugi korijen, onda kvadriramo njezinu lijevu i desnu stranu da se riješimo korijena. Katkada je zadanu jednadžbu potrebno kvadrirati dva puta da bismo se riješili korijena.

$$\sqrt{x+1} - \sqrt{x-3} = 1 \Rightarrow \sqrt{x+1} = 1 + \sqrt{x-3} \ /^2 \Rightarrow \left(\sqrt{x+1}\right)^2 = \left(1 + \sqrt{x-3}\right)^2 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow x + 1 = 1 + 2 \cdot \sqrt{x-3} + \left(\sqrt{x-3}\right)^2 \Rightarrow x + 1 = 1 + 2 \cdot \sqrt{x-3} + x - 3 \Rightarrow 0 = 2 \cdot \sqrt{x-3} - 3 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow -2 \cdot \sqrt{x-3} = -3 \ /:(-2) \Rightarrow \sqrt{x-3} = \frac{3}{2} \ /^2 \Rightarrow \left(\sqrt{x-3}\right)^2 = \left(\frac{3}{2}\right)^2 \Rightarrow x - 3 = \frac{9}{4} \Rightarrow x = \frac{9}{4} + 3 \Rightarrow x = \frac{21}{4}.$$

Rješenje dobiveno nakon kvadriranja jednadžbe treba uvrstiti u polaznu jednadžbu i tako provjeriti je li ono zaista rješenje polazne jednadžbe.

$$\left.\begin{array}{l} x = \dfrac{21}{4} \\ \sqrt{x+1} - \sqrt{x-3} = 1 \end{array}\right\} \Rightarrow \sqrt{\frac{21}{4} + 1} - \sqrt{\frac{21}{4} - 3} = 1 \Rightarrow \sqrt{\frac{25}{4}} - \sqrt{\frac{9}{4}} = 1 \Rightarrow \frac{5}{2} - \frac{3}{2} = 1 \Rightarrow \frac{2}{2} = 1 \Rightarrow 1 = 1.$$

Rješenje $x = \dfrac{21}{4}$ zadovoljava početnu jednadžbu.

Vježba 072

Riješi jednadžbu: $\sqrt{x+1} = x - 5.$

Rezultat: $x = 8.$

Zadatak 073 (Marijan, srednja škola)

Riješi jednadžbu: $x^2 + \left(\frac{8}{x}\right)^2 = 20.$

Rješenje 073

Ponovimo!

$$\left(\frac{a}{b}\right)^2 = \frac{a^2}{b^2}.$$

Kada se jednadžba koju rješavamo može prikladnom zamjenom (supstitucijom) svesti na kvadratnu jednadžbu kažemo da je kvadratnog tipa.
Bikvadratna jednadžba je jednadžba oblika

$$a \cdot x^4 + b \cdot x^2 + c = 0 \;,\; a \neq 0.$$

Ovo je jednadžba četvrtog stupnja koja podsjeća na kvadratnu jednadžbu

$$a \cdot x^2 + b \cdot x + c = 0 \;,\; a \neq 0$$

na koju se nakon zamjene (supstitucije), $x^2 = t$, i svodi.

$$x^2 + \left(\frac{8}{x}\right)^2 = 20 \Rightarrow x^2 + \frac{64}{x^2} = 20 \; / \cdot x^2 \Rightarrow x^4 + 64 = 20 \cdot x^2 \Rightarrow x^4 - 20 \cdot x^2 + 64 = 0.$$

Ako uvrstimo $x^2 = t$, dobit ćemo kvadratnu jednadžbu:

$$x^4 - 20 \cdot x^2 + 64 = 0 \Rightarrow \left[\begin{matrix} \text{supstitucija} \\ x^2 = t \end{matrix}\right] \Rightarrow t^2 - 20 \cdot t + 64 = 0 \Rightarrow \left.\begin{matrix} t^2 - 20 \cdot t + 64 = 0 \\ a = 1 \;,\; b = -20 \;,\; c = 64 \end{matrix}\right\} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \left.\begin{matrix} a = 1 \;,\; b = -20 \;,\; c = 64 \\ t_{1,2} = \dfrac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4 \cdot a \cdot c}}{2 \cdot a} \end{matrix}\right\} \Rightarrow t_{1,2} = \frac{20 \pm \sqrt{400 - 4 \cdot 1 \cdot 64}}{2 \cdot 1} \Rightarrow t_{1,2} = \frac{20 \pm \sqrt{400 - 256}}{2} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow t_{1,2} = \frac{20 \pm \sqrt{144}}{2} \Rightarrow t_{1,2} = \frac{20 \pm 12}{2} \Rightarrow \left.\begin{matrix} t_1 = \dfrac{20 + 12}{2} \\ t_2 = \dfrac{20 - 12}{2} \end{matrix}\right\} \Rightarrow \left.\begin{matrix} t_1 = \dfrac{32}{2} \\ t_2 = \dfrac{8}{2} \end{matrix}\right\} \Rightarrow \left.\begin{matrix} t_1 = 16 \\ t_2 = 4 \end{matrix}\right\}.$$

Dobivena rješenja t = 16 i t = 4 izjednačimo s izrazom koji t zamjenjuje ($x^2 = t$). Dakle, vraćamo se na zamjenu (supstituciju):

- $\left.\begin{matrix} t = 16 \\ x^2 = t \end{matrix}\right\} \Rightarrow x^2 = 16 \; / \sqrt{} \Rightarrow x_{1,2} = \pm\sqrt{16} \Rightarrow \left.\begin{matrix} x_1 = 4 \\ x_2 = -4 \end{matrix}\right\}.$
- $\left.\begin{matrix} t = 4 \\ x^2 = t \end{matrix}\right\} \Rightarrow x^2 = 4 \; / \sqrt{} \Rightarrow x_{3,4} = \pm\sqrt{4} \Rightarrow \left.\begin{matrix} x_3 = 2 \\ x_4 = -2 \end{matrix}\right\}.$

Vježba 073

Riješi jednadžbu: $x^4 - 14 \cdot x^2 + 45 = 20.$

Rezultat: $x_{1,2} = \pm 3, \; x_{3,4} = \pm\sqrt{5}.$

Zadatak 074 (Marijan, srednja škola)

Riješi sustav kvadratne i linearne jednadžbe: $\begin{cases} x^2 - 2 \cdot y^2 + 3 \cdot x \cdot y + x + 2 = 0 \\ 2 \cdot x - y - 5 = 0 \end{cases}.$

Rješenje 074

Ponovimo!

$$(a-b)^2 = a^2 - 2 \cdot a \cdot b + b^2.$$

Sustav od dvije jednadžbe s dvije nepoznanice, od kojih je jedna linearna i jedna kvadratna, rješavamo metodom supstitucije (uvrštavanja). Iz linearne jednadžbe izračunamo vrijednost jedne nepoznanice i uvrstimo u kvadratnu jednadžbu. Na taj način dobivamo kvadratnu jednadžbu po jednoj nepoznanici. Riješimo je i rješenja uvrstimo u izračunatu vezu. Očekujemo da ćemo u općem slučaju dobiti dva rješenja.

Pamtimo postupak:

- iz linearne jednadžbe izrazimo jednu nepoznanicu (obično onu uz koju stoji koeficijent manji po apsolutnoj vrijednosti)
- nađeni izraz uvrstimo u kvadratnu jednadžbu i riješimo je po drugoj nepoznanici
- izračunatu vrijednost druge nepoznanice uvrstimo u nađeni izraz za prvu nepoznanicu i izračunamo odgovarajuću vrijednost.

$$\left.\begin{array}{l} x^2 - 2 \cdot y^2 + 3 \cdot x \cdot y + x + 2 = 0 \\ 2 \cdot x - y - 5 = 0 \end{array}\right\} \Rightarrow \left[\begin{array}{l} \text{iz druge jednadžbe} \\ \text{izračunamo } y \end{array}\right] \Rightarrow \left.\begin{array}{l} x^2 - 2 \cdot y^2 + 3 \cdot x \cdot y + x + 2 = 0 \\ -y = -2 \cdot x + 5 \ / \cdot (-1) \end{array}\right\} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \left.\begin{array}{l} x^2 - 2 \cdot y^2 + 3 \cdot x \cdot y + x + 2 = 0 \\ y = 2 \cdot x - 5 \end{array}\right\} \Rightarrow \left[\begin{array}{l} \text{nađeni } y \text{ uvrstimo (supstituiramo) u drugu} \\ \text{(kvadratnu) jednadžbu i riješimo je po } x \end{array}\right] \Rightarrow$$

$$\Rightarrow x^2 - 2 \cdot (2 \cdot x - 5)^2 + 3 \cdot x \cdot (2 \cdot x - 5) + x + 2 = 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow x^2 - 2 \cdot \left(4 \cdot x^2 - 20 \cdot x + 25\right)^2 + 6x^2 - 15 \cdot x + x + 2 = 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow x^2 - 8 \cdot x^2 + 40 \cdot x - 50 + 6x^2 - 15 \cdot x + x + 2 = 0 \Rightarrow -x^2 + 26 \cdot x - 48 = 0 \ / \cdot (-1) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow x^2 - 26 \cdot x + 48 = 0 \Rightarrow \left.\begin{array}{l} x^2 - 26 \cdot x + 48 = 0 \\ a = 1 \ , \ b = -26 \ , \ c = 48 \end{array}\right\} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \left.\begin{array}{l} a = 1 \ , \ b = -26 \ , \ c = 48 \\ x_{1,2} = \dfrac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4 \cdot a \cdot c}}{2 \cdot a} \end{array}\right\} \Rightarrow x_{1,2} = \frac{26 \pm \sqrt{676 - 4 \cdot 1 \cdot 48}}{2 \cdot 1} \Rightarrow x_{1,2} = \frac{26 \pm \sqrt{676 - 192}}{2} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow x_{1,2} = \frac{26 \pm \sqrt{484}}{2} \Rightarrow x_{1,2} = \frac{26 \pm 22}{2} \Rightarrow \left.\begin{array}{l} x_1 = \dfrac{26 + 22}{2} \\ x_2 = \dfrac{26 - 22}{2} \end{array}\right\} \Rightarrow \left.\begin{array}{l} x_1 = \dfrac{48}{2} \\ x_2 = \dfrac{4}{2} \end{array}\right\} \Rightarrow \left.\begin{array}{l} x_1 = 24 \\ x_2 = 2 \end{array}\right\}.$$

Nađena rješenja $x_1 = 24$ i $x_2 = 2$ uvrstimo u prije nađeni izraz $y = 2 \cdot x - 5$:

$$\Rightarrow \left.\begin{array}{l} x_1 = 24 \\ x_2 = 2 \end{array}\right\} \Rightarrow \left[\ y = 2 \cdot x - 5\ \right] \Rightarrow \left.\begin{array}{l} y_1 = 2 \cdot 24 - 5 \\ y_2 = 2 \cdot 2 - 5 \end{array}\right\} \Rightarrow \left.\begin{array}{l} y_1 = 48 - 5 \\ y_2 = 4 - 5 \end{array}\right\} \Rightarrow \left.\begin{array}{l} y_1 = 43 \\ y_2 = -1 \end{array}\right\}.$$

Rješenja zadanog sustava su dva uređena para:

$$\left(x_1, y_1\right) = (24, 43) \ , \ \left(x_2, y_2\right) = (2, -1).$$

Vježba 074

Riješi sustav kvadratne i linearne jednadžbe: $\left\{\begin{array}{l} 4 \cdot y - x = 6 \\ 2 \cdot y^2 - 3 \cdot x = 0 \end{array}\right.$.

Rezultat: $(x, y) = (6, 3)$.

Zadatak 075 (2A, TUPŠ)

Ako za korijene x_1, x_2 jednadžbe $x^2 - 2 \cdot m \cdot x + 2 = 0$ vrijedi $(4 \cdot x_1 - 1) \cdot (4 \cdot x_2 - 1) = 1$, nađite m.

Rješenje 075

Ponovimo!

Rješenja (korijeni) x_1, x_2 kvadratne jednadžbe $a \cdot x^2 + b \cdot x + c = 0$ zadovoljavaju Vièteove formule:

$$x_1 + x_2 = -\frac{b}{a} \quad , \quad x_1 \cdot x_2 = \frac{c}{a}.$$

Za zadanu kvadratnu jednadžbu dobije se:

$$\left.\begin{array}{l} x^2 - 2 \cdot m \cdot x + 2 = 0 \\ a = 1 \ , \ b = -2 \cdot m \ , \ c = 2 \end{array}\right\} \Rightarrow \left[\begin{array}{l} x_1 + x_2 = -\frac{b}{a} \\ x_1 \cdot x_2 = \frac{c}{a} \end{array}\right] \Rightarrow \left.\begin{array}{l} x_1 + x_2 = -\frac{-2 \cdot m}{1} \\ x_1 \cdot x_2 = \frac{2}{1} \end{array}\right\} \Rightarrow \left.\begin{array}{l} x_1 + x_2 = 2 \cdot m \\ x_1 \cdot x_2 = 2 \end{array}\right\}.$$

Računamo parametar m iz postavljenog uvjeta:

$$(4 \cdot x_1 - 1) \cdot (4 \cdot x_2 - 1) = 1 \Rightarrow 16 \cdot x_1 \cdot x_2 - 4 \cdot x_1 - 4 \cdot x_2 + 1 = 1 \Rightarrow 16 \cdot x_1 \cdot x_2 - 4 \cdot x_1 - 4 \cdot x_2 + 1 = 1 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 16 \cdot x_1 \cdot x_2 - 4 \cdot (x_1 + x_2) = 0 \Rightarrow 16 \cdot 2 - 4 \cdot 2 \cdot m = 0 \Rightarrow 32 - 8 \cdot m = 0 \ /:8 \Rightarrow 4 - m = 0 \Rightarrow m = 4.$$

Vježba 075

Ako za korijene x_1, x_2 jednadžbe $x^2 - 2 \cdot m \cdot x + 2 = 0$ vrijedi $(2 \cdot x_1 - 1) \cdot (2 \cdot x_2 - 1) = 1$, nađite m.

Rezultat: m = 2.

Zadatak 076 (2A, TUPŠ)

Ako korijeni jednadžbe $x^2 - 2 \cdot x + m = 0$ zadovoljavaju uvjet $3 \cdot x_2 - 5 \cdot x_1 = 0$, kolika je vrijednost parametra m?

Rješenje 076

Ponovimo!

Rješenja (korijeni) x_1, x_2 kvadratne jednadžbe $a \cdot x^2 + b \cdot x + c = 0$ zadovoljavaju Vièteove formule:

$$x_1 + x_2 = -\frac{b}{a} \quad , \quad x_1 \cdot x_2 = \frac{c}{a}.$$

Za zadanu kvadratnu jednadžbu dobije se:

$$\left.\begin{array}{l} x^2 - 2 \cdot x + m = 0 \\ a = 1 \ , \ b = -2 \ , \ c = m \end{array}\right\} \Rightarrow \left[\begin{array}{l} x_1 + x_2 = -\frac{b}{a} \\ x_1 \cdot x_2 = \frac{c}{a} \end{array}\right] \Rightarrow \left.\begin{array}{l} x_1 + x_2 = -\frac{-2}{1} \\ x_1 \cdot x_2 = \frac{m}{1} \end{array}\right\} \Rightarrow \left.\begin{array}{l} x_1 + x_2 = 2 \\ x_1 \cdot x_2 = m \end{array}\right\}.$$

Iz sustava jednadžbi odredimo vrijednosti za x_1 i x_2:

$$\left.\begin{array}{l} x_1 + x_2 = 2 \ \text{Vièteova formula} \\ 3 \cdot x_2 - 5 \cdot x_1 = 0 \ \text{zadani uvjet} \end{array}\right\} \Rightarrow \left.\begin{array}{l} x_1 + x_2 = 2 \\ -5 \cdot x_1 + 3 \cdot x_2 = 0 \end{array}\right\} \Rightarrow \left[\begin{array}{l} \text{metoda suprotnih} \\ \text{koeficijenata} \end{array}\right] \Rightarrow \left.\begin{array}{l} x_1 + x_2 = 2 \ /\cdot 5 \\ -5 \cdot x_1 + 3 \cdot x_2 = 0 \end{array}\right\} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \left.\begin{array}{l} 5 \cdot x_1 + 5 \cdot x_2 = 10 \\ -5 \cdot x_1 + 3 \cdot x_2 = 0 \end{array}\right\} \Rightarrow 8 \cdot x_2 = 10 \Rightarrow x_2 = \frac{10}{8} \Rightarrow x_2 = \frac{5}{4} \Rightarrow \left.\begin{array}{l} x_2 = \frac{5}{4} \\ -5 \cdot x_1 + 3 \cdot x_2 = 0 \end{array}\right\} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow -5 \cdot x_1 + 3 \cdot \frac{5}{4} = 0 \Rightarrow -5 \cdot x_1 + \frac{15}{4} = 0 \ /:(-5) \Rightarrow x_1 - \frac{3}{4} = 0 \Rightarrow x_1 = \frac{3}{4}.$$

Iz druge Vièteove formule dobije se m:

$$m = x_1 \cdot x_2 \Rightarrow m = \frac{3}{4} \cdot \frac{5}{4} \Rightarrow m = \frac{15}{16}.$$

Vježba 076

Ako korijeni jednadžbe $x^2 - 2 \cdot x + m = 0$ zadovoljavaju uvjet $3 \cdot x_2 + 5 \cdot x_1 = 0$, kolika je vrijednost parametra m?

Rezultat: $m = -15$.

Zadatak 077 (2A, TUPŠ)

Zbroj korijena jednadžbe $x^2 - m \cdot x + n = 0$ jednak je 5, a razlika im je 3. Koliki su m i n?

Rješenje 077

Ponovimo!

Rješenja (korijeni) x_1, x_2 kvadratne jednadžbe $a \cdot x^2 + b \cdot x + c = 0$ zadovoljavaju Vièteove formule:

$$x_1 + x_2 = -\frac{b}{a} \quad , \quad x_1 \cdot x_2 = \frac{c}{a}.$$

Za zadanu kvadratnu jednadžbu dobije se:

$$\left.\begin{array}{l} x^2 - m \cdot x + n = 0 \\ a = 1 \ , \ b = -m \ , \ c = n \end{array}\right\} \Rightarrow \left[\begin{array}{l} x_1 + x_2 = -\frac{b}{a} \\ x_1 \cdot x_2 = \frac{c}{a} \end{array}\right] \Rightarrow \left.\begin{array}{l} x_1 + x_2 = -\frac{-m}{1} \\ x_1 \cdot x_2 = \frac{n}{1} \end{array}\right\} \Rightarrow \left.\begin{array}{l} x_1 + x_2 = m \\ x_1 \cdot x_2 = n \end{array}\right\}.$$

Budući da je zbroj korijena zadane kvadratne jednadžbe jednak 5, parametar m iznosi:

$$\left.\begin{array}{l} x_1 + x_2 = 5 \\ x_1 + x_2 = m \end{array}\right\} \Rightarrow m = 5.$$

Razlika rješenja zadane kvadratne jednadžbe je 3 pa se parametar n izračuna iz sustava jednadžbi:

$$\left.\begin{array}{l} x_1 + x_2 = 5 \\ x_1 - x_2 = 3 \end{array}\right\} \Rightarrow \left[\begin{array}{l} \text{metoda suprotnih} \\ \text{koeficijenata} \end{array}\right] \Rightarrow 2 \cdot x_1 = 8 \ /:2 \Rightarrow x_1 = 4 \Rightarrow \left.\begin{array}{l} x_1 = 4 \\ x_1 + x_2 = 5 \end{array}\right\} \Rightarrow 4 + x_2 = 5 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow x_2 = 1 \Rightarrow n = x_1 \cdot x_2 \Rightarrow n = 4 \cdot 1 \Rightarrow n = 4.$$

Vježba 077

Zbroj korijena jednadžbe $2 \cdot x^2 - 2 \cdot m \cdot x + 2 \cdot n = 0$ jednak je 5, a razlika im je 3. Koliki su m i n?

Rezultat: $m = 5$, $n = 4$.

Zadatak 078 (2A, TUPŠ)

Odredi parametar $a \in R$, $a \neq 0$ tako da je zbroj rješenja jednadžbe $(2 \cdot x - 1)^2 = 2 \cdot \left(x - \frac{1}{a}\right)$ jednak šesterostrukom umnošku tih rješenja.

Rješenje 078

Ponovimo!

$$(a - b)^2 = a^2 - 2 \cdot a \cdot b + b^2.$$

Rješenja (korijeni) x_1, x_2 kvadratne jednadžbe $a \cdot x^2 + b \cdot x + c = 0$ zadovoljavaju Vièteove formule:

$$x_1 + x_2 = -\frac{b}{a} \quad , \quad x_1 \cdot x_2 = \frac{c}{a}.$$

Za zadanu kvadratnu jednadžbu dobije se:

$$(2 \cdot x - 1)^2 = 2 \cdot \left(x - \frac{1}{a}\right) \Rightarrow 4 \cdot x^2 - 4 \cdot x + 1 = 2 \cdot x - \frac{2}{a} \Rightarrow 4 \cdot x^2 - 4 \cdot x + 1 - 2 \cdot x + \frac{2}{a} = 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \left.\begin{array}{l} 4\cdot x^2-6\cdot x+1+\frac{2}{a}=0 \\ a=4\ ,\ b=-6\ ,\ c=1+\frac{2}{a}\end{array}\right\} \Rightarrow \left[\begin{array}{l} x_1+x_2=-\frac{b}{a} \\ x_1\cdot x_2=\frac{c}{a}\end{array}\right] \Rightarrow \left.\begin{array}{l} x_1+x_2=-\frac{-6}{4} \\ x_1\cdot x_2=\frac{1+\frac{2}{a}}{4}\end{array}\right\} \Rightarrow \left.\begin{array}{l} x_1+x_2=\frac{6}{4} \\ x_1\cdot x_2=\frac{\frac{a+2}{a}}{4}\end{array}\right\} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \left.\begin{array}{l} x_1+x_2=\frac{3}{2} \\ x_1\cdot x_2=\frac{a+2}{4\cdot a}\end{array}\right\}.$$

Računamo parametar a iz uvjeta zadatka:

$$x_1+x_2=6\cdot x_1\cdot x_2 \Rightarrow \frac{3}{2}=6\cdot\frac{a+2}{4\cdot a} \Rightarrow \frac{3}{2}=\frac{3\cdot(a+2)}{2\cdot a}\ /\cdot\frac{2\cdot a}{3} \Rightarrow a=a+2 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow a=a+2 \Rightarrow 0=2 \text{ jednakost nema smisla}.$$

Jednadžba je nemoguća.

Vježba 078

Odredi parametar $a\in R$, a $\neq$ 0 tako da je zbroj rješenja jednadžbe $(2\cdot x-1)^2=2\cdot\left(x-\frac{1}{a}\right)$ jednak dvostrukom umnošku tih rješenja.

Rezultat: a = 1.

Zadatak 079 (2A, TUPŠ)

Za koji realan broj k kvadratna jednadžba $k\cdot x^2+(k^2+k)\cdot x-7=0$ ima dva međusobno suprotna rješenja?

Rješenje 079

Ponovimo!

$$a\cdot b=0 \Rightarrow a=0 \text{ ili } b=0 \text{ ili } a=b=0.$$

Rješenja (korijeni) x_1, x_2 kvadratne jednadžbe $a\cdot x^2+b\cdot x+c=0$ zadovoljavaju Vièteove formule:

$$x_1+x_2=-\frac{b}{a}\quad ,\quad x_1\cdot x_2=\frac{c}{a}.$$

Za zadanu kvadratnu jednadžbu dobije se:

$$\left.\begin{array}{l} k\cdot x^2+\left(k^2+k\right)\cdot x-7=0 \\ a=k\ ,\ b=k^2+k\ ,\ c=-7\end{array}\right\} \Rightarrow \left[x_1+x_2=-\frac{b}{a}\right] \Rightarrow x_1+x_2=-\frac{k^2+k}{k}.$$

Budući da kvadratna jednadžba ima dva međusobno suprotna rješenja, parametar k iznosi:

$$\left.\begin{array}{l} x_1+x_2=0 \text{ suprotna rješenja} \\ x_1+x_2=-\frac{k^2+k}{k} \text{ Vièteova formula}\end{array}\right\} \Rightarrow -\frac{k^2+k}{k}=0 \Rightarrow \left[\begin{array}{l}\text{razlomak je jednak nuli} \\ \text{ako je brojnik jednak nuli}\end{array}\right] \Rightarrow$$

$$\Rightarrow k^2+k=0 \Rightarrow k\cdot(k+1)=0 \Rightarrow \left.\begin{array}{l} k=0 \text{ nema smisla} \\ k+1=0\end{array}\right\} \Rightarrow k=-1.$$

Vježba 079

Za koji realan broj k kvadratna jednadžba $k\cdot x^2+(k^2-k)\cdot x-7=0$ ima dva međusobno suprotna rješenja?

Rezultat: k = 1.

Zadatak 080 (2A, TUPŠ)

Odredi jednadžbu kojoj su zadana rješenja: $x_{1,2}=\frac{-3\pm i}{2}.$

Rješenje 080

Ponovimo!

$$(a+b)\cdot(a-b)=a^2-b^2 \quad , \quad i^2=-1 \quad , \quad (a+b)^2=a^2+2\cdot a\cdot b+b^2.$$

Kvadratna jednadžba sa rješenjima x_1 i x_2 glasi

$$a\cdot\left(x-x_1\right)\cdot\left(x-x_2\right)=0,$$

gdje je $a\neq 0$ po volji odabran broj.

Ako vrijedi $x_1+x_2=m$, $x_1\cdot x_2=n$, onda su x_1 i x_2 rješenja kvadratne jednadžbe

$$x^2-m\cdot x+n=0 \Rightarrow x^2-\left(x_1+x_2\right)\cdot x+x_1\cdot x_2=0.$$

1.inačica

Znajući rješenja x_1 i x_2 kvadratna jednadžba glasit će:

$$\left.\begin{array}{l} x_1=\frac{-3+i}{2}\ ,\ x_2=\frac{-3-i}{2} \\ a\cdot\left(x-x_1\right)\cdot\left(x-x_2\right)=0 \end{array}\right\} \Rightarrow \left[\begin{array}{c}\text{uzmemo da je} \\ a=1\end{array}\right] \Rightarrow \left(x-\frac{-3+i}{2}\right)\cdot\left(x-\frac{-3-i}{2}\right)=0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \left(x+\frac{3-i}{2}\right)\cdot\left(x+\frac{3+i}{2}\right)=0 \Rightarrow \frac{2\cdot x+3-i}{2}\cdot\frac{2\cdot x+3+i}{2}=0 \Rightarrow \frac{(2\cdot x+3-i)\cdot(2\cdot x+3+i)}{4}=0\ /\cdot 4 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow (2\cdot x+3-i)\cdot(2\cdot x+3+i) \Rightarrow \left[\begin{array}{l}\text{razlika} \\ \text{kvadrata}\end{array}\right] \Rightarrow (2\cdot x+3)^2-i^2=0 \Rightarrow 4\cdot x^2+12\cdot x+9-(-1)=0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 4\cdot x^2+12\cdot x+9+1=0 \Rightarrow 4\cdot x^2+12\cdot x+10=0\ /:2 \Rightarrow 2\cdot x^2+6\cdot x+5=0.$$

2.inačica

Iz rješenja x_1 i x_2 dobije se:

$$\left.\begin{array}{l} x_1=\frac{-3+i}{2} \\ x_2=\frac{-3-i}{2} \end{array}\right\} \Rightarrow x_1+x_2=\frac{-3+i}{2}+\frac{-3-i}{2} \Rightarrow x_1+x_2=\frac{-3+i-3-i}{2} \Rightarrow x_1+x_2=\frac{-6}{2} \Rightarrow x_1+x_2=-3,$$

$$\left.\begin{array}{l} x_1=\frac{-3+i}{2} \\ x_2=\frac{-3-i}{2} \end{array}\right\} \Rightarrow x_1\cdot x_2=\frac{-3+i}{2}\cdot\frac{-3-i}{2} \Rightarrow x_1\cdot x_2=\frac{(-3)^2-i^2}{4} \Rightarrow x_1\cdot x_2=\frac{9-(-1)}{4} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow x_1\cdot x_2=\frac{10}{4} \Rightarrow x_1\cdot x_2=\frac{5}{2}.$$

Tražena jednadžba iznosi:

$$x^2-\left(x_1+x_2\right)\cdot x+x_1\cdot x_2=0 \Rightarrow x^2-(-3)\cdot x+\frac{5}{2}=0 \Rightarrow x^2+3\cdot x+\frac{5}{2}=0\ /\cdot 2 \Rightarrow 2\cdot x^2+6\cdot x+5=0.$$

Vježba 080

Odredi jednadžbu kojoj su zadana rješenja: $x_1=5,\ x_2=3.$

Rezultat: $x^2-8\cdot x+15=0.$