

Zadatak 021 (Anamarija, hotelijerska škola)

Nađite p za koji je jedno rješenje jednadžbe $16x^2 - 8x + (p - 1) = 0$ jednako nuli.

Rješenje 021

1. inačica

$$x = 0 \Rightarrow 16 \cdot 0^2 - 8 \cdot 0 + (p - 1) = 0 \Rightarrow p - 1 = 0 \Rightarrow p = 1.$$

2. inačica

Uporabom Vièteove formule dobije se:

$$\left. \begin{array}{l} 16 \cdot x^2 - 8 \cdot x + (p - 1) = 0 \\ a = 16, b = -8, c = p - 1 \end{array} \right\} \Rightarrow \left. \begin{array}{l} x_1 \cdot x_2 = \frac{c}{a} \\ x_1 = 0 \end{array} \right\} \Rightarrow 0 \cdot x_2 = \frac{p - 1}{16} \Rightarrow \frac{p - 1}{16} = 0 \Rightarrow p - 1 = 0 \Rightarrow p = 1.$$

Vježba 021

Nađite p za koji je jedno rješenje jednadžbe $16x^2 - 8x + (p - 5) = 0$ jednako nuli.

Rezultat: $p = 5.$

Zadatak 022 (Nina, gimnazija)

Koliki je zbroj aritmetičke i geometrijske sredine rješenja (korijena) jednadžbe:

$$2 \cdot x^2 - 20 \cdot x + 32 = 0?$$

Rješenje 022

Neka su x_1 i x_2 rješenja zadane jednadžbe. Tada je njihova:

- aritmetička sredina $A = \frac{x_1 + x_2}{2},$
- geometrijska sredina $G = \sqrt{x_1 \cdot x_2}.$

Uporabom Vièteovih formula dobije se:

$$\left. \begin{array}{l} 2 \cdot x^2 - 20 \cdot x + 32 = 0 \quad /:2 \\ x^2 - 10 \cdot x + 16 = 0 \\ a = 1, b = -10, c = 16 \end{array} \right\} \Rightarrow \left[\begin{array}{l} x_1 + x_2 = -\frac{b}{a} = 10 \\ x_1 \cdot x_2 = \frac{c}{a} = 16 \end{array} \right] \Rightarrow A + G = \frac{x_1 + x_2}{2} + \sqrt{x_1 \cdot x_2} = \frac{10}{2} + \sqrt{16} = 5 + 4 = 9.$$

Vježba 022

Koliki je zbroj aritmetičke i geometrijske sredine rješenja (korijena) jednadžbe:

$$2 \cdot x^2 - 16 \cdot x + 50 = 0?$$

Rezultat: 9.

Zadatak 023 (Anamarija, hotelijerska škola)

Nađi zbroj aritmetičke i geometrijske sredine korijena (rješenja) jednadžbe: $2x^2 - 20x + 32 = 0?$

Rješenje 023

Uporabom Vièteovih formula dobije se:

$$2 \cdot x^2 - 20 \cdot x + 32 = 0 \quad /:2 \Rightarrow x^2 - 10 \cdot x + 16 = 0 \Rightarrow \begin{cases} x_1 + x_2 = 10 \\ x_1 \cdot x_2 = 16. \end{cases}$$

$$\text{Aritmetička sredina: } A = \frac{x_1 + x_2}{2} = \frac{10}{2} = 5.$$

$$\text{Geometrijska sredina: } G = \sqrt{x_1 \cdot x_2} = \sqrt{16} = 4.$$

Zbroj aritmetičke i geometrijske sredine je:

$$A + G = 5 + 4 = 9.$$

Vježba 023

Nađi razliku aritmetičke i geometrijske sredine korijena (rješenja) jednadžbe: $2x^2 - 20x + 32 = 0?$

Rezultat: 1.

Zadatak 024 (Vedrana, gimnazija)

Za koje će vrijednosti parametra n jednačba $x^2 - 2 \cdot x - \log_2 n = 0$ imati realna rješenja?

Rješenje 024

Ponovimo!

$$\left. \begin{array}{l} \log_a a^n = n \\ b > 1 \end{array} \right\} \Rightarrow f(x) \geq g(x)$$

Rješenja kvadratne jednačbe bit će realna ako je diskriminanta veća ili jednaka nuli:

$$\left. \begin{array}{l} x^2 - 2 \cdot x - \log_2 n = 0 \\ a = 1, b = -2, c = -\log_2 n \end{array} \right\} \Rightarrow \left. \begin{array}{l} b^2 - 4 \cdot a \cdot c \geq 0 \\ (-2)^2 - 4 \cdot 1 \cdot (-\log_2 n) \geq 0 \end{array} \right\} \Rightarrow 4 + 4 \cdot \log_2 n \geq 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 4 \cdot \log_2 n \geq -4 \quad /:4 \Rightarrow \log_2 n \geq -1 \Rightarrow \log_2 n \geq \log_2 2^{-1} \Rightarrow n \geq 2^{-1} \Rightarrow n \geq \frac{1}{2} \Rightarrow n \in \left[\frac{1}{2}, +\infty \right).$$

Vježba 024

Za koje će vrijednosti parametra n jednačba $x^2 - 2 \cdot x - \log_3 n = 0$ imati realna rješenja?

Rezultat: $n \in \left[\frac{1}{3}, +\infty \right).$

Zadatak 025 (Vedrana, gimnazija)

Za koje će vrijednosti parametra n jednačba $x^2 - 2 \cdot x - \log_2 n = 0$ imati jedno rješenje 2?

Rješenje 025

Ponovimo!

$$\left. \begin{array}{l} x^2 - 2 \cdot x - \log_2 n = 0 \\ x = 2 \end{array} \right\} \Rightarrow 2^2 - 2 \cdot 2 - \log_2 n = 0 \Rightarrow 4 - 4 - \log_2 n = 0 \Rightarrow -\log_2 n = 0 \quad / \cdot (-1) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \log_2 n = 0 \Rightarrow \log_2 n = \log_2 1 \Rightarrow n = 1.$$

Vježba 025

Za koje će vrijednosti parametra n jednačba $x^2 - 2 \cdot x - \log_5 n = 0$ imati jedno rješenje 2?

Rezultat: 1.

Zadatak 026 (Vedrana, gimnazija)

Odredite skup svih vrijednosti q za koje je razmak korijena jednačbe $x^2 + 6 \cdot x + q = 0$ veći od 4.

Rješenje 026

Uporabit ćemo Viëteove formule:

$$x^2 + b \cdot x + c = 0 \Rightarrow x_1 + x_2 = -b, x_1 \cdot x_2 = c$$

Budući da razmak korijena jednačbe mora biti veći od 4, slijedi:

$$x_1 - x_2 > 4 \Rightarrow x_1 - x_2 > 4 \quad /^2 \Rightarrow x_1^2 - 2 \cdot x_1 \cdot x_2 + x_2^2 > 16 \Rightarrow (x_1^2 + x_2^2) - 2 \cdot x_1 \cdot x_2 > 16 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow [x_1^2 + 2 \cdot x_1 \cdot x_2 + x_2^2 - 2 \cdot x_1 \cdot x_2] - 2 \cdot x_1 \cdot x_2 > 16 \Rightarrow [(x_1 + x_2)^2 - 2 \cdot x_1 \cdot x_2] - 2 \cdot x_1 \cdot x_2 > 16 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow (x_1 + x_2)^2 - 4 \cdot x_1 \cdot x_2 > 16 \Rightarrow \left[\begin{array}{l} x^2 + 6 \cdot x + q = 0 \\ x_1 + x_2 = -6, x_1 \cdot x_2 = q \end{array} \right] \Rightarrow (-6)^2 - 4 \cdot q > 16 \Rightarrow 36 - 4 \cdot q > 16 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow -4 \cdot q > 16 - 36 \Rightarrow -4 \cdot q > -20 \quad /: (-4) \Rightarrow q < 5 \Rightarrow q \in \langle -\infty, 5 \rangle.$$

Vježba 026

Odredite vrijednost q za koju je razmak korijena jednadžbe $x^2 + 6 \cdot x + q = 0$ jednak 4.

Rezultat: 5.

Zadatak 027 (Ivan, elektrotehnička škola)

Ako je $v = g \cdot t + v_0$ i $s = \frac{g}{2} \cdot t^2 + v_0 \cdot t$, onda je t jednak :

A. $\frac{2 \cdot s}{v + v_0}$ B. $\frac{2 \cdot s}{v - v_0}$ C. $\frac{s}{v - v_0}$ D. $\frac{2 \cdot s}{v}$ E. $2 \cdot s - v$

Rješenje 027

Ponovimo!

$$a^n \cdot a^m = a^{n+m}$$

$$\left. \begin{array}{l} v = g \cdot t + v_0 \\ s = \frac{g}{2} \cdot t^2 + v_0 \cdot t \end{array} \right\} \Rightarrow \left. \begin{array}{l} v = g \cdot t + v_0 \quad /: \frac{t}{2} \\ s = \frac{g}{2} \cdot t^2 + v_0 \cdot t \end{array} \right\} \Rightarrow \left. \begin{array}{l} v \cdot \frac{t}{2} = \frac{g}{2} \cdot t^2 + v_0 \cdot \frac{t}{2} \\ s = \frac{g}{2} \cdot t^2 + v_0 \cdot t \end{array} \right\} \Rightarrow \left[\begin{array}{l} \text{drugu jednadžbu} \\ \text{pomnožimo brojem } -1 \text{ i} \\ \text{zbrojimo s prvom jednadžbom} \end{array} \right] \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \left. \begin{array}{l} v \cdot \frac{t}{2} = \frac{g}{2} \cdot t^2 + v_0 \cdot \frac{t}{2} \\ s = \frac{g}{2} \cdot t^2 + v_0 \cdot t \quad /: (-1) \end{array} \right\} \Rightarrow \left. \begin{array}{l} v \cdot \frac{t}{2} = \frac{g}{2} \cdot t^2 + v_0 \cdot \frac{t}{2} \\ -s = -\frac{g}{2} \cdot t^2 - v_0 \cdot t \end{array} \right\} \Rightarrow v \cdot \frac{t}{2} - s = v_0 \cdot \frac{t}{2} - v_0 \cdot t \Rightarrow$$

$$\Rightarrow v \cdot \frac{t}{2} - s = -v_0 \cdot \frac{t}{2} \quad /: 2 \Rightarrow v \cdot t - 2 \cdot s = -v_0 \cdot t \Rightarrow v \cdot t + v_0 \cdot t = 2 \cdot s \Rightarrow t \cdot (v + v_0) = 2 \cdot s \Rightarrow t = \frac{2 \cdot s}{v + v_0}$$

Odgovor je pod A.

Vježba 027

Ako je $v = g \cdot t$ i $s = \frac{g}{2} \cdot t^2$, onda je t jednak :

A. $\frac{2 \cdot s}{v}$ B. $\frac{s}{2 \cdot v}$ C. $\frac{s}{v}$ D. $s - v$ E. $s + v$

Rezultat: Odgovor je pod A.

Zadatak 028 (Ivan, elektrotehnička škola)

Kako glasi bikvadratna jednadžba ako su njezina rješenja: $x_{1,2} = \pm 2 \cdot i$, $x_{3,4} = \pm 1$?

Rješenje 028

Ponovimo!

- Jednadžba četvrtog stupnja sa rješenjima x_1, x_2, x_3 i x_4 glasi

$$(x - x_1) \cdot (x - x_2) \cdot (x - x_3) \cdot (x - x_4) = 0, \text{ gdje je } a \neq 0 \text{ po volji odabran broj.}$$

- Rješenja x_1, x_2 kvadratne jednadžbe $a \cdot x^2 + b \cdot x + c = 0$ zadovoljavaju Viëteove formule:

$$x_1 + x_2 = -\frac{b}{a}, \quad x_1 \cdot x_2 = \frac{c}{a} \text{ i vrijedi } a \cdot x^2 + b \cdot x + c = 0 \Rightarrow x^2 - (x_1 + x_2) \cdot x + x_1 \cdot x_2 = 0.$$

- Razlika kvadrata: $(a - b) \cdot (a + b) = a^2 - b^2$.

1. inačica

Budući da su $x_{1,2} = \pm 2 \cdot i$, $x_{3,4} = \pm 1$ rješenja bikvadratne jednadžbe $a \cdot x^4 + b \cdot x^2 + c = 0$, vrijedi:

$$(x - x_1) \cdot (x - x_2) \cdot (x - x_3) \cdot (x - x_4) = 0 \Rightarrow (x - 2 \cdot i) \cdot (x + 2 \cdot i) \cdot (x - 1) \cdot (x + 1) = 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow (x^2 + 4) \cdot (x^2 - 1) = 0 \Rightarrow x^4 - x^2 + 4 \cdot x^2 - 4 = 0 \Rightarrow x^4 + 3 \cdot x^2 - 4 = 0.$$

2. inačica

$$a \cdot x^4 + b \cdot x^2 + c = 0 \quad /:a \Rightarrow x^4 + \frac{b}{a} \cdot x^2 + \frac{c}{a} = 0 \Rightarrow \left[\begin{array}{l} \text{supstitucija } , \quad t = x^2 \\ x_{1,2} = \pm 2 \cdot i \Rightarrow t_1 = (\pm 2 \cdot i)^2 \Rightarrow t_1 = -4 \\ x_{3,4} = \pm 1 \Rightarrow t_2 = (\pm 1)^2 \Rightarrow t_2 = 1 \end{array} \right] \Rightarrow$$

$$\begin{aligned} &\Rightarrow t^2 + \frac{b}{a} \cdot t + \frac{c}{a} = 0 \Rightarrow [\text{Vièteove formule}] \Rightarrow t^2 - (t_1 + t_2) \cdot t + t_1 \cdot t_2 = 0 \Rightarrow \\ &\Rightarrow t^2 - (-4 + 1) \cdot t + (-4) \cdot 1 = 0 \Rightarrow t^2 - (-3) \cdot t - 4 = 0 \Rightarrow t^2 + 3 \cdot t - 4 = 0 \Rightarrow x^4 + 3 \cdot x^2 - 4 = 0. \end{aligned}$$

Vježba 028

Kako glasi bikvadratna jednačina ako su njezina rješenja: $x_{1,2} = \pm i$, $x_{3,4} = \pm 1$?

Rezultat: $x^4 - 1 = 0.$

Zadatak 029 (Harry, gimnazija)

Odredite skup svih vrijednosti q za koje je razmak korijena jednačine $x^2 + 6 \cdot x + q = 0$ veći od 4.

Rješenje 029

Ponovimo!

$$|x| = x \text{ za } x \geq 0 \quad , \quad |x| = -x \text{ za } x < 0 \quad , \quad (a-b)^2 = a^2 - 2 \cdot a \cdot b + b^2 \quad , \quad (a+b)^2 = a^2 + 2 \cdot a \cdot b + b^2.$$

1. inačica

Najprije izračunamo nultočke (korijene) kvadratne jednačine:

$$\begin{aligned} x^2 + 6 \cdot x + q = 0 &\Rightarrow x_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4 \cdot a \cdot c}}{2 \cdot a} \Rightarrow x_{1,2} = \frac{-6 \pm \sqrt{36 - 4 \cdot 1 \cdot q}}{2 \cdot 1} \Rightarrow \\ \Rightarrow x_{1,2} &= \frac{-6 \pm \sqrt{36 - 4 \cdot q}}{2} \Rightarrow x_{1,2} = \frac{-6 \pm \sqrt{4 \cdot (9 - q)}}{2} \Rightarrow x_{1,2} = \frac{-6 \pm 2 \cdot \sqrt{9 - q}}{2} \Rightarrow x_{1,2} = -3 \pm \sqrt{9 - q} \Rightarrow \\ &\Rightarrow \left. \begin{array}{l} x_1 = -3 + \sqrt{9 - q} \\ x_2 = -3 - \sqrt{9 - q} \end{array} \right\}. \end{aligned}$$

Budući da razmak korijena jednačine mora biti veći od 4, slijedi:

$$\begin{aligned} |x_1 - x_2| > 4 &\Rightarrow |-3 + \sqrt{9 - q} + 3 + \sqrt{9 - q}| > 4 \Rightarrow |2 \cdot \sqrt{9 - q}| > 4 \Rightarrow 2 \cdot \sqrt{9 - q} > 4 \quad /:2 \Rightarrow \\ \Rightarrow |\sqrt{9 - q}| > 2 &/^2 \Rightarrow 9 - q > 4 \Rightarrow -q > 4 - 9 \Rightarrow -q > -5 \quad / \cdot (-1) \Rightarrow q < 5 \Rightarrow q \in \langle -\infty, 5 \rangle. \end{aligned}$$

2. inačica

Neka je $x_1 > x_2$. Tada vrijedi:

$$(x_1 - x_2)^2 = (x_1 + x_2)^2 - 4 \cdot x_1 \cdot x_2 \quad / \sqrt{\quad} \Rightarrow x_1 - x_2 = \sqrt{(x_1 + x_2)^2 - 4 \cdot x_1 \cdot x_2}.$$

Budući da razmak korijena jednačine mora biti veći od 4, slijedi:

$$\begin{aligned} x_1 - x_2 > 4 &\Rightarrow \sqrt{(x_1 + x_2)^2 - 4 \cdot x_1 \cdot x_2} > 4 \Rightarrow [\text{Vièteove formule: } x_1 + x_2 = -6, x_1 \cdot x_2 = q] \Rightarrow \\ \Rightarrow \sqrt{(-6)^2 - 4 \cdot q} > 4 &\Rightarrow \sqrt{36 - 4 \cdot q} > 4 \quad /^2 \Rightarrow 36 - 4 \cdot q > 16 \Rightarrow -4 \cdot q > 16 - 36 \Rightarrow -4 \cdot q > -20 \Rightarrow \\ \Rightarrow -4 \cdot q > -20 &/: (-4) \Rightarrow q < 5 \Rightarrow q \in \langle -\infty, 5 \rangle. \end{aligned}$$

Vježba 029

Odredite skup svih vrijednosti q za koje je razmak korijena jednadžbe $x^2 + 6 \cdot x + q = 0$ manji od 4.

Rezultat: $q \in \langle 5, +\infty \rangle$.

Zadatak 030 (Maja, gimnazija)

Za rješenje (x, y) sustava $x + y = 5$, $x \cdot y = 4$ vrijedi:

A. $x^2 + y^2 = 25$ B. $x^2 + y^2 = 24$ C. $x^2 + y^2 = 17$ D. $x^2 + y^2 = 22$ E. $x^2 + y^2 = -21$

Rješenje 030

Ponovimo!

$$(a+b)^2 = a^2 + 2 \cdot a \cdot b + b^2.$$

1. inačica

Riješimo sustav jednadžbi:

$$\left. \begin{array}{l} x + y = 5 \\ x \cdot y = 4 \end{array} \right\} \Rightarrow \left. \begin{array}{l} y = 5 - x \\ x \cdot y = 4 \end{array} \right\} \Rightarrow x \cdot (5 - x) = 4 \Rightarrow 5 \cdot x - x^2 - 4 = 0 \Rightarrow -x^2 + 5 \cdot x - 4 = 0 \quad / \cdot (-1) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow x^2 - 5 \cdot x + 4 = 0 \Rightarrow x_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4 \cdot a \cdot c}}{2 \cdot a} \Rightarrow x_{1,2} = \frac{5 \pm \sqrt{25 - 4 \cdot 1 \cdot 4}}{2 \cdot 1} \Rightarrow x_{1,2} = \frac{5 \pm \sqrt{25 - 16}}{2} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow x_{1,2} = \frac{5 \pm \sqrt{9}}{2} \Rightarrow x_{1,2} = \frac{5 \pm 3}{2} \Rightarrow \left. \begin{array}{l} x_1 = \frac{5+3}{2} = \frac{8}{2} = 4 \\ x_2 = \frac{5-3}{2} = \frac{2}{2} = 1 \end{array} \right\} \Rightarrow [y = 5 - x] \Rightarrow \left. \begin{array}{l} y_1 = 5 - 4 = 1 \\ y_2 = 5 - 1 = 4 \end{array} \right\}.$$

Budući da su rješenja simetrična $(x_1, y_1) = (y_2, x_2)$, vrijedi:

$$x^2 + y^2 = 4^2 + 1^2 = 16 + 1 = 17.$$

Odgovor je pod C.

2. inačica

$$\left. \begin{array}{l} x + y = 5 \\ x \cdot y = 4 \end{array} \right\} \Rightarrow \left. \begin{array}{l} x + y = 5 \quad /^2 \\ x \cdot y = 4 \end{array} \right\} \Rightarrow (x+y)^2 = 5^2 \Rightarrow x^2 + 2 \cdot x \cdot y + y^2 = 25 \Rightarrow x^2 + y^2 = 25 - 2 \cdot x \cdot y \Rightarrow$$

$$\Rightarrow x^2 + y^2 = 25 - 2 \cdot 4 \Rightarrow x^2 + y^2 = 25 - 8 \Rightarrow x^2 + y^2 = 17.$$

Odgovor je pod C.

Vježba 030

Za rješenje (x, y) sustava $x + y = 6$, $x \cdot y = 8$ vrijedi:

A. $x^2 + y^2 = 25$ B. $x^2 + y^2 = 20$ C. $x^2 + y^2 = 19$ D. $x^2 + y^2 = 21$ E. $x^2 + y^2 = 15$

Rezultat: Odgovor je pod B.

Zadatak 031 (Maja, gimnazija)

Za koje vrijednosti parametra $\alpha \in \mathbb{R}$ jednadžba $\alpha \cdot (x-1) = (x-\alpha)^2$ nema realnih rješenja?

Rješenje 031

Ponovimo!

$$(a-b)^2 = a^2 - 2 \cdot a \cdot b + b^2.$$

Kvadratna jednadžba $a \cdot x^2 + b \cdot x + c = 0$ nema realnih rješenja (tj. ima konjugirano kompleksna rješenja) ako je diskriminanta negativna:

$$b^2 - 4 \cdot a \cdot c < 0.$$

Računamo vrijednosti parametra α :

$$\alpha \cdot (x-1) = (x-\alpha)^2 \Rightarrow \alpha \cdot x - \alpha = x^2 - 2 \cdot \alpha \cdot x + \alpha^2 \Rightarrow x^2 - 2 \cdot \alpha \cdot x + \alpha^2 - \alpha \cdot x + \alpha = 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \left. \begin{aligned} x^2 - 3 \cdot \alpha \cdot x + \alpha^2 + \alpha = 0 \\ \Rightarrow x^2 - 3 \cdot \alpha \cdot x + \alpha^2 + \alpha = 0 \Rightarrow a=1, b=-3, c=\alpha^2 + \alpha \\ b^2 - 4 \cdot a \cdot c < 0 \end{aligned} \right\} \Rightarrow (-3 \cdot \alpha)^2 - 4 \cdot 1 \cdot (\alpha^2 + \alpha) < 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 9 \cdot \alpha^2 - 4 \cdot \alpha^2 - 4 \cdot \alpha < 0 \Rightarrow 5 \cdot \alpha^2 - 4 \cdot \alpha < 0 \Rightarrow \alpha \cdot (5 \cdot \alpha - 4) < 0.$$

$\alpha \cdot (5 \cdot \alpha - 4) < 0$	
$\alpha < 0$ $5 \cdot \alpha - 4 > 0$	$\alpha > 0$ $5 \cdot \alpha - 4 < 0$
$\alpha < 0$ $5 \cdot \alpha > 4$	$\alpha > 0$ $5 \cdot \alpha < 4$
$\alpha < 0$ $5 \cdot \alpha > 4 \quad /:5$	$\alpha > 0$ $5 \cdot \alpha < 4 \quad /:5$
$\alpha < 0$ $\alpha > \frac{4}{5}$	$\alpha > 0$ $\alpha < \frac{4}{5}$
\emptyset	$\alpha \in \left(0, \frac{4}{5} \right)$

Vježba 031

Za koje vrijednosti parametra $\alpha \in R$ jednačba $\alpha \cdot (x-1) = (x-\alpha)^2$ ima dvostruko realno rješenje?

Rezultat: $\alpha_1 = 0, \alpha_2 = \frac{4}{5}$.

Zadatak 032 (2A, hotelijerska škola)

Odredite vrijednost realnog broja k tako da rješenja jednačbe $2x^2 + (k-3)x - 5 = 0$ budu suprotni brojevi.

Rješenje 032

Ponovimo!

Vièteove formule

Rješenja x_1, x_2 kvadratne jednačbe $ax^2 + bx + c = 0$ zadovoljavaju Vièteove formule:

$$x_1 + x_2 = -\frac{b}{a}, \quad x_1 \cdot x_2 = \frac{c}{a}.$$

Ako su brojevi x i y suprotni, vrijedi: $x + y = 0$.

Razlomak je jednak nuli, ako je brojnik nula: $\frac{a}{b} = 0 \Rightarrow a = 0$.

1. inačica

Vrijednost realnog broja k odredit ćemo uporabom Vièteove formule:

$$\left. \begin{aligned} 2 \cdot x^2 + (k-3) \cdot x - 5 = 0 \\ a = 2, b = k-3, c = -5 \\ x_1 + x_2 = -\frac{b}{a}, x_1 + x_2 = 0 \end{aligned} \right\} \Rightarrow -\frac{b}{a} = 0 \Rightarrow -\frac{k-3}{2} = 0 \Rightarrow k-3 = 0 \Rightarrow k = 3.$$

2. inačica

Kvadratna jednačba $ax^2 + bx + c = 0$ ima suprotna rješenja ako je linearni koeficijent $b = 0$.

Dokaz

$$\left. \begin{array}{l} a \cdot x^2 + b \cdot x + c = 0 \\ x_1 + x_2 = -\frac{b}{a}, x_1 + x_2 = 0 \end{array} \right\} \Rightarrow -\frac{b}{a} = 0 \Rightarrow b = 0.$$

Vrijednost realnog broja k iznosi:

$$\left. \begin{array}{l} 2 \cdot x^2 + (k-3) \cdot x - 5 = 0 \\ b = k-3, b = 0 \end{array} \right\} \Rightarrow k-3 = 0 \Rightarrow k = 3.$$

Vježba 032

Odredite vrijednost realnog broja k tako da rješenja jednadžbe $2x^2 + (k-2)x - 5 = 0$ budu suprotni brojevi.

Rezultat: $k = 2$.

Zadatak 033 (2A, hotelijerska škola)

Nadite zbroj rješenja jednadžbe

$$\frac{1}{3} \cdot (x-1)^2 - 3 = 0.$$

Rješenje 033

1. inačica

$$\frac{1}{3} \cdot (x-1)^2 - 3 = 0 \quad / \cdot 3 \Rightarrow (x-1)^2 - 9 = 0 \Rightarrow (x-1)^2 = 9 \quad / \sqrt{} \Rightarrow x-1 = \pm\sqrt{9} \Rightarrow x-1 = \pm 3 \Rightarrow$$

$$\left. \begin{array}{l} x-1 = 3 \\ x-1 = -3 \end{array} \right\} \Rightarrow \left. \begin{array}{l} x_1 = 4 \\ x_2 = -2 \end{array} \right\} \Rightarrow x_1 + x_2 = 4 + (-2) = 2.$$

2. inačica

Uporabom Vièteove formule dobije se:

$$\begin{aligned} \frac{1}{3} \cdot (x-1)^2 - 3 = 0 \quad / \cdot 3 \Rightarrow (x-1)^2 - 9 = 0 \Rightarrow x^2 - 2 \cdot x + 1 - 9 = 0 \Rightarrow x^2 - 2 \cdot x - 8 = 0 \Rightarrow \\ \Rightarrow \left[\begin{array}{l} a \cdot x^2 + b \cdot x + c = 0 \\ x_1 + x_2 = -\frac{b}{a} \end{array} \right] \Rightarrow \left. \begin{array}{l} a = 1, b = -2 \\ x_1 + x_2 = -\frac{b}{a} \end{array} \right\} \Rightarrow x_1 + x_2 = -\frac{-2}{1} = 2. \end{aligned}$$

Vježba 033

Nadite zbroj rješenja jednadžbe: $(x-1)^2 - 4 = 0$.

Rezultat: 2 .

Zadatak 034 (Dado, gimnazija)

Riješite jednadžbu $(x^2 + x + 1) \cdot (x^2 + x + 2) = 12$.

Rješenje 034

Ponovimo!

Rješenja kvadratne jednadžbe $a \cdot x^2 + b \cdot x + c = 0$, $a \neq 0$ su brojevi

$$x_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4 \cdot a \cdot c}}{2 \cdot a}.$$

$$(x^2 + x + 1) \cdot (x^2 + x + 2) = 12 \Rightarrow (x^2 + x + 1) \cdot (x^2 + x + 1 + 1) = 12 \Rightarrow \left[\begin{array}{l} \text{zamjena (supstitucija)} \\ t = x^2 + x + 1 \end{array} \right] \Rightarrow$$

$$\Rightarrow t \cdot (t+1) = 12 \Rightarrow t^2 + t - 12 = 0 \Rightarrow t_{1,2} = \frac{-1 \pm \sqrt{1 - 4 \cdot 1 \cdot (-12)}}{2 \cdot 1} \Rightarrow t_{1,2} = \frac{-1 \pm \sqrt{1 + 48}}{2} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow t_{1,2} = \frac{-1 \pm \sqrt{49}}{2} \Rightarrow t_{1,2} = \frac{-1 \pm 7}{2} \Rightarrow \left. \begin{array}{l} t_1 = \frac{-1+7}{2} \\ t_2 = \frac{-1-7}{2} \end{array} \right\} \Rightarrow \left. \begin{array}{l} t_1 = 3 \\ t_2 = -4 \end{array} \right\}.$$

Rješenja zadane jednačbe dobijemo vraćanjem na uvedenu zamjenu (supstituciju):

$$\left. \begin{array}{l} x^2 + x + 1 = t \\ t = 3 \end{array} \right\} \Rightarrow x^2 + x + 1 = 3 \Rightarrow x^2 + x - 2 = 0 \Rightarrow x_{1,2} = \frac{-1 \pm \sqrt{1 - 4 \cdot 1 \cdot (-2)}}{2 \cdot 1} \Rightarrow x_{1,2} = \frac{-1 \pm \sqrt{1+8}}{2} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow x_{1,2} = \frac{-1 \pm \sqrt{9}}{2} \Rightarrow x_{1,2} = \frac{-1 \pm 3}{2} \Rightarrow \left. \begin{array}{l} x_1 = \frac{-1+3}{2} \\ x_2 = \frac{-1-3}{2} \end{array} \right\} \Rightarrow \left. \begin{array}{l} x_1 = 1 \\ x_2 = -2 \end{array} \right\}.$$

$$\left. \begin{array}{l} x^2 + x + 1 = t \\ t = -4 \end{array} \right\} \Rightarrow x^2 + x + 1 = -4 \Rightarrow x^2 + x + 5 = 0 \Rightarrow x_{3,4} = \frac{-1 \pm \sqrt{1 - 4 \cdot 1 \cdot 5}}{2 \cdot 1} \Rightarrow x_{3,4} = \frac{-1 \pm \sqrt{1-20}}{2} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow x_{3,4} = \frac{-1 \pm \sqrt{-19}}{2} \Rightarrow x_{3,4} = \frac{-1 \pm \sqrt{19} \cdot i}{2} \Rightarrow \left. \begin{array}{l} x_3 = \frac{-1 + \sqrt{19} \cdot i}{2} \\ x_4 = \frac{-1 - \sqrt{19} \cdot i}{2} \end{array} \right\} \Rightarrow \left. \begin{array}{l} x_3 = -\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{19}}{2} \cdot i \\ x_4 = -\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{19}}{2} \cdot i \end{array} \right\}.$$

Vježba 034

Riješite jednačbu $x^4 - 5x^2 + 4 = 0$.

Rezultat: $x_1 = 1, x_2 = -1, x_3 = 2, x_4 = -2$.

Zadatak 035 (Dado, gimnazija)

Riješite jednačbu $(x^2 - 4x)^2 + (x - 2)^2 = 16$.

Rješenje 035

Ponovimo!

Rješenja kvadratne jednačbe $a \cdot x^2 + b \cdot x + c = 0$, $a \neq 0$ su brojevi

$$x_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4 \cdot a \cdot c}}{2 \cdot a}.$$

Kvadrat razlike: $(a-b)^2 = a^2 - 2 \cdot a \cdot b + b^2$.

$$(x^2 - 4 \cdot x)^2 + (x - 2)^2 = 16 \Rightarrow (x^2 - 4 \cdot x)^2 + x^2 - 4 \cdot x + 4 = 16 \Rightarrow (x^2 - 4 \cdot x)^2 + x^2 - 4 \cdot x + 4 - 16 = 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow (x^2 - 4 \cdot x)^2 + x^2 - 4 \cdot x - 12 = 0 \Rightarrow \left(\underline{x^2 - 4 \cdot x} \right)^2 + \underline{x^2 - 4 \cdot x} - 12 = 0 \Rightarrow \left[\begin{array}{l} \text{zamjena (supstitucija)} \\ t = x^2 - 4 \cdot x \end{array} \right] \Rightarrow$$

$$\Rightarrow t^2 + t - 12 = 0 \Rightarrow t_{1,2} = \frac{-1 \pm \sqrt{1 - 4 \cdot 1 \cdot (-12)}}{2 \cdot 1} \Rightarrow t_{1,2} = \frac{-1 \pm \sqrt{1+48}}{2} \Rightarrow t_{1,2} = \frac{-1 \pm \sqrt{49}}{2} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow t_{1,2} = \frac{-1 \pm 7}{2} \Rightarrow \left. \begin{array}{l} t_1 = \frac{-1+7}{2} \\ t_2 = \frac{-1-7}{2} \end{array} \right\} \Rightarrow \left. \begin{array}{l} t_1 = 3 \\ t_2 = -4 \end{array} \right\}.$$

Rješenja zadane jednačbe dobijemo vraćanjem na uvedenu zamjenu (supstituciju):

$$\left. \begin{array}{l} x^2 - 4 \cdot x = t \\ t = 3 \end{array} \right\} \Rightarrow x^2 - 4 \cdot x = 3 \Rightarrow x^2 - 4 \cdot x - 3 = 0 \Rightarrow x_{1,2} = \frac{4 \pm \sqrt{16 - 4 \cdot 1 \cdot (-3)}}{2 \cdot 1} \Rightarrow x_{1,2} = \frac{4 \pm \sqrt{16+12}}{2} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow x_{1,2} = \frac{4 \pm \sqrt{28}}{2} \Rightarrow x_{1,2} = \frac{4 \pm \sqrt{4 \cdot 7}}{2} \Rightarrow \left[\begin{array}{l} \text{djelomično} \\ \text{korjenovanje} \end{array} \right] \Rightarrow x_{1,2} = \frac{4 \pm 2 \cdot \sqrt{7}}{2} \Rightarrow x_{1,2} = \frac{2 \cdot (2 \pm \sqrt{7})}{2} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow x_{1,2} = 2 \pm \sqrt{7} \Rightarrow \left. \begin{array}{l} x_1 = 2 + \sqrt{7} \\ x_2 = 2 - \sqrt{7} \end{array} \right\}$$

$$\left. \begin{array}{l} x^2 - 4 \cdot x = t \\ t = -4 \end{array} \right\} \Rightarrow x^2 - 4 \cdot x = -4 \Rightarrow x^2 - 4 \cdot x + 4 = 0 \Rightarrow (x-2)^2 = 0 \quad / \sqrt{} \Rightarrow \left. \begin{array}{l} x_3 = 2 \\ x_4 = 2 \end{array} \right\}$$

Vježba 035

Riješite jednadžbu $(x^2 + 2x)^2 + (x + 1)^2 = 57$.

Rezultat: $x_{1,2} = -1 \pm 2 \cdot \sqrt{2}$, $x_{3,4} = -1 \pm \sqrt{7} \cdot i$.

Zadatak 036 (Dado, gimnazija)

Za koje je vrijednosti realnog parametra p zbroj kvadrata rješenja jednadžbe

$$(x-2)^2 = 2 \cdot p \cdot (x-p)$$

manji od nule?

Rješenje 036

Ponovimo!

$$x^2 + b \cdot x + c = 0 \Rightarrow x_1 + x_2 = -b, x_1 \cdot x_2 = c.$$

$$x_1^2 + x_2^2 = (x_1 + x_2)^2 - 2 \cdot x_1 \cdot x_2.$$

$$(x-2)^2 = 2 \cdot p \cdot (x-p) \Rightarrow x^2 - 4 \cdot x + 4 = 2 \cdot p \cdot x - 2 \cdot p^2 \Rightarrow x^2 - 4 \cdot x + 4 - 2 \cdot p \cdot x + 2 \cdot p^2 = 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow x^2 - 4 \cdot x - 2 \cdot p \cdot x + 4 + 2 \cdot p^2 = 0 \Rightarrow x^2 - (4 + 2 \cdot p) \cdot x + 4 + 2 \cdot p^2 = 0 \Rightarrow \left[\begin{array}{l} a = 1 \\ b = -(4 + 2 \cdot p) \\ c = 4 + 2 \cdot p^2 \end{array} \right].$$

Vrijednosti realnog parametra p dobijemo iz zadanog uvjeta:

$$x_1^2 + x_2^2 < 0 \Rightarrow (x_1 + x_2)^2 - 2 \cdot x_1 \cdot x_2 < 0 \Rightarrow (-b)^2 - 2 \cdot c < 0 \Rightarrow (4 + 2 \cdot p)^2 - 2 \cdot (4 + 2 \cdot p^2) < 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 16 + 16 \cdot p + 4 \cdot p^2 - 8 - 4 \cdot p^2 < 0 \Rightarrow 16 + 16 \cdot p - 8 < 0 \Rightarrow 16 \cdot p < -16 + 8 \Rightarrow 16 \cdot p < -8 \quad / :16 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow p < -\frac{8}{16} \Rightarrow p < -\frac{1}{2}.$$

Vježba 036

Za koje je vrijednosti realnog parametra p zbroj kvadrata rješenja jednadžbe

$$(x-2)^2 = 2 \cdot p \cdot (x-p)$$

jednak nuli?

Rezultat: $p = -\frac{1}{2}$.

Zadatak 037 (Dado, gimnazija)

Dana je kvadratna jednadžba $(x-k)^2 = 2 \cdot k \cdot (x+1)$, $k \in \mathbb{R}$. Za koje je k jedno rješenje jednadžbe jednako nuli?

Rješenje 037

Ponovimo!

$$a \cdot b = 0 \Rightarrow a = 0 \text{ ili } b = 0 \text{ ili } a = b = 0.$$

Budući da je jedno rješenje zadane jednadžbe jednako nuli, uvrstit ćemo broj 0 umjesto x u jednadžbu:

$$\left. \begin{array}{l} x=0 \\ (x-k)^2 = 2 \cdot k \cdot (x+1) \end{array} \right\} \Rightarrow (0-k)^2 = 2 \cdot k \cdot (0+1) \Rightarrow k^2 = 2 \cdot k \Rightarrow k^2 - 2 \cdot k = 0 \Rightarrow k \cdot (k-2) = 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \left. \begin{array}{l} k=0 \\ k-2=0 \end{array} \right\} \Rightarrow \left. \begin{array}{l} k_1=0 \\ k_2=2 \end{array} \right\}.$$

Vježba 037

Dana je kvadratna jednadžba $(x-k)^2 = k \cdot (x+1)$, $k \in R$. Za koje je k jedno rješenje jednadžbe jednako nuli?

Rezultat: $k_1 = 0$, $k_2 = 1$.

Zadatak 038 (Dado, gimnazija)

Riješite jednadžbu: $x^2 - a^2 \cdot (x - a \cdot b) = b^2(x + a \cdot b)$.

Rješenje 038

Ponovimo!

$$(a+b+c)^2 = a^2 + b^2 + c^2 + 2 \cdot a \cdot b + 2 \cdot a \cdot c + 2 \cdot b \cdot c.$$

$$(a-b-c)^2 = a^2 + b^2 + c^2 - 2 \cdot a \cdot b - 2 \cdot a \cdot c + 2 \cdot b \cdot c.$$

$$\begin{aligned} x^2 - a^2 \cdot (x - a \cdot b) &= b^2(x + a \cdot b) \Rightarrow x^2 - a^2 \cdot x + a^3 \cdot b = b^2 \cdot x + a \cdot b^3 \Rightarrow \\ \Rightarrow x^2 - a^2 \cdot x - b^2 \cdot x + a^3 \cdot b - a \cdot b^3 &= 0 \Rightarrow x^2 - (a^2 + b^2) \cdot x + a^3 \cdot b - a \cdot b^3 = 0 \Rightarrow \end{aligned}$$

$$\left. \begin{array}{l} a=1 \\ \Rightarrow b = -(a^2 + b^2) \\ c = a^3 \cdot b - a \cdot b^3 \end{array} \right\} \Rightarrow x_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4 \cdot a \cdot c}}{2 \cdot a} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow x_{1,2} = \frac{a^2 + b^2 \pm \sqrt{-(a^2 + b^2)^2 - 4 \cdot 1 \cdot (a^3 \cdot b - a \cdot b^3)}}{2 \cdot 1} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow x_{1,2} = \frac{a^2 + b^2 \pm \sqrt{(a^2 + b^2)^2 - 4 \cdot a^3 \cdot b + 4 \cdot a \cdot b^3}}{2} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow x_{1,2} = \frac{a^2 + b^2 \pm \sqrt{a^4 + 2 \cdot a^2 \cdot b^2 + b^4 - 4 \cdot a^3 \cdot b + 4 \cdot a \cdot b^3}}{2} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow x_{1,2} = \frac{a^2 + b^2 \pm \sqrt{a^4 + 2 \cdot a^2 \cdot b^2 + b^4 - 4 \cdot a^3 \cdot b + 4 \cdot a \cdot b^3}}{2} \Rightarrow \left[2 \cdot a^2 \cdot b^2 = 4 \cdot a^2 \cdot b^2 - 2 \cdot a^2 \cdot b^2 \right] \Rightarrow$$

$$\Rightarrow x_{1,2} = \frac{a^2 + b^2 \pm \sqrt{a^4 + 4 \cdot a^2 \cdot b^2 - 2 \cdot a^2 \cdot b^2 + b^4 - 4 \cdot a^3 \cdot b + 4 \cdot a \cdot b^3}}{2} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow x_{1,2} = \frac{a^2 + b^2 \pm \sqrt{a^4 + 4 \cdot a^2 \cdot b^2 + b^4 - 4 \cdot a^3 \cdot b - 2 \cdot a^2 \cdot b^2 + 4 \cdot a \cdot b^3}}{2} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow x_{1,2} = \frac{a^2 + b^2 \pm \sqrt{(a^2 - 2 \cdot a \cdot b - b^2)^2}}{2} \Rightarrow x_{1,2} = \frac{a^2 + b^2 \pm (a^2 - 2 \cdot a \cdot b - b^2)}{2} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \left. \begin{array}{l} x_1 = \frac{a^2 + b^2 + a^2 - 2 \cdot a \cdot b - b^2}{2} \\ x_2 = \frac{a^2 + b^2 - a^2 + 2 \cdot a \cdot b + b^2}{2} \end{array} \right\} \Rightarrow \left. \begin{array}{l} x_1 = \frac{2 \cdot a^2 - 2 \cdot a \cdot b}{2} \\ x_2 = \frac{2 \cdot a \cdot b + 2 \cdot b^2}{2} \end{array} \right\} \Rightarrow \left. \begin{array}{l} x_1 = \frac{2 \cdot a \cdot (a - b)}{2} \\ x_2 = \frac{2 \cdot b \cdot (a + b)}{2} \end{array} \right\} \Rightarrow \left. \begin{array}{l} x_1 = a \cdot (a - b) \\ x_2 = b \cdot (a + b) \end{array} \right\}.$$

Vježba 038

Riješite jednađbu: $x^2 + a \cdot b = a \cdot x + b \cdot x$.

Rezultat: $x_1 = a$, $x_2 = b$.

Zadatak 039 (Dado, gimnazija)

Dana je kvadratna jednađba $(x - k)^2 = 2 \cdot k \cdot (x + 1)$, $k \in R$. Za koje vrijednosti od k ova jednađba ima realna rješenja?

Rješenje 039

Ponovimo!

$$a \cdot b \geq 0 \Rightarrow \left. \begin{array}{l} a \geq 0 \\ b \geq 0 \end{array} \right\} \text{ i } \left. \begin{array}{l} a \leq 0 \\ b \leq 0 \end{array} \right\}.$$

Kvadratna jednađba $ax^2 + bx + c = 0$ ima realna rješenja ako je njezina diskriminanta nenegativan broj (veći ili jednak nuli):

$$b^2 - 4 \cdot a \cdot c \geq 0.$$

$$\begin{aligned} (x - k)^2 = 2 \cdot k \cdot (x + 1) &\Rightarrow x^2 - 2 \cdot k \cdot x + k^2 = 2 \cdot k \cdot x + 2 \cdot k \Rightarrow x^2 - 2 \cdot k \cdot x + k^2 - 2 \cdot k \cdot x - 2 \cdot k = 0 \Rightarrow \\ &\Rightarrow \left. \begin{array}{l} a = 1 \\ b = -4 \cdot k \\ c = k^2 - 2 \cdot k \end{array} \right\} \Rightarrow x^2 - 4 \cdot k \cdot x + k^2 - 2 \cdot k = 0 \end{aligned}$$

Budući da diskriminanta mora biti veća ili jednaka nuli, slijedi:

$$\begin{aligned} b^2 - 4 \cdot a \cdot c \geq 0 &\Rightarrow (-4 \cdot k)^2 - 4 \cdot 1 \cdot (k^2 - 2 \cdot k) \geq 0 \Rightarrow 16 \cdot k^2 - 4 \cdot k^2 + 8 \cdot k \geq 0 \Rightarrow 12 \cdot k^2 + 8 \cdot k \geq 0 \Rightarrow \\ &\Rightarrow 12 \cdot k^2 + 8 \cdot k \geq 0 \quad /:4 \Rightarrow 3 \cdot k^2 + 2 \cdot k \geq 0 \Rightarrow k \cdot (3 \cdot k + 2) \geq 0. \end{aligned}$$

Postoje dva skupa rješenja, dva slučaja:

1. slučaj

$$\left. \begin{array}{l} k \geq 0 \\ 3 \cdot k + 2 \geq 0 \end{array} \right\} \Rightarrow \left. \begin{array}{l} k \geq 0 \\ 3 \cdot k \geq -2 \quad /:3 \end{array} \right\} \Rightarrow \left. \begin{array}{l} k \geq 0 \\ k \geq -\frac{2}{3} \end{array} \right\} \Rightarrow \left[\begin{array}{l} \text{presjek} \\ \text{rješenja} \end{array} \right] \Rightarrow k \geq 0.$$

2. slučaj

$$\left. \begin{array}{l} k \leq 0 \\ 3 \cdot k + 2 \leq 0 \end{array} \right\} \Rightarrow \left. \begin{array}{l} k \leq 0 \\ 3 \cdot k \leq -2 \quad /:3 \end{array} \right\} \Rightarrow \left. \begin{array}{l} k \leq 0 \\ k \leq -\frac{2}{3} \end{array} \right\} \Rightarrow \left[\begin{array}{l} \text{presjek} \\ \text{rješenja} \end{array} \right] \Rightarrow k \leq -\frac{2}{3}.$$

Vježba 039

Dana je kvadratna jednađba $(x - k)^2 = 2 \cdot k \cdot (x + 1)$, $k \in R$. Za koje vrijednosti od k ova jednađba ima realna i različita rješenja?

Rezultat: $k < -\frac{2}{3}$ ili $k > 0$.

Zadatak 040 (Dado, gimnazija)

Dana je kvadratna jednađba $(x - k)^2 = 2 \cdot k \cdot (x + 1)$, $k \in R$. Odredi k za koji je zbroj recipročnih vrijednosti rješenja jednađbe pozitivan broj.

Rješenje 040

Ponovimo!

$$x^2 + b \cdot x + c = 0 \Rightarrow x_1 + x_2 = -b, x_1 \cdot x_2 = c.$$

$$\left. \begin{array}{l} \frac{a}{b} > 0 \Rightarrow a > 0 \\ b > 0 \end{array} \right\} \text{ i } \left. \begin{array}{l} a < 0 \\ b < 0 \end{array} \right\}.$$

$$(x-k)^2 = 2 \cdot k \cdot (x+1) \Rightarrow x^2 - 2 \cdot k \cdot x + k^2 = 2 \cdot k \cdot x + 2 \cdot k \Rightarrow x^2 - 2 \cdot k \cdot x + k^2 - 2 \cdot k \cdot x - 2 \cdot k = 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \left. \begin{array}{l} x^2 - 4 \cdot k \cdot x + k^2 - 2 \cdot k = 0 \Rightarrow b = -4 \cdot k \\ a = 1 \\ c = k^2 - 2 \cdot k \end{array} \right\}.$$

Iz uvjeta zadatka slijedi:

$$\frac{1}{x_1} + \frac{1}{x_2} > 0 \Rightarrow \frac{x_2 + x_1}{x_1 \cdot x_2} > 0 \Rightarrow \frac{-b}{c} > 0 \Rightarrow \frac{4 \cdot k}{k^2 - 2 \cdot k} > 0 \Rightarrow \frac{4 \cdot k}{k \cdot (k-2)} > 0 \Rightarrow \frac{4}{k-2} > 0 \Rightarrow k-2 > 0 \Rightarrow k > 2.$$

Vježba 040

Dana je kvadratna jednadžba $(x-k)^2 = 2 \cdot k \cdot (x+1)$, $k \in \mathbb{R}$. Odredi k za koji je zbroj recipročnih vrijednosti rješenja jednadžbe negativan broj.

Rezultat: $k < 0$.