Zadatak 001 (Marija, prehrambena škola)

Riješi kvadratnu jednadžbu: $x^2 + 3x - 10 = 0$.

Rješenje 001

1.inačica

Rješenja kvadratne jednadžbe

$$ax^2 + bx + c = 0$$

dana su formulom

$$x_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}.$$

Odredimo koeficijente: a = 1, b = 3, c = – 10 .

$$x_{1,2} = \frac{-3 \pm \sqrt{3^2 - 4 \cdot 1 \cdot (-10)}}{2 \cdot 1} = \frac{-3 \pm \sqrt{9+40}}{2} = \frac{-3 \pm \sqrt{49}}{2} = \frac{-3 \pm 7}{2},$$

$$x_1 = \frac{-3+7}{2} = \frac{4}{2} = 2, \quad x_2 = \frac{-3-7}{2} = \frac{-10}{2} = -5.$$

2.inačica

Koristit ćemo Viѐteove formule. Rješenja x_1, x_2 kvadratne jednadžbe

$$ax^2 + bx + c = 0$$

zadovoljavaju Viѐteove formule:

$$x_1 + x_2 = -\frac{b}{a} \quad , \quad x_1 \cdot x_2 = \frac{c}{a}.$$

Specijalno je za a = 1:

$$x_1 + x_2 = -b \quad , \quad x_1 \cdot x_2 = c.$$

U zadanoj jednadžbi

$$x^2 + 3x - 10 = 0.$$

zbroj rješenja je

$$x_1 + x_2 = \mathbf{-3},$$

a umnožak

$$x_1 \cdot x_2 = \mathbf{-10}.$$

Tražimo brojeve čiji je zbroj – 3, a umnožak – 10.

Uvijek radi ovako: Broj – 10 rastavi na sve moguće faktore:

– 10	
– 1	10
1	– 10
– 2	5
2	– 5

Samo faktori 2 i – 5 kad se zbroje daju rezultat – 3. Rješena su $x_1 = 2$, $x_2 = -5$.

Vježba 001

Riješi kvadratnu jednadžbu: $x^2 + 2x - 24 = 0$.

Rezultat: $x_1 = 4$, $x_2 = -6$.

Zadatak 002 (Ivana, ekonomska škola)

Riješi kvadratnu jednadžbu: $x^2 - (a + b)(x - ab) = abx$.

Rješenje 002

Riješimo se zagrade i kvadratnu jednadžbu napišemo u općem obliku $ax^2 + bx + c = 0$.

$$x^2 - ax + a^2b - bx + ab^2 - abx = 0,$$

$$x^2 - (a + b + ab)x + a^2b + ab^2 = 0.$$

$$a = 1,\ b = -(a + b + ab),\ c = a^2b + ab^2,$$

$$x_{1,2}=\frac{-b\pm\sqrt{b^2-4ac}}{2a}=\frac{a+b+ab\pm\sqrt{\left(-\left(a+b+ab\right)\right)^2-4\cdot 1\cdot\left(a^2\cdot b+a\cdot b^2\right)}}{2\cdot 1},$$

$$x_{1,2}=\frac{a+b+ab\pm\sqrt{\left(a+b+ab\right)^2-4\cdot\left(a^2\cdot b+a\cdot b^2\right)}}{2}.$$

Podsjetimo se formule za kvadrat trinoma:

$$(x + y + z)^2 = x^2 + y^2 + z^2 + 2xy + 2xz + 2yz.$$

$$x_{1,2}=\frac{a+b+ab\pm\sqrt{a^2+b^2+a^2b^2+2ab+2a^2b+2ab^2-4a^2b-4ab^2}}{2},$$

$$x_{1,2}=\frac{a+b+ab\pm\sqrt{a^2+b^2+a^2b^2+2ab-2a^2b-2ab^2}}{2}.$$

Izraz pod korijenom je kvadrat trinoma. Gledajući dva minusa zaključujemo da se može zapisati kao

$$a^2 + b^2 + a^2b^2 + 2ab - 2a^2b - 2ab^2 = (a + b - ab)^2.$$

$$x_{1,2}=\frac{a+b+ab\pm\sqrt{\left(a+b-ab\right)^2}}{2}=\frac{a+b+ab\pm\left(a+b-ab\right)}{2}.$$

$$x_1=\frac{a+b+ab+\left(a+b-ab\right)}{2}=\frac{a+b+ab+a+b-ab}{2}=\frac{2a+2b}{2}=a+b,$$

$$x_2=\frac{a+b+ab-a-b+ab}{2}=\frac{2ab}{2}=ab.$$

Vježba 002

Riješi kvadratnu jednadžbu: $bx^2 - (a - b)x - a = 0$.

Rezultat: $x_1 = -1,\ x_2 = \frac{a}{b}$.

Zadatak 003 (Tea, gimnazija)

Riješi jednadžbu: $(t + 1)^4 + (t + 5)^4 = 82$.

Rješenje 003

$$(t + 1)^4 + (t + 5)^4 = 82.$$

Uvedemo supstituciju:

$$t + 3 = y$$

pa jednadžba glasi:

$$(y - 2)^4 + (y + 2)^4 = 82.$$

Ideja zadatka je da potencije četvrtog stupnja «prevedemo» na potencije drugog stupnja. Tu će nam pomoći sljedeća formula:

$$\mathbf{a^4 + b^4 = (a^2 + b^2)^2 - 2a^2b^2}.$$

Sada je

$$(y - 2)^4 + (y + 2)^4 = 82 \;\Rightarrow\; [(y - 2)^2 + (y + 2)^2]^2 - 2\cdot(y - 2)^2\cdot(y + 2)^2 - 82 = 0 \;\Rightarrow$$
$$\Rightarrow\; [y^2 - 4y + 4 + y^2 + 4y + 4]^2 - 2\cdot((y - 2)\cdot(y + 2))^2 - 82 = 0 \;\Rightarrow$$
$$\Rightarrow\; [2y^2 + 8]^2 - 2\cdot(y^2 - 4)^2 - 82 = 0 \;\Rightarrow\; [2\cdot(y^2 + 4)]^2 - 2\cdot(y^2 - 4)^2 - 82 = 0 \;\Rightarrow$$
$$\Rightarrow\; 2^2\cdot(y^2 + 4)^2 - 2\cdot(y^2 - 4)^2 - 82 = 0 \;\; /:2 \;\Rightarrow\; 2\cdot(y^2 + 4)^2 - (y^2 - 4)^2 - 41 = 0.$$

Opet uvedemo sljedeću supstituciju (ah, te supstitucije baš su cool jer nam pojednostavljuju zadatak):

$$y^2 + 4 = x.$$

Zato možemo pisati:

$$2 \cdot (y^2 + 4)^2 - (y^2 - 4)^2 - 41 = 0 \;\Rightarrow\; 2x^2 - (x - 8)^2 - 41 = 0 \;\Rightarrow\; 2x^2 - x^2 + 16x - 64 - 41 = 0 \;\Rightarrow$$

$$\Rightarrow\; x^2 + 16x - 105 = 0.$$

Rješenja dobivene kvadratne jednadžbe nađemo pomoću formule:

$$x_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}.$$

$$x_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} = \frac{-16 \pm \sqrt{256 + 420}}{2} = \frac{-16 \pm \sqrt{676}}{2} = \frac{-16 \pm 26}{2}.$$

$$x_1 = 5 \quad , \quad x_2 = -21.$$

Vratimo se supstituciji

$$y^2 + 4 = x.$$

$$y^2 + 4 = 5 \Rightarrow y^2 = 5 - 4 \Rightarrow y^2 = 1 \;/\sqrt{\ } \Rightarrow y_{1,2} = \pm\sqrt{1} = \pm 1 \Rightarrow y_1 = 1,\; y_2 = -1.$$

$$y^2 + 4 = -21 \Rightarrow y^2 = -21 - 4 \Rightarrow y^2 = -25 \;/\sqrt{\ } \Rightarrow y_{3,4} = \pm\sqrt{-25} = \pm 5i \Rightarrow y_3 = 5i,\; y_4 = -5i.$$

Konačno iz prve supstitucije

$$t + 3 = y$$

slijede rješenja zadatka:

$$t + 3 = 1 \;\Rightarrow\; t_1 = -2,$$

$$t + 3 = -1 \;\Rightarrow\; t_2 = -4,$$

$$t + 3 = -5i \;\Rightarrow\; t_3 = -3 - 5i,$$

$$t + 3 = 5i \;\Rightarrow\; t_4 = -3 + 5i.$$

Vježba 003

Riješi jednadžbu: $(x - 7)^4 - 13 \cdot (x - 7)^2 + 36 = 0.$

Rezultat: $x_1 = 4,\; x_2 = 5,\; x_3 = 9,\; x_4 = 10.$

Zadatak 004 (Ivana, hotelijerska škola)

Odredi realni parametar c u jednadžbi $x^2 - 2x + c = 0$ tako da korijeni te jednadžbe zadovoljavaju uvjet $7x_2 - 4x_1 = 47$.

Rješenje 004

1.inačica

Za kvadratnu jednadžbu $ax^2 + bx + c = 0$ vrijedi Vièteova formula:

$$\mathbf{x_1 + x_2 = -b}.$$

Postavimo sustav jednadžbi:

$$\left.\begin{aligned} x_1 + x_2 &= 2 \;/\cdot 4 \\ -4 \cdot x_1 + 7 \cdot x_2 &= 47 \end{aligned}\right\} \Rightarrow \left.\begin{aligned} 4 \cdot x_1 + 4 \cdot x_2 &= 8 \\ -4 \cdot x_1 + 7 \cdot x_2 &= 47 \end{aligned}\right\} \Rightarrow 11 \cdot x_2 = 55 \;/:11 \Rightarrow x_2 = 5.$$

Uvrstimo rješenje $x_2 = 5$ u jednadžbu $x^2 - 2x + c = 0$ i dobijemo:

$$5^2 - 2 \cdot 5 + c = 0 \;\Rightarrow\; 25 - 10 + c = 0 \;\Rightarrow\; c = -15.$$

2.inačica

Za kvadratnu jednadžbu $ax^2 + bx + c = 0$ vrijedi Vièteova formula:

$$\mathbf{x_1 + x_2 = -b}.$$

Postavimo sustav jednadžbi:

$$\left.\begin{matrix} x_1+x_2=2 \;/\cdot 4 \\ -4\cdot x_1+7\cdot x_2=47 \end{matrix}\right\} \Rightarrow \left.\begin{matrix} 4\cdot x_1+4\cdot x_2=8 \\ -4\cdot x_1+7\cdot x_2=47 \end{matrix}\right\} \Rightarrow 11\cdot x_2=55 \;/:11 \Rightarrow x_2=5 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow x_1+x_2=2 \Rightarrow x_1+5=2 \Rightarrow x_1=-3.$$

Budući da za kvadratnu jednadžbu $x^2 + bx + c = 0$ vrijedi Vièteova formula $x_1 \cdot x_2 = c$, dobije se:

$$c = x_1 \cdot x_2 = -3 \cdot 5 = -15.$$

Vježba 004

Odredi realni parametar c u jednadžbi $x^2 - 2x + c = 0$ tako da korijeni te jednadžbe zadovoljavaju uvjet $7x_2 - 2x_1 = 41$.

Rezultat: $c = -15$.

Zadatak 005 (2A, hotelijerska škola)

Riješi jednadžbu $x^4 - 16 = 0$.

Rješenje 005

Lijevu stranu jednadžbe rastavimo na faktore po formuli:

$$a^4-b^4=\left(a^2-b^2\right)\cdot\left(a^2+b^2\right)=\left(a-b\right)\cdot\left(a+b\right)\cdot\left(a^2+b^2\right).$$

$$x^4-16=0 \Rightarrow \left(x^2-4\right)\cdot\left(x^2+4\right)=0 \Rightarrow \left(x-2\right)\cdot\left(x+2\right)\cdot\left(x^2+4\right)=0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \left[\text{a} \cdot \text{b} \cdot \text{c} = 0 \text{ ako je barem jedan faktor jednak nuli}\right] \Rightarrow$$

$$\left.\begin{matrix} x-2=0 \\ x+2=0 \\ x^2+4=0 \end{matrix}\right\} \Rightarrow \left.\begin{matrix} x_1=2 \\ x_2=-2 \\ x^2=-4 \;/\sqrt{\ } \end{matrix}\right\} \Rightarrow \left.\begin{matrix} x_1=2 \\ x_2=-2 \\ x_{3,4}=\pm\sqrt{-4} \end{matrix}\right\} \Rightarrow \left.\begin{matrix} x_1=2 \\ x_2=-2 \\ x_{3,4}=\pm 2i \end{matrix}\right\}.$$

Vježba 005

Riješi jednadžbu $x^4 - 1 = 0$.

Rezultat: $x_1 = 1$, $x_2 = -1$, $x_{3,4} = \pm i$.

Zadatak 006 (2A, hotelijerska škola)

Odredi parametar p tako da rješenja jednadžbe $4x^2 - 8px - 9 = 0$ budu suprotni brojevi ($x_1 = -x_2$).

Rješenje 006

$$4x^2-8px-9=0 \Rightarrow \begin{cases} a=4 \\ b=-8p \\ c=-9 \end{cases}$$ Iz Vièteove formule i uvjeta zadatka slijedi:

$$\left.\begin{matrix} x_1+x_2=-\frac{b}{a} \\ x_1=-x_2 \end{matrix}\right\} \Rightarrow \left.\begin{matrix} x_1+x_2=-\frac{-8p}{4} \\ x_1+x_2=0 \end{matrix}\right\} \Rightarrow \left.\begin{matrix} x_1+x_2=2p \\ x_1+x_2=0 \end{matrix}\right\} \Rightarrow 2p=0 \Rightarrow p=0.$$

Vježba 006

Odredi parametar p tako da rješenja jednadžbe $4x^2 + 8px + 9 = 0$ budu suprotni brojevi ($x_1 = -x_2$).

Rezultat: $p = 0$.

Zadatak 007 (4A, hotelijerska škola)

U jednoj dvorani broj redova jednak je broju stolica u svakom redu. Ako se broj redova udvostruči, a broj stolica u svakom redu smanji za 10, onda se ukupan broj stolica uveća za 300. Koliki je broj redova?

Rješenje 007

U dvorani je broj redova jednak broju stolica u svakom redu. Ako slovom x označimo broj redova, tada je x i broj stolica u svakom redu. Ukupan broj stolica u dvorani iznosi: $x \cdot x = x^2$.

Budući da se broj redova udvostruči, a broj stolica u svakom redu smanji za 10, ukupan broj stolica bit će:

$$2x \cdot (x - 10).$$

Taj je broj za 300 veći od prijašnjeg broja stolica:

$$2x\cdot(x-10)=x^2+300 \Rightarrow 2x^2-20x=x^2+300 \Rightarrow 2x^2-20x-x^2-300=0 \Rightarrow x^2-20x-300=0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow x_{1,2}=\frac{-b\pm\sqrt{b^2-4ac}}{2a}=\frac{20\pm\sqrt{400+1200}}{2}=\frac{20\pm\sqrt{1600}}{2}=\frac{20\pm 40}{2} \Rightarrow \begin{cases} x_1=30 \\ x_2=-10\ (\text{nema smisla})\end{cases}.$$

Broj redova je 30.

Vježba 007

U jednoj dvorani broj redova jednak je broju stolica u svakom redu. Ako se broj redova udvostruči, a broj stolica u svakom redu smanji za 10, onda se ukupan broj stolica neće promijeniti. Koliki je broj redova?

Rezultat: Broj redova je 20.

Zadatak 008 (Biba, komercijalna škola)

Nađi rješenja nejednadžbe $\frac{2x^2-1}{x^2}\le 1$.

Rješenje 008

1.inačica

Diskusija! $x^2\ne 0 \Rightarrow x\ne 0.$

Budući da je $x^2 > 0$ (jer x ne smije biti nula), cijelu nejednadžbu množimo s x^2:

$$\frac{2x^2-1}{x^2}\le 1 \;/\cdot x^2 \Rightarrow 2x^2-1\le x^2 \Rightarrow 2x^2-x^2\le 1 \Rightarrow x^2\le 1 \;/\sqrt{\ } \Rightarrow |x|\le 1.$$

Rezultat možemo napisati na dva načina:

- $x\in[-1,1]\setminus\{0\}$
- $x\in[-1,0\rangle\cup\langle 0,1]$

2.inačica

Diskusija! $x^2\ne 0 \Rightarrow x\ne 0.$

$$\frac{2x^2-1}{x^2}\le 1 \Rightarrow \frac{2x^2-1}{x^2}-1\le 0 \Rightarrow \frac{2x^2-1-x^2}{x^2}\le 0 \Rightarrow \frac{x^2-1}{x^2}\le 0.$$

Razlomak je negativan ili jednak nuli. Budući da je nazivnik pozitivan, $x^2 > 0$, znači da brojnik mora biti manji ili jednak nuli:

$$x^2-1\le 0 \Rightarrow x^2\le 1 \;/\sqrt{\ } \Rightarrow |x|\le 1.$$

Rezultat možemo napisati na dva načina:

- $x\in[-1,1]\setminus\{0\}$
- $x\in[-1,0\rangle\cup\langle 0,1]$

Vježba 008

Nađi rješenja nejednadžbe $x^2 - 4 \le 0$.

Rezultat: $x\in[-2,2]$.

Zadatak 009 (Ivan, tehnička škola)

Nađi rješenja jednadžbe $x^2 + y^2 + 2x - 4y + 5 = 0$ u skupu cijelih brojeva.

Rješenje 009

Nadopunjavanjem na potpuni kvadrat [$a^2 + 2ab + b^2 = (a + b)^2$, $a^2 - 2ab + b^2 = (a - b)^2$], dobije se:

$$x^2+y^2+2x-4y+5=0 \Rightarrow x^2+2x+y^2-4y+5=0 \Rightarrow \begin{bmatrix} 2x\ , & 2:2=1 \\ -4y\ , & 4:2=2\end{bmatrix} \Rightarrow.$$

$$\Rightarrow x^2+2x+1^2-1^2+y^2-4y+2^2-2^2+5=0 \Rightarrow (x+1)^2-1+(y-2)^2-4+5=0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow (x+1)^2+(y-2)^2=0 \Rightarrow x=-1 \;,\; y=2.$$

Vježba 009

Nađi rješenja jednadžbe $x^2 + y^2 + 2x - 4y + 6 = 0$ u skupu cijelih brojeva.

Rezultat: Nema rješenja.

Zadatak 010 (Rex, gimnazija)

Riješi jednadžbu: $\frac{x-1}{x}+\frac{x-2}{x}+\frac{x-3}{x}+\ \dots\ +\frac{3}{x}+\frac{2}{x}+\frac{1}{x}=3.$

Rješenje 010

Pomnožimo jednadžbu s x, $x \neq 0$.

$$\frac{x-1}{x}+\frac{x-2}{x}+\frac{x-3}{x}+\ \dots\ +\frac{3}{x}+\frac{2}{x}+\frac{1}{x}=3 \;/\cdot x \Rightarrow (x-1)+(x-2)+(x-3)+\ \dots\ +3+2+1=3x \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \left[1+2+3+\ \dots\ +n=\frac{n\cdot(n+1)}{2}\right] \Rightarrow 1+2+3+\ \dots\ +(x-3)+(x-2)+(x-1)=3x \Rightarrow \frac{(x-1)\cdot x}{2}=3x \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \frac{(x-1)\cdot x}{2}=3x \;/\cdot 2 \Rightarrow (x-1)\cdot x=6x \Rightarrow x^2-x=6x \Rightarrow x^2-7x=0 \Rightarrow x\cdot(x-7)=0 \Rightarrow x_1=0,\ x_2=7.$$

Rješenje jednadžbe je x = 7.

Vježba 010

Riješi jednadžbu: $\frac{x-1}{x}+\frac{x-2}{x}+\frac{x-3}{x}+\ \dots\ +\frac{3}{x}+\frac{2}{x}+\frac{1}{x}=2.$

Rezultat: x = 5.

Zadatak 011 (Ivo, ekonomska škola)

Odredi prirodni broj koji je 15 puta manji od zbroja svih prirodnih brojeva što mu prethode.

Rješenje 011

Neka je n traženi prirodni broj. Tada vrijedi:

$$n=\frac{1}{15}\cdot\left(1+2+3+\ \dots\ +(n-1)\right) \;/\cdot 15 \Rightarrow 15n=1+2+3+\ \dots\ +(n-1) \Rightarrow \left[1+2+3+\ \dots\ +n=\frac{n\cdot(n+1)}{2}\right] \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 15n=\frac{(n-1)\cdot n}{2} \;/\cdot 2 \Rightarrow 30n=n^2-n \Rightarrow n^2-31n=0 \Rightarrow n\cdot(n-31)=0 \Rightarrow n_1=0,\ n_2=31.$$

Prirodni broj je 31.

Vježba 011

Odredi prirodni broj koji je 12 puta manji od zbroja svih prirodnih brojeva što mu prethode.

Rezultat: n = 25.

Zadatak 012 (Anamarija, hotelijerska škola)

Izračunajte umnožak (produkt) rješenja jednadžbe: $\left|\frac{x^2+x-3}{x^2-x-5}\right|=1.$

Rješenje 012

Za apsolutnu vrijednost (modul) vrijedi: $|x|=\begin{cases} x, & x\geq 0 \\ -x, & x<0\end{cases}$, $\left|\frac{x}{y}\right|=\frac{|x|}{|y|}.$

Iz zadane jednadžbe slijedi:

$$\left|\frac{x^2+x-3}{x^2-x-5}\right|=1 \Rightarrow \frac{\left|x^2+x-3\right|}{\left|x^2-x-5\right|}=1 \Rightarrow \left|x^2+x-3\right|=\left|x^2-x-5\right| \Rightarrow \begin{cases} x^2+x-3=x^2-x-5 \\ x^2+x-3=-x^2+x+5\end{cases} \Rightarrow$$

$$\left|\frac{x^2+x-3}{x^2-x-5}\right|=1 \Rightarrow \begin{cases} 2x=-2 \ /:2 \\ 2x^2=8 \ /:2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x=-1 \\ x^2=4 \ /\sqrt{\ } \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x_1=-1 \\ x_{2,3}=\pm 2. \end{cases}$$

Diskusija pokazuje da ni za koje rješenje x_1, x_2 i x_3 nazivnik $x^2 - x - 5$ nije jednak nuli. Zato je traženi produkt jednak:

$$x_1 \cdot x_2 \cdot x_3 = -1 \cdot 2 \cdot (-2) = 4.$$

Vježba 012

Izračunajte zbroj (sumu) rješenja jednadžbe: $\left|\frac{x^2+x-3}{x^2-x-5}\right|=1.$

Rezultat: – 1.

Zadatak 013 (Atila, gimnazija)

Nađite treći korijen iz $\frac{1}{x_1}+\frac{1}{x_2}$, gdje su x_1 i x_2 rješenja kvadratne jednadžbe $\frac{x^2}{\sqrt{3}}+\frac{x}{\sqrt{3}}+9\sqrt{3}=0.$

Rješenje 013

$\frac{x^2}{\sqrt{3}}+\frac{x}{\sqrt{3}}+9\sqrt{3}=0 \ /\cdot\sqrt{3} \Rightarrow x^2+x+27=0.$ Uporabom Vièteovih formula dobije se:

$$\left.\begin{array}{l} x^2+x+27=0 \\ a=1,\, b=1,\, c=27 \end{array}\right\} \Rightarrow \left.\begin{array}{l} x_1+x_2=-\frac{b}{a}=-1 \\ x_1\cdot x_2=\frac{c}{a}=27 \end{array}\right\} \Rightarrow \sqrt[3]{\frac{1}{x_1}+\frac{1}{x_2}}=\sqrt[3]{\frac{x_1+x_2}{x_1\cdot x_2}}=\sqrt[3]{-\frac{1}{27}}=-\frac{1}{3}.$$

Vježba 013

Nađite treći korijen iz $\frac{1}{x_1}+\frac{1}{x_2}$, gdje su x_1 i x_2 rješenja kvadratne jednadžbe $x^2-x+8=0.$

Rezultat: 0.5.

Zadatak 014 (Marija, gimnazija)

Nađi zbroj rješenja jednadžbe: $\frac{x}{1+\frac{x}{1+\frac{x}{1-x}}}=-1.$

Rješenje 014

$$\frac{x}{1+\frac{x}{1+\frac{x}{1-x}}}=-1 \Rightarrow \frac{x}{1+\frac{x}{\frac{1-x+x}{1-x}}}=-1 \Rightarrow \frac{x}{1+\frac{x}{\frac{1}{1-x}}}=-1 \Rightarrow \frac{x}{1+x\cdot(1-x)}=-1 \Rightarrow x=-1-x\cdot(1-x) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow x^2-2x-1=0 \Rightarrow [\text{Vièteova formula}] \Rightarrow x_1+x_2=-\frac{b}{a}=2.$$

Vježba 014

Nađi umnožak rješenja jednadžbe: $\frac{x}{1+\frac{x}{1+\frac{x}{1-x}}}=-1.$

Rezultat: – 1.

Zadatak 015 (Marija, gimnazija)

Odredite sve parametre $a \in R$ takve da graf funkcije $f(x) = ax^3 + 2x^2 + x$ ima samo jednu nultočku.

Rješenje 015

$f(x)=ax^3+2x^2+x=x\cdot\left(ax^2+2x+1\right).$ Budući da je umnožak jednak nuli ako je barem jedan faktor jednak nuli, slijedi:

- jedna nultočka je x = 0
- izraz u zagradi nema realnih rješenja ako je diskriminanta negativna::

$$\left.\begin{array}{l} ax^2+2x+1=0 \\ a=a,\ b=2,\ c=1 \end{array}\right\} \Rightarrow D<0 \Rightarrow b^2-4\cdot a\cdot c<0 \Rightarrow 4-4a<0 \Rightarrow -4a<-4\ /:(-4) \Rightarrow a>1.$$

Vježba 015

Odredite sve parametre $a \in R$ takve da graf funkcije f(x) = x^3 + 2x^2 + ax ima samo jednu nultočku.

Rezultat: a > 1.

Zadatak 016 (2A, hotelijerska škola)

Riješi nejednadžbu $x^2-11x\le-24.$

Rješenje 016

Najprije sve prebacimo na lijevu stranu:

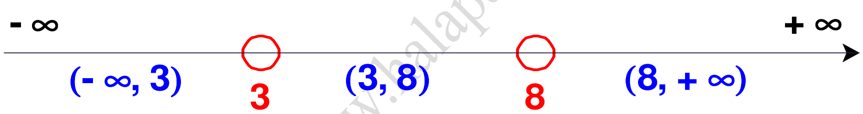
$$x^2-11x+24\le0.$$

Na lijevoj je strani nejednadžbe vrijednost kvadratne funkcije f(x) = x^2 – 11x + 24. Želimo li ustanoviti kada je kvadratna funkcija f(x) = x^2 – 11x + 24 pozitivna, negativna ili nula, najprije odredimo njezine realne nultočke:

$$\left.\begin{array}{l} x^2-11x+24=0 \\ a=1,\ b=-11,\ c=24 \end{array}\right\} \Rightarrow x_{1,2}=\frac{-b\pm\sqrt{b^2-4ac}}{2a}=\frac{11\pm\sqrt{121-4\cdot1\cdot24}}{2\cdot1}=\frac{11\pm\sqrt{121-96}}{2}=\frac{11\pm\sqrt{25}}{2}=\frac{11\pm5}{2}\Rightarrow$$

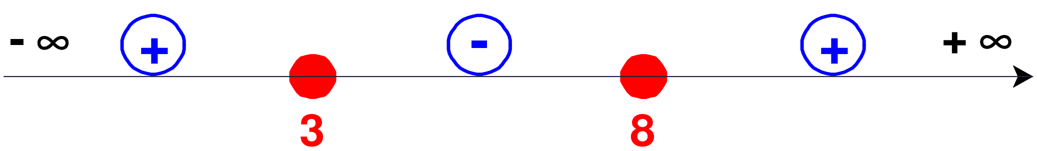
$$\Rightarrow \left\{ x_1=\frac{11+5}{2}=\frac{16}{2}=8,\quad x_2=\frac{11-5}{2}=\frac{6}{2}=3. \right.$$

Te nultočke dijele R (brojevni pravac) na intervale:



U točkama 3 i 8 vrijedi jednakost =, pa su one rješenja naše nejednadžbe (manje ili jednako, ≤). Zato ih moramo popuniti:

Iz svakog intervala odaberemo po jedan x i uvrstimo ga u f(x) = x^2 – 11x + 24. Predznak dobivene vrijednosti određuje predznak za cijeli interval.

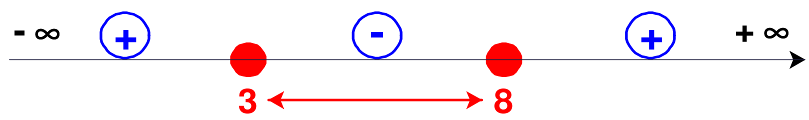


$x=1$	$x=5$	$x=10$
$f(1)=1^2-11\cdot1+24=$	$f(1)=5^2-11\cdot5+24=$	$f(1)=10^2-11\cdot10+24=$
$=1-11+24=14>0$	$=25-55+24=-6<0$	$=100-110+24=14>0$
Upišimo + iznad intervala	Upišimo – iznad intervala	Upišimo + iznad intervala
$\langle -\infty,\ 3\rangle$	$\langle 3,\ 8\rangle$	$\langle 8,\ +\infty\rangle$

Rješenje problema čine intervali koji imaju traženi predznak. Nejednadžba $x^2-11x+24\le0$ vrijedi za

$$x\in[3,\ 8].$$

Na slici to možemo označiti strjelicom:



Vježba 016

Riješi nejednadžbu $x^2 - 11x < -24$.

Rezultat: $x \in \langle\, 3,\ 8\, \rangle$.

Zadatak 017 (2A, hotelijerska škola)

Zadana je jednadžba $x^2 - 5x + 6 = 0$. Bez rješavanja jednadžbe odredite vrijednost izraza $x_1 \cdot x_2^2 + x_1^2 \cdot x_2$.

Rješenje 017

Ponovimo Vièteove formule:

$$a \cdot x^2 + b \cdot x + c = 0 \;\Rightarrow\; x_1 + x_2 = -\frac{b}{a} \quad , \quad x_1 \cdot x_2 = \frac{c}{a}.$$

Tada je:

$$\left.\begin{array}{l} x^2 - 5x + 6 = 0 \\ a = 1,\ b = -5,\ c = 6 \end{array}\right\} \Rightarrow \left.\begin{array}{l} x_1 + x_2 = -\frac{b}{a} = -\frac{-5}{1} = 5 \\ x_1 \cdot x_2 = \frac{c}{a} = \frac{6}{1} = 6 \end{array}\right\} \Rightarrow x_1^2 \cdot x_2 + x_1 \cdot x_2^2 = x_1 \cdot x_2 \cdot \left(x_1 + x_2\right) = 6 \cdot 5 = 30.$$

Vježba 017

Zadana je jednadžba $x^2 + 5x + 6 = 0$. Bez rješavanja jednadžbe odredite vrijednost izraza $x_1 \cdot x_2^2 + x_1^2 \cdot x_2$.

Rezultat: – 30.

Zadatak 018 (Iva, gimnazija)

Za koliko vrijednosti realnog broja b jednadžba $x^2 - bx + 80 = 0$ ima dva različita, pozitivna, parna, cjelobrojna rješenja?

A) 0 *B*) 1 *C*) 2 *D*) 3 *E*) beskonačno mnogo

Rješenje 018

Ponovimo Vièteove formule!

Rješenja x_1 i x_2 kvadratne jednadžbe $ax^2 + bx + c = 0$ zadovoljavaju Vièteove formule:

$$x_1 + x_2 = -\frac{b}{a} \quad , \quad x_1 \cdot x_2 = \frac{c}{a}.$$

Ako je a = 1, tada vrijedi:

$$x_1 + x_2 = -b \quad , \quad x_1 \cdot x_2 = c.$$

U jednadžbi $x^2 - bx + 80 = 0$ koeficijenti su: a = 1, b = – b, c = 80. Budući da za rješenja x_1 i x_2 vrijedi da su različita, pozitivna, parna, cjelobrojna i da je $x_1 + x_2 = -(-b) = b$, $x_1 \cdot x_2 = 80$, dobije se:

$x_1 \cdot x_2$	x_1	x_2	$x_1 + x_2 = b$
80	2	40	42
	4	20	24
	8	10	18

Odgovor je pod D.

Vježba 018

Za koliko vrijednosti realnog broja b jednadžba $x^2 - bx + 40 = 0$ ima dva različita, pozitivna, parna, cjelobrojna rješenja?

A) 0 *B*) 1 *C*) 2 *D*) 3 *E*) beskonačno mnogo

Rezultat: Odgovor je pod C.

Zadatak 019 (Maja, gimnazija)

Za koji $k \in R$ kvadratna jednadžba $k \cdot x^2 + \left(k^2 + k\right) \cdot x - 7 = 0$ ima suprotna rješenja?

Rješenje 019

Budući da su rješenja suprotna, uporabom Vièteove formule dobije se:

$$\left.\begin{array}{l} x_2 = -x_1 \Rightarrow x_1 + x_2 = 0 \\ x_1 + x_2 = -\dfrac{b}{a} \end{array}\right\} \Rightarrow \left.\begin{array}{l} k \cdot x^2 + \left(k^2 + k\right) \cdot x - 7 = 0 \\ a = k \ , \ b = k^2 + k \ , \ c = -7 \end{array}\right\} \Rightarrow -\frac{k^2 + k}{k} = 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow k^2 + k = 0 \Rightarrow k \cdot (k+1) = 0 \Rightarrow \begin{cases} k_1 = 0 \ (\text{nema smisla, jednadžba nije kvadratna}) \\ k_2 = -1. \end{cases}$$

Vježba 019

Za koji $k \in R$ kvadratna jednadžba $k \cdot x^2 + \left(k^2 - k\right) \cdot x - 7 = 0$ ima suprotna rješenja?

Rezultat: k = 1.

Zadatak 020 (Maja, gimnazija)

Za koji m kvadratna jednadžba $\frac{1}{m+1} \cdot x^2 + m \cdot x + m^2 - 1 = 0$ ima jedno rješenje?

Rješenje 020

Diskusija: $m + 1 \neq 0 \Rightarrow m \neq 1.$

Budući da jednadžba ima samo jedno rješenje (dvostruko realno rješenje), diskriminanta je jednaka nuli:

$$\left.\begin{array}{l} \dfrac{1}{m+1} \cdot x^2 + m \cdot x + m^2 - 1 = 0 \\ a = \dfrac{1}{m+1} \ , \ b = m \ , \ c = m^2 - 1 \end{array}\right\} \Rightarrow \left[\begin{array}{c} D = 0 \\ b^2 - 4 \cdot a \cdot c = 0 \end{array}\right] \Rightarrow m^2 - 4 \cdot \frac{1}{m+1} \cdot \left(m^2 - 1\right) = 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow m^2 - 4 \cdot \frac{1}{m+1} \cdot (m+1) \cdot (m-1) = 0 \Rightarrow m^2 - 4 \cdot m + 4 = 0 \Rightarrow (m-2)^2 = 0 \Rightarrow m = 2.$$

Vježba 020

Za koji m kvadratna jednadžba $x^2 + m \cdot x + m - 1 = 0$ ima jedno rješenje?

Rezultat: m = 2.