

Zadatak 201 (Lara, gimnazija)

Jednakost $\frac{x}{1+i} + \frac{y}{1-2i} = i$ točna je za realne brojeve x i y za koje vrijedi jednakost:

- A. $x \cdot y = 1$ B. $x - y = 1$ C. $x \cdot y = -1$ D. $x + y = 1$

Rješenje 201

Ponovimo!

$$\frac{a}{b} \cdot \frac{c}{d} = \frac{a \cdot c}{b \cdot d}, \quad a \cdot \frac{b}{c} = \frac{a \cdot b}{c}, \quad \frac{a}{n} + \frac{b}{n} = \frac{a+b}{n}.$$

Kompleksan broj je broj oblika

$$z = x + y \cdot i,$$

gdje su x i y realni brojevi, a i imaginarna jedinica. Broj x zove se realni dio kompleksnog broja z , a broj y imaginarni dio kompleksnog broja z . Pišemo:

$$x = \operatorname{Re} z, \quad y = \operatorname{Im} z.$$

Standardni ili algebarski oblik kompleksnog broja je oblika

$$z = x + y \cdot i,$$

gdje su x i y realni brojevi.

Za kompleksne brojeve $x + y \cdot i$ i $x - y \cdot i$ kažemo da su kompleksno konjugirani jedan drugome.

Simbol konjugiranja jest povlaka iznad broja koji se konjugira:

$$z = x + y \cdot i \Rightarrow \bar{z} = x - y \cdot i.$$

Umnožak dvaju konjugirano kompleksnih brojeva realan je broj i nenegativan broj:

$$(x + y \cdot i) \cdot (x - y \cdot i) = x^2 + y^2.$$

Proširiti razlomak znači brojnik i nazivnik tog razlomka pomnožiti istim brojem različitim od nule i jedinice

$$\frac{a}{b} = \frac{a \cdot n}{b \cdot n}, \quad n \neq 0, \quad n \neq 1.$$

Zakon distribucije množenja prema zbrajanju.

$$a \cdot (b + c) = a \cdot b + a \cdot c, \quad a \cdot b + a \cdot c = a \cdot (b + c).$$

Dva su kompleksna broja jednaka ako i samo ako su im međusobno jednaki realni dijelovi i međusobno jednaki imaginarni dijelovi, tj.

$$a + b \cdot i = c + d \cdot i \Leftrightarrow a = c, \quad b = d.$$

Skratiti razlomak znači brojnik i nazivnik tog razlomka podijeliti istim brojem različitim od nule i jedinice

$$\frac{a \cdot n}{b \cdot n} = \frac{a}{b}, \quad n \neq 0, \quad n \neq 1.$$

$$\frac{x}{1+i} + \frac{y}{1-2i} = i \Rightarrow \frac{x}{1+i} \cdot \frac{1-i}{1-i} + \frac{y}{1-2i} \cdot \frac{1+2i}{1+2i} = i \Rightarrow \frac{x \cdot (1-i)}{(1+i) \cdot (1-i)} + \frac{y \cdot (1+2i)}{(1-2i) \cdot (1+2i)} = i \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \frac{x - x \cdot i}{1^2 + 1^2} + \frac{y + 2 \cdot y \cdot i}{1^2 + 2^2} = i \Rightarrow \frac{x - x \cdot i}{1+1} + \frac{y + 2 \cdot y \cdot i}{1+4} = i \Rightarrow \frac{x - x \cdot i}{2} + \frac{y + 2 \cdot y \cdot i}{5} = i \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \frac{x - x \cdot i}{2} + \frac{y + 2 \cdot y \cdot i}{5} = i \cdot 10 \Rightarrow 5 \cdot (x - x \cdot i) + 2 \cdot (y + 2 \cdot y \cdot i) = 10 \cdot i \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 5 \cdot x - 5 \cdot x \cdot i + 2 \cdot y + 4 \cdot y \cdot i = 10 \cdot i \Rightarrow 5 \cdot x + 2 \cdot y - 5 \cdot x \cdot i + 4 \cdot y \cdot i = 10 \cdot i \Rightarrow$$

$$\Rightarrow (5 \cdot x + 2 \cdot y) + (-5 \cdot x \cdot i + 4 \cdot y \cdot i) = 10 \cdot i \Rightarrow (5 \cdot x + 2 \cdot y) + (-5 \cdot x + 4 \cdot y) \cdot i = 0 + 10 \cdot i \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \left[\begin{array}{l} \text{jednakost kompleksnih} \\ \text{brojeva} \end{array} \right] \Rightarrow \left. \begin{array}{l} 5 \cdot x + 2 \cdot y = 0 \\ -5 \cdot x + 4 \cdot y = 10 \end{array} \right\} \Rightarrow \left[\begin{array}{l} \text{metoda suprotnih} \\ \text{koeficijenata} \end{array} \right] \Rightarrow 6 \cdot y = 10 \Rightarrow \\ \Rightarrow 6 \cdot y = 10 \text{ / : } 6 \Rightarrow y = \frac{10}{6} \Rightarrow y = \frac{10}{6} \Rightarrow y = \frac{5}{3}.$$

Računamo x.

$$\left. \begin{array}{l} 5 \cdot x + 2 \cdot y = 0 \\ y = \frac{5}{3} \end{array} \right\} \Rightarrow 5 \cdot x + 2 \cdot \frac{5}{3} = 0 \Rightarrow 5 \cdot x + \frac{10}{3} = 0 \Rightarrow 5 \cdot x = -\frac{10}{3} \Rightarrow \\ \Rightarrow 5 \cdot x = -\frac{10}{3} \text{ / } \cdot \frac{1}{5} \Rightarrow x = -\frac{2}{3}.$$

Dakle,

$$(x, y) = \left(-\frac{2}{3}, \frac{5}{3} \right).$$

Sada je:

$$x + y = -\frac{2}{3} + \frac{5}{3} \Rightarrow x + y = \frac{-2+5}{3} \Rightarrow x + y = \frac{3}{3} \Rightarrow x + y = \frac{3}{3} \Rightarrow x + y = 1.$$

Odgovor je pod D.

Vježba 201

Jednakost $\frac{x}{1+i} + \frac{y}{1-2i} = i$ točna je za realne brojeve x i y za koje vrijedi jednakost:

A. $x \cdot y = 1$ B. $x - y = 1$ C. $x \cdot y = -1$ D. $x + y = 1$

Rezultat: D.

Zadatak 202 (Matej, gimnazija)

Pokazati da je $z = \frac{(1+i)^6 - (1-i)^6}{(1+i)^6 \cdot (1-i)^6}$ imaginaran broj.

Rješenje 202

Ponovimo!

$$\begin{aligned} (a^n)^m &= a^{n \cdot m}, & i^2 &= -1, & (a+b)^2 &= a^2 + 2 \cdot a \cdot b + b^2. \\ (a-b)^2 &= a^2 - 2 \cdot a \cdot b + b^2, & a^n \cdot b^n &= (a \cdot b)^n, & (-a)^3 &= -a^3. \\ a^1 &= a, & a^n \cdot a^m &= a^{n+m}, & i^3 &= -i, & \frac{a^n}{a^m} &= a^{n-m}. \end{aligned}$$

Kompleksan broj je broj oblika

$$z = x + y \cdot i,$$

gdje su x i y realni brojevi, a i imaginarna jedinica. Broj x zove se realni dio kompleksnog broja z, a broj y imaginarni dio kompleksnog broja z. Pišemo:

$$x = \operatorname{Re} z, \quad y = \operatorname{Im} z.$$

Standardni ili algebarski oblik kompleksnog broja je oblika

$$z = x + y \cdot i,$$

gdje su x i y realni brojevi.

Za kompleksne brojeve $x + y \cdot i$ i $x - y \cdot i$ kažemo da su kompleksno konjugirani jedan drugome.

Simbol konjugiranja jest povlaka iznad broja koji se konjugira:

$$z = x + y \cdot i \Rightarrow \bar{z} = x - y \cdot i.$$

Umnožak dvaju konjugirano kompleksnih brojeva realan je broj i nenegativan broj:

$$(x + y \cdot i) \cdot (x - y \cdot i) = x^2 + y^2.$$

Imaginaran broj jednak je umnošku realnog broja b i imaginarne jedinice i.

$$b \cdot i.$$

Zakon distribucije množenja prema zbrajanju.

$$a \cdot (b + c) = a \cdot b + a \cdot c \quad , \quad a \cdot b + a \cdot c = a \cdot (b + c).$$

$$\begin{aligned} z &= \frac{(1+i)^6 - (1-i)^6}{(1+i)^6 \cdot (1-i)^6} = \frac{\left((1+i)^2\right)^3 - \left((1-i)^2\right)^3}{\left((1+i) \cdot (1-i)\right)^6} = \frac{(1+2 \cdot i+i^2)^3 - (1-2 \cdot i+i^2)^3}{(1^2+1^2)^6} = \\ &= \frac{(1+2 \cdot i-1)^3 - (1-2 \cdot i-1)^3}{(1+1)^6} = \frac{(1+2 \cdot i-1)^3 - (1-2 \cdot i-1)^3}{2^6} = \frac{(2 \cdot i)^3 - (-2 \cdot i)^3}{2^6} = \\ &= \frac{(2 \cdot i)^3 - (-(-2 \cdot i)^3)}{2^6} = \frac{(2 \cdot i)^3 + (2 \cdot i)^3}{2^6} = \frac{2 \cdot (2 \cdot i)^3}{2^6} = \frac{2 \cdot 2^3 \cdot i^3}{2^6} = \frac{2^1 \cdot 2^3 \cdot (-i)}{2^6} = \\ &= \frac{2^4 \cdot (-i)}{2^6} = \frac{2^4 \cdot (-i)}{2^6} = \frac{-i}{2^2} = -\frac{1}{4} \cdot i. \end{aligned}$$

Vježba 202

Pokazati da je $z = \frac{(1+i)^6 - (1-i)^6}{(1+i)^4 \cdot (1-i)^4}$ imaginaran broj.

Rezultat: $-i$.

Zadatak 203 (2B, TUPŠ)

Prikaži u kompleksnoj ravnini skup točaka z za koje vrijedi uvjet:

$$a) |z| = 4 \quad b) |z| < 4 \quad c) |z| \leq 4$$

Rješenje 203

Ponovimo!

$$(\sqrt{a})^2 = a.$$

Kompleksan broj je broj oblika

$$z = x + y \cdot i,$$

gdje su x i y realni brojevi, a i imaginarna jedinica. Broj x zove se realni dio kompleksnog broja z, a broj y imaginarni dio kompleksnog broja z. Pišemo:

$$x = \operatorname{Re} z \quad , \quad y = \operatorname{Im} z.$$

Standardni ili algebarski oblik kompleksnog broja je oblika

$$z = x + y \cdot i,$$

gdje su x i y realni brojevi.

Modul ili apsolutna vrijednost kompleksnog broja $z = x + y \cdot i$ definira se formulom

$$|z| = \sqrt{x^2 + y^2}.$$

Kompleksne brojeve predočujemo u koordinatnoj ravnini koju zovemo kompleksna ili Gaussova ravnina.

Kružnica je skup svih točaka u ravnini jednako udaljenih od zadane točke (središta).

Polumjer ili radijus je dužina koja spaja središte kružnice s bilo kojom točkom kružnice. Duljina polumjera označava se slovom r .

Krug je skup svih točaka ravnine kojima je udaljenost od zadane točke S manja ili jednaka zadanom broju $r > 0$ (polumjeru kruga).

Kružnica polumjera r sa središtem u ishodištu koordinatnog sustava naziva se središnja kružnica i njezina je jednadžba

$$x^2 + y^2 = r^2.$$

Krug polumjera r sa središtem u ishodištu koordinatnog sustava ima jednadžbu:

- zatvoreni krug

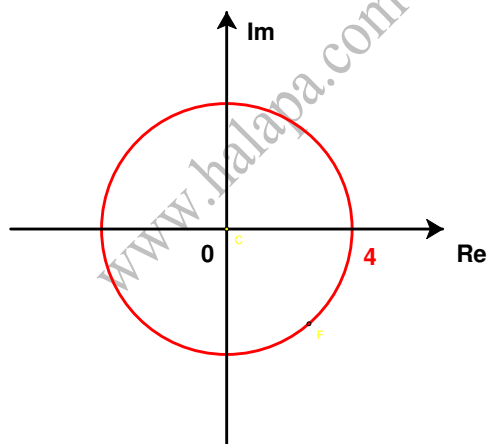
$$x^2 + y^2 \leq r^2$$

- otvoreni krug

$$x^2 + y^2 < r^2.$$

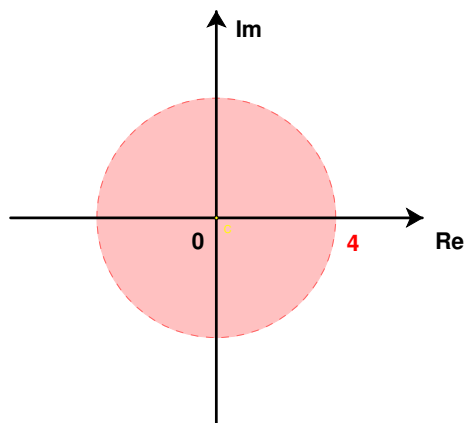
a)

$$\begin{aligned} |z| = 4 &\Rightarrow \sqrt{x^2 + y^2} = 4 \Rightarrow \sqrt{x^2 + y^2} = 4 / 2 \Rightarrow \left(\sqrt{x^2 + y^2}\right)^2 = 4^2 \Rightarrow \\ &\Rightarrow x^2 + y^2 = 4^2 \Rightarrow \left. \begin{array}{l} x^2 + y^2 = r^2 \\ x^2 + y^2 = 4^2 \end{array} \right\} \Rightarrow r = 4. \end{aligned}$$



b)

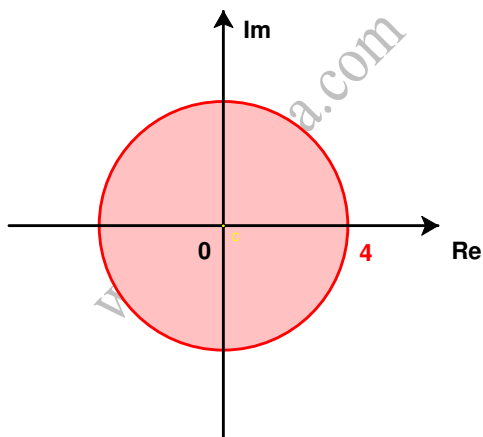
$$\begin{aligned} |z| < 4 &\Rightarrow \sqrt{x^2 + y^2} < 4 \Rightarrow \sqrt{x^2 + y^2} < 4 / 2 \Rightarrow \left(\sqrt{x^2 + y^2}\right)^2 < 4^2 \Rightarrow \\ &\Rightarrow x^2 + y^2 < 4^2 \Rightarrow \left. \begin{array}{l} x^2 + y^2 < r^2 \\ x^2 + y^2 < 4^2 \end{array} \right\} \Rightarrow r = 4. \end{aligned}$$



c)

$$|z| \leq 4 \Rightarrow \sqrt{x^2 + y^2} \leq 4 \Rightarrow \sqrt{x^2 + y^2} \leq 4 / 2 \Rightarrow \left(\sqrt{x^2 + y^2} \right)^2 \leq 4^2 \Rightarrow$$

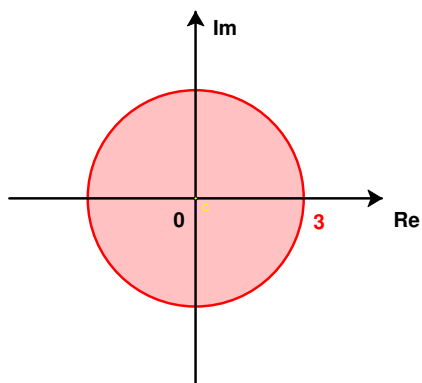
$$\Rightarrow x^2 + y^2 \leq 4^2 \Rightarrow \left. \begin{array}{l} x^2 + y^2 \leq r^2 \\ x^2 + y^2 \leq 4^2 \end{array} \right\} \Rightarrow r = 4.$$



Vježba 203

Prikaži u kompleksnoj ravnini skup točaka z za koje vrijedi uvjet $|z| \leq 3$.

Rezultat:



Zadatak 204 (Tomislav, gimnazija)

Jedan faktor u rastavu polinoma $x^4 - 1$ na faktore jest i kompleksan broj:

- A. $1 - x \cdot i$ B. $x - i$ C. $-1 - x \cdot i$ D. $-i$

Rješenje 204

Ponovimo!

$$(a^n)^m = a^{n \cdot m}, \quad a^2 - b^2 = (a - b) \cdot (a + b).$$

Kompleksan broj je broj oblika

$$z = x + y \cdot i,$$

gdje su x i y realni brojevi, a i imaginarna jedinica. Broj x zove se realni dio kompleksnog broja z , a broj y imaginarni dio kompleksnog broja z . Pišemo:

$$x = \operatorname{Re} z, \quad y = \operatorname{Im} z.$$

Standardni ili algebarski oblik kompleksnog broja je oblika

$$z = x + y \cdot i,$$

gdje su x i y realni brojevi.

Za kompleksne brojeve $x + y \cdot i$ i $x - y \cdot i$ kažemo da su kompleksno konjugirani jedan drugome.

Simbol konjugiranja jest povlaka iznad broja koji se konjugira:

$$z = x + y \cdot i \Rightarrow \bar{z} = x - y \cdot i.$$

Umnožak dvaju konjugirano kompleksnih brojeva realan je broj i nenegativan broj:

$$(x + y \cdot i) \cdot (x - y \cdot i) = x^2 + y^2.$$

$$\begin{aligned} x^4 - 1 &= (x^2)^2 - 1^2 = (x^2 - 1) \cdot (x^2 + 1) = (x - 1) \cdot (x + 1) \cdot (x - i) \cdot (x + i) = \\ &= (x - 1) \cdot (x + 1) \cdot (x - i) \cdot (x + i). \end{aligned}$$

Odgovor je pod B.

Vježba 204

Jedan faktor u rastavu polinoma $x^4 - 1$ na faktore jest i kompleksan broj:

- A. $1 - x \cdot i$ B. $x + i$ C. $-1 - x \cdot i$ D. $-i$

Rezultat: B.

Zadatak 205 (Miroslav, gimnazija)

Kompleksan broj z iz prvog kvadranta kompleksne ravnine ima svojstvo da je $\operatorname{Re}(z)$ četiri puta veći od $\operatorname{Im}(z)$. Koliko puta je $\operatorname{Re}(z^2)$ veći od $\operatorname{Im}(z^2)$?

- A. 16 B. 1.875 C. 2.85 D. 2.55

Rješenje 205

Ponovimo!

$$i^2 = -1, \quad (a \cdot b)^n = a^n \cdot b^n, \quad (a + b)^2 = a^2 + 2 \cdot a \cdot b + b^2.$$

Kompleksan broj je broj oblika

$$z = x + y \cdot i,$$

gdje su x i y realni brojevi, a i imaginarna jedinica. Broj x zove se realni dio kompleksnog broja z , a broj y imaginarni dio kompleksnog broja z . Pišemo:

$$x = \operatorname{Re} z, \quad y = \operatorname{Im} z.$$

Standardni ili algebarski oblik kompleksnog broja je oblika

$$z = x + y \cdot i,$$

gdje su x i y realni brojevi.

Skratiti razlomak znači brojnik i nazivnik tog razlomka podijeliti istim brojem različitim od nule i

jedinice

$$\frac{a \cdot n}{b \cdot n} = \frac{a}{b}, \quad n \neq 0, \quad n \neq 1.$$

Kako izračunati koliko je puta broj b veći od broja a ?

$$\frac{b}{a} = ?.$$

Iz uvjeta

$$\operatorname{Re}(z) = 4 \cdot \operatorname{Im}(z)$$

sljedi da kompleksan broj ima oblik

$$z = 4 \cdot x + x \cdot i, \quad x > 0.$$

Računamo omjer:

$$\begin{aligned} \frac{\operatorname{Re}(z^2)}{\operatorname{Im}(z^2)} &= \frac{\operatorname{Re}\left((4 \cdot x + x \cdot i)^2\right)}{\operatorname{Im}\left((4 \cdot x + x \cdot i)^2\right)} \Rightarrow \frac{\operatorname{Re}(z^2)}{\operatorname{Im}(z^2)} = \frac{\operatorname{Re}\left(16 \cdot x^2 + 8 \cdot x^2 \cdot i + (x \cdot i)^2\right)}{\operatorname{Im}\left(16 \cdot x^2 + 8 \cdot x^2 \cdot i + (x \cdot i)^2\right)} \Rightarrow \\ &\Rightarrow \frac{\operatorname{Re}(z^2)}{\operatorname{Im}(z^2)} = \frac{\operatorname{Re}\left(16 \cdot x^2 + 8 \cdot x^2 \cdot i + x^2 \cdot i^2\right)}{\operatorname{Im}\left(16 \cdot x^2 + 8 \cdot x^2 \cdot i + x^2 \cdot i^2\right)} \Rightarrow \frac{\operatorname{Re}(z^2)}{\operatorname{Im}(z^2)} = \frac{\operatorname{Re}\left(16 \cdot x^2 + 8 \cdot x^2 \cdot i + x^2 \cdot (-1)\right)}{\operatorname{Im}\left(16 \cdot x^2 + 8 \cdot x^2 \cdot i + x^2 \cdot (-1)\right)} \Rightarrow \\ &\Rightarrow \frac{\operatorname{Re}(z^2)}{\operatorname{Im}(z^2)} = \frac{\operatorname{Re}\left(16 \cdot x^2 + 8 \cdot x^2 \cdot i + x^2 \cdot i^2\right)}{\operatorname{Im}\left(16 \cdot x^2 + 8 \cdot x^2 \cdot i + x^2 \cdot i^2\right)} \Rightarrow \frac{\operatorname{Re}(z^2)}{\operatorname{Im}(z^2)} = \frac{\operatorname{Re}\left(16 \cdot x^2 + 8 \cdot x^2 \cdot i + x^2 \cdot (-1)\right)}{\operatorname{Im}\left(16 \cdot x^2 + 8 \cdot x^2 \cdot i + x^2 \cdot (-1)\right)} \Rightarrow \\ &\Rightarrow \frac{\operatorname{Re}(z^2)}{\operatorname{Im}(z^2)} = \frac{\operatorname{Re}\left(16 \cdot x^2 + 8 \cdot x^2 \cdot i - x^2\right)}{\operatorname{Im}\left(16 \cdot x^2 + 8 \cdot x^2 \cdot i - x^2\right)} \Rightarrow \frac{\operatorname{Re}(z^2)}{\operatorname{Im}(z^2)} = \frac{\operatorname{Re}\left(15 \cdot x^2 + 8 \cdot x^2 \cdot i\right)}{\operatorname{Im}\left(15 \cdot x^2 + 8 \cdot x^2 \cdot i\right)} \Rightarrow \\ &\Rightarrow \frac{\operatorname{Re}(z^2)}{\operatorname{Im}(z^2)} = \frac{15 \cdot x^2}{8 \cdot x^2} \Rightarrow \frac{\operatorname{Re}(z^2)}{\operatorname{Im}(z^2)} = \frac{15 \cdot x^2}{8 \cdot x^2} \Rightarrow \frac{\operatorname{Re}(z^2)}{\operatorname{Im}(z^2)} = \frac{15}{8} \Rightarrow \frac{\operatorname{Re}(z^2)}{\operatorname{Im}(z^2)} = 1.875. \end{aligned}$$

Odgovor je pod B.

Vježba 205

Kompleksan broj z iz prvog kvadranta kompleksne ravnine ima svojstvo da je $\operatorname{Im}(z)$ četiri puta manji od $\operatorname{Re}(z)$. Koliko puta je $\operatorname{Re}(z^2)$ veći od $\operatorname{Im}(z^2)$?

- A. 16 B. 1.875 C. 2.85 D. 2.55

Rezultat: B.

Zadatak 206 (Dragica, srednja škola)

Iz $(1-i)^5 = a + b \cdot i$ slijedi:

- A. $a - b = 1$ B. $a + b = 0$ C. $a + b = -1$ D. $a - b = 0$

Rješenje 206

Ponovimo!

$$i^2 = -1, \quad i^3 = -i, \quad a^1 = a, \quad a^n \cdot a^m = a^{n+m}, \quad (a \cdot b)^n = a^n \cdot b^n.$$

$$(a-b)^3 = a^3 - 3 \cdot a^2 \cdot b + 3 \cdot a \cdot b^2 - b^3, \quad (a-b)^2 = a^2 - 2 \cdot a \cdot b + b^2, \quad (a^n)^m = a^{n \cdot m}.$$

Zakon distribucije množenja prema zbrajanju.

$$a \cdot (b+c) = a \cdot b + a \cdot c, \quad a \cdot b + a \cdot c = a \cdot (b+c).$$

Kompleksan broj je broj oblika

$$z = x + y \cdot i,$$

gdje su x i y realni brojevi, a i imaginarna jedinica. Broj x zove se realni dio kompleksnog broja z , a broj y imaginarni dio kompleksnog broja z . Pišemo:

$$x = \operatorname{Re} z, \quad y = \operatorname{Im} z.$$

Standardni ili algebarski oblik kompleksnog broja je oblika

$$z = x + y \cdot i,$$

gdje su x i y realni brojevi.

Dva su kompleksna broja jednaka ako i samo ako su im međusobno jednaki realni dijelovi i međusobno jednaki imaginarni dijelovi, tj.

$$a + b \cdot i = c + d \cdot i \Leftrightarrow a = c, \quad b = d.$$

1. inačica

$$\begin{aligned} (1-i)^5 = a + b \cdot i &\Rightarrow (1-i)^3 \cdot (1-i)^2 = a + b \cdot i \Rightarrow \\ &\Rightarrow (1^3 - 3 \cdot 1^2 \cdot i + 3 \cdot 1 \cdot i^2 - i^3) \cdot (1 - 2 \cdot i + i^2) = a + b \cdot i \Rightarrow \\ &\Rightarrow (1 - 3 \cdot 1 \cdot i + 3 \cdot 1 \cdot (-1) - (-i)) \cdot (1 - 2 \cdot i - 1) = a + b \cdot i \Rightarrow \\ &\Rightarrow (1 - 3 \cdot i - 3 + i) \cdot (1 - 2 \cdot i - 1) = a + b \cdot i \Rightarrow (-2 - 2 \cdot i) \cdot (-2 \cdot i) = a + b \cdot i \Rightarrow \\ &\Rightarrow 4 \cdot i + 4 \cdot i^2 = a + b \cdot i \Rightarrow 4 \cdot i + 4 \cdot (-1) = a + b \cdot i \Rightarrow 4 \cdot i - 4 = a + b \cdot i \Rightarrow \\ &\Rightarrow a + b \cdot i = -4 + 4 \cdot i \Rightarrow \left[\begin{array}{l} \text{jednakost} \\ \text{kompleksnih} \\ \text{brojeva} \end{array} \right] \Rightarrow \left. \begin{array}{l} a = -4 \\ b = 4 \end{array} \right\} \Rightarrow a + b = -4 + 4 \Rightarrow \\ &\Rightarrow a + b = -4 + 4 \Rightarrow a + b = 0. \end{aligned}$$

Odgovor je pod B.

2. inačica

$$\begin{aligned} (1-i)^5 = a + b \cdot i &\Rightarrow (1-i)^4 \cdot (1-i)^1 = a + b \cdot i \Rightarrow \left((1-i)^2 \right)^2 \cdot (1-i) = a + b \cdot i \Rightarrow \\ &\Rightarrow (1 - 2 \cdot i + i^2)^2 \cdot (1-i) = a + b \cdot i \Rightarrow (1 - 2 \cdot i - 1)^2 \cdot (1-i) = a + b \cdot i \Rightarrow \\ &\Rightarrow (1 - 2 \cdot i - 1)^2 \cdot (1-i) = a + b \cdot i \Rightarrow (-2 \cdot i)^2 \cdot (1-i) = a + b \cdot i \Rightarrow (-2)^2 \cdot i^2 \cdot (1-i) = a + b \cdot i \Rightarrow \\ &\Rightarrow 4 \cdot i^2 \cdot (1-i) = a + b \cdot i \Rightarrow 4 \cdot (-1) \cdot (1-i) = a + b \cdot i \Rightarrow -4 \cdot (1-i) = a + b \cdot i \Rightarrow \\ &\Rightarrow -4 + 4 \cdot i = a + b \cdot i \Rightarrow a + b \cdot i = -4 + 4 \cdot i \Rightarrow \left[\begin{array}{l} \text{jednakost} \\ \text{kompleksnih} \\ \text{brojeva} \end{array} \right] \Rightarrow \left. \begin{array}{l} a = -4 \\ b = 4 \end{array} \right\} \Rightarrow \\ &\Rightarrow a + b = -4 + 4 \Rightarrow a + b = -4 + 4 \Rightarrow a + b = 0. \end{aligned}$$

Odgovor je pod B.

Vježba 206

Iz $(1-i)^5 - a - b \cdot i = 0$ slijedi:

$$A. \frac{a}{b} = 1 \quad B. \frac{a}{b} = 0 \quad C. \frac{b}{a} = -1 \quad D. a \cdot b = 16$$

Rezultat: C.

Zadatak 207 (Sanja, gimnazija)

Ako je $z = 2 + 11 \cdot i$, onda je $\sqrt[3]{z} + \sqrt[3]{\bar{z}} = 4$. Dokazati!

Rješenje 207

Ponovimo!

$$i^2 = -1, \quad i^3 = -i, \quad \sqrt[3]{a^3} = a.$$
$$(a+b)^3 = a^3 + 3 \cdot a^2 \cdot b + 3 \cdot a \cdot b^2 + b^3, \quad (a-b)^3 = a^3 - 3 \cdot a^2 \cdot b + 3 \cdot a \cdot b^2 - b^3.$$

Kompleksan broj je broj oblika

$$z = x + y \cdot i,$$

gdje su x i y realni brojevi, a i imaginarna jedinica. Broj x zove se realni dio kompleksnog broja z , a broj y imaginarni dio kompleksnog broja z . Pišemo:

$$x = \operatorname{Re} z, \quad y = \operatorname{Im} z.$$

Standardni ili algebarski oblik kompleksnog broja je oblika

$$z = x + y \cdot i,$$

gdje su x i y realni brojevi.

Za kompleksne brojeve $x + y \cdot i$ i $x - y \cdot i$ kažemo da su kompleksno konjugirani jedan drugome.

Simbol konjugiranja jest povlaka iznad broja koji se konjugira:

$$z = x + y \cdot i \Rightarrow \bar{z} = x - y \cdot i.$$

Zakon distribucije množenja prema zbrajanju:

$$a \cdot (b+c) = a \cdot b + a \cdot c, \quad a \cdot b + a \cdot c = a \cdot (b+c).$$

Uočimo da je:

- $(2+i)^3 = 2^3 + 3 \cdot 2^2 \cdot i + 3 \cdot 2 \cdot i^2 + i^3 = 8 + 3 \cdot 4 \cdot i + 6 \cdot (-1) - i = 8 + 12 \cdot i - 6 - i = 2 + 11 \cdot i$
- $(2-i)^3 = 2^3 - 3 \cdot 2^2 \cdot i + 3 \cdot 2 \cdot i^2 - i^3 = 8 - 3 \cdot 4 \cdot i + 6 \cdot (-1) - (-i) = 8 - 12 \cdot i - 6 + i = 2 - 11 \cdot i.$

Sada je:

$$\sqrt[3]{z} + \sqrt[3]{\bar{z}} = \left[\begin{array}{l} z = 2 + 11 \cdot i = (2+i)^3 \\ \bar{z} = 2 - 11 \cdot i = (2-i)^3 \end{array} \right] = \sqrt[3]{(2+i)^3} + \sqrt[3]{(2-i)^3} = 2+i + 2-i = 2+i+2-i = 4.$$

Vježba 207

Ako je $z = 2 + 11 \cdot i$, onda je $\sqrt[3]{z} - \sqrt[3]{\bar{z}} = 2 \cdot i$. Dokazati!

Rezultat: Dokaz analogan.

Zadatak 208 (Iva, gimnazija)

Vrijednost izraza $(1+i\cdot\sqrt{3})^3 \cdot \left(\frac{1}{\sqrt{2}} - \frac{i}{\sqrt{2}}\right)^{-2}$ jednaka je:

A. $\frac{3}{2} \cdot \sqrt{\frac{3}{2}} - 4 \cdot i$ B. $\frac{1-i\cdot\sqrt{3}}{2}$ C. $-8 \cdot i$ D. $\sqrt{6} + i \cdot \sqrt{6}$ E. -8

Rješenje 208

Ponovimo!

$$a^n \cdot a^m = a^{n+m}, \quad a^1 = a, \quad \frac{a}{n} - \frac{b}{n} = \frac{a-b}{n}, \quad \left(\frac{a}{b}\right)^{-n} = \left(\frac{b}{a}\right)^n, \quad i^2 = -1.$$

$$(a+b)^2 = a^2 + 2 \cdot a \cdot b + b^2, \quad (a \cdot b)^n = a^n \cdot b^n, \quad \left(\frac{a}{b}\right)^n = \frac{a^n}{b^n}, \quad i^3 = -i.$$

$$(a-b)^2 = a^2 - 2 \cdot a \cdot b + b^2, \quad (\sqrt{a})^2 = a, \quad (a-b) \cdot (a+b) = a^2 - b^2.$$

$$n = \frac{n}{1}, \quad (a+b)^3 = a^3 + 3 \cdot a^2 \cdot b + 3 \cdot a \cdot b^2 + b^3.$$

Zakon distribucije množenja prema zbrajanju.

$$a \cdot (b+c) = a \cdot b + a \cdot c, \quad a \cdot b + a \cdot c = a \cdot (b+c).$$

Proširiti razlomak znači brojnik i nazivnik tog razlomka pomnožiti istim brojem različitim od nule i jedinice

$$\frac{a}{b} = \frac{a \cdot n}{b \cdot n}, \quad n \neq 0, \quad n \neq 1.$$

Skratiti razlomak znači brojnik i nazivnik tog razlomka podijeliti istim brojem različitim od nule i jedinice

$$\frac{a \cdot n}{b \cdot n} = \frac{a}{b}, \quad n \neq 0, \quad n \neq 1.$$

Kompleksan broj je broj oblika

$$z = x + y \cdot i,$$

gdje su x i y realni brojevi, a i imaginarna jedinica. Broj x zove se realni dio kompleksnog broja z, a broj y imaginarni dio kompleksnog broja z. Pišemo:

$$x = \operatorname{Re} z, \quad y = \operatorname{Im} z.$$

Standardni ili algebarski oblik kompleksnog broja je oblika

$$z = x + y \cdot i,$$

gdje su x i y realni brojevi.

1. inačica

$$\begin{aligned} (1+i\cdot\sqrt{3})^3 \cdot \left(\frac{1}{\sqrt{2}} - \frac{i}{\sqrt{2}}\right)^{-2} &= (1+i\cdot\sqrt{3})^2 \cdot (1+i\cdot\sqrt{3})^1 \cdot \left(\frac{1-i}{\sqrt{2}}\right)^{-2} = \\ &= \left(1+2\cdot i \cdot \sqrt{3} + (i\cdot\sqrt{3})^2\right) \cdot (1+i\cdot\sqrt{3}) \cdot \left(\frac{\sqrt{2}}{1-i}\right)^2 = \\ &= \left(1+2\cdot i \cdot \sqrt{3} + i^2 \cdot (\sqrt{3})^2\right) \cdot (1+i\cdot\sqrt{3}) \cdot \frac{(\sqrt{2})^2}{(1-i)^2} = \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= (1+2 \cdot i \cdot \sqrt{3} + (-1) \cdot 3) \cdot (1+i \cdot \sqrt{3}) \cdot \frac{2}{1-2 \cdot i+i^2} = (1+2 \cdot i \cdot \sqrt{3} - 3) \cdot (1+i \cdot \sqrt{3}) \cdot \frac{2}{1-2 \cdot i-1} = \\
&= (-2+2 \cdot i \cdot \sqrt{3}) \cdot (1+i \cdot \sqrt{3}) \cdot \frac{2}{1-2 \cdot i-1} = -2 \cdot (1-i \cdot \sqrt{3}) \cdot (1+i \cdot \sqrt{3}) \cdot \frac{2}{-2 \cdot i} = \\
&= -2 \cdot (1-i \cdot \sqrt{3}) \cdot (1+i \cdot \sqrt{3}) \cdot \frac{2}{-2 \cdot i} = (1-i \cdot \sqrt{3}) \cdot (1+i \cdot \sqrt{3}) \cdot \frac{2}{i} = \\
&= \left(1^2 - (i \cdot \sqrt{3})^2\right) \cdot \frac{2}{i} = \left(1 - i^2 \cdot (\sqrt{3})^2\right) \cdot \frac{2}{i} = (1 - (-1) \cdot 3) \cdot \frac{2}{i} = (1+3) \cdot \frac{2}{i} = 4 \cdot \frac{2}{i} = \\
&= \frac{4}{1} \cdot \frac{2}{i} = \frac{8}{i} = \frac{8}{i} \cdot \frac{i}{i} = \frac{8 \cdot i}{i^2} = \frac{8 \cdot i}{-1} = -8 \cdot i.
\end{aligned}$$

Odgovor je pod C.

2. inačica

$$\begin{aligned}
&(1+i \cdot \sqrt{3})^3 \cdot \left(\frac{1}{\sqrt{2}} - \frac{i}{\sqrt{2}}\right)^{-2} = \\
&= \left(1^3 + 3 \cdot 1^2 \cdot i \cdot \sqrt{3} + 3 \cdot 1 \cdot (i \cdot \sqrt{3})^2 + (i \cdot \sqrt{3})^3\right) \cdot \left(\frac{1-i}{\sqrt{2}}\right)^{-2} = \\
&= \left(1 + 3 \cdot 1 \cdot i \cdot \sqrt{3} + 3 \cdot 1 \cdot i^2 \cdot (\sqrt{3})^2 + i^3 \cdot (\sqrt{3})^3\right) \cdot \left(\frac{\sqrt{2}}{1-i}\right)^2 = \\
&= \left(1 + 3 \cdot i \cdot \sqrt{3} + 3 \cdot 1 \cdot (-1) \cdot 3 - i \cdot (\sqrt{3})^2 \cdot (\sqrt{3})^1\right) \cdot \frac{(\sqrt{2})^2}{(1-i)^2} = \\
&= (1 + 3 \cdot i \cdot \sqrt{3} - 9 - i \cdot 3 \cdot \sqrt{3}) \cdot \frac{2}{1-2 \cdot i+i^2} = (1 + 3 \cdot i \cdot \sqrt{3} - 9 - 3 \cdot i \cdot \sqrt{3}) \cdot \frac{2}{1-2 \cdot i-1} = \\
&= (1 + 3 \cdot i \cdot \sqrt{3} - 9 - 3 \cdot i \cdot \sqrt{3}) \cdot \frac{2}{1-2 \cdot i-1} = -8 \cdot \frac{2}{-2 \cdot i} = 8 \cdot \frac{2}{2 \cdot i} = 8 \cdot \frac{2}{2 \cdot i} = 8 \cdot \frac{1}{i} = \frac{8}{i} = \frac{8}{i} \cdot \frac{1}{1} = \\
&= \frac{8}{i} = \frac{8}{i} \cdot \frac{i}{i} = \frac{8 \cdot i}{i^2} = \frac{8 \cdot i}{-1} = -8 \cdot i.
\end{aligned}$$

Odgovor je pod C.

Vježba 208

Vrijednost izraza $(i \cdot \sqrt{3} + 1)^3 \cdot \left(\frac{1}{\sqrt{2}} - \frac{i}{\sqrt{2}}\right)^{-2}$ jednaka je:

- A. $\frac{3}{2} \cdot \sqrt{\frac{3}{2}} - 4 \cdot i$ B. $\frac{1-i \cdot \sqrt{3}}{2}$ C. $-8 \cdot i$ D. $\sqrt{6} + i \cdot \sqrt{6}$ E. -8

Rezultat: C.

Zadatak 209 (Iva, gimnazija)

Ako je $z = \frac{-3+i}{1-2\cdot i} + 2-3\cdot i$, nađite imaginarni dio broja \bar{z} .

Rješenje 209

Ponovimo!

$$n = \frac{n}{1}, \quad \frac{a}{b} + \frac{c}{d} = \frac{a\cdot d + b\cdot c}{b\cdot d}, \quad i^2 = -1, \quad a^n \cdot a^m = a^{n+m}, \quad a^1 = a.$$

Proširiti razlomak znači brojnik i nazivnik tog razlomka pomnožiti istim brojem različitim od nule i jedinice

$$\frac{a}{b} = \frac{a\cdot n}{b\cdot n}, \quad n \neq 0, \quad n \neq 1.$$

Skratiti razlomak znači brojnik i nazivnik tog razlomka podijeliti istim brojem različitim od nule i jedinice

$$\frac{a\cdot n}{b\cdot n} = \frac{a}{b}, \quad n \neq 0, \quad n \neq 1.$$

Množenje zagrada

$$(a+b)\cdot(c+d) = a\cdot c + a\cdot d + b\cdot c + b\cdot d.$$

Zakon distribucije množenja prema zbrajanju.

$$a\cdot(b+c) = a\cdot b + a\cdot c, \quad a\cdot b + a\cdot c = a\cdot(b+c).$$

Kompleksan broj je broj oblika

$$z = x + y\cdot i,$$

gdje su x i y realni brojevi, a i imaginarna jedinica. Broj x zove se realni dio kompleksnog broja z , a broj y imaginarni dio kompleksnog broja z . Pišemo:

$$x = \operatorname{Re} z, \quad y = \operatorname{Im} z.$$

Standardni ili algebarski oblik kompleksnog broja je oblika

$$z = x + y\cdot i,$$

gdje su x i y realni brojevi.

Za kompleksne brojeve $x + y\cdot i$ i $x - y\cdot i$ kažemo da su kompleksno konjugirani jedan drugome.

Simbol konjugiranja jest povlaka iznad broja koji se konjugira:

$$z = x + y\cdot i \Rightarrow \bar{z} = x - y\cdot i.$$

Umnožak dvaju konjugirano kompleksnih brojeva realan je broj i nenegativan broj:

$$(x + y\cdot i)\cdot(x - y\cdot i) = x^2 + y^2.$$

1. inačica

$$\begin{aligned} z &= \frac{-3+i}{1-2\cdot i} + 2-3\cdot i \Rightarrow z = \frac{-3+i}{1-2\cdot i} + \frac{2-3\cdot i}{1} \Rightarrow z = \frac{-3+i+(2-3\cdot i)\cdot(1-2\cdot i)}{1-2\cdot i} \Rightarrow \\ &\Rightarrow z = \frac{-3+i+2-4\cdot i-3\cdot i+6\cdot i^2}{1-2\cdot i} \Rightarrow z = \frac{-3+i+2-4\cdot i-3\cdot i+6\cdot(-1)}{1-2\cdot i} \Rightarrow \\ &\Rightarrow z = \frac{-3+i+2-4\cdot i-3\cdot i-6}{1-2\cdot i} \Rightarrow z = \frac{-7-6\cdot i}{1-2\cdot i} \Rightarrow z = \frac{-7-6\cdot i}{1-2\cdot i} \cdot \frac{1+2\cdot i}{1+2\cdot i} \Rightarrow \\ &\Rightarrow z = \frac{(-7-6\cdot i)\cdot(1+2\cdot i)}{(1-2\cdot i)\cdot(1+2\cdot i)} \Rightarrow z = \frac{-7-14\cdot i-6\cdot i-12\cdot i^2}{1^2+2^2} \Rightarrow z = \frac{-7-14\cdot i-6\cdot i-12\cdot(-1)}{1+4} \Rightarrow \end{aligned}$$

$$\Rightarrow z = \frac{-7-14 \cdot i-6 \cdot i+12}{5} \Rightarrow z = \frac{5-20 \cdot i}{5} \Rightarrow z = \frac{5 \cdot (1-4 \cdot i)}{5} \Rightarrow z = \frac{5 \cdot (1-4 \cdot i)}{5} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow z = 1-4 \cdot i \Rightarrow \bar{z} = 1+4 \cdot i \Rightarrow \operatorname{Im}(\bar{z}) = 4.$$

2. inačica

$$z = \frac{-3+i}{1-2 \cdot i} + 2-3 \cdot i \Rightarrow z = \frac{-3+i}{1-2 \cdot i} \cdot \frac{1+2 \cdot i}{1+2 \cdot i} + 2-3 \cdot i \Rightarrow z = \frac{(-3+i) \cdot (1+2 \cdot i)}{(1-2 \cdot i) \cdot (1+2 \cdot i)} + 2-3 \cdot i \Rightarrow$$

$$\Rightarrow z = \frac{-3-6 \cdot i+i+2 \cdot i^2}{1^2+2^2} + 2-3 \cdot i \Rightarrow z = \frac{-3-6 \cdot i+i+2 \cdot (-1)}{1+4} + 2-3 \cdot i \Rightarrow$$

$$\Rightarrow z = \frac{-3-6 \cdot i+i-2}{5} + 2-3 \cdot i \Rightarrow z = \frac{-5-5 \cdot i}{5} + 2-3 \cdot i \Rightarrow z = \frac{5 \cdot (-1-i)}{5} + 2-3 \cdot i \Rightarrow$$

$$\Rightarrow z = \frac{5 \cdot (-1-i)}{5} + 2-3 \cdot i \Rightarrow z = -1-i+2-3 \cdot i \Rightarrow z = 1-4 \cdot i \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \bar{z} = 1+4 \cdot i \Rightarrow \operatorname{Im}(\bar{z}) = 4.$$

Vježba 209

Ako je $z = \frac{-3+i}{1-2 \cdot i} + 2-3 \cdot i$, nađite realni dio broja \bar{z} .

Rezultat: 1.

Zadatak 210 (Matej, gimnazija)

Riješi jednadžbu $|z| + z^2 = 0$ u skupu \mathbb{C} .

Rješenje 210

Ponovimo!

$$(a+b)^2 = a^2 + 2 \cdot a \cdot b + b^2, \quad (a \cdot b)^n = a^n \cdot b^n, \quad i^2 = -1.$$

$$a^1 = a, \quad a^n : a^m = a^{n-m}.$$

Kompleksan broj je broj oblika

$$z = x + y \cdot i,$$

gdje su x i y realni brojevi, a i imaginarna jedinica. Broj x zove se realni dio kompleksnog broja z , a broj y imaginarni dio kompleksnog broja z . Pišemo:

$$x = \operatorname{Re} z, \quad y = \operatorname{Im} z.$$

Standardni ili algebarski oblik kompleksnog broja je oblika

$$z = x + y \cdot i,$$

gdje su x i y realni brojevi.

Modul ili apsolutna vrijednost kompleksnog broja $z = x + y \cdot i$ definira se formulom

$$|z| = \sqrt{x^2 + y^2}.$$

Dva su kompleksna broja jednaka ako i samo ako su im međusobno jednaki realni dijelovi i međusobno jednaki imaginarni dijelovi, tj.

$$a + b \cdot i = c + d \cdot i \Leftrightarrow a = c, \quad b = d.$$

Da bi umnožak bio jednak nuli, dovoljno je da jedan faktor bude jednak nuli.

$$a \cdot b = 0 \Leftrightarrow a = 0 \text{ ili } b = 0 \text{ ili } a = b = 0.$$

Zakon distribucije množenja prema zbrajanju.

$$a \cdot (b+c) = a \cdot b + a \cdot c \quad , \quad a \cdot b + a \cdot c = a \cdot (b+c).$$

Za realni broj x njegova je apsolutna vrijednost (modul) broj $|x|$ koji određujemo na ovaj način:

$$|x| = \begin{cases} x, & x \geq 0 \\ -x, & x < 0. \end{cases}$$

Ako je broj x pozitivan ili nula, tada je on jednak svojoj apsolutnoj vrijednosti. Za svaki x , $x \geq 0$, vrijedi $|x| = x$.

Ako je x negativan broj, njegova apsolutna vrijednost je suprotan broj $-x$ koji je pozitivan. Za svaki x , $x < 0$, je $|x| = -x$.

Neka je kompleksni broj $z = x + y \cdot i$ i rješenje zadatka. Uvrstimo ga u jednadžbu.

$$\left. \begin{array}{l} z = x + y \cdot i \\ |z| + z^2 = 0 \end{array} \right\} \Rightarrow |x + y \cdot i| + (x + y \cdot i)^2 = 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \sqrt{x^2 + y^2} + x^2 + 2 \cdot x \cdot y \cdot i + (y \cdot i)^2 = 0 \Rightarrow \sqrt{x^2 + y^2} + x^2 + 2 \cdot x \cdot y \cdot i + y^2 \cdot i^2 = 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \sqrt{x^2 + y^2} + x^2 + 2 \cdot x \cdot y \cdot i + y^2 \cdot (-1) = 0 \Rightarrow \sqrt{x^2 + y^2} + x^2 + 2 \cdot x \cdot y \cdot i - y^2 = 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \sqrt{x^2 + y^2} + x^2 - y^2 + 2 \cdot x \cdot y \cdot i = 0 \Rightarrow \sqrt{x^2 + y^2} + x^2 - y^2 + 2 \cdot x \cdot y \cdot i = 0 + 0 \cdot i \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \left[\begin{array}{l} \text{jednakost} \\ \text{kompleksnih} \\ \text{brojeva} \end{array} \right] \Rightarrow \left. \begin{array}{l} \sqrt{x^2 + y^2} + x^2 - y^2 = 0 \\ 2 \cdot x \cdot y = 0 \end{array} \right\} \Rightarrow \left. \begin{array}{l} \sqrt{x^2 + y^2} + x^2 - y^2 = 0 \\ 2 \cdot x \cdot y = 0 \quad /: 2 \end{array} \right\} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \left. \begin{array}{l} \sqrt{x^2 + y^2} + x^2 - y^2 = 0 \\ x \cdot y = 0 \end{array} \right\}.$$

Ako u jednadžbi $x \cdot y = 0$ slijedi $x = 0$ dobije se:

$$\left. \begin{array}{l} x = 0 \\ \sqrt{x^2 + y^2} + x^2 - y^2 = 0 \end{array} \right\} \Rightarrow \sqrt{0^2 + y^2} + 0^2 - y^2 = 0 \Rightarrow \sqrt{y^2} - y^2 = 0 \Rightarrow |y| - y^2 = 0.$$

Za $y < 0$ slijedi:

$$\left. \begin{array}{l} y < 0 \\ |y| - y^2 = 0 \end{array} \right\} \Rightarrow -y - y^2 = 0 \Rightarrow -y - y^2 = 0 \quad /: (-1) \Rightarrow y + y^2 = 0 \Rightarrow y \cdot (1 + y) = 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \left. \begin{array}{l} y = 0 \text{ nije rješenje zbog } y < 0 \\ 1 + y = 0 \end{array} \right\} \Rightarrow 1 + y = 0 \Rightarrow y = -1.$$

Prvo rješenje jednadžbe glasi:

$$\bullet \left. \begin{array}{l} x = 0, \quad y = -1 \\ z = x + y \cdot i \end{array} \right\} \Rightarrow z = 0 - 1 \cdot i \Rightarrow z_1 = -i.$$

Za $y \geq 0$ slijedi:

$$\left. \begin{array}{l} y \geq 0 \\ |y| - y^2 = 0 \end{array} \right\} \Rightarrow y - y^2 = 0 \Rightarrow y \cdot (1 - y) = 0 \Rightarrow \left. \begin{array}{l} y = 0 \\ 1 - y = 0 \end{array} \right\} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \left. \begin{array}{l} y = 0 \\ -y = -1 \end{array} \right\} \Rightarrow \left. \begin{array}{l} y = 0 \\ -y = -1 \quad /: (-1) \end{array} \right\} \Rightarrow \left. \begin{array}{l} y_2 = 0 \\ y_3 = 1 \end{array} \right\}.$$

Druga dva rješenja glase:

$$\begin{aligned} & \bullet \left. \begin{array}{l} x=0, y=0 \\ z=x+y \cdot i \end{array} \right\} \Rightarrow z=0+0 \cdot i \Rightarrow z_2=0 \\ & \bullet \left. \begin{array}{l} x=0, y=1 \\ z=x+y \cdot i \end{array} \right\} \Rightarrow z=0+1 \cdot i \Rightarrow z_3=i. \end{aligned}$$

Ako u jednadžbi $x \cdot y = 0$ slijedi $y = 0$ dobije se:

$$\left. \begin{array}{l} y=0 \\ \sqrt{x^2+y^2}+x^2-y^2=0 \end{array} \right\} \Rightarrow \sqrt{x^2+0^2}+x^2-0^2=0 \Rightarrow \sqrt{x^2}+x^2=0 \Rightarrow |x|+x^2=0.$$

Za $x < 0$ slijedi:

$$\left. \begin{array}{l} x < 0 \\ |x|+x^2=0 \end{array} \right\} \Rightarrow -x+x^2=0 \Rightarrow x \cdot (-1+x)=0 \Rightarrow \left. \begin{array}{l} x=0 \\ -1+x=0 \end{array} \right\} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \left. \begin{array}{l} x=0 \text{ nije rješenje zbog } x < 0 \\ x=1 \text{ nije rješenje zbog } x < 0 \end{array} \right\}.$$

Za $x \geq 0$ slijedi:

$$\left. \begin{array}{l} x \geq 0 \\ |x|+x^2=0 \end{array} \right\} \Rightarrow x+x^2=0 \Rightarrow x \cdot (1+x)=0 \Rightarrow \left. \begin{array}{l} x=0 \\ 1+x=0 \end{array} \right\} \Rightarrow \left. \begin{array}{l} x=0 \\ x=-1 \end{array} \right\} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \left. \begin{array}{l} x=0 \\ x=-1 \text{ nije rješenje zbog } x \geq 0 \end{array} \right\} \Rightarrow x=0 \text{ taj slučaj je već riješen.}$$

Vježba 210

Riješi jednadžbu $|z| = -z^2$ u skupu \mathbb{C} .

Rezultat: $z_1 = 0, z_2 = i, z_3 = -i$.

Zadatak 211 (Ružica, srednja škola)

Dokaži identitet $(1+i)^{100} = -2^{50}$.

Rješenje 211

Ponovimo!

$$(a^n)^m = a^{n \cdot m}, \quad (a \cdot b)^n = a^n \cdot b^n, \quad (-1)^{2 \cdot n+1} = -1.$$

$$(a+b)^2 = a^2 + 2 \cdot a \cdot b + b^2, \quad i^0 = 1, \quad i^1 = i, \quad i^2 = -1, \quad i^3 = -i.$$

Potencije imaginarne jedinice i

Za $n \in \mathbb{N}$ vrijedi

$$i^{4 \cdot n} = 1, \quad i^{4 \cdot n+1} = i, \quad i^{4 \cdot n+2} = -1, \quad i^{4 \cdot n+3} = -i.$$

1. inačica

$$\begin{aligned} (1+i)^{100} &= \left((1+i)^2 \right)^{50} = \left(1+2 \cdot i+i^2 \right)^{50} = \left(1+2 \cdot i-1 \right)^{50} = \left(1+2 \cdot i-1 \right)^{50} = (2 \cdot i)^{50} = \\ &= 2^{50} \cdot i^{50} = 2^{50} \cdot (i^2)^{25} = 2^{50} \cdot (-1)^{25} = 2^{50} \cdot (-1) = -2^{50}. \end{aligned}$$

2. inačica

$$(1+i)^{100} = \left((1+i)^2\right)^{50} = (1+2\cdot i+i^2)^{50} = (1+2\cdot i-1)^{50} = (2\cdot i)^{50} = (2\cdot i)^{50} = 2^{50} \cdot i^{50} = \left[\begin{array}{l} 50 : 4 = 12 \\ 2 \end{array} \right] = 2^{50} \cdot i^2 = 2^{50} \cdot (-1) = -2^{50}.$$

Vježba 211

Dokaži identitet $(1+i)^{200} = 2^{100}$.

Rezultat: Točno je.

Zadatak 212 (Ana, gimnazija)

Kolika je vrijednost broja a ako je $(a+b\cdot i) \cdot (2+i^{267}) = 5$, $a, b \in \mathbb{R}$, $i^2 = -1$?

A. -2 B. 0 C. 2 D. 5

Rješenje 212

Ponovimo!

$$a^1 = a, \quad a^n \cdot a^m = a^{n+m}, \quad i^2 = -1, \quad i^3 = -i, \quad \frac{a}{b} \cdot \frac{c}{d} = \frac{a \cdot c}{b \cdot d}.$$

Potencije imaginarne jedinice i

Za $n \in \mathbb{N}$ vrijedi

$$i^{4 \cdot n} = 1, \quad i^{4 \cdot n + 1} = i, \quad i^{4 \cdot n + 2} = -1, \quad i^{4 \cdot n + 3} = -i.$$

Kompleksan broj je broj oblika

$$z = x + y \cdot i,$$

gdje su x i y realni brojevi, a i imaginarna jedinica. Broj x zove se realni dio kompleksnog broja z , a broj y imaginarni dio kompleksnog broja z . Pišemo:

$$x = \operatorname{Re} z, \quad y = \operatorname{Im} z.$$

Standardni ili algebarski oblik kompleksnog broja je oblika

$$z = x + y \cdot i,$$

gdje su x i y realni brojevi.

Za kompleksne brojeve $x + y \cdot i$ i $x - y \cdot i$ kažemo da su kompleksno konjugirani jedan drugome.

Simbol konjugiranja jest povlaka iznad broja koji se konjugira:

$$z = x + y \cdot i \Rightarrow \bar{z} = x - y \cdot i.$$

Umnožak dvaju konjugirano kompleksnih brojeva realan je broj i nenegativan broj:

$$(x + y \cdot i) \cdot (x - y \cdot i) = x^2 + y^2.$$

Proširiti razlomak znači brojnik i nazivnik tog razlomka pomnožiti istim brojem različitim od nule i jedinice

$$\frac{a}{b} = \frac{a \cdot n}{b \cdot n}, \quad n \neq 0, \quad n \neq 1.$$

Zakon distribucije množenja prema zbrajanju.

$$a \cdot (b + c) = a \cdot b + a \cdot c, \quad a \cdot b + a \cdot c = a \cdot (b + c).$$

Dva su kompleksna broja jednaka ako i samo ako su im međusobno jednaki realni dijelovi i međusobno jednaki imaginarni dijelovi, tj.

$$a + b \cdot i = c + d \cdot i \Leftrightarrow a = c, \quad b = d.$$

Skratiti razlomak znači brojnik i nazivnik tog razlomka podijeliti istim brojem različitim od nule i jedinice

$$\frac{a \cdot n}{b \cdot n} = \frac{a}{b}, \quad n \neq 0, \quad n \neq 1.$$

Množenje zagrada

$$(a+b) \cdot (c+d) = a \cdot c + a \cdot d + b \cdot c + b \cdot d.$$

Najprije izračunamo potenciju i^{267} . Eksponent 267 podijelimo s 4 i dobije se količnik 66, a ostatak 3.

$$i^{267} = \left[\begin{array}{l} 267 : 4 = 66 \\ 27 \\ 3 \end{array} \right] = i^3 = -i.$$

1. inačica

$$\begin{aligned} (a+b \cdot i) \cdot (2+i^{267}) &= 5 \Rightarrow (a+b \cdot i) \cdot (2+i^3) = 5 \Rightarrow (a+b \cdot i) \cdot (2-i) = 5 \Rightarrow \\ &\Rightarrow (a+b \cdot i) \cdot (2-i) = 5 \cdot \frac{1}{2-i} \Rightarrow a+b \cdot i = \frac{5}{2-i} \Rightarrow a+b \cdot i = \frac{5}{2-i} \cdot \frac{2+i}{2+i} \Rightarrow \\ \Rightarrow a+b \cdot i &= \frac{5 \cdot (2+i)}{(2-i) \cdot (2+i)} \Rightarrow a+b \cdot i = \frac{5 \cdot (2+i)}{2^2+1^2} \Rightarrow a+b \cdot i = \frac{5 \cdot (2+i)}{4+1} \Rightarrow a+b \cdot i = \frac{5 \cdot (2+i)}{5} \Rightarrow \\ &\Rightarrow a+b \cdot i = \frac{5 \cdot (2+i)}{5} \Rightarrow a+b \cdot i = 2+i \Rightarrow \left[\begin{array}{l} \text{jednakost} \\ \text{kompleksnih brojeva} \end{array} \right] \Rightarrow \left. \begin{array}{l} a=2 \\ b=1 \end{array} \right\} \Rightarrow a=2. \end{aligned}$$

Odgovor je pod C.

2. inačica

$$\begin{aligned} (a+b \cdot i) \cdot (2+i^{267}) &= 5 \Rightarrow (a+b \cdot i) \cdot (2+i^3) = 5 \Rightarrow (a+b \cdot i) \cdot (2-i) = 5 \Rightarrow \\ &\Rightarrow 2 \cdot a - a \cdot i + 2 \cdot b \cdot i - b \cdot i^2 = 5 \Rightarrow 2 \cdot a - a \cdot i + 2 \cdot b \cdot i - b \cdot (-1) = 5 \Rightarrow \\ \Rightarrow 2 \cdot a - a \cdot i + 2 \cdot b \cdot i + b &= 5 \Rightarrow 2 \cdot a + b - a \cdot i + 2 \cdot b \cdot i = 5 \Rightarrow (2 \cdot a + b) + (-a \cdot i + 2 \cdot b \cdot i) = 5 \Rightarrow \\ \Rightarrow (2 \cdot a + b) + (-a + 2 \cdot b) \cdot i &= 5 + 0 \cdot i \Rightarrow \left[\begin{array}{l} \text{jednakost} \\ \text{kompleksnih brojeva} \end{array} \right] \Rightarrow \left. \begin{array}{l} 2 \cdot a + b = 5 \\ -a + 2 \cdot b = 0 \end{array} \right\} \Rightarrow \\ \Rightarrow \left[\begin{array}{l} \text{metoda suprotnih} \\ \text{koeficijenata} \end{array} \right] \Rightarrow \left. \begin{array}{l} 2 \cdot a + b = 5 \cdot (-2) \\ -a + 2 \cdot b = 0 \end{array} \right\} \Rightarrow \left. \begin{array}{l} -4 \cdot a - 2 \cdot b = -10 \\ -a + 2 \cdot b = 0 \end{array} \right\} \Rightarrow -5 \cdot a = -10 \Rightarrow \\ &\Rightarrow -5 \cdot a = -10 \quad /: (-5) \Rightarrow a = 2. \end{aligned}$$

Odgovor je pod C.

Vježba 212

Kolika je vrijednost broja b ako je $(a+b \cdot i) \cdot (2+i^{267}) = 5$, $a, b \in \mathbb{R}$, $i^2 = -1$?

- A. -1 B. 0 C. 1 D. 4

Rezultat: C.

Zadatak 213 (Katarina, maturantica)

Koliki je imaginarni dio kompleksnog broja z ako je $5+3 \cdot z+6 \cdot i-4 \cdot i \cdot z=11-27 \cdot i$?

- A. -13 B. $-\frac{39}{5}$ C. -3 D. $-\frac{6}{5}$

Rješenje 213

Ponovimo!

$$a^1 = a, \quad a^n \cdot a^m = a^{n+m}, \quad \frac{a \cdot c}{b \cdot d} = \frac{a \cdot c}{b \cdot d}, \quad \frac{a-b}{n} = \frac{a}{n} - \frac{b}{n}, \quad i^2 = -1.$$

Zakon distribucije množenja prema zbrajanju.

$$a \cdot (b+c) = a \cdot b + a \cdot c \quad , \quad a \cdot b + a \cdot c = a \cdot (b+c).$$

Proširiti razlomak znači brojnik i nazivnik tog razlomka pomnožiti istim brojem različitim od nule i jedinice

$$\frac{a}{b} = \frac{a \cdot n}{b \cdot n} \quad , \quad n \neq 0 \quad , \quad n \neq 1.$$

Skratiti razlomak znači brojnik i nazivnik tog razlomka podijeliti istim brojem različitim od nule i jedinice

$$\frac{a \cdot n}{b \cdot n} = \frac{a}{b} \quad , \quad n \neq 0 \quad , \quad n \neq 1.$$

Kompleksan broj je broj oblika

$$z = x + y \cdot i,$$

gdje su x i y realni brojevi, a i imaginarna jedinica. Broj x zove se realni dio kompleksnog broja z, a broj y imaginarni dio kompleksnog broja z. Pišemo:

$$x = \operatorname{Re} z \quad , \quad y = \operatorname{Im} z.$$

Standardni ili algebarski oblik kompleksnog broja je oblika

$$z = x + y \cdot i,$$

gdje su x i y realni brojevi.

Za kompleksne brojeve $x + y \cdot i$ i $x - y \cdot i$ kažemo da su kompleksno konjugirani jedan drugome. Simbol konjugiranja jest povlaka iznad broja koji se konjugira:

$$z = x + y \cdot i \Rightarrow \bar{z} = x - y \cdot i$$

Umnožak dvaju konjugirano kompleksnih brojeva realan je broj i nenegativan broj:

$$(x + y \cdot i) \cdot (x - y \cdot i) = x^2 + y^2.$$

$$\begin{aligned} 5 + 3 \cdot z + 6 \cdot i - 4 \cdot i \cdot z &= 11 - 27 \cdot i \Rightarrow 3 \cdot z - 4 \cdot i \cdot z = 11 - 27 \cdot i - 5 - 6 \cdot i \Rightarrow \\ \Rightarrow (3 - 4 \cdot i) \cdot z &= 6 - 33 \cdot i \Rightarrow (3 - 4 \cdot i) \cdot z = 6 - 33 \cdot i \cdot \frac{1}{3 - 4 \cdot i} \Rightarrow z = \frac{6 - 33 \cdot i}{3 - 4 \cdot i} \Rightarrow \\ \Rightarrow z &= \frac{6 - 33 \cdot i}{3 - 4 \cdot i} \cdot \frac{3 + 4 \cdot i}{3 + 4 \cdot i} \Rightarrow z = \frac{(6 - 33 \cdot i) \cdot (3 + 4 \cdot i)}{(3 - 4 \cdot i) \cdot (3 + 4 \cdot i)} \Rightarrow z = \frac{18 + 24 \cdot i - 99 \cdot i - 132 \cdot i^2}{3^2 + 4^2} \Rightarrow \\ \Rightarrow z &= \frac{18 + 24 \cdot i - 99 \cdot i - 132 \cdot (-1)}{9 + 16} \Rightarrow z = \frac{18 + 24 \cdot i - 99 \cdot i + 132}{25} \Rightarrow z = \frac{150 - 75 \cdot i}{25} \Rightarrow \\ \Rightarrow z &= \frac{150}{25} - \frac{75}{25} \cdot i \Rightarrow z = \frac{150}{25} - \frac{75}{25} \cdot i \Rightarrow z = 6 - 3 \cdot i. \end{aligned}$$

Tada je

$$\operatorname{Im}(z) = -3.$$

Odgovor je pod C.

Vježba 213

Koliki je realni dio kompleksnog broja z ako je $5 + 3 \cdot z + 6 \cdot i - 4 \cdot i \cdot z = 11 - 27 \cdot i$?

- A. 13 B. 6 C. -6 D. 5

Rezultat: B.

Zadatak 214 (Petra, gimnazija)

Izračunaj: $1 + i + i^2 + i^3 + \dots + i^{100}$.

Rješenje 214

Ponovimo!

Imaginarni brojevi imaju oblik $b \cdot i$ gdje je b realni broj koji nije jednak nuli, a i je imaginarna jedinica za koju vrijedi

$$i = \sqrt{-1}.$$

Potencije imaginarne jedinice

Neka je k prirodni broj. Tada za potencije imaginarne jedinice i vrijedi:

$$i^{4 \cdot k} = 1, \quad i^{4 \cdot k + 1} = i, \quad i^{4 \cdot k + 2} = -1, \quad i^{4 \cdot k + 3} = -i.$$

Ako je eksponent potencije imaginarne jedinice djeljiv s 4, vrijednost potencije je 1. Ako je ostatak pri dijeljenju eksponenta s 4 jednak 1, vrijednost potencije je i ; ako je ostatak 2, vrijednost je -1 , a ako je ostatak 3, vrijednost potencije je $-i$.

$$i^0 = 1, \quad i^1 = i, \quad i^2 = -1, \quad i^3 = -i.$$

$$1 + i + i^2 + i^3 + \dots + i^{100}.$$

Budući da se eksponenti nižu u slijedu od 0 do 100, pribrojnika ima 101. Primijetimo da se skupine od četiri pribrojnika stalno ponavljaju i svaka od njih daje rezultat 0.

$$1 + i + i^2 + i^3 = 1 + i - 1 - i = 1 + i - 1 - i = 0.$$

Postoji 25 takvih skupina.

$$101 : 4 = 25$$

1 ostatak

Vrijedi:

$$1 + i + i^2 + i^3 = i^4 + i^5 + i^6 + i^7 = i^8 + i^9 + i^{10} + i^{11} = \dots = i^{96} + i^{97} + i^{98} + i^{99} = 0.$$

Ostaje samo jedan pribrojnik, to je 101. član i^{100} .

$$\begin{aligned} \underbrace{1 + i + i^2 + i^3}_{=0} + \underbrace{i^4 + i^5 + i^6 + i^7}_{=0} + \underbrace{i^8 + i^9 + i^{10} + i^{11}}_{=0} + \dots + \underbrace{i^{96} + i^{97} + i^{98} + i^{99}}_{=0} + i^{100} &= \\ &= 25 \cdot 0 + i^{100} = i^{100} = \left[\begin{array}{l} 100 : 4 = 25 \\ 0 \text{ ostatak} \end{array} \right] = i^0 = 1. \end{aligned}$$

Vježba 214

Izračunaj: $1 + i + i^2 + i^3 + \dots + i^{99}$.

Rezultat: 0.

Zadatak 215 (Matrix, gimnazija)

$$\text{Riješi sustav jednačnji: } \begin{cases} z - w = 1 \\ 2 \cdot z + 3 \cdot w = 2 - i \end{cases}$$

Rješenje 215

Ponovimo!

$$\frac{a-b}{n} = \frac{a}{n} - \frac{b}{n}.$$

Kompleksan broj je broj oblika

$$z = x + y \cdot i,$$

gdje su x i y realni brojevi, a i imaginarna jedinica. Broj x zove se realni dio kompleksnog broja z , a broj y imaginarni dio kompleksnog broja z . Pišemo:

$$x = \operatorname{Re} z, \quad y = \operatorname{Im} z.$$

Standardni ili algebarski oblik kompleksnog broja je oblika

$$z = x + y \cdot i,$$

gdje su x i y realni brojevi.

Dva su kompleksna broja jednaka ako i samo ako su im međusobno jednaki realni dijelovi i međusobno jednaki imaginarni dijelovi, tj.

$$a + b \cdot i = c + d \cdot i \Leftrightarrow a = c, b = d.$$

Zakon distribucije množenja prema zbrajanju.

$$a \cdot (b + c) = a \cdot b + a \cdot c, \quad a \cdot b + a \cdot c = a \cdot (b + c).$$

Skratiti razlomak znači brojnik i nazivnik tog razlomka podijeliti istim brojem različitim od nule i jedinice

$$\frac{a \cdot n}{b \cdot n} = \frac{a}{b}, \quad n \neq 0, n \neq 1.$$

1. inačica

$$\left. \begin{array}{l} z - w = 1 \\ 2 \cdot z + 3 \cdot w = 2 - i \end{array} \right\} \Rightarrow \left[\begin{array}{l} \text{metoda suprotnih} \\ \text{koeficijenta} \end{array} \right] \Rightarrow \left. \begin{array}{l} z - w = 1 \cdot 3 \\ 2 \cdot z + 3 \cdot w = 2 - i \end{array} \right\} \Rightarrow \left. \begin{array}{l} 3 \cdot z - 3 \cdot w = 3 \\ 2 \cdot z + 3 \cdot w = 2 - i \end{array} \right\} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 5 \cdot z = 5 - i \Rightarrow 5 \cdot z = 5 - i \cdot \frac{1}{5} \Rightarrow z = \frac{5 - i}{5} \Rightarrow z = \frac{5}{5} - \frac{i}{5} \Rightarrow z = \frac{5}{5} - \frac{i}{5} \Rightarrow z = 1 - \frac{1}{5} \cdot i.$$

Računamo w .

$$\left. \begin{array}{l} z = 1 - \frac{1}{5} \cdot i \\ z - w = 1 \end{array} \right\} \Rightarrow 1 - \frac{1}{5} \cdot i - w = 1 \Rightarrow 1 - \frac{1}{5} \cdot i - w = 1 \Rightarrow -\frac{1}{5} \cdot i - w = 0 \Rightarrow -w = \frac{1}{5} \cdot i \Rightarrow$$

$$\Rightarrow -w = \frac{1}{5} \cdot i \cdot (-1) \Rightarrow w = -\frac{1}{5} \cdot i.$$

2. inačica

Neka je

$$z = a + b \cdot i, \quad w = c + d \cdot i.$$

Dalje slijedi:

$$\left. \begin{array}{l} z - w = 1 \\ 2 \cdot z + 3 \cdot w = 2 - i \end{array} \right\} \Rightarrow \left[\begin{array}{l} z = a + b \cdot i \\ w = c + d \cdot i \end{array} \right] \Rightarrow \left. \begin{array}{l} a + b \cdot i - (c + d \cdot i) = 1 \\ 2 \cdot (a + b \cdot i) + 3 \cdot (c + d \cdot i) = 2 - i \end{array} \right\} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \left. \begin{array}{l} a + b \cdot i - c - d \cdot i = 1 \\ 2 \cdot a + 2 \cdot b \cdot i + 3 \cdot c + 3 \cdot d \cdot i = 2 - i \end{array} \right\} \Rightarrow \left. \begin{array}{l} (a - c) + (b - d) \cdot i = 1 + 0 \cdot i \\ (2 \cdot a + 3 \cdot c) + (2 \cdot b + 3 \cdot d) \cdot i = 2 - i \end{array} \right\}.$$

Iz definicije jednakosti kompleksnih brojeva dobiju se dva sustava jednačbi.

Prvi sustav

$$\begin{cases} a - c = 1 \\ 2 \cdot a + 3 \cdot c = 2 \end{cases}$$

Drugi sustav

$$\begin{cases} b - d = 0 \\ 2 \cdot b + 3 \cdot d = -1 \end{cases}$$

Riješimo prvi sustav!

$$\left. \begin{array}{l} a - c = 1 \\ 2 \cdot a + 3 \cdot c = 2 \end{array} \right\} \Rightarrow \left[\begin{array}{l} \text{metoda suprotnih} \\ \text{koeficijenta} \end{array} \right] \Rightarrow \left. \begin{array}{l} a - c = 1 \cdot 3 \\ 2 \cdot a + 3 \cdot c = 2 \end{array} \right\} \Rightarrow \left. \begin{array}{l} 3 \cdot a - 3 \cdot c = 3 \\ 2 \cdot a + 3 \cdot c = 2 \end{array} \right\} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 5 \cdot a = 5 \Rightarrow 5 \cdot a = 5 \cdot 1 \Rightarrow a = 1.$$

Računamo c .

$$\left. \begin{array}{l} a=1 \\ a-c=1 \end{array} \right\} \Rightarrow 1-c=1 \Rightarrow 1-c=1 \Rightarrow -c=0 \Rightarrow c=0.$$

Riješimo drugi sustav!

$$\left. \begin{array}{l} b-d=0 \\ 2 \cdot b+3 \cdot d=-1 \end{array} \right\} \Rightarrow \left[\begin{array}{l} \text{metoda suprotnih} \\ \text{koeficijenta} \end{array} \right] \Rightarrow \left. \begin{array}{l} b-d=0 \quad / \cdot 3 \\ 2 \cdot b+3 \cdot d=-1 \end{array} \right\} \Rightarrow \left. \begin{array}{l} 3 \cdot b-3 \cdot d=0 \\ 2 \cdot b+3 \cdot d=-1 \end{array} \right\} \Rightarrow \\ \Rightarrow 5 \cdot b=-1 \Rightarrow 5 \cdot b=-1 \quad / : 5 \Rightarrow b=-\frac{1}{5}.$$

Računamo d.

$$\left. \begin{array}{l} b=-\frac{1}{5} \\ b-d=0 \end{array} \right\} \Rightarrow -\frac{1}{5}-d=0 \Rightarrow -d=\frac{1}{5} \Rightarrow -d=\frac{1}{5} \quad / \cdot (-1) \Rightarrow d=-\frac{1}{5}.$$

Kompleksan broj z glasi:

$$z = a + b \cdot i \Rightarrow \left[\begin{array}{l} a=1 \\ b=-\frac{1}{5} \end{array} \right] \Rightarrow z = 1 - \frac{1}{5} \cdot i.$$

Kompleksan broj w glasi:

$$w = c + d \cdot i \Rightarrow \left[\begin{array}{l} c=0 \\ d=-\frac{1}{5} \end{array} \right] \Rightarrow w = 0 - \frac{1}{5} \cdot i \Rightarrow w = -\frac{1}{5} \cdot i.$$

Vježba 215

Riješi sustav jednačbi: $\begin{cases} z + 2 \cdot w = 1 + i \\ 3 \cdot z + i \cdot w = 2 + 3 \cdot i \end{cases}$

Rezultat: $z = 1 - i$, $w = i$.

Zadatak 216 (Mario, gimnazija)

Prikaži skup točaka kompleksne ravnine određenih uvjetom $|z + 3 \cdot i| = |z + i|$.

Rješenje 216

Ponovimo!

$$(\sqrt{a})^2 = a, \quad (a+b)^2 = a^2 + 2 \cdot a \cdot b + b^2.$$

Kompleksan broj je broj oblika

$$z = x + y \cdot i,$$

gdje su x i y realni brojevi, a i imaginarna jedinica. Broj x zove se realni dio kompleksnog broja z, a broj y imaginarni dio kompleksnog broja z. Pišemo:

$$x = \operatorname{Re} z, \quad y = \operatorname{Im} z.$$

Standardni ili algebarski oblik kompleksnog broja je oblika

$$z = x + y \cdot i,$$

gdje su x i y realni brojevi.

Modul ili apsolutna vrijednost kompleksnog broja $z = x + y \cdot i$ definira se formulom

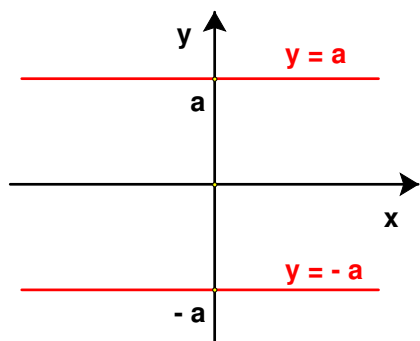
$$|z| = \sqrt{x^2 + y^2}.$$

Kompleksne brojeve predočujemo u koordinatnoj ravnini koju zovemo **kompleksna** ili **Gaussova** ravnina.

Zakon distribucije množenja prema zbrajanju.

$$a \cdot (b+c) = a \cdot b + a \cdot c, \quad a \cdot b + a \cdot c = a \cdot (b+c).$$

Jednadžba pravca usporednog (paralelnog) s x – osi



Neka je

$$z = x + y \cdot i.$$

Tada slijedi:

$$\begin{aligned} |z+3 \cdot i| &= |z+i| \Rightarrow [z = x + y \cdot i] \Rightarrow |x + y \cdot i + 3 \cdot i| = |x + y \cdot i + i| \Rightarrow \\ &\Rightarrow |x + (y+3) \cdot i| = |x + (y+1) \cdot i| \Rightarrow \sqrt{x^2 + (y+3)^2} = \sqrt{x^2 + (y+1)^2} \Rightarrow \\ &\Rightarrow \sqrt{x^2 + (y+3)^2} = \sqrt{x^2 + (y+1)^2} \quad / \cdot 2 \Rightarrow \left(\sqrt{x^2 + (y+3)^2}\right)^2 = \left(\sqrt{x^2 + (y+1)^2}\right)^2 \Rightarrow \\ &\Rightarrow x^2 + (y+3)^2 = x^2 + (y+1)^2 \Rightarrow x^2 + (y+3)^2 = x^2 + (y+1)^2 \Rightarrow (y+3)^2 = (y+1)^2. \end{aligned}$$



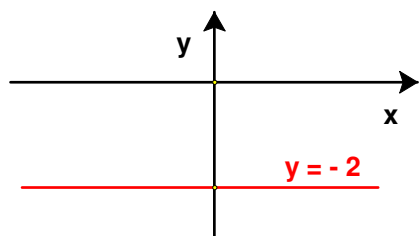
Riješimo to na dva načina!

Prvi način

$$\begin{aligned} (y+3)^2 &= (y+1)^2 \Rightarrow y^2 + 6 \cdot y + 9 = y^2 + 2 \cdot y + 1 \Rightarrow y^2 + 6 \cdot y + 9 = y^2 + 2 \cdot y + 1 \Rightarrow \\ &\Rightarrow 6 \cdot y + 9 = 2 \cdot y + 1 \Rightarrow 6 \cdot y - 2 \cdot y = 1 - 9 \Rightarrow 4 \cdot y = -8 \Rightarrow 4 \cdot y = -8 \quad / : 4 \Rightarrow y = -2. \end{aligned}$$

Drugi način

$$\begin{aligned} (y+3)^2 &= (y+1)^2 \Rightarrow (y+3)^2 = (y+1)^2 \quad / \sqrt{} \Rightarrow \left. \begin{array}{l} y+3 = -(y+1) \\ y+3 = y+1 \end{array} \right\} \Rightarrow \\ \Rightarrow \left. \begin{array}{l} y+3 = -y-1 \\ y+3 = y+1 \end{array} \right\} &\Rightarrow \left. \begin{array}{l} y+y = -1-3 \\ 3 \neq 1 \text{ nema rješenja} \end{array} \right\} \Rightarrow 2 \cdot y = -4 \Rightarrow 2 \cdot y = -4 \quad / : 2 \Rightarrow y = -2. \end{aligned}$$



Vježba 216

Odmor!

Rezultat: ...

Zadatak 217 (Fran, gimnazija)

$$\text{Izračunaj: } \frac{1}{i} + \frac{1}{i^2} + \frac{1}{i^3} + \frac{1}{i^4} + \dots + \frac{1}{i^{20}}.$$

Rješenje 217

Ponovimo!

$$\frac{n}{1} = n, \quad \frac{a^n}{b^n} = \left(\frac{a}{b}\right)^n, \quad \frac{a}{b} \cdot \frac{c}{d} = \frac{a \cdot c}{b \cdot d}, \quad a^1 = a, \quad a^n \cdot a^m = a^{n+m}.$$

Imaginarni brojevi imaju oblik $b \cdot i$ gdje je b realni broj koji nije jednak nuli, a i je imaginarna jedinica za koju vrijedi

$$i = \sqrt{-1}.$$

Potencije imaginarne jedinice

Neka je k prirodni broj. Tada za potencije imaginarne jedinice i vrijedi:

$$i^{4 \cdot k} = 1, \quad i^{4 \cdot k + 1} = i, \quad i^{4 \cdot k + 2} = -1, \quad i^{4 \cdot k + 3} = -i.$$

Ako je eksponent potencije imaginarne jedinice djeljiv s 4, vrijednost potencije je 1. Ako je ostatak pri dijeljenju eksponenta s 4 jednak 1, vrijednost potencije je i ; ako je ostatak 2, vrijednost je -1 , a ako je ostatak 3, vrijednost potencije je $-i$.

$$i^0 = 1, \quad i^1 = i, \quad i^2 = -1, \quad i^3 = -i.$$

Skup prirodnih brojeva označavamo slovom N , a zapisujemo

$$N = \{1, 2, 3, 4, 5, \dots, n-1, n, n+1, \dots\}.$$

Prirodni brojevi dijele se na parne i neparne brojeve. Parni brojevi su oni brojevi koji su djeljivi sa 2, a neparni su oni koji nisu djeljivi sa 2.

Da je neki prirodan broj m paran znači da se može napisati u obliku

$$m = 2 \cdot (\text{neki prirodan broj}), \quad m = 2 \cdot k, \quad k \in N.$$

Da je neki prirodan broj m neparan znači da se može napisati u obliku

$$m = 2 \cdot (\text{neki prirodan broj}) - 1, \quad m = 2 \cdot k - 1, \quad k \in N.$$

$$(-a)^{2 \cdot n} = a^{2 \cdot n}, \quad (-a)^{2 \cdot n - 1} = -a^{2 \cdot n - 1}.$$

Uočimo da skupina od četiri pribrojnika daje rezultat 0.

$$\frac{1}{i} + \frac{1}{i^2} + \frac{1}{i^3} + \frac{1}{i^4} = \frac{1}{i} + \frac{1}{-1} + \frac{1}{-i} + \frac{1}{1} = \frac{1}{i} - 1 - \frac{1}{i} + 1 = \frac{1}{i} - 1 - \frac{1}{i} + 1 = 0.$$



Može i ovako!

$$\left(\frac{1}{i}\right) = \frac{1}{i} \cdot \frac{-i}{-i} = \frac{-i}{-i^2} = \frac{-i}{-(-1)} = \frac{-i}{1} = (-i)$$
$$\frac{1}{i^n} = \left(\frac{1}{i}\right)^n = (-i)^n.$$

$$\begin{aligned} \frac{1}{i} + \frac{1}{i^2} + \frac{1}{i^3} + \frac{1}{i^4} &= -i + (-i)^2 + (-i)^3 + (-i)^4 = -i + i^2 - i^3 + i^4 = -i - 1 - (-i) + 1 = \\ &= -i - 1 + i + 1 = -i - 1 + i + 1 = 0. \end{aligned}$$



Primijetimo da se skupine od četiri pribrojnika stalno ponavljaju i svaka od njih daje rezultat 0.

$$\frac{1}{i} + \frac{1}{i^2} + \frac{1}{i^3} + \frac{1}{i^4} = \frac{1}{i^5} + \frac{1}{i^6} + \frac{1}{i^7} + \frac{1}{i^8} = \dots = \frac{1}{i^{17}} + \frac{1}{i^{18}} + \frac{1}{i^{19}} + \frac{1}{i^{20}} = 0.$$

Budući da je 20 pribrojnika, imamo pet skupina po četiri pribrojnika. Njihov zbroj je 0.

$$\underbrace{\frac{1}{i} + \frac{1}{i^2} + \frac{1}{i^3} + \frac{1}{i^4}}_{=0} + \underbrace{\frac{1}{i^5} + \frac{1}{i^6} + \frac{1}{i^7} + \frac{1}{i^8}}_{=0} + \dots + \underbrace{\frac{1}{i^{17}} + \frac{1}{i^{18}} + \frac{1}{i^{19}} + \frac{1}{i^{20}}}_{=0} = 5 \cdot 0 = 0.$$

Vježba 217

Izračunaj: $\frac{1}{i} + \frac{1}{i^2} + \frac{1}{i^3} + \frac{1}{i^4} + \dots + \frac{1}{i^{24}}$.

Rezultat: 0.

Zadatak 218 (Tomislav, gimnazija)

Prikaži u kompleksnoj ravnini skup točaka određenih uvjetom $|z - 1 + i| \leq 3$.

Rješenje 218

Ponovimo!

$$(\sqrt{a})^2 = a, \quad 0 < a \leq b \Rightarrow a^2 \leq b^2.$$

Kompleksan broj je broj oblika

$$z = x + y \cdot i,$$

gdje su x i y realni brojevi, a i imaginarna jedinica. Broj x zove se realni dio kompleksnog broja z, a broj y imaginarni dio kompleksnog broja z. Pišemo:

$$x = \operatorname{Re} z, \quad y = \operatorname{Im} z.$$

Standardni ili algebarski oblik kompleksnog broja je oblika

$$z = x + y \cdot i,$$

gdje su x i y realni brojevi.

Modul ili apsolutna vrijednost kompleksnog broja $z = x + y \cdot i$ definira se formulom

$$|z| = \sqrt{x^2 + y^2}.$$

Kompleksne brojeve predočujemo u koordinatnoj ravnini koju zovemo **kompleksna** ili **Gaussova** ravnina.

Krug je skup svih točaka ravnine kojima je udaljenost od zadane točke S manja ili jednaka zadanom broju $r > 0$ (polumjeru kruga).

Zatvoreni krug polumjera r sa središtem u točki S(p, q) ima jednadžbu:

$$(x - p)^2 + (y - q)^2 \leq r^2.$$

Otvoreni krug polumjera r sa središtem u točki S(p, q) ima jednadžbu:

$$(x - p)^2 + (y - q)^2 < r^2.$$

Neka je $z = x + y \cdot i$.

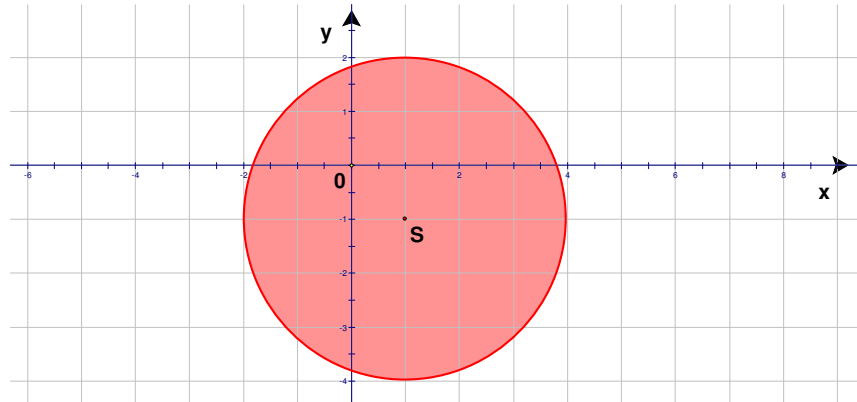
$$|z - 1 + i| \leq 3 \Rightarrow [z = x + y \cdot i] \Rightarrow |x + y \cdot i - 1 + i| \leq 3 \Rightarrow |(x - 1) + (y + 1) \cdot i| \leq 3 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \sqrt{(x - 1)^2 + (y + 1)^2} \leq 3 \Rightarrow \sqrt{(x - 1)^2 + (y + 1)^2} \leq 3 \quad /^2 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \left(\sqrt{(x-1)^2 + (y+1)^2} \right)^2 \leq 3^2 \Rightarrow (x-1)^2 + (y+1)^2 \leq 3^2 \Rightarrow (x-1)^2 + (y-(-1))^2 \leq 3^2 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \left. \begin{array}{l} S(p, q) = S(1, -1) \\ r = 3 \end{array} \right\}$$

To je krug sa središtem $S(1, -1)$ i polumjerom $r = 3$.



Vježba 218

Prikaži u kompleksnoj ravni skup točaka određenih uvjetom $|z - 1 + i| < 3$.

Rezultat:

