Zadatak 201 (Lara, gimnazija)

Jednakost $\frac{x}{1+i}+\frac{y}{1-2\cdot i}=i$ točna je za realne brojeve x i y za koje vrijedi jednakost:

$$A.\ x\cdot y=1 \qquad B.\ x-y=1 \qquad C.\ x\cdot y=-1 \qquad D.\ x+y=1$$

Rješenje 201

Ponovimo!

$$\frac{a}{b}\cdot\frac{c}{d}=\frac{a\cdot c}{b\cdot d} \quad , \quad a\cdot\frac{b}{c}=\frac{a\cdot b}{c} \quad , \quad \frac{a}{n}+\frac{b}{n}=\frac{a+b}{n}.$$

Kompleksan broj je broj oblika

$$z=x+y\cdot i,$$

gdje su x i y realni brojevi, a i imaginarna jedinica. Broj x zove se realni dio kompleksnog broja z, a broj y imaginarni dio kompleksnog broja z. Pišemo:

$$x=\operatorname{Re} z \quad , \quad y=\operatorname{Im} z.$$

Standardni ili algebarski oblik kompleksnog broja je oblika

$$z=x+y\cdot i,$$

gdje su x i y realni brojevi.
Za kompleksne brojeve $x + y \cdot i$ i $x - y \cdot i$ kažemo da su kompleksno konjugirani jedan drugome.
Simbol konjugiranja jest povlaka iznad broja koji se konjugira:

$$z=x+y\cdot i \;\Rightarrow\; \overline{z}=x-y\cdot i.$$

Umnožak dvaju konjugirano kompleksnih brojeva realan je broj i nenegativan broj:

$$(x+y\cdot i)\cdot(x-y\cdot i)=x^2+y^2.$$

Proširiti razlomak znači brojnik i nazivnik tog razlomka pomnožiti istim brojem različitim od nule i jedinice

$$\frac{a}{b}=\frac{a\cdot n}{b\cdot n} \;,\; n\neq 0 \;,\; n\neq 1.$$

Zakon distribucije množenja prema zbrajanju.

$$a\cdot(b+c)=a\cdot b+a\cdot c \quad , \quad a\cdot b+a\cdot c=a\cdot(b+c).$$

Dva su kompleksna broja jednaka ako i samo ako su im međusobno jednaki realni dijelovi i međusobno jednaki imaginarni dijelovi, tj.

$$a+b\cdot i=c+d\cdot i \;\Leftrightarrow\; a=c \;,\; b=d.$$

Skratiti razlomak znači brojnik i nazivnik tog razlomka podijeliti istim brojem različitim od nule i jedinice

$$\frac{a\cdot n}{b\cdot n}=\frac{a}{b} \;,\; n\neq 0 \;,\; n\neq 1.$$

$$\frac{x}{1+i}+\frac{y}{1-2\cdot i}=i \;\Rightarrow\; \frac{x}{1+i}\cdot\frac{1-i}{1-i}+\frac{y}{1-2\cdot i}\cdot\frac{1+2\cdot i}{1+2\cdot i}=i \;\Rightarrow\; \frac{x\cdot(1-i)}{(1+i)\cdot(1-i)}+\frac{y\cdot(1+2\cdot i)}{(1-2\cdot i)\cdot(1+2\cdot i)}=i \;\Rightarrow$$

$$\Rightarrow \frac{x-x\cdot i}{1^2+1^2}+\frac{y+2\cdot y\cdot i}{1^2+2^2}=i \;\Rightarrow\; \frac{x-x\cdot i}{1+1}+\frac{y+2\cdot y\cdot i}{1+4}=i \;\Rightarrow\; \frac{x-x\cdot i}{2}+\frac{y+2\cdot y\cdot i}{5}=i \;\Rightarrow$$

$$\Rightarrow \frac{x-x\cdot i}{2}+\frac{y+2\cdot y\cdot i}{5}=i \;/\cdot 10 \;\Rightarrow\; 5\cdot(x-x\cdot i)+2\cdot(y+2\cdot y\cdot i)=10\cdot i \;\Rightarrow$$

$$\Rightarrow 5\cdot x-5\cdot x\cdot i+2\cdot y+4\cdot y\cdot i=10\cdot i \;\Rightarrow\; 5\cdot x+2\cdot y-5\cdot x\cdot i+4\cdot y\cdot i=10\cdot i \;\Rightarrow$$

$$\Rightarrow (5\cdot x+2\cdot y)+(-5\cdot x\cdot i+4\cdot y\cdot i)=10\cdot i \;\Rightarrow\; (5\cdot x+2\cdot y)+(-5\cdot x+4\cdot y)\cdot i=0+10\cdot i \;\Rightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{bmatrix} \text{jednakost kompleksnih} \\ \text{brojeva} \end{bmatrix} \Rightarrow \left. \begin{array}{l} 5 \cdot x + 2 \cdot y = 0 \\ -5 \cdot x + 4 \cdot y = 10 \end{array} \right\} \Rightarrow \begin{bmatrix} \text{metoda suprotnih} \\ \text{koeficijenata} \end{bmatrix} \Rightarrow 6 \cdot y = 10 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 6 \cdot y = 10 \; / : 6 \Rightarrow y = \frac{10}{6} \Rightarrow y = \frac{10}{6} \Rightarrow y = \frac{5}{3}.$$

Računamo x.

$$\left. \begin{array}{l} 5 \cdot x + 2 \cdot y = 0 \\ y = \frac{5}{3} \end{array} \right\} \Rightarrow 5 \cdot x + 2 \cdot \frac{5}{3} = 0 \Rightarrow 5 \cdot x + \frac{10}{3} = 0 \Rightarrow 5 \cdot x = -\frac{10}{3} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 5 \cdot x = -\frac{10}{3} \; / \cdot \frac{1}{5} \Rightarrow x = -\frac{2}{3}.$$

Dakle,

$$(x, \; y) = \left(-\frac{2}{3}, \frac{5}{3} \right).$$

Sada je:

$$x + y = -\frac{2}{3} + \frac{5}{3} \Rightarrow x + y = \frac{-2+5}{3} \Rightarrow x + y = \frac{3}{3} \Rightarrow x + y = \frac{3}{3} \Rightarrow x + y = 1.$$

Odgovor je pod D.

Vježba 201

Jednakost $\frac{x}{1+i} + \frac{y}{1-2 \cdot i} = i$ točna je za realne brojeve x i y za koje vrijedi jednakost:

$A. \; x \cdot y = 1$ $\qquad B. \; x - y = 1$ $\qquad C. \; x \cdot y = -1$ $\qquad D. \; x + y = 1$

Rezultat: D.

Zadatak 202 (Matej, gimnazija)

Pokazati da je $z = \frac{(1+i)^6 - (1-i)^6}{(1+i)^6 \cdot (1-i)^6}$ imaginaran broj.

Rješenje 202

Ponovimo!

$$\left(a^n\right)^m = a^{n \cdot m} \quad , \quad i^2 = -1 \quad , \quad (a+b)^2 = a^2 + 2 \cdot a \cdot b + b^2.$$

$$(a-b)^2 = a^2 - 2 \cdot a \cdot b + b^2 \quad , \quad a^n \cdot b^n = (a \cdot b)^n \quad , \quad (-a)^3 = -a^3.$$

$$a^1 = a \quad , \quad a^n \cdot a^m = a^{n+m} \quad , \quad i^3 = -i \quad , \quad \frac{a^n}{a^m} = a^{n-m}.$$

Kompleksan broj je broj oblika

$$z = x + y \cdot i,$$

gdje su x i y realni brojevi, a i imaginarna jedinica. Broj x zove se realni dio kompleksnog broja z, a broj y imaginarni dio kompleksnog broja z. Pišemo:

$$x = \operatorname{Re} z \quad , \quad y = \operatorname{Im} z.$$

Standardni ili algebarski oblik kompleksnog broja je oblika

$$z = x + y \cdot i,$$

gdje su x i y realni brojevi.
Za kompleksne brojeve $x + y \cdot i$ i $x - y \cdot i$ kažemo da su kompleksno konjugirani jedan drugome.
Simbol konjugiranja jest povlaka iznad broja koji se konjugira:

$$z = x + y \cdot i \Rightarrow \bar{z} = x - y \cdot i.$$

Umnožak dvaju konjugirano kompleksnih brojeva realan je broj i nenegativan broj:

$$(x+y\cdot i)\cdot(x-y\cdot i)=x^2+y^2.$$

Imaginaran broj jednak je umnošku realnog broja b i imaginarne jedinice i.

$$b\cdot i.$$

Zakon distribucije množenja prema zbrajanju.

$$a\cdot(b+c)=a\cdot b+a\cdot c \quad , \quad a\cdot b+a\cdot c=a\cdot(b+c).$$

$$z=\frac{(1+i)^6-(1-i)^6}{(1+i)^6\cdot(1-i)^6}=\frac{\left((1+i)^2\right)^3-\left((1-i)^2\right)^3}{\left((1+i)\cdot(1-i)\right)^6}=\frac{\left(1+2\cdot i+i^2\right)^3-\left(1-2\cdot i+i^2\right)^3}{\left(1^2+1^2\right)^6}=$$

$$=\frac{(1+2\cdot i-1)^3-(1-2\cdot i-1)^3}{(1+1)^6}=\frac{(1+2\cdot i-1)^3-(1-2\cdot i-1)^3}{2^6}=\frac{(2\cdot i)^3-(-2\cdot i)^3}{2^6}=$$

$$=\frac{(2\cdot i)^3-\left(-(2\cdot i)^3\right)}{2^6}=\frac{(2\cdot i)^3+(2\cdot i)^3}{2^6}=\frac{2\cdot(2\cdot i)^3}{2^6}=\frac{2\cdot 2^3\cdot i^3}{2^6}=\frac{2^1\cdot 2^3\cdot(-i)}{2^6}=$$

$$=\frac{2^4\cdot(-i)}{2^6}=\frac{2^4\cdot(-i)}{2^6}=\frac{-i}{2^2}=-\frac{1}{4}\cdot i.$$

Vježba 202

Pokazati da je $z=\frac{(1+i)^6-(1-i)^6}{(1+i)^4\cdot(1-i)^4}$ imaginaran broj.

Rezultat: $-i.$

Zadatak 203 (2B, TUPŠ)

Prikaži u kompleksnoj ravnini skup točaka z za koje vrijedi uvjet:

$$a)\ |z|=4 \qquad b)\ |z|<4 \qquad c)\ |z|\le 4$$

Rješenje 203

Ponovimo!

$$\left(\sqrt{a}\right)^2=a.$$

Kompleksan broj je broj oblika

$$z=x+y\cdot i,$$

gdje su x i y realni brojevi, a i imaginarna jedinica. Broj x zove se realni dio kompleksnog broja z, a broj y imaginarni dio kompleksnog broja z. Pišemo:

$$x=\operatorname{Re} z \quad , \quad y=\operatorname{Im} z.$$

Standardni ili algebarski oblik kompleksnog broja je oblika

$$z=x+y\cdot i,$$

gdje su x i y realni brojevi.
Modul ili apsolutna vrijednost kompleksnog broja z = x + y · i definira se formulom

$$|z|=\sqrt{x^2+y^2}.$$

Kompleksne brojeve predočujemo u koordinatnoj ravnini koju zovemo kompleksna ili Gaussova ravnina.

Kružnica je skup svih točaka u ravnini jednako udaljenih od zadane točke (središta).
Polumjer ili radijus je dužina koja spaja središte kružnice s bilo kojom točkom kružnice. Duljina polumjera označava se slovom r.
Krug je skup svih točaka ravnine kojima je udaljenost od zadane točke S manja ili jednaka zadanom broju r > 0 (polumjeru kruga).
Kružnica polumjera r sa središtem u ishodištu koordinatnog sustava naziva se središnja kružnica i njezina je jednadžba

$$x^2 + y^2 = r^2.$$

Krug polumjera r sa središtem u ishodištu koordinatnog sustava ima jednadžbu:

- zatvoreni krug

$$x^2 + y^2 \le r^2$$

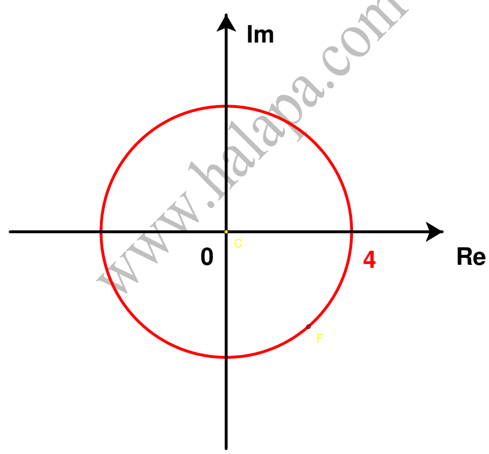
- otvoreni krug

$$x^2 + y^2 < r^2.$$

a)

$$|z| = 4 \Rightarrow \sqrt{x^2 + y^2} = 4 \Rightarrow \sqrt{x^2 + y^2} = 4 \; /^2 \Rightarrow \left(\sqrt{x^2 + y^2}\right)^2 = 4^2 \Rightarrow$$

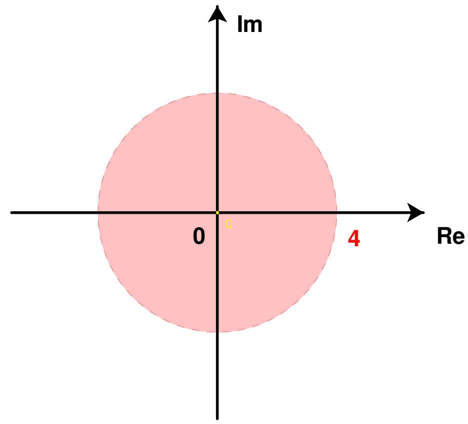
$$\Rightarrow x^2 + y^2 = 4^2 \Rightarrow \left.\begin{matrix} x^2 + y^2 = r^2 \\ x^2 + y^2 = 4^2 \end{matrix}\right\} \Rightarrow r = 4.$$



b)

$$|z| < 4 \Rightarrow \sqrt{x^2 + y^2} < 4 \Rightarrow \sqrt{x^2 + y^2} < 4 \; /^2 \Rightarrow \left(\sqrt{x^2 + y^2}\right)^2 < 4^2 \Rightarrow$$

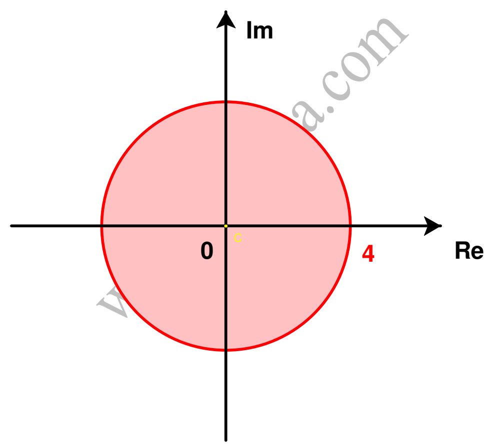
$$\Rightarrow x^2 + y^2 < 4^2 \Rightarrow \left.\begin{matrix} x^2 + y^2 < r^2 \\ x^2 + y^2 < 4^2 \end{matrix}\right\} \Rightarrow r = 4.$$



c)

$$\left|z\right| \le 4 \Rightarrow \sqrt{x^2+y^2} \le 4 \Rightarrow \sqrt{x^2+y^2} \le 4 \;/^2 \Rightarrow \left(\sqrt{x^2+y^2}\right)^2 \le 4^2 \Rightarrow$$

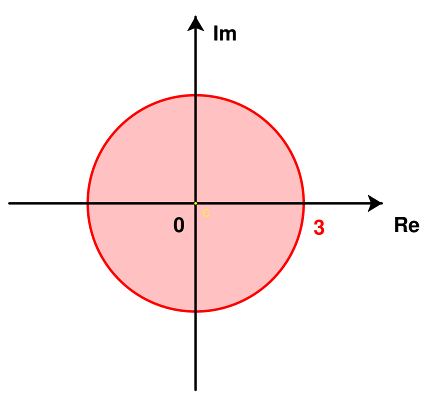
$$\Rightarrow x^2+y^2 \le 4^2 \Rightarrow \left.\begin{array}{l} x^2+y^2 \le r^2 \\ x^2+y^2 \le 4^2 \end{array}\right\} \Rightarrow r = 4.$$



Vježba 203

Prikaži u kompleksnoj ravnini skup točaka z za koje vrijedi uvjet $\left|z\right| \le 3.$

Rezultat:



Zadatak 204 (Tomislav, gimnazija)

Jedan faktor u rastavu polinoma $x^4 - 1$ na faktore jest i kompleksan broj:

$$A.\ 1 - x \cdot i \qquad B.\ x - i \qquad C.\ -1 - x \cdot i \qquad D.\ -i$$

Rješenje 204

Ponovimo!

$$\left(a^n\right)^m = a^{n \cdot m} \quad , \quad a^2 - b^2 = (a - b) \cdot (a + b).$$

Kompleksan broj je broj oblika

$$z = x + y \cdot i,$$

gdje su x i y realni brojevi, a i imaginarna jedinica. Broj x zove se realni dio kompleksnog broja z, a broj y imaginarni dio kompleksnog broja z. Pišemo:

$$x = \operatorname{Re} z \quad , \quad y = \operatorname{Im} z.$$

Standardni ili algebarski oblik kompleksnog broja je oblika

$$z = x + y \cdot i,$$

gdje su x i y realni brojevi.
Za kompleksne brojeve $x + y \cdot i$ i $x - y \cdot i$ kažemo da su kompleksno konjugirani jedan drugome.
Simbol konjugiranja jest povlaka iznad broja koji se konjugira:

$$z = x + y \cdot i \Rightarrow \bar{z} = x - y \cdot i.$$

Umnožak dvaju konjugirano kompleksnih brojeva realan je broj i nenegativan broj:

$$(x + y \cdot i) \cdot (x - y \cdot i) = x^2 + y^2.$$

$$x^4 - 1 = \left(x^2\right)^2 - 1^2 = \left(x^2 - 1\right) \cdot \left(x^2 + 1\right) = (x - 1) \cdot (x + 1) \cdot (x - i) \cdot (x + i) =$$
$$= (x - 1) \cdot (x + 1) \cdot (x - i) \cdot (x + i).$$

Odgovor je pod B.

Vježba 204

Jedan faktor u rastavu polinoma $x^4 - 1$ na faktore jest i kompleksan broj:

$$A.\ 1 - x \cdot i \qquad B.\ x + i \qquad C.\ -1 - x \cdot i \qquad D.\ -i$$

Rezultat: B.

Zadatak 205 (Miroslav, gimnazija)

Kompleksan broj z iz prvog kvadranta kompleksne ravnine ima svojstvo da je Re (z) četiri puta veći od Im (z). Koliko puta je Re (z^2) veći od Im (z^2)?

$$A.\ 16 \qquad B.\ 1.875 \qquad C.\ 2.85 \qquad D.\ 2.55$$

Rješenje 205

Ponovimo!

$$i^2 = -1 \quad , \quad (a \cdot b)^n = a^n \cdot b^n \quad , \quad (a + b)^2 = a^2 + 2 \cdot a \cdot b + b^2.$$

Kompleksan broj je broj oblika

$$z = x + y \cdot i,$$

gdje su x i y realni brojevi, a i imaginarna jedinica. Broj x zove se realni dio kompleksnog broja z, a broj y imaginarni dio kompleksnog broja z. Pišemo:

$$x = \operatorname{Re} z \quad , \quad y = \operatorname{Im} z.$$

Standardni ili algebarski oblik kompleksnog broja je oblika

$$z = x + y \cdot i,$$

gdje su x i y realni brojevi.
Skratiti razlomak znači brojnik i nazivnik tog razlomka podijeliti istim brojem različitim od nule i

jedinice

$$\frac{a \cdot n}{b \cdot n} = \frac{a}{b} \quad , \quad n \neq 0 \quad , \quad n \neq 1.$$

Kako izračunati koliko je puta broj b veći od broja a?

$$\frac{b}{a} = ?.$$

Iz uvjeta

$$\operatorname{Re}(z) = 4 \cdot \operatorname{Im}(z)$$

slijedi da kompleksan broj ima oblik

$$z = 4 \cdot x + x \cdot i, \; x > 0.$$

Računamo omjer:

$$\frac{\operatorname{Re}\left(z^2\right)}{\operatorname{Im}\left(z^2\right)} = \frac{\operatorname{Re}\left((4 \cdot x + x \cdot i)^2\right)}{\operatorname{Im}\left((4 \cdot x + x \cdot i)^2\right)} \Rightarrow \frac{\operatorname{Re}\left(z^2\right)}{\operatorname{Im}\left(z^2\right)} = \frac{\operatorname{Re}\left(16 \cdot x^2 + 8 \cdot x^2 \cdot i + (x \cdot i)^2\right)}{\operatorname{Im}\left(16 \cdot x^2 + 8 \cdot x^2 \cdot i + (x \cdot i)^2\right)} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \frac{\operatorname{Re}\left(z^2\right)}{\operatorname{Im}\left(z^2\right)} = \frac{\operatorname{Re}\left(16 \cdot x^2 + 8 \cdot x^2 \cdot i + x^2 \cdot i^2\right)}{\operatorname{Im}\left(16 \cdot x^2 + 8 \cdot x^2 \cdot i + x^2 \cdot i^2\right)} \Rightarrow \frac{\operatorname{Re}\left(z^2\right)}{\operatorname{Im}\left(z^2\right)} = \frac{\operatorname{Re}\left(16 \cdot x^2 + 8 \cdot x^2 \cdot i + x^2 \cdot (-1)\right)}{\operatorname{Im}\left(16 \cdot x^2 + 8 \cdot x^2 \cdot i + x^2 \cdot (-1)\right)} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \frac{\operatorname{Re}\left(z^2\right)}{\operatorname{Im}\left(z^2\right)} = \frac{\operatorname{Re}\left(16 \cdot x^2 + 8 \cdot x^2 \cdot i + x^2 \cdot i^2\right)}{\operatorname{Im}\left(16 \cdot x^2 + 8 \cdot x^2 \cdot i + x^2 \cdot i^2\right)} \Rightarrow \frac{\operatorname{Re}\left(z^2\right)}{\operatorname{Im}\left(z^2\right)} = \frac{\operatorname{Re}\left(16 \cdot x^2 + 8 \cdot x^2 \cdot i + x^2 \cdot (-1)\right)}{\operatorname{Im}\left(16 \cdot x^2 + 8 \cdot x^2 \cdot i + x^2 \cdot (-1)\right)} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \frac{\operatorname{Re}\left(z^2\right)}{\operatorname{Im}\left(z^2\right)} = \frac{\operatorname{Re}\left(16 \cdot x^2 + 8 \cdot x^2 \cdot i - x^2\right)}{\operatorname{Im}\left(16 \cdot x^2 + 8 \cdot x^2 \cdot i - x^2\right)} \Rightarrow \frac{\operatorname{Re}\left(z^2\right)}{\operatorname{Im}\left(z^2\right)} = \frac{\operatorname{Re}\left(15 \cdot x^2 + 8 \cdot x^2 \cdot i\right)}{\operatorname{Im}\left(15 \cdot x^2 + 8 \cdot x^2 \cdot i\right)} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \frac{\operatorname{Re}\left(z^2\right)}{\operatorname{Im}\left(z^2\right)} = \frac{15 \cdot x^2}{8 \cdot x^2} \Rightarrow \frac{\operatorname{Re}\left(z^2\right)}{\operatorname{Im}\left(z^2\right)} = \frac{15 \cdot x^2}{8 \cdot x^2} \Rightarrow \frac{\operatorname{Re}\left(z^2\right)}{\operatorname{Im}\left(z^2\right)} = \frac{15}{8} \Rightarrow \frac{\operatorname{Re}\left(z^2\right)}{\operatorname{Im}\left(z^2\right)} = 1.875.$$

Odgovor je pod B.

Vježba 205

Kompleksan broj z iz prvog kvadranta kompleksne ravnine ima svojstvo da je Im (z) četiri puta manji od Re (z). Koliko puta je Re (z^2) veći od Im (z^2)?

A. 16 *B.* 1.875 *C.* 2.85 *D.* 2.55

Rezultat: B.

Zadatak 206 (Dragica, srednja škola)

Iz $(1 - i)^5 = a + b \cdot i$ slijedi:

A. $a - b = 1$ *B.* $a + b = 0$ *C.* $a + b = -1$ *D.* $a - b = 0$

Rješenje 206

Ponovimo!

$$i^2 = -1 \quad , \quad i^3 = -i \quad , \quad a^1 = a \quad , \quad a^n \cdot a^m = a^{n+m} \quad , \quad (a \cdot b)^n = a^n \cdot b^n.$$

$$(a-b)^3=a^3-3\cdot a^2\cdot b+3\cdot a\cdot b^2-b^3 \quad , \quad (a-b)^2=a^2-2\cdot a\cdot b+b^2 \quad , \quad \left(a^n\right)^m=a^{n\cdot m}.$$

Zakon distribucije množenja prema zbrajanju.

$$a\cdot(b+c)=a\cdot b+a\cdot c \quad , \quad a\cdot b+a\cdot c=a\cdot(b+c).$$

Kompleksan broj je broj oblika

$$z=x+y\cdot i,$$

gdje su x i y realni brojevi, a i imaginarna jedinica. Broj x zove se realni dio kompleksnog broja z, a broj y imaginarni dio kompleksnog broja z. Pišemo:

$$x=\operatorname{Re} z \quad , \quad y=\operatorname{Im} z.$$

Standardni ili algebarski oblik kompleksnog broja je oblika

$$z=x+y\cdot i,$$

gdje su x i y realni brojevi.

Dva su kompleksna broja jednaka ako i samo ako su im međusobno jednaki realni dijelovi i međusobno jednaki imaginarni dijelovi, tj.

$$a+b\cdot i=c+d\cdot i \ \Leftrightarrow \ a=c \ , \ b=d.$$

1.inačica

$$(1-i)^5=a+b\cdot i \ \Rightarrow \ (1-i)^3\cdot(1-i)^2=a+b\cdot i \ \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \left(1^3-3\cdot 1^2\cdot i+3\cdot 1\cdot i^2-i^3\right)\cdot\left(1-2\cdot i+i^2\right)=a+b\cdot i \ \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \left(1-3\cdot 1\cdot i+3\cdot 1\cdot(-1)-(-i)\right)\cdot(1-2\cdot i-1)=a+b\cdot i \ \Rightarrow$$

$$\Rightarrow (1-3\cdot i-3+i)\cdot(1-2\cdot i-1)=a+b\cdot i \ \Rightarrow (-2-2\cdot i)\cdot(-2\cdot i)=a+b\cdot i \ \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 4\cdot i+4\cdot i^2=a+b\cdot i \ \Rightarrow \ 4\cdot i+4\cdot(-1)=a+b\cdot i \ \Rightarrow \ 4\cdot i-4=a+b\cdot i \ \Rightarrow$$

$$\Rightarrow a+b\cdot i=-4+4\cdot i \ \Rightarrow \left[\begin{array}{l}\text{jednakost}\\ \text{kompleksnih}\\ \text{brojeva}\end{array}\right] \Rightarrow \left.\begin{array}{l}a=-4\\ b=4\end{array}\right\} \Rightarrow \ a+b=-4+4 \ \Rightarrow$$

$$\Rightarrow a+b=-4+4 \ \Rightarrow \ a+b=0.$$

Odgovor je pod B.

2.inačica

$$(1-i)^5=a+b\cdot i \ \Rightarrow \ (1-i)^4\cdot(1-i)^1=a+b\cdot i \ \Rightarrow \left((1-i)^2\right)^2\cdot(1-i)=a+b\cdot i \ \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \left(1-2\cdot i+i^2\right)^2\cdot(1-i)=a+b\cdot i \ \Rightarrow \ (1-2\cdot i-1)^2\cdot(1-i)=a+b\cdot i \ \Rightarrow$$

$$\Rightarrow (1-2\cdot i-1)^2\cdot(1-i)=a+b\cdot i \ \Rightarrow \ (-2\cdot i)^2\cdot(1-i)=a+b\cdot i \ \Rightarrow \ (-2)^2\cdot i^2\cdot(1-i)=a+b\cdot i \ \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 4\cdot i^2\cdot(1-i)=a+b\cdot i \ \Rightarrow \ 4\cdot(-1)\cdot(1-i)=a+b\cdot i \ \Rightarrow \ -4\cdot(1-i)=a+b\cdot i \ \Rightarrow$$

$$\Rightarrow -4+4\cdot i=a+b\cdot i \ \Rightarrow \ a+b\cdot i=-4+4\cdot i \ \Rightarrow \left[\begin{array}{l}\text{jednakost}\\ \text{kompleksnih}\\ \text{brojeva}\end{array}\right] \Rightarrow \left.\begin{array}{l}a=-4\\ b=4\end{array}\right\} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow a+b=-4+4 \ \Rightarrow \ a+b=-4+4 \ \Rightarrow \ a+b=0.$$

Odgovor je pod B.

Vježba 206

Iz $(1-i)^5 - a - b \cdot i = 0$ slijedi:

$$A.\ \frac{a}{b} = 1 \qquad B.\ \frac{a}{b} = 0 \qquad C.\ \frac{b}{a} = -1 \qquad D.\ a \cdot b = 16$$

Rezultat: C.

Zadatak 207 (Sanja, gimnazija)

Ako je $z = 2 + 11 \cdot i$, onda je $\sqrt[3]{z} + \sqrt[3]{\bar{z}} = 4$. Dokazati!

Rješenje 207

Ponovimo!

$$i^2 = -1 \quad , \quad i^3 = -i \quad , \quad \sqrt[3]{a^3} = a.$$

$$(a+b)^3 = a^3 + 3 \cdot a^2 \cdot b + 3 \cdot a \cdot b^2 + b^3 \quad , \quad (a-b)^3 = a^3 - 3 \cdot a^2 \cdot b + 3 \cdot a \cdot b^2 - b^3.$$

Kompleksan broj je broj oblika

$$z = x + y \cdot i,$$

gdje su x i y realni brojevi, a i imaginarna jedinica. Broj x zove se realni dio kompleksnog broja z, a broj y imaginarni dio kompleksnog broja z. Pišemo:

$$x = \mathrm{Re}\, z \quad , \quad y = \mathrm{Im}\, z.$$

Standardni ili algebarski oblik kompleksnog broja je oblika

$$z = x + y \cdot i,$$

gdje su x i y realni brojevi.

Za kompleksne brojeve $x + y \cdot i$ i $x - y \cdot i$ kažemo da su kompleksno konjugirani jedan drugome. Simbol konjugiranja jest povlaka iznad broja koji se konjugira:

$$z = x + y \cdot i \Rightarrow \bar{z} = x - y \cdot i.$$

Zakon distribucije množenja prema zbrajanju:

$$a \cdot (b + c) = a \cdot b + a \cdot c \quad , \quad a \cdot b + a \cdot c = a \cdot (b + c).$$

Uočimo da je:

- $(2+i)^3 = 2^3 + 3 \cdot 2^2 \cdot i + 3 \cdot 2 \cdot i^2 + i^3 = 8 + 3 \cdot 4 \cdot i + 6 \cdot (-1) - i =$
  $= 8 + 12 \cdot i - 6 - i = 2 + 11 \cdot i$
- $(2-i)^3 = 2^3 - 3 \cdot 2^2 \cdot i + 3 \cdot 2 \cdot i^2 - i^3 = 8 - 3 \cdot 4 \cdot i + 6 \cdot (-1) - (-i) =$
  $= 8 - 12 \cdot i - 6 + i = 2 - 11 \cdot i.$

Sada je:

$$\sqrt[3]{z} + \sqrt[3]{\bar{z}} = \begin{bmatrix} z = 2 + 11 \cdot i = (2+i)^3 \\ \bar{z} = 2 - 11 \cdot i = (2-i)^3 \end{bmatrix} = \sqrt[3]{(2+i)^3} + \sqrt[3]{(2-i)^3} =$$

$$= 2 + i + 2 - i = 2 + i + 2 - i = 4.$$

Vježba 207

Ako je $z = 2 + 11 \cdot i$, onda je $\sqrt[3]{z} - \sqrt[3]{\bar{z}} = 2 \cdot i$. Dokazati!

Rezultat: Dokaz analogan.

Zadatak 208 (Iva, gimnazija)

Vrijednost izraza $\left(1+i\cdot\sqrt{3}\right)^{3}\cdot\left(\frac{1}{\sqrt{2}}-\frac{i}{\sqrt{2}}\right)^{-2}$ jednaka je:

$A.\ \frac{3}{2}\cdot\sqrt{\frac{3}{2}}-4\cdot i$ $\quad B.\ \frac{1-i\cdot\sqrt{3}}{2}$ $\quad C.\ -8\cdot i$ $\quad D.\ \sqrt{6}+i\cdot\sqrt{6}$ $\quad E.\ -8$

Rješenje 208

Ponovimo!

$$a^{n}\cdot a^{m}=a^{n+m} \quad , \quad a^{1}=a \quad , \quad \frac{a}{n}-\frac{b}{n}=\frac{a-b}{n} \quad , \quad \left(\frac{a}{b}\right)^{-n}=\left(\frac{b}{a}\right)^{n} \quad , \quad i^{2}=-1.$$

$$(a+b)^{2}=a^{2}+2\cdot a\cdot b+b^{2} \quad , \quad (a\cdot b)^{n}=a^{n}\cdot b^{n} \quad , \quad \left(\frac{a}{b}\right)^{n}=\frac{a^{n}}{b^{n}} \quad , \quad i^{3}=-i.$$

$$(a-b)^{2}=a^{2}-2\cdot a\cdot b+b^{2} \quad , \quad \left(\sqrt{a}\right)^{2}=a \quad , \quad (a-b)\cdot(a+b)=a^{2}-b^{2}.$$

$$n=\frac{n}{1} \quad , \quad (a+b)^{3}=a^{3}+3\cdot a^{2}\cdot b+3\cdot a\cdot b^{2}+b^{3}.$$

Zakon distribucije množenja prema zbrajanju.

$$a\cdot(b+c)=a\cdot b+a\cdot c \quad , \quad a\cdot b+a\cdot c=a\cdot(b+c).$$

Proširiti razlomak znači brojnik i nazivnik tog razlomka pomnožiti istim brojem različitim od nule i jedinice

$$\frac{a}{b}=\frac{a\cdot n}{b\cdot n} \quad , \quad n\neq 0 \quad , \quad n\neq 1.$$

Skratiti razlomak znači brojnik i nazivnik tog razlomka podijeliti istim brojem različitim od nule i jedinice

$$\frac{a\cdot n}{b\cdot n}=\frac{a}{b} \quad , \quad n\neq 0 \quad , \quad n\neq 1.$$

Kompleksan broj je broj oblika

$$z=x+y\cdot i,$$

gdje su x i y realni brojevi, a i imaginarna jedinica. Broj x zove se realni dio kompleksnog broja z, a broj y imaginarni dio kompleksnog broja z. Pišemo:

$$x=\operatorname{Re} z \quad , \quad y=\operatorname{Im} z.$$

Standardni ili algebarski oblik kompleksnog broja je oblika

$$z=x+y\cdot i,$$

gdje su x i y realni brojevi.

1.inačica

$$\left(1+i\cdot\sqrt{3}\right)^{3}\cdot\left(\frac{1}{\sqrt{2}}-\frac{i}{\sqrt{2}}\right)^{-2}=\left(1+i\cdot\sqrt{3}\right)^{2}\cdot\left(1+i\cdot\sqrt{3}\right)^{1}\cdot\left(\frac{1-i}{\sqrt{2}}\right)^{-2}=$$

$$=\left(1+2\cdot i\cdot\sqrt{3}+\left(i\cdot\sqrt{3}\right)^{2}\right)\cdot\left(1+i\cdot\sqrt{3}\right)\cdot\left(\frac{\sqrt{2}}{1-i}\right)^{2}=$$

$$=\left(1+2\cdot i\cdot\sqrt{3}+i^{2}\cdot\left(\sqrt{3}\right)^{2}\right)\cdot\left(1+i\cdot\sqrt{3}\right)\cdot\frac{\left(\sqrt{2}\right)^{2}}{(1-i)^{2}}=$$

$$=\left(1+2\cdot i\cdot\sqrt{3}+(-1)\cdot 3\right)\cdot\left(1+i\cdot\sqrt{3}\right)\cdot\frac{2}{1-2\cdot i+i^2}=\left(1+2\cdot i\cdot\sqrt{3}-3\right)\cdot\left(1+i\cdot\sqrt{3}\right)\cdot\frac{2}{1-2\cdot i-1}=$$

$$=\left(-2+2\cdot i\cdot\sqrt{3}\right)\cdot\left(1+i\cdot\sqrt{3}\right)\cdot\frac{2}{1-2\cdot i-1}=-2\cdot\left(1-i\cdot\sqrt{3}\right)\cdot\left(1+i\cdot\sqrt{3}\right)\cdot\frac{2}{-2\cdot i}=$$

$$=-2\cdot\left(1-i\cdot\sqrt{3}\right)\cdot\left(1+i\cdot\sqrt{3}\right)\cdot\frac{2}{-2\cdot i}=\left(1-i\cdot\sqrt{3}\right)\cdot\left(1+i\cdot\sqrt{3}\right)\cdot\frac{2}{i}=$$

$$=\left(1^2-\left(i\cdot\sqrt{3}\right)^2\right)\cdot\frac{2}{i}=\left(1-i^2\cdot\left(\sqrt{3}\right)^2\right)\cdot\frac{2}{i}=\left(1-(-1)\cdot 3\right)\cdot\frac{2}{i}=(1+3)\cdot\frac{2}{i}=4\cdot\frac{2}{i}=$$

$$=\frac{4}{1}\cdot\frac{2}{i}=\frac{8}{i}=\frac{8}{i}\cdot\frac{i}{i}=\frac{8\cdot i}{i^2}=\frac{8\cdot i}{-1}=-8\cdot i.$$

Odgovor je pod C.

2.inačica

$$\left(1+i\cdot\sqrt{3}\right)^3\cdot\left(\frac{1}{\sqrt{2}}-\frac{i}{\sqrt{2}}\right)^{-2}=$$

$$=\left(1^3+3\cdot 1^2\cdot i\cdot\sqrt{3}+3\cdot 1\cdot\left(i\cdot\sqrt{3}\right)^2+\left(i\cdot\sqrt{3}\right)^3\right)\cdot\left(\frac{1-i}{\sqrt{2}}\right)^{-2}=$$

$$=\left(1+3\cdot 1\cdot i\cdot\sqrt{3}+3\cdot 1\cdot i^2\cdot\left(\sqrt{3}\right)^2+i^3\cdot\left(\sqrt{3}\right)^3\right)\cdot\left(\frac{\sqrt{2}}{1-i}\right)^2=$$

$$=\left(1+3\cdot i\cdot\sqrt{3}+3\cdot 1\cdot(-1)\cdot 3-i\cdot\left(\sqrt{3}\right)^2\cdot\left(\sqrt{3}\right)^1\right)\cdot\frac{\left(\sqrt{2}\right)^2}{(1-i)^2}=$$

$$=\left(1+3\cdot i\cdot\sqrt{3}-9-i\cdot 3\cdot\sqrt{3}\right)\cdot\frac{2}{1-2\cdot i+i^2}=\left(1+3\cdot i\cdot\sqrt{3}-9-3\cdot i\cdot\sqrt{3}\right)\cdot\frac{2}{1-2\cdot i-1}=$$

$$=\left(1+3\cdot i\cdot\sqrt{3}-9-3\cdot i\cdot\sqrt{3}\right)\cdot\frac{2}{1-2\cdot i-1}=-8\cdot\frac{2}{-2\cdot i}=8\cdot\frac{2}{2\cdot i}=8\cdot\frac{2}{2\cdot i}=8\cdot\frac{1}{i}=\frac{8}{1}\cdot\frac{1}{i}=$$

$$=\frac{8}{i}=\frac{8}{i}\cdot\frac{i}{i}=\frac{8\cdot i}{i^2}=\frac{8\cdot i}{-1}=-8\cdot i.$$

Odgovor je pod C.

Vježba 208

Vrijednost izraza $\left(i\cdot\sqrt{3}+1\right)^3\cdot\left(\frac{1}{\sqrt{2}}-\frac{i}{\sqrt{2}}\right)^{-2}$ jednaka je:

A. $\frac{3}{2}\cdot\sqrt{\frac{3}{2}}-4\cdot i$ *B.* $\frac{1-i\cdot\sqrt{3}}{2}$ *C.* $-8\cdot i$ *D.* $\sqrt{6}+i\cdot\sqrt{6}$ *E.* -8

Rezultat: C.

Zadatak 209 (Iva, gimnazija)

Ako je $z = \frac{-3+i}{1-2\cdot i} + 2 - 3\cdot i,$ nađite imaginarni dio broja $\bar{z}.$

Rješenje 209

Ponovimo!

$$n = \frac{n}{1} \quad , \quad \frac{a}{b} + \frac{c}{d} = \frac{a\cdot d + b\cdot c}{b\cdot d} \quad , \quad i^2 = -1 \quad , \quad a^n \cdot a^m = a^{n+m} \quad , \quad a^1 = a.$$

Proširiti razlomak znači brojnik i nazivnik tog razlomka pomnožiti istim brojem različitim od nule i jedinice

$$\frac{a}{b} = \frac{a\cdot n}{b\cdot n} \ , \ n \neq 0 \ , \ n \neq 1.$$

Skratiti razlomak znači brojnik i nazivnik tog razlomka podijeliti istim brojem različitim od nule i jedinice

$$\frac{a\cdot n}{b\cdot n} = \frac{a}{b} \ , \ n \neq 0 \ , \ n \neq 1.$$

Množenje zagrada

$$(a+b)\cdot(c+d) = a\cdot c + a\cdot d + b\cdot c + b\cdot d.$$

Zakon distribucije množenja prema zbrajanju.

$$a\cdot(b+c) = a\cdot b + a\cdot c \quad , \quad a\cdot b + a\cdot c = a\cdot(b+c).$$

Kompleksan broj je broj oblika

$$z = x + y\cdot i,$$

gdje su x i y realni brojevi, a i imaginarna jedinica. Broj x zove se realni dio kompleksnog broja z, a broj y imaginarni dio kompleksnog broja z. Pišemo:

$$x = \mathrm{Re}\, z \quad , \quad y = \mathrm{Im}\, z.$$

Standardni ili algebarski oblik kompleksnog broja je oblika

$$z = x + y\cdot i,$$

gdje su x i y realni brojevi.
Za kompleksne brojeve $x + y \cdot i$ i $x - y \cdot i$ kažemo da su kompleksno konjugirani jedan drugome.
Simbol konjugiranja jest povlaka iznad broja koji se konjugira:

$$z = x + y\cdot i \ \Rightarrow \ \bar{z} = x - y\cdot i.$$

Umnožak dvaju konjugirano kompleksnih brojeva realan je broj i nenegativan broj:

$$(x + y\cdot i)\cdot(x - y\cdot i) = x^2 + y^2.$$

1.inačica

$$z = \frac{-3+i}{1-2\cdot i} + 2 - 3\cdot i \ \Rightarrow \ z = \frac{-3+i}{1-2\cdot i} + \frac{2-3\cdot i}{1} \ \Rightarrow \ z = \frac{-3+i+(2-3\cdot i)\cdot(1-2\cdot i)}{1-2\cdot i} \ \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \ z = \frac{-3+i+2-4\cdot i-3\cdot i+6\cdot i^2}{1-2\cdot i} \ \Rightarrow \ z = \frac{-3+i+2-4\cdot i-3\cdot i+6\cdot(-1)}{1-2\cdot i} \ \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \ z = \frac{-3+i+2-4\cdot i-3\cdot i-6}{1-2\cdot i} \ \Rightarrow \ z = \frac{-7-6\cdot i}{1-2\cdot i} \ \Rightarrow \ z = \frac{-7-6\cdot i}{1-2\cdot i}\cdot\frac{1+2\cdot i}{1+2\cdot i} \ \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \ z = \frac{(-7-6\cdot i)\cdot(1+2\cdot i)}{(1-2\cdot i)\cdot(1+2\cdot i)} \ \Rightarrow \ z = \frac{-7-14\cdot i-6\cdot i-12\cdot i^2}{1^2+2^2} \ \Rightarrow \ z = \frac{-7-14\cdot i-6\cdot i-12\cdot(-1)}{1+4} \ \Rightarrow$$

$$\Rightarrow\ z=\frac{-7-14\cdot i-6\cdot i+12}{5}\ \Rightarrow\ z=\frac{5-20\cdot i}{5}\ \Rightarrow\ z=\frac{5\cdot(1-4\cdot i)}{5}\ \Rightarrow\ z=\frac{5\cdot(1-4\cdot i)}{5}\ \Rightarrow$$

$$\Rightarrow\ z=1-4\cdot i\ \Rightarrow\ \bar{z}=1+4\cdot i\ \Rightarrow\ \operatorname{Im}(\bar{z})=4.$$

2.inačica

$$z=\frac{-3+i}{1-2\cdot i}+2-3\cdot i\ \Rightarrow\ z=\frac{-3+i}{1-2\cdot i}\cdot\frac{1+2\cdot i}{1+2\cdot i}+2-3\cdot i\ \Rightarrow\ z=\frac{(-3+i)\cdot(1+2\cdot i)}{(1-2\cdot i)\cdot(1+2\cdot i)}+2-3\cdot i\ \Rightarrow$$

$$\Rightarrow\ z=\frac{-3-6\cdot i+i+2\cdot i^2}{1^2+2^2}+2-3\cdot i\ \Rightarrow\ z=\frac{-3-6\cdot i+i+2\cdot(-1)}{1+4}+2-3\cdot i\ \Rightarrow$$

$$\Rightarrow\ z=\frac{-3-6\cdot i+i-2}{5}+2-3\cdot i\ \Rightarrow\ z=\frac{-5-5\cdot i}{5}+2-3\cdot i\ \Rightarrow\ z=\frac{5\cdot(-1-i)}{5}+2-3\cdot i\ \Rightarrow$$

$$\Rightarrow\ z=\frac{5\cdot(-1-i)}{5}+2-3\cdot i\ \Rightarrow\ z=-1-i+2-3\cdot i\ \Rightarrow\ z=1-4\cdot i\ \Rightarrow$$

$$\Rightarrow\ \bar{z}=1+4\cdot i\ \Rightarrow\ \operatorname{Im}(\bar{z})=4.$$

Vježba 209

Ako je $z=\frac{-3+i}{1-2\cdot i}+2-3\cdot i,$ nađite realni dio broja $\bar{z}.$

Rezultat: 1.

Zadatak 210 (Matej, gimnazija)

Riješi jednadžbu $|z|+z^2=0$ u skupu C.

Rješenje 210

Ponovimo!

$$(a+b)^2=a^2+2\cdot a\cdot b+b^2\quad,\quad(a\cdot b)^n=a^n\cdot b^n\quad,\quad i^2=-1.$$

$$a^1=a\quad,\quad a^n:a^m=a^{n-m}.$$

Kompleksan broj je broj oblika

$$z=x+y\cdot i,$$

gdje su x i y realni brojevi, a i imaginarna jedinica. Broj x zove se realni dio kompleksnog broja z, a broj y imaginarni dio kompleksnog broja z. Pišemo:

$$x=\operatorname{Re}z\quad,\quad y=\operatorname{Im}z.$$

Standardni ili algebarski oblik kompleksnog broja je oblika

$$z=x+y\cdot i,$$

gdje su x i y realni brojevi.
Modul ili apsolutna vrijednost kompleksnog broja $z = x + y \cdot i$ definira se formulom

$$|z|=\sqrt{x^2+y^2}.$$

Dva su kompleksna broja jednaka ako i samo ako su im međusobno jednaki realni dijelovi i međusobno jednaki imaginarni dijelovi, tj.

$$a+b\cdot i=c+d\cdot i\ \Leftrightarrow\ a=c\ ,\ b=d.$$

Da bi umnožak bio jednak nuli, dovoljno je da jedan faktor bude jednak nuli.

$$a\cdot b=0\ \Leftrightarrow\ a=0\ \text{ili}\ b=0\ \text{ili}\ a=b=0.$$

Zakon distribucije množenja prema zbrajanju.

$$a \cdot (b+c) = a \cdot b + a \cdot c \quad , \quad a \cdot b + a \cdot c = a \cdot (b+c).$$

Za realni broj x njegova je apsolutna vrijednost (modul) broj $|x|$ koji određujemo na ovaj način:

$$|x| = \begin{cases} x, & x \geq 0 \\ -x, & x < 0. \end{cases}$$

Ako je broj x pozitivan ili nula, tada je on jednak svojoj apsolutnoj vrijednosti. Za svaki x, $x \geq 0$, vrijedi $|x| = x$.

Ako je x negativan broj, njegova apsolutna vrijednost je suprotan broj – x koji je pozitivan. Za svaki x, $x < 0$, je $|x| = -x$.

Neka je kompleksni broj $z = x + y \cdot i$ rješenje zadatka. Uvrstimo ga u jednadžbu.

$$\left.\begin{array}{l} z = x + y \cdot i \\ |z| + z^2 = 0 \end{array}\right\} \Rightarrow |x + y \cdot i| + (x + y \cdot i)^2 = 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \sqrt{x^2 + y^2} + x^2 + 2 \cdot x \cdot y \cdot i + (y \cdot i)^2 = 0 \Rightarrow \sqrt{x^2 + y^2} + x^2 + 2 \cdot x \cdot y \cdot i + y^2 \cdot i^2 = 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \sqrt{x^2 + y^2} + x^2 + 2 \cdot x \cdot y \cdot i + y^2 \cdot (-1) = 0 \Rightarrow \sqrt{x^2 + y^2} + x^2 + 2 \cdot x \cdot y \cdot i - y^2 = 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \sqrt{x^2 + y^2} + x^2 - y^2 + 2 \cdot x \cdot y \cdot i = 0 \Rightarrow \sqrt{x^2 + y^2} + x^2 - y^2 + 2 \cdot x \cdot y \cdot i = 0 + 0 \cdot i \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{bmatrix} \text{jednakost} \\ \text{kompleksnih} \\ \text{brojeva} \end{bmatrix} \Rightarrow \left.\begin{array}{l} \sqrt{x^2 + y^2} + x^2 - y^2 = 0 \\ 2 \cdot x \cdot y = 0 \end{array}\right\} \Rightarrow \left.\begin{array}{l} \sqrt{x^2 + y^2} + x^2 - y^2 = 0 \\ 2 \cdot x \cdot y = 0 \ /:2 \end{array}\right\} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \left.\begin{array}{l} \sqrt{x^2 + y^2} + x^2 - y^2 = 0 \\ x \cdot y = 0 \end{array}\right\}.$$

Ako u jednadžbi $x \cdot y = 0$ slijedi $x = 0$ dobije se:

$$\left.\begin{array}{l} x = 0 \\ \sqrt{x^2 + y^2} + x^2 - y^2 = 0 \end{array}\right\} \Rightarrow \sqrt{0^2 + y^2} + 0^2 - y^2 = 0 \Rightarrow \sqrt{y^2} - y^2 = 0 \Rightarrow |y| - y^2 = 0.$$

Za $y < 0$ slijedi:

$$\left.\begin{array}{l} y < 0 \\ |y| - y^2 = 0 \end{array}\right\} \Rightarrow -y - y^2 = 0 \Rightarrow -y - y^2 = 0 \ / \cdot (-1) \Rightarrow y + y^2 = 0 \Rightarrow y \cdot (1 + y) = 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \left.\begin{array}{l} y = 0 \text{ nije rješenje zbog } y < 0 \\ 1 + y = 0 \end{array}\right\} \Rightarrow 1 + y = 0 \Rightarrow y = -1.$$

Prvo rješenje jednadžbe glasi:

- $$\left.\begin{array}{l} x = 0 \ , \ y = -1 \\ z = x + y \cdot i \end{array}\right\} \Rightarrow z = 0 - 1 \cdot i \Rightarrow z_1 = -i.$$

Za $y \geq 0$ slijedi:

$$\left.\begin{array}{l} y \geq 0 \\ |y| - y^2 = 0 \end{array}\right\} \Rightarrow y - y^2 = 0 \Rightarrow y \cdot (1 - y) = 0 \Rightarrow \left.\begin{array}{l} y = 0 \\ 1 - y = 0 \end{array}\right\} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \left.\begin{array}{l} y = 0 \\ -y = -1 \end{array}\right\} \Rightarrow \left.\begin{array}{l} y = 0 \\ -y = -1 \ / \cdot (-1) \end{array}\right\} \Rightarrow \left.\begin{array}{l} y_2 = 0 \\ y_3 = 1 \end{array}\right\}.$$

Druga dva rješenja glase:

- $\left.\begin{array}{l} x=0 \;,\; y=0 \\ z=x+y\cdot i \end{array}\right\} \Rightarrow z=0+0\cdot i \Rightarrow z_2=0$
- $\left.\begin{array}{l} x=0 \;,\; y=1 \\ z=x+y\cdot i \end{array}\right\} \Rightarrow z=0+1\cdot i \Rightarrow z_3=i.$

Ako u jednadžbi x · y = 0 slijedi y = 0 dobije se:

$$\left.\begin{array}{l} y=0 \\ \sqrt{x^2+y^2}+x^2-y^2=0 \end{array}\right\} \Rightarrow \sqrt{x^2+0^2}+x^2-0^2=0 \Rightarrow \sqrt{x^2}+x^2=0 \Rightarrow |x|+x^2=0.$$

Za x < 0 slijedi:

$$\left.\begin{array}{l} x<0 \\ |x|+x^2=0 \end{array}\right\} \Rightarrow -x+x^2=0 \Rightarrow x\cdot(-1+x)=0 \Rightarrow \left.\begin{array}{l} x=0 \\ -1+x=0 \end{array}\right\} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \left.\begin{array}{l} x=0 \text{ nije rješenje zbog } x<0 \\ x=1 \text{ nije rješenje zbog } x<0 \end{array}\right\}.$$

Za x ≥ 0 slijedi:

$$\left.\begin{array}{l} x\geq 0 \\ |x|+x^2=0 \end{array}\right\} \Rightarrow x+x^2=0 \Rightarrow x\cdot(1+x)=0 \Rightarrow \left.\begin{array}{l} x=0 \\ 1+x=0 \end{array}\right\} \Rightarrow \left.\begin{array}{l} x=0 \\ x=-1 \end{array}\right\} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \left.\begin{array}{l} x=0 \\ x=-1 \text{ nije rješenje zbog } x\geq 0 \end{array}\right\} \Rightarrow x=0 \text{ taj slučaj je već riješen.}$$

Vježba 210

Riješi jednadžbu $|z|=-z^2$ u skupu C.

Rezultat: $z_1 = 0$, $z_2 = i$, $z_3 = -i$.

Zadatak 211 (Ružica, srednja škola)

Dokaži identitet $(1+i)^{100}=-2^{50}$.

Rješenje 211

Ponovimo!

$$\left(a^n\right)^m=a^{n\cdot m} \quad , \quad (a\cdot b)^n=a^n\cdot b^n \quad , \quad (-1)^{2\cdot n+1}=-1.$$

$$(a+b)^2=a^2+2\cdot a\cdot b+b^2 \quad , \quad i^{\circ}=1 \quad , \quad i^1=i \quad , \quad i^2=-1 \quad , \quad i^3=-i.$$

Potencije imaginarne jedinice i

Za $n\in N$ vrijedi

$$i^{4\cdot n}=1 \quad , \quad i^{4\cdot n+1}=i \quad , \quad i^{4\cdot n+2}=-1 \quad , \quad i^{4\cdot n+3}=-i.$$

1.inačica

$$(1+i)^{100}=\left((1+i)^2\right)^{50}=\left(1+2\cdot i+i^2\right)^{50}=(1+2\cdot i-1)^{50}=(1+2\cdot i-1)^{50}=(2\cdot i)^{50}=$$

$$=2^{50}\cdot i^{50}=2^{50}\cdot\left(i^2\right)^{25}=2^{50}\cdot(-1)^{25}=2^{50}\cdot(-1)=-2^{50}.$$

2.inačica

$$(1+i)^{100}=\left((1+i)^2\right)^{50}=\left(1+2\cdot i+i^2\right)^{50}=(1+2\cdot i-1)^{50}=(1+2\cdot i-1)^{50}=(2\cdot i)^{50}=$$

$$=2^{50}\cdot i^{50}=\begin{bmatrix}50:4=12\\2\end{bmatrix}=2^{50}\cdot i^2=2^{50}\cdot(-1)=-2^{50}.$$

Vježba 211

Dokaži identitet $(1+i)^{200}=2^{100}.$

Rezultat: Točno je.

Zadatak 212 (Ana, gimnazija)

Kolika je vrijednost broja a ako je $(a+b\cdot i)\cdot\left(2+i^{267}\right)=5\ ,\ a,b\in R\ ,\ i^2=-1$?

$A.\ -2\qquad B.\ 0\qquad C.\ 2\qquad D.\ 5$

Rješenje 212

Ponovimo!

$$a^1=a\quad,\quad a^n\cdot a^m=a^{n+m}\quad,\quad i^2=-1\quad,\quad i^3=-i\quad,\quad \frac{a}{b}\cdot\frac{c}{d}=\frac{a\cdot c}{b\cdot d}.$$

Potencije imaginarne jedinice i
Za $n\in N$ vrijedi

$$i^{4\cdot n}=1\quad,\quad i^{4\cdot n+1}=i\quad,\quad i^{4\cdot n+2}=-1\quad,\quad i^{4\cdot n+3}=-i.$$

Kompleksan broj je broj oblika

$$z=x+y\cdot i,$$

gdje su x i y realni brojevi, a i imaginarna jedinica. Broj x zove se realni dio kompleksnog broja z, a broj y imaginarni dio kompleksnog broja z. Pišemo:

$$x=\mathrm{Re}\,z\quad,\quad y=\mathrm{Im}\,z.$$

Standardni ili algebarski oblik kompleksnog broja je oblika

$$z=x+y\cdot i,$$

gdje su x i y realni brojevi.
Za kompleksne brojeve $x+y\cdot i$ i $x-y\cdot i$ kažemo da su kompleksno konjugirani jedan drugome.
Simbol konjugiranja jest povlaka iznad broja koji se konjugira:

$$z=x+y\cdot i\ \Rightarrow\ \bar{z}=x-y\cdot i.$$

Umnožak dvaju konjugirano kompleksnih brojeva realan je broj i nenegativan broj:

$$(x+y\cdot i)\cdot(x-y\cdot i)=x^2+y^2.$$

Proširiti razlomak znači brojnik i nazivnik tog razlomka pomnožiti istim brojem različitim od nule i jedinice

$$\frac{a}{b}=\frac{a\cdot n}{b\cdot n}\ ,\ n\neq 0\ ,\ n\neq 1.$$

Zakon distribucije množenja prema zbrajanju.

$$a\cdot(b+c)=a\cdot b+a\cdot c\quad,\quad a\cdot b+a\cdot c=a\cdot(b+c).$$

Dva su kompleksna broja jednaka ako i samo ako su im međusobno jednaki realni dijelovi i međusobno jednaki imaginarni dijelovi, tj.

$$a+b\cdot i=c+d\cdot i\ \Leftrightarrow\ a=c\ ,\ b=d.$$

Skratiti razlomak znači brojnik i nazivnik tog razlomka podijeliti istim brojem različitim od nule i jedinice

$$\frac{a\cdot n}{b\cdot n}=\frac{a}{b}\ ,\ n\neq 0\ ,\ n\neq 1.$$

Množenje zagrada

$$(a+b)\cdot(c+d)=a\cdot c+a\cdot d+b\cdot c+b\cdot d.$$

Najprije izračunamo potenciju i^{267}. Eksponent 267 podijelimo s 4 i dobije se količnik 66, a ostatak 3.

$$i^{267}=\begin{bmatrix} 267:4=66 \\ 27 \\ 3 \end{bmatrix}=i^{3}=-i.$$

1.inačica

$$(a+b\cdot i)\cdot\left(2+i^{267}\right)=5\ \Rightarrow\ (a+b\cdot i)\cdot\left(2+i^{3}\right)=5\ \Rightarrow\ (a+b\cdot i)\cdot(2-i)=5\ \Rightarrow$$

$$\Rightarrow\ (a+b\cdot i)\cdot(2-i)=5\ /\cdot\frac{1}{2-i}\ \Rightarrow\ a+b\cdot i=\frac{5}{2-i}\ \Rightarrow\ a+b\cdot i=\frac{5}{2-i}\cdot\frac{2+i}{2+i}\ \Rightarrow$$

$$\Rightarrow\ a+b\cdot i=\frac{5\cdot(2+i)}{(2-i)\cdot(2+i)}\ \Rightarrow\ a+b\cdot i=\frac{5\cdot(2+i)}{2^{2}+1^{2}}\ \Rightarrow\ a+b\cdot i=\frac{5\cdot(2+i)}{4+1}\ \Rightarrow\ a+b\cdot i=\frac{5\cdot(2+i)}{5}\ \Rightarrow$$

$$\Rightarrow\ a+b\cdot i=\frac{5\cdot(2+i)}{5}\ \Rightarrow\ a+b\cdot i=2+i\ \Rightarrow\ \begin{bmatrix}\text{jednakost}\\ \text{kompleksnih brojeva}\end{bmatrix}\ \Rightarrow\ \left.\begin{matrix}a=2\\ b=1\end{matrix}\right\}\ \Rightarrow\ a=2.$$

Odgovor je pod C.

2.inačica

$$(a+b\cdot i)\cdot\left(2+i^{267}\right)=5\ \Rightarrow\ (a+b\cdot i)\cdot\left(2+i^{3}\right)=5\ \Rightarrow\ (a+b\cdot i)\cdot(2-i)=5\ \Rightarrow$$

$$\Rightarrow\ 2\cdot a-a\cdot i+2\cdot b\cdot i-b\cdot i^{2}=5\ \Rightarrow\ 2\cdot a-a\cdot i+2\cdot b\cdot i-b\cdot(-1)=5\ \Rightarrow$$

$$\Rightarrow\ 2\cdot a-a\cdot i+2\cdot b\cdot i+b=5\ \Rightarrow\ 2\cdot a+b-a\cdot i+2\cdot b\cdot i=5\ \Rightarrow\ (2\cdot a+b)+(-a\cdot i+2\cdot b\cdot i)=5\ \Rightarrow$$

$$\Rightarrow\ (2\cdot a+b)+(-a+2\cdot b)\cdot i=5+0\cdot i\ \Rightarrow\ \begin{bmatrix}\text{jednakost}\\ \text{kompleksnih brojeva}\end{bmatrix}\ \Rightarrow\ \left.\begin{matrix}2\cdot a+b=5\\ -a+2\cdot b=0\end{matrix}\right\}\ \Rightarrow$$

$$\Rightarrow\ \begin{bmatrix}\text{metoda suprotnih}\\ \text{koeficijenata}\end{bmatrix}\ \Rightarrow\ \left.\begin{matrix}2\cdot a+b=5\ /\cdot(-2)\\ -a+2\cdot b=0\end{matrix}\right\}\ \Rightarrow\ \left.\begin{matrix}-4\cdot a-2\cdot b=-10\\ -a+2\cdot b=0\end{matrix}\right\}\ \Rightarrow\ -5\cdot a=-10\ \Rightarrow$$

$$\Rightarrow\ -5\cdot a=-10\ /:(-5)\ \Rightarrow\ a=2.$$

Odgovor je pod C.

Vježba 212

Kolika je vrijednost broja b ako je $(a+b\cdot i)\cdot\left(2+i^{267}\right)=5\ ,\ a,b\in R\ ,\ i^{2}=-1$?

$A.\ -1 \qquad B.\ 0 \qquad C.\ 1 \qquad D.\ 4$

Rezultat: C.

Zadatak 213 (Katarina, maturantica)

Koliki je imaginarni dio kompleksnog broja z ako je $5+3\cdot z+6\cdot i-4\cdot i\cdot z=11-27\cdot i$?

$A.\ -13 \qquad B.\ -\frac{39}{5} \qquad C.\ -3 \qquad D.\ -\frac{6}{5}$

Rješenje 213

Ponovimo!

$$a^{1}=a\quad,\quad a^{n}\cdot a^{m}=a^{n+m}\quad,\quad \frac{a}{b}\cdot\frac{c}{d}=\frac{a\cdot c}{b\cdot d}\quad,\quad \frac{a-b}{n}=\frac{a}{n}-\frac{b}{n}\quad,\quad i^{2}=-1.$$

Zakon distribucije množenja prema zbrajanju.

$$a\cdot(b+c)=a\cdot b+a\cdot c \quad , \quad a\cdot b+a\cdot c=a\cdot(b+c).$$

Proširiti razlomak znači brojnik i nazivnik tog razlomka pomnožiti istim brojem različitim od nule i jedinice

$$\frac{a}{b}=\frac{a\cdot n}{b\cdot n} \ , \ n\neq 0 \ , \ n\neq 1.$$

Skratiti razlomak znači brojnik i nazivnik tog razlomka podijeliti istim brojem različitim od nule i jedinice

$$\frac{a\cdot n}{b\cdot n}=\frac{a}{b} \ , \ n\neq 0 \ , \ n\neq 1.$$

Kompleksan broj je broj oblika

$$z=x+y\cdot i,$$

gdje su x i y realni brojevi, a i imaginarna jedinica. Broj x zove se realni dio kompleksnog broja z, a broj y imaginarni dio kompleksnog broja z. Pišemo:

$$x=\operatorname{Re} z \quad , \quad y=\operatorname{Im} z.$$

Standardni ili algebarski oblik kompleksnog broja je oblika

$$z=x+y\cdot i,$$

gdje su x i y realni brojevi.
Za kompleksne brojeve $x + y \cdot i$ i $x - y \cdot i$ kažemo da su kompleksno konjugirani jedan drugome.
Simbol konjugiranja jest povlaka iznad broja koji se konjugira:

$$z=x+y\cdot i \Rightarrow \bar{z}=x-y\cdot i.$$

Umnožak dvaju konjugirano kompleksnih brojeva realan je broj i nenegativan broj:

$$(x+y\cdot i)\cdot(x-y\cdot i)=x^2+y^2.$$

$$5+3\cdot z+6\cdot i-4\cdot i\cdot z=11-27\cdot i \Rightarrow 3\cdot z-4\cdot i\cdot z=11-27\cdot i-5-6\cdot i \Rightarrow$$

$$\Rightarrow (3-4\cdot i)\cdot z=6-33\cdot i \Rightarrow (3-4\cdot i)\cdot z=6-33\cdot i \ /\cdot\frac{1}{3-4\cdot i} \Rightarrow z=\frac{6-33\cdot i}{3-4\cdot i} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow z=\frac{6-33\cdot i}{3-4\cdot i}\cdot\frac{3+4\cdot i}{3+4\cdot i} \Rightarrow z=\frac{(6-33\cdot i)\cdot(3+4\cdot i)}{(3-4\cdot i)\cdot(3+4\cdot i)} \Rightarrow z=\frac{18+24\cdot i-99\cdot i-132\cdot i^2}{3^2+4^2} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow z=\frac{18+24\cdot i-99\cdot i-132\cdot(-1)}{9+16} \Rightarrow z=\frac{18+24\cdot i-99\cdot i132}{25} \Rightarrow z=\frac{150-75\cdot i}{25} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow z=\frac{150}{25}-\frac{75}{25}\cdot i \Rightarrow z=\frac{150}{25}-\frac{75}{25}\cdot i \Rightarrow z=6-3\cdot i.$$

Tada je

$$\operatorname{Im}(z)=-3.$$

Odgovor je pod C.

Vježba 213

Koliki je realni dio kompleksnog broja z ako je $5+3\cdot z+6\cdot i-4\cdot i\cdot z=11-27\cdot i$?

$A.\ 13 \qquad B.\ 6 \qquad C.\ -6 \qquad D.\ 5$

Rezultat: B.