Zadatak 181 (Dado, gimnazija)

Odredi $x, y \in R$ tako da vrijedi $2 \cdot x - y \cdot i + 2 \cdot y - 2 \cdot x \cdot i = 4$.

Rješenje 181

Ponovimo!

Kompleksan broj je broj oblika

$$z = x + y \cdot i,$$

gdje su x i y realni brojevi, a i imaginarna jedinica. Broj x zove se realni dio kompleksnog broja z, a broj y imaginarni dio kompleksnog broja z. Pišemo:

$$x = \operatorname{Re} z \quad , \quad y = \operatorname{Im} z.$$

Standardni ili algebarski oblik kompleksnog broja je oblika

$$z = x + y \cdot i,$$

gdje su x i y realni brojevi.

Zakon distribucije množenja prema zbrajanju.

$$a \cdot (b + c) = a \cdot b + a \cdot c \quad , \quad a \cdot b + a \cdot c = a \cdot (b + c).$$

Dva su kompleksna broja jednaka ako i samo ako su im međusobno jednaki realni dijelovi i međusobno jednaki imaginarni dijelovi, tj.

$$a + b \cdot i = c + d \cdot i \;\Leftrightarrow\; a = c \;,\; b = d.$$

$$2 \cdot x - y \cdot i + 2 \cdot y - 2 \cdot x \cdot i = 4 \Rightarrow 2 \cdot x + 2 \cdot y - y \cdot i - 2 \cdot x \cdot i = 4 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow (2 \cdot x + 2 \cdot y) + (-y - 2 \cdot x) \cdot i = 4 \Rightarrow (2 \cdot x + 2 \cdot y) + (-2 \cdot x - y) \cdot i = 4 + 0 \cdot i \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \left.\begin{array}{r} 2 \cdot x + 2 \cdot y = 4 \\ -2 \cdot x - y = 0 \end{array}\right\} \Rightarrow \left[\begin{array}{l} \text{metoda suprotnih} \\ \text{koeficijenata} \end{array}\right] \Rightarrow y = 4.$$

Računamo x.

$$\left.\begin{array}{l} 2 \cdot x + 2 \cdot y = 4 \\ y = 4 \end{array}\right\} \Rightarrow 2 \cdot x + 2 \cdot 4 = 4 \Rightarrow 2 \cdot x + 8 = 4 \Rightarrow 2 \cdot x = 4 - 8 \Rightarrow 2 \cdot x = -4 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 2 \cdot x = -4 \;/ : 2 \Rightarrow x = -2.$$

Rješenje je:

$$(x, y) = (-2, 4).$$

Vježba 181

Odredi $x, y \in R$ tako da vrijedi $2 \cdot x - y \cdot i + 2 \cdot y - 2 \cdot x \cdot i - 4 = 0$.

Rezultat: $(x, y) = (-2, 4)$.

Zadatak 182 (Nikola, srednja škola)

Dokazati da je $(1 + i)^{4 \cdot k}$ realan broj, ako je k prirodan broj.

Rješenje 182

Ponovimo!

Kompleksan broj je broj oblika

$$z = x + y \cdot i,$$

gdje su x i y realni brojevi, a i imaginarna jedinica. Broj x zove se realni dio kompleksnog broja z, a broj y imaginarni dio kompleksnog broja z. Pišemo:

$$x = \operatorname{Re} z \quad , \quad y = \operatorname{Im} z.$$

Standardni ili algebarski oblik kompleksnog broja je oblika

$$z = x + y \cdot i,$$

gdje su x i y realni brojevi.

$$\left(a^{n}\right)^{m}=a^{n\cdot m} \quad , \quad (a+b)^{2}=a^{2}+2\cdot a\cdot b+b^{2} \quad , \quad i^{2}=-1 \quad , \quad (a\cdot b)^{n}=a^{n}\cdot b^{n}.$$

$$(a-b)^{2}=a^{2}-2\cdot a\cdot b+b^{2}.$$

$$(1+i)^{4\cdot k}=\left((1+i)^{4}\right)^{k}=\left(\left((1+i)^{2}\right)^{2}\right)^{k}=\left(\left(1+2\cdot i+i^{2}\right)^{2}\right)^{k}=\left((1+2\cdot i-1)^{2}\right)^{k}=$$

$$=\left((1+2\cdot i-1)^{2}\right)^{k}=\left((2\cdot i)^{2}\right)^{k}=\left(2^{2}\cdot i^{2}\right)^{k}=\left(4\cdot(-1)\right)^{k}=(-4)^{k}.$$

Za $k\in N$ slijedi $(-4)^{k}\in R.$

Vježba 182

Dokazati da je $(1-i)^{4\cdot k}$ realan broj, ako je k prirodan broj.

Rezultat: Dokaz analogan, $(-4)^{k}\in R.$

Zadatak 183 (Tomislav, gimnazija)

Ako je $z=\frac{\sqrt{2}-i}{1-i}$, onda $z\cdot\overline{z}$ iznosi

$A.\ \frac{3}{2}$ $\quad B.\ \frac{\sqrt{2}+1}{2}$ $\quad C.\ \sqrt{2}+1$ $\quad D.\ \frac{3}{4}$

Rješenje 183

Ponovimo!

Kompleksan broj je broj oblika

$$z=x+y\cdot i,$$

gdje su x i y realni brojevi, a i imaginarna jedinica. Broj x zove se realni dio kompleksnog broja z, a broj y imaginarni dio kompleksnog broja z. Pišemo:

$$x=\operatorname{Re} z \quad , \quad y=\operatorname{Im} z.$$

Standardni ili algebarski oblik kompleksnog broja je oblika

$$z=x+y\cdot i,$$

gdje su x i y realni brojevi.

Za kompleksne brojeve $x + y \cdot i$ i $x - y \cdot i$ kažemo da su kompleksno konjugirani jedan drugome. Simbol konjugiranja jest povlaka iznad broja koji se konjugira:

$$z=x+y\cdot i \Rightarrow \overline{z}=x-y\cdot i.$$

Umnožak dvaju konjugirano kompleksnih brojeva realan je broj i nenegativan broj:

$$(x+y\cdot i)\cdot(x-y\cdot i)=x^{2}+y^{2}.$$

$$\frac{a}{b}\cdot\frac{c}{d}=\frac{a\cdot c}{b\cdot d} \quad , \quad (a-b)\cdot(a+b)=a^{2}-b^{2} \quad , \quad i^{2}=-1 \quad , \quad \frac{a+b}{n}=\frac{a}{n}+\frac{b}{n}.$$

$$\left(\frac{a}{b}\right)^{2}=\frac{a^{2}}{b^{2}} \quad , \quad (a+b)^{2}=a^{2}+2\cdot a\cdot b+b^{2} \quad , \quad (a-b)^{2}=a^{2}-2\cdot a\cdot b+b^{2} \quad , \quad \left(\sqrt{a}\right)^{2}=a.$$

Množenje zagrada

$$(a+b)\cdot(c+d)=a\cdot c+a\cdot d+b\cdot c+b\cdot d.$$

Skratiti razlomak znači brojnik i nazivnik tog razlomka podijeliti istim brojem različitim od nule i jedinice

$$\frac{a \cdot n}{b \cdot n} = \frac{a}{b} \quad , \quad n \neq 0 \quad , \quad n \neq 1.$$

Odredimo standardni ili algebarski oblik kompleksnog broja z:

$$z = \frac{\sqrt{2} - i}{1 - i} \Rightarrow z = \frac{\sqrt{2} - i}{1 - i} \cdot \frac{1 + i}{1 + i} \Rightarrow z = \frac{\left(\sqrt{2} - i\right) \cdot (1 + i)}{(1 - i) \cdot (1 + i)} \Rightarrow z = \frac{\sqrt{2} + \sqrt{2} \cdot i - i - i^2}{1^2 + 1^2} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow z = \frac{\sqrt{2} + \sqrt{2} \cdot i - i - (-1)}{1 + 1} \Rightarrow z = \frac{\sqrt{2} + \sqrt{2} \cdot i - i + 1}{2} \Rightarrow z = \frac{\sqrt{2} + 1 + \sqrt{2} \cdot i - i}{2} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow z = \frac{\left(\sqrt{2} + 1\right) + \left(\sqrt{2} - 1\right) \cdot i}{2} \Rightarrow z = \frac{\sqrt{2} + 1}{2} + \frac{\sqrt{2} - 1}{2} \cdot i \Rightarrow \bar{z} = \frac{\sqrt{2} + 1}{2} - \frac{\sqrt{2} - 1}{2} \cdot i.$$

Sada je:

$$z \cdot \bar{z} = \left(\frac{\sqrt{2} + 1}{2} + \frac{\sqrt{2} - 1}{2} \cdot i\right) \cdot \left(\frac{\sqrt{2} + 1}{2} - \frac{\sqrt{2} - 1}{2} \cdot i\right) \Rightarrow z \cdot \bar{z} = \left(\frac{\sqrt{2} + 1}{2}\right)^2 + \left(\frac{\sqrt{2} - 1}{2}\right)^2 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow z \cdot \bar{z} = \frac{\left(\sqrt{2} + 1\right)^2}{2^2} + \frac{\left(\sqrt{2} - 1\right)^2}{2^2} \Rightarrow z \cdot \bar{z} = \frac{\left(\sqrt{2}\right)^2 + 2 \cdot \sqrt{2} + 1}{4} + \frac{\left(\sqrt{2}\right)^2 - 2 \cdot \sqrt{2} + 1}{4} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow z \cdot \bar{z} = \frac{2 + 2 \cdot \sqrt{2} + 1}{4} + \frac{2 - 2 \cdot \sqrt{2} + 1}{4} \Rightarrow z \cdot \bar{z} = \frac{2 + 2 \cdot \sqrt{2} + 1 + 2 - 2 \cdot \sqrt{2} + 1}{4} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow z \cdot \bar{z} = \frac{2 + 2 \cdot \sqrt{2} + 1 + 2 - 2 \cdot \sqrt{2} + 1}{4} \Rightarrow z \cdot \bar{z} = \frac{2 + 1 + 2 + 1}{4} \Rightarrow z \cdot \bar{z} = \frac{6}{4} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow z \cdot \bar{z} = \frac{6}{4} \Rightarrow z \cdot \bar{z} = \frac{3}{2}.$$

Odgovor je pod A.

Vježba 183

Ako je $z = \dfrac{\sqrt{2} - i}{1 + i}$, onda $z \cdot \bar{z}$ iznosi

$A.\ \dfrac{3}{2}$ $\qquad B.\ \dfrac{\sqrt{2} + 1}{2}$ $\qquad C.\ \sqrt{2} + 1$ $\qquad D.\ \dfrac{3}{4}$

Rezultat: A.

Zadatak 184 (Cedric, Sean, Željko, Medox, Höhere Technische Lehranstalt)

Odredi kompleksan broj z = x + y · i za koji vrijedi $|z| - z = 1 + 2 \cdot i$.

Rješenje 184

Ponovimo!

Kompleksan broj je broj oblika

$$z = x + y \cdot i,$$

gdje su x i y realni brojevi, a i imaginarna jedinica. Broj x zove se realni dio kompleksnog broja z, a broj y imaginarni dio kompleksnog broja z. Pišemo:

$$x = \operatorname{Re} z \quad , \quad y = \operatorname{Im} z.$$

Standardni ili algebarski oblik kompleksnog broja je oblika

$$z = x + y \cdot i,$$

gdje su x i y realni brojevi.

Modul ili apsolutna vrijednost kompleksnog broja z = x + y · i definira se formulom

$$|z| = \sqrt{x^2 + y^2}.$$

Dva su kompleksna broja jednaka ako i samo ako su im međusobno jednaki realni dijelovi i međusobno jednaki imaginarni dijelovi, tj.

$$a + b \cdot i = c + d \cdot i \quad \Leftrightarrow \quad a = c \ , \ b = d.$$

$$\left(\sqrt{a}\right)^2 = a \quad , \quad (a+b)^2 = a^2 + 2 \cdot a \cdot b + b^2.$$

Zakon distribucije množenja prema zbrajanju.

$$a \cdot (b + c) = a \cdot b + a \cdot c \quad , \quad a \cdot b + a \cdot c = a \cdot (b + c).$$

$$|z| - z = 1 + 2 \cdot i \Rightarrow \left[z = x + y \cdot i \right] \Rightarrow |x + y \cdot i| - (x + y \cdot i) = 1 + 2 \cdot i \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \sqrt{x^2 + y^2} - x - y \cdot i = 1 + 2 \cdot i \Rightarrow \left(\sqrt{x^2 + y^2} - x \right) - y \cdot i = 1 + 2 \cdot i \Rightarrow \begin{bmatrix} \text{jednakost} \\ \text{kompleksnih} \\ \text{brojeva} \end{bmatrix} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \left.\begin{array}{l} \sqrt{x^2 + y^2} - x = 1 \\ -y = 2 \end{array}\right\} \Rightarrow \left.\begin{array}{l} \sqrt{x^2 + y^2} - x = 1 \\ -y = 2 \ / \cdot (-1) \end{array}\right\} \Rightarrow \left.\begin{array}{l} \sqrt{x^2 + y^2} = 1 + x \\ y = -2 \end{array}\right\} \Rightarrow \begin{bmatrix} \text{metoda} \\ \text{zamjene} \end{bmatrix} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \sqrt{x^2 + (-2)^2} = 1 + x \Rightarrow \sqrt{x^2 + 4} = 1 + x \Rightarrow \sqrt{x^2 + 4} = 1 + x \ /^2 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \left(\sqrt{x^2 + 4} \right)^2 = (1 + x)^2 \Rightarrow x^2 + 4 = 1 + 2 \cdot x + x^2 \Rightarrow x^2 + 4 = 1 + 2 \cdot x + x^2 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 4 = 1 + 2 \cdot x \Rightarrow 1 + 2 \cdot x = 4 \Rightarrow 2 \cdot x = 4 - 1 \Rightarrow 2 \cdot x = 3 \Rightarrow 2 \cdot x = 3 \ /:2 \Rightarrow x = \frac{3}{2}.$$

Traženi kompleksan broj glasi:

$$z = x + y \cdot i \Rightarrow \begin{bmatrix} x = \frac{3}{2} \\ y = -2 \end{bmatrix} \Rightarrow z = \frac{3}{2} - 2 \cdot i.$$

Vježba 184

Odredi kompleksan broj z = x + y · i za koji vrijedi $|z| - 1 - 2 \cdot i = z.$

Rezultat: $z = \frac{3}{2} - 2 \cdot i.$

Zadatak 185 (4A, 4B, TUPŠ)

Neka je z = 3 + 2 · i. Koliko je $\left(i \cdot z \cdot \bar{z}\right)^4$?

Rješenje 185

Ponovimo!

$$(a \cdot b)^n = a^n \cdot b^n \quad , \quad \left(a^n\right)^m = a^{n \cdot m} \quad , \quad i^2 = -1.$$

Kompleksan broj je broj oblika

$$z = x + y \cdot i,$$

gdje su x i y realni brojevi, a i imaginarna jedinica. Broj x zove se realni dio kompleksnog broja z, a broj y imaginarni dio kompleksnog broja z. Pišemo:

$$x = \operatorname{Re} z \quad , \quad y = \operatorname{Im} z.$$

Standardni ili algebarski oblik kompleksnog broja je oblika

$$z = x + y \cdot i,$$

gdje su x i y realni brojevi.
Za kompleksne brojeve $x + y \cdot i$ i $x - y \cdot i$ kažemo da su kompleksno konjugirani jedan drugome.
Simbol konjugiranja jest povlaka iznad broja koji se konjugira:

$$z = x + y \cdot i \;\Rightarrow\; \overline{z} = x - y \cdot i.$$

Umnožak dvaju konjugirano kompleksnih brojeva realan je broj i nenegativan broj:

$$(x + y \cdot i) \cdot (x - y \cdot i) = x^2 + y^2.$$

$$\left(i \cdot z \cdot \overline{z}\right)^4 = \left[\begin{array}{l} z = 3 + 2 \cdot i \\ \overline{z} = 3 - 2 \cdot i \end{array}\right] = \left(i \cdot (3 + 2 \cdot i) \cdot (3 - 2 \cdot i)\right)^4 = \left(i \cdot \left(3^2 + 2^2\right)\right)^4 = \left(i \cdot (9 + 4)\right)^4 =$$

$$= (i \cdot 13)^4 = (13 \cdot i)^4 = 13^4 \cdot i^4 = 13^4 \cdot \left(i^2\right)^2 = 13^4 \cdot (-1)^2 = 13^4 \cdot 1 = 13^4 = 28561.$$

Vježba 185

Neka je z = 3 – 2 · i. Koliko je $\left(i \cdot z \cdot \overline{z}\right)^4$?

Rezultat: 28561.

Zadatak 186 (Tonka, gimnazija)

Dokaži da je $(1 + i)^{1000} = 2^{500}$.

Rješenje 186

Ponovimo!

$$\left(a^n\right)^m = a^{n \cdot m} \quad , \quad (a + b)^2 = a^2 + 2 \cdot a \cdot b + b^2 \quad , \quad i^2 = -1 \quad , \quad i^4 = 1 \quad , \quad i^0 = 1.$$

$$(a \cdot b)^n = a^n \cdot b^n.$$

Kompleksan broj je broj oblika

$$z = x + y \cdot i,$$

gdje su x i y realni brojevi, a i imaginarna jedinica. Broj x zove se realni dio kompleksnog broja z, a broj y imaginarni dio kompleksnog broja z. Pišemo:

$$x = \operatorname{Re} z \quad , \quad y = \operatorname{Im} z.$$

Standardni ili algebarski oblik kompleksnog broja je oblika

$$z = x + y \cdot i,$$

gdje su x i y realni brojevi.
Potencije imaginarne jedinice
Neka je k prirodni broj. Tada za potencije imaginarne jedinice i vrijedi:

$$i^{4 \cdot k} = 1 \quad , \quad i^{4 \cdot k + 1} = i \quad , \quad i^{4 \cdot k + 2} = -1 \quad , \quad i^{4 \cdot k + 3} = -i.$$

Ako je eksponent potencije imaginarne jedinice djeljiv s 4, vrijednost potencije je 1. Ako je ostatak pri dijeljenju eksponenta s 4 jednak 1, vrijednost potencije je i; ako je ostatak 2, vrijednost je – 1, a ako je ostatak 3, vrijednost potencije je – i.

1.inačica

$$(1 + i)^{1000} = \left((1 + i)^2\right)^{500} = \left(1 + 2 \cdot i + i^2\right)^{500} = (1 + 2 \cdot i - 1)^{500} = (1 + 2 \cdot i - 1)^{500} =$$

$$= (2 \cdot i)^{500} = 2^{500} \cdot i^{500} = 2^{500} \cdot \left(i^4\right)^{125} = 2^{500} \cdot 1^{125} = 2^{500} \cdot 1 = 2^{500}.$$

2.inačica

$$\left(1+i\right)^{1000}=\left(\left(1+i\right)^{2}\right)^{500}=\left(1+2\cdot i+i^{2}\right)^{500}=\left(1+2\cdot i-1\right)^{500}=\left(1+2\cdot i-1\right)^{500}=$$

$$=\left(2\cdot i\right)^{500}=2^{500}\cdot i^{500}=\begin{bmatrix}500:4=125\\ \;\;10\\ \;\;\;\;20\\ \;\;\;\;\;\;0\end{bmatrix}=2^{500}\cdot i^{\circ}=2^{500}\cdot 1=2^{500}.$$

Vježba 186

Dokaži da je $\left(1+i\right)^{100}=2^{50}$.

Rezultat: Dokaz analogan.

Zadatak 187 (Patrik, gimnazija)

Izračunati $\dfrac{a+b\cdot i}{b-a\cdot i}$.

Rješenje 187

Ponovimo!

$$a^{1}=a\quad,\quad a^{n}\cdot a^{m}=a^{n+m}\quad,\quad i^{2}=-1\quad,\quad \frac{a}{b}\cdot\frac{c}{d}=\frac{a\cdot c}{b\cdot d}.$$

Kompleksan broj je broj oblika

$$z=x+y\cdot i,$$

gdje su x i y realni brojevi, a i imaginarna jedinica. Broj x zove se realni dio kompleksnog broja z, a broj y imaginarni dio kompleksnog broja z. Pišemo:

$$x=\operatorname{Re} z\quad,\quad y=\operatorname{Im} z.$$

Standardni ili algebarski oblik kompleksnog broja je oblika

$$z=x+y\cdot i,$$

gdje su x i y realni brojevi.
Za kompleksne brojeve $x+y\cdot i$ i $x-y\cdot i$ kažemo da su kompleksno konjugirani jedan drugome. Simbol konjugiranja jest povlaka iznad broja koji se konjugira:

$$z=x+y\cdot i\;\Rightarrow\;\overline{z}=x-y\cdot i.$$

Umnožak dvaju konjugirano kompleksnih brojeva realan je broj i nenegativan broj:

$$\left(x+y\cdot i\right)\cdot\left(x-y\cdot i\right)=x^{2}+y^{2}.$$

Množenje zagrada

$$\left(a+b\right)\cdot\left(c+d\right)=a\cdot c+a\cdot d+b\cdot c+b\cdot d.$$

Skratiti razlomak znači brojnik i nazivnik tog razlomka podijeliti istim brojem različitim od nule i jedinice

$$\frac{a\cdot n}{b\cdot n}=\frac{a}{b}\quad,\quad n\neq 0\quad,\quad n\neq 1.$$

Zakon distribucije množenja prema zbrajanju.

$$a\cdot\left(b+c\right)=a\cdot b+a\cdot c\quad,\quad a\cdot b+a\cdot c=a\cdot\left(b+c\right).$$

$$\frac{a+b\cdot i}{b-a\cdot i}=\frac{a+b\cdot i}{b-a\cdot i}\cdot\frac{b+a\cdot i}{b+a\cdot i}=\frac{\left(a+b\cdot i\right)\cdot\left(b+a\cdot i\right)}{\left(b-a\cdot i\right)\cdot\left(b+a\cdot i\right)}=\frac{a\cdot b+a^{2}\cdot i+b^{2}\cdot i+a\cdot b\cdot i^{2}}{b^{2}+a^{2}}=$$

$$=\frac{a\cdot b+a^2\cdot i+b^2\cdot i+a\cdot b\cdot(-1)}{b^2+a^2}=\frac{a\cdot b+a^2\cdot i+b^2\cdot i-a\cdot b}{b^2+a^2}=\frac{a\cdot b+a^2\cdot i+b^2\cdot i-a\cdot b}{b^2+a^2}=$$

$$=\frac{a^2\cdot i+b^2\cdot i}{b^2+a^2}=\frac{\left(a^2+b^2\right)\cdot i}{b^2+a^2}=\frac{\left(a^2+b^2\right)\cdot i}{b^2+a^2}=i.$$

Vježba 187

Izračunati $\frac{a+b\cdot i}{-b+a\cdot i}$.

Rezultat: $-i$.

Zadatak 188 (Maja, gimnazija)

Izračunati $\frac{1+i}{1-i}$.

Rješenje 188

Ponovimo!

$$a^1=a \quad , \quad a^n\cdot a^m=a^{n+m} \quad , \quad i^2=-1 \quad , \quad (a+b)^2=a^2+2\cdot a\cdot b+b^2.$$

Kompleksan broj je broj oblika

$$z=x+y\cdot i,$$

gdje su x i y realni brojevi, a i imaginarna jedinica. Broj x zove se realni dio kompleksnog broja z, a broj y imaginarni dio kompleksnog broja z. Pišemo:

$$x=\operatorname{Re} z \quad , \quad y=\operatorname{Im} z.$$

Standardni ili algebarski oblik kompleksnog broja je oblika

$$z=x+y\cdot i,$$

gdje su x i y realni brojevi.

Za kompleksne brojeve $x + y \cdot i$ i $x - y \cdot i$ kažemo da su kompleksno konjugirani jedan drugome. Simbol konjugiranja jest povlaka iznad broja koji se konjugira:

$$z=x+y\cdot i \Rightarrow \bar{z}=x-y\cdot i.$$

Umnožak dvaju konjugirano kompleksnih brojeva realan je broj i nenegativan broj:

$$(x+y\cdot i)\cdot(x-y\cdot i)=x^2+y^2.$$

Množenje zagrada

$$(a+b)\cdot(c+d)=a\cdot c+a\cdot d+b\cdot c+b\cdot d.$$

Proširiti razlomak znači brojnik i nazivnik tog razlomka pomnožiti istim brojem različitim od nule i jedinice

$$\frac{a}{b}=\frac{a\cdot n}{b\cdot n} \quad , \quad n\neq 0 \quad , \quad n\neq 1.$$

Skratiti razlomak znači brojnik i nazivnik tog razlomka podijeliti istim brojem različitim od nule i jedinice

$$\frac{a\cdot n}{b\cdot n}=\frac{a}{b} \quad , \quad n\neq 0 \quad , \quad n\neq 1.$$

Zakon distribucije množenja prema zbrajanju.

$$a\cdot(b+c)=a\cdot b+a\cdot c \quad , \quad a\cdot b+a\cdot c=a\cdot(b+c).$$

Dva su kompleksna broja jednaka ako i samo ako su im međusobno jednaki realni dijelovi i međusobno jednaki imaginarni dijelovi, tj.

$$a + b \cdot i = c + d \cdot i \;\Leftrightarrow\; a = c \;,\; b = d.$$

1.inačica

$$\frac{1+i}{1-i} = \left[\begin{array}{l} \text{proširiti} \\ \text{razlomak} \end{array}\right] = \frac{1+i}{1-i} \cdot \frac{1+i}{1+i} = \frac{(1+i)\cdot(1+i)}{(1-i)\cdot(1+i)} = \frac{(1+i)^2}{1^2+1^2} = \frac{1+2\cdot i + i^2}{1+1} =$$

$$= \frac{1+2\cdot i - 1}{2} = \frac{1+2\cdot i - 1}{2} = \frac{2\cdot i}{2} = \frac{2\cdot i}{2} = i.$$

2.inačica

Pretpostavimo da je zadani izraz jednak

$$x + y \cdot i.$$

Dalje slijedi:

$$\frac{1+i}{1-i} = x + y\cdot i \;\Rightarrow\; \frac{1+i}{1-i} = x + y\cdot i \;/\cdot (1-i) \;\Rightarrow\; 1+i = (x+y\cdot i)\cdot(1-i) \;\Rightarrow$$

$$\Rightarrow\; 1+i = x - x\cdot i + y\cdot i - y\cdot i^2 \;\Rightarrow\; 1+i = x - x\cdot i + y\cdot i - y\cdot(-1) \;\Rightarrow$$

$$\Rightarrow\; 1+i = x - x\cdot i + y\cdot i + y \;\Rightarrow\; 1+1\cdot i = (x+y) + (-x+y)\cdot i \;\Rightarrow\; \left[\begin{array}{l} \text{jednakost} \\ \text{kompleksnih} \\ \text{brojeva} \end{array}\right] \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \left.\begin{array}{l} 1 = x + y \\ 1 = -x + y \end{array}\right\} \Rightarrow \left.\begin{array}{l} x + y = 1 \\ -x + y = 1 \end{array}\right\} \Rightarrow \left[\begin{array}{l} \text{metoda suprotnih} \\ \text{koeficijenata} \end{array}\right] \Rightarrow 2\cdot y = 2 \;\Rightarrow$$

$$\Rightarrow\; 2\cdot y = 2 \;/ : 2 \;\Rightarrow\; y = 1.$$

Računamo x.

$$\left.\begin{array}{l} y = 1 \\ x + y = 1 \end{array}\right\} \Rightarrow\; x + 1 = 1 \;\Rightarrow\; x + 1 = 1 \;\Rightarrow\; x = 0.$$

Rezultat glasi:

$$\frac{1+i}{1-i} = x + y\cdot i \;\Rightarrow \left[\begin{array}{l} x = 0 \\ y = 1 \end{array}\right] \Rightarrow\; \frac{1+i}{1-i} = 0 + 1\cdot i \;\Rightarrow\; \frac{1+i}{1-i} = i.$$

Vježba 188

Izračunati $\dfrac{1-i}{1+i}$.

Rezultat: $-i.$

Zadatak 189 (Dodo, gimnazija)

Koliki je argument φ u trigonometrijskome prikazu kompleksnog broja z = 5 · i?

$$A.\ \frac{\pi}{3} \qquad B.\ \frac{\pi}{2} \qquad C.\ \frac{2\cdot\pi}{3} \qquad D.\ \frac{3\cdot\pi}{2}$$

Rješenje 189

Ponovimo!

Kompleksan broj je broj oblika

$$z = x + y\cdot i,$$

gdje su x i y realni brojevi, a i imaginarna jedinica. Broj x zove se realni dio kompleksnog broja z, a broj y imaginarni dio kompleksnog broja z. Pišemo:

$$x = \operatorname{Re} z \quad , \quad y = \operatorname{Im} z.$$

Standardni ili algebarski oblik kompleksnog broja je oblika

$$z = x + y \cdot i,$$

gdje su x i y realni brojevi.
Svaki se kompleksan broj

$$z = x + y \cdot i$$

može prikazati u trigonometrijskom obliku

$$z = r \cdot (\cos \varphi + i \cdot \sin \varphi),$$

pri čemu je r modul kompleksnog broja

$$|z| = r = \sqrt{x^2 + y^2},$$

a kut φ argument kompleksnog broja za kojeg vrijedi

$$\varphi = arctg \frac{y}{x} \text{ ili } \varphi = tg^{-1}\left(\frac{y}{x}\right), \; 0 \le \varphi < 2 \cdot \pi.$$

Oznaka je

$$\varphi = \arg z.$$

Kompleksne brojeve predočujemo u koordinatnoj ravnini koju zovemo kompleksna ili Gaussova ravnina.

1.inačica

$$z = 5 \cdot i \;\Rightarrow\; z = 0 + 5 \cdot i \;\Rightarrow\; \left.\begin{matrix} x = 0 \\ y = 5 \end{matrix}\right\}.$$

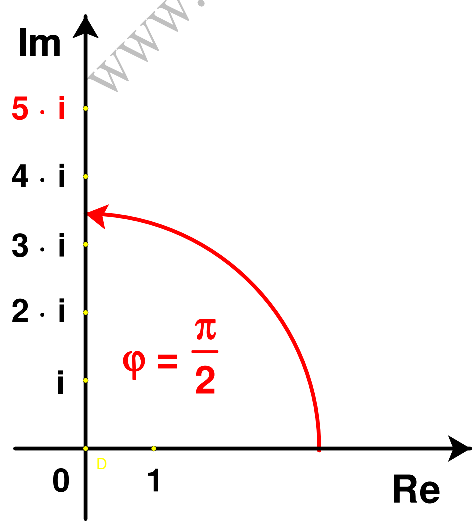
Računamo argument φ.

$$tg\,\varphi = \frac{y}{x} \;\Rightarrow\; \varphi = tg^{-1}\left(\frac{y}{x}\right) \;\Rightarrow\; \varphi = tg^{-1}\left(\frac{5}{0}\right) \;\Rightarrow\; \varphi = \frac{\pi}{2}.$$

Odgovor je pod B.

2.inačica

Kompleksan broj z = 5 · i prikažemo u kompleksnoj ravnini i očitamo argument φ.



Odgovor je pod B

Vježba 189

Koliki je argument φ u trigonometrijskome prikazu kompleksnog broja z = 3 · i?

$$A.\ \frac{\pi}{3} \qquad B.\ \frac{\pi}{2} \qquad C.\ \frac{2 \cdot \pi}{3} \qquad D.\ \frac{3 \cdot \pi}{2}$$

Rezultat: B.

Zadatak 190 (Petra, gimnazija)

Nađi modul kompleksnog broja $z = \frac{1}{2-i} - \frac{1}{2+i}$.

Rješenje 190

Ponovimo!

Kompleksan broj je broj oblika

$$z = x + y \cdot i,$$

gdje su x i y realni brojevi, a i imaginarna jedinica. Broj x zove se realni dio kompleksnog broja z, a broj y imaginarni dio kompleksnog broja z. Pišemo:

$$x = \operatorname{Re} z \quad , \quad y = \operatorname{Im} z.$$

Standardni ili algebarski oblik kompleksnog broja je oblika

$$z = x + y \cdot i,$$

gdje su x i y realni brojevi.

Za kompleksne brojeve $x + y \cdot i$ i $x - y \cdot i$ kažemo da su kompleksno konjugirani jedan drugome. Simbol konjugiranja jest povlaka iznad broja koji se konjugira:

$$z = x + y \cdot i \Rightarrow \bar{z} = x - y \cdot i.$$

Umnožak dvaju konjugirano kompleksnih brojeva realan je broj i nenegativan broj:

$$(x + y \cdot i) \cdot (x - y \cdot i) = x^2 + y^2.$$

$$\frac{a}{b} - \frac{c}{d} = \frac{a \cdot d - b \cdot c}{b \cdot d} \quad , \quad \sqrt{a^2} = a \; , \; a \ge 0 \quad , \quad a^1 = a.$$

$$a^n \cdot a^m = a^{n+m} \quad , \quad \left(\sqrt{a}\right)^2 = a.$$

Modul ili apsolutna vrijednost kompleksnog broja $z = x + y \cdot i$ definira se formulom

$$|z| = \sqrt{x^2 + y^2}.$$

Za apsolutnu vrijednost vrijedi:

$$\left| \frac{z_1}{z_2} \right| = \frac{|z_1|}{|z_2|} \quad , \quad |z_1 \cdot z_2| = |z_1| \cdot |z_2|.$$

Zakon distribucije množenja prema zbrajanju.

$$a \cdot (b + c) = a \cdot b + a \cdot c \quad , \quad a \cdot b + a \cdot c = a \cdot (b + c).$$

1.inačica

Kompleksan broj napišemo u standardnom obliku.

$$z = \frac{1}{2-i} - \frac{1}{2+i} \Rightarrow z = \frac{2+i-(2-i)}{(2-i)\cdot(2+i)} \Rightarrow z = \frac{2+i-2+i}{2^2+1^2} \Rightarrow z = \frac{2+i-2+i}{4+1} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow z = \frac{2 \cdot i}{5} \Rightarrow z = \frac{2}{5} \cdot i.$$

Modul iznosi:

$$z = \frac{2}{5} \cdot i \Rightarrow z = 0 + \frac{2}{5} \cdot i \Rightarrow \left.\begin{matrix} x = 0 \\ y = \frac{2}{5} \end{matrix}\right\} \Rightarrow \left[\, |z| = \sqrt{x^2 + y^2} \,\right] \Rightarrow |z| = \sqrt{0^2 + \left(\frac{2}{5}\right)^2} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow |z| = \sqrt{\left(\frac{2}{5}\right)^2} \Rightarrow |z| = \frac{2}{5}.$$

2.inačica

Preoblikujemo kompleksan broj.

$$z=\frac{1}{2-i}-\frac{1}{2+i} \Rightarrow z=\frac{2+i-(2-i)}{(2-i)\cdot(2+i)} \Rightarrow z=\frac{2+i-2+i}{(2-i)\cdot(2+i)} \Rightarrow z=\frac{2+i-2+i}{(2-i)\cdot(2+i)} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow z=\frac{2\cdot i}{(2-i)\cdot(2+i)}.$$

Modul iznosi:

$$z=\frac{2\cdot i}{(2-i)\cdot(2+i)} \Rightarrow |z|=\left|\frac{2\cdot i}{(2-i)\cdot(2+i)}\right| \Rightarrow |z|=\frac{|2\cdot i|}{|(2-i)\cdot(2+i)|} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow |z|=\frac{|2\cdot i|}{|2-i|\cdot|2+i|} \Rightarrow |z|=\frac{\sqrt{2^2}}{\sqrt{2^2+(-1)^2}\cdot\sqrt{2^2+1^2}} \Rightarrow |z|=\frac{2}{\sqrt{4+1}\cdot\sqrt{4+1}} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow |z|=\frac{2}{\sqrt{5}\cdot\sqrt{5}} \Rightarrow |z|=\frac{2}{\left(\sqrt{5}\right)^2} \Rightarrow |z|=\frac{2}{5}.$$

Vježba 190

Nađi modul kompleksnog broja $z=-\frac{1}{-2+i}-\frac{1}{2+i}$.

Rezultat: $|z|=\frac{2}{5}$.

Zadatak 191 (Petra, gimnazija)

Prikažite u trigonometrijskom obliku $z=\sin\alpha+i\cdot(1-\cos\alpha)$.

Rješenje 191

Ponovimo!

Kompleksan broj je broj oblika

$$z=x+y\cdot i,$$

gdje su x i y realni brojevi, a i imaginarna jedinica. Broj x zove se realni dio kompleksnog broja z, a broj y imaginarni dio kompleksnog broja z. Pišemo:

$$x=\operatorname{Re} z \quad , \quad y=\operatorname{Im} z.$$

Standardni ili algebarski oblik kompleksnog broja je oblika

$$z=x+y\cdot i,$$

gdje su x i y realni brojevi.

Svaki se kompleksan broj

$$z=x+y\cdot i$$

može prikazati u trigonometrijskom obliku

$$z=r\cdot(\cos\varphi+i\cdot\sin\varphi),$$

pri čemu je r modul kompleksnog broja

$$|z|=r=\sqrt{x^2+y^2},$$

a kut φ argument kompleksnog broja za kojeg vrijedi

$$\varphi=arctg\,\frac{y}{x} \text{ ili } \varphi=tg^{-1}\left(\frac{y}{x}\right), \; 0\le\varphi<2\cdot\pi.$$

Oznaka je

$$\varphi = \arg z.$$

$$(a-b)^2 = a^2 - 2\cdot a\cdot b + b^2 \quad , \quad \cos^2\alpha + \sin^2\alpha = 1 \quad , \quad 1-\cos\alpha = 2\cdot\sin^2\frac{\alpha}{2}.$$

$$\sqrt{a\cdot b} = \sqrt{a}\cdot\sqrt{b} \quad , \quad \sqrt{a^2} = a \ , \ a \ge 0 \quad , \quad \sin(2\cdot\alpha) = 2\cdot\sin\alpha\cdot\cos\alpha.$$

$$a^1 = a \quad , \quad a^n\cdot a^m = a^{n+m} \quad , \quad tg\,\alpha = \frac{\sin\alpha}{\cos\alpha} \quad , \quad tg\,\alpha = tg\,\beta \ \Rightarrow \ \alpha = \beta.$$

Zakon distribucije množenja prema zbrajanju.

$$a\cdot(b+c) = a\cdot b + a\cdot c \quad , \quad a\cdot b + a\cdot c = a\cdot(b+c).$$

Skratiti razlomak znači brojnik i nazivnik tog razlomka podijeliti istim brojem različitim od nule i jedinice

$$\frac{a\cdot n}{b\cdot n} = \frac{a}{b} \ , \ n \ne 0 \ , \ n \ne 1.$$

Računamo apsolutnu vrijednost zadanog kompleksnog broja.

$$z = \sin\alpha + i\cdot(1-\cos\alpha) \ \Rightarrow \ \left.\begin{array}{l} x = \sin\alpha \\ y = 1-\cos\alpha \end{array}\right\} \Rightarrow \left[\,|z| = \sqrt{x^2+y^2}\,\right] \Rightarrow$$

$$\Rightarrow |z| = \sqrt{\sin^2\alpha + (1-\cos\alpha)^2} \ \Rightarrow \ |z| = \sqrt{\sin^2\alpha + 1 - 2\cdot\cos\alpha + \cos^2\alpha} \ \Rightarrow$$

$$\Rightarrow |z| = \sqrt{\sin^2\alpha + \cos^2\alpha + 1 - 2\cdot\cos\alpha} \ \Rightarrow \ |z| = \sqrt{1+1-2\cdot\cos\alpha} \ \Rightarrow \ |z| = \sqrt{2-2\cdot\cos\alpha} \ \Rightarrow$$

$$\Rightarrow |z| = \sqrt{2\cdot(1-\cos\alpha)} \ \Rightarrow \ |z| = \sqrt{2\cdot 2\cdot\sin^2\frac{\alpha}{2}} \ \Rightarrow \ |z| = \sqrt{2^2\cdot\sin^2\frac{\alpha}{2}} \ \Rightarrow$$

$$\Rightarrow |z| = \sqrt{2^2}\cdot\sqrt{\sin^2\frac{\alpha}{2}} \ \Rightarrow \ |z| = 2\cdot\sin\frac{\alpha}{2}.$$

Računamo argument φ.

$$tg\,\varphi = \frac{y}{x} \ \Rightarrow \ \left[\begin{array}{l} y = 1-\cos\alpha \\ x = \sin\alpha \end{array}\right] \Rightarrow \ tg\,\varphi = \frac{1-\cos\alpha}{\sin\alpha} \ \Rightarrow \ tg\,\varphi = \frac{2\cdot\sin^2\frac{\alpha}{2}}{2\cdot\sin\frac{\alpha}{2}\cdot\cos\frac{\alpha}{2}} \ \Rightarrow$$

$$\Rightarrow tg\,\varphi = \frac{2\cdot\sin^2\frac{\alpha}{2}}{2\cdot\sin\frac{\alpha}{2}\cdot\cos\frac{\alpha}{2}} \ \Rightarrow \ tg\,\varphi = \frac{\sin\frac{\alpha}{2}}{\cos\frac{\alpha}{2}} \ \Rightarrow \ tg\,\varphi = tg\,\frac{\alpha}{2} \ \Rightarrow \ \varphi = \frac{\alpha}{2}.$$

Trigonometrijski oblik glasi:

$$\left.\begin{array}{l} |z| = 2\cdot\sin\frac{\alpha}{2} \\ \varphi = \frac{\alpha}{2} \end{array}\right\} \Rightarrow \left[\,z = |z|\cdot(\cos\varphi + i\cdot\sin\varphi)\,\right] \Rightarrow \ z = 2\cdot\sin\frac{\alpha}{2}\cdot\left(\cos\frac{\alpha}{2} + i\cdot\sin\frac{\alpha}{2}\right).$$

Vježba 191

Prikažite u trigonometrijskom obliku $z = \sin\alpha - i\cdot(\cos\alpha - 1)$.

Rezultat: $z = 2\cdot\sin\frac{\alpha}{2}\cdot\left(\cos\frac{\alpha}{2} + i\cdot\sin\frac{\alpha}{2}\right).$

Zadatak 192 (Dubravko, gimnazija)

Izračunati: $\left|a+\frac{a-1}{a}\cdot i\right|+\left|\frac{1}{a}-\frac{a}{a-1}\cdot i\right|-\left|-\frac{a^2}{a-1}+i\right|,\ a>1.$

Rješenje 192

Ponovimo!

Kompleksan broj je broj oblika

$$z=x+y\cdot i,$$

gdje su x i y realni brojevi, a i imaginarna jedinica. Broj x zove se realni dio kompleksnog broja z, a broj y imaginarni dio kompleksnog broja z. Pišemo:

$$x=\operatorname{Re} z \quad , \quad y=\operatorname{Im} z.$$

Standardni ili algebarski oblik kompleksnog broja je oblika

$$z=x+y\cdot i,$$

gdje su x i y realni brojevi.

Modul ili apsolutna vrijednost kompleksnog broja z = x + y · i definira se formulom

$$|z|=\sqrt{x^2+y^2}.$$

Zakon distribucije množenja prema zbrajanju.

$$a\cdot(b+c)=a\cdot b+a\cdot c \quad , \quad a\cdot b+a\cdot c=a\cdot(b+c).$$

$$\left(\frac{a}{b}\right)^n=\frac{a^n}{b^n} \quad , \quad \left(a^n\right)^m=a^{n\cdot m} \quad , \quad n=\frac{n}{1}, \quad \frac{a}{b}+\frac{c}{d}=\frac{a\cdot d+b\cdot c}{b\cdot d}.$$

$$\frac{a}{b}-\frac{c}{d}=\frac{a\cdot d-b\cdot c}{b\cdot d} \quad , \quad \sqrt{\frac{a}{b}}=\frac{\sqrt{a}}{\sqrt{b}} \quad , \quad \sqrt{a\cdot b}=\sqrt{a}\cdot\sqrt{b}.$$

$$\sqrt{a^2}=a \ , \ a\geq 0 \quad , \quad \frac{0}{a}=0 \ , \ a\neq 0.$$

$$\left|a+\frac{a-1}{a}\cdot i\right|+\left|\frac{1}{a}-\frac{a}{a-1}\cdot i\right|-\left|-\frac{a^2}{a-1}+i\right|=\left|a+\frac{a-1}{a}\cdot i\right|+\left|\frac{1}{a}-\frac{a}{a-1}\cdot i\right|-\left|-\frac{a^2}{a-1}+1\cdot i\right|=$$

$$=\sqrt{a^2+\left(\frac{a-1}{a}\right)^2}+\sqrt{\left(\frac{1}{a}\right)^2+\left(-\frac{a}{a-1}\right)^2}-\sqrt{\left(-\frac{a^2}{a-1}\right)^2+1^2}=$$

$$=\sqrt{a^2+\frac{(a-1)^2}{a^2}}+\sqrt{\frac{1}{a^2}+\frac{a^2}{(a-1)^2}}-\sqrt{\frac{\left(a^2\right)^2}{(a-1)^2}+1}=$$

$$=\sqrt{\frac{a^2}{1}+\frac{(a-1)^2}{a^2}}+\sqrt{\frac{1}{a^2}+\frac{a^2}{(a-1)^2}}-\sqrt{\frac{a^4}{(a-1)^2}+\frac{1}{1}}=$$

$$=\sqrt{\frac{a^4+(a-1)^2}{a^2}}+\sqrt{\frac{(a-1)^2+a^4}{a^2\cdot(a-1)^2}}-\sqrt{\frac{a^4+(a-1)^2}{(a-1)^2}}=$$

$$=\sqrt{\frac{a^4+(a-1)^2}{a^2}}+\sqrt{\frac{a^4+(a-1)^2}{a^2\cdot(a-1)^2}}-\sqrt{\frac{a^4+(a-1)^2}{(a-1)^2}}=$$

$$=\frac{\sqrt{a^4+(a-1)^2}}{\sqrt{a^2}}+\frac{\sqrt{a^4+(a-1)^2}}{\sqrt{a^2\cdot(a-1)^2}}-\frac{\sqrt{a^4+(a-1)^2}}{\sqrt{(a-1)^2}}=$$

$$=\frac{\sqrt{a^4+(a-1)^2}}{a}+\frac{\sqrt{a^4+(a-1)^2}}{\sqrt{a^2}\cdot\sqrt{(a-1)^2}}-\frac{\sqrt{a^4+(a-1)^2}}{a-1}=$$

$$=\frac{\sqrt{a^4+(a-1)^2}}{a}+\frac{\sqrt{a^4+(a-1)^2}}{a\cdot(a-1)}-\frac{\sqrt{a^4+(a-1)^2}}{a-1}=$$

$$=\frac{\sqrt{a^4+(a-1)^2}}{a}+\frac{\sqrt{a^4+(a-1)^2}}{a\cdot(a-1)}-\frac{\sqrt{a^4+(a-1)^2}}{a-1}=$$

$$=\sqrt{a^4+(a-1)^2}\cdot\left(\frac{1}{a}+\frac{1}{a\cdot(a-1)}-\frac{1}{a-1}\right)=\sqrt{a^4+(a-1)^2}\cdot\frac{a-1+1-a}{a\cdot(a-1)}=$$

$$=\sqrt{a^4+(a-1)^2}\cdot\frac{a-1+1-a}{a\cdot(a-1)}=\sqrt{a^4+(a-1)^2}\cdot\frac{0}{a\cdot(a-1)}=\sqrt{a^4+(a-1)^2}\cdot 0=0.$$

Vježba 192

Izračunati: $\left|a+\frac{a-1}{a}\cdot i\right|+\left|\frac{1}{a}+\frac{a}{a-1}\cdot i\right|-\left|\frac{a^2}{a-1}+i\right|,\ a>1.$

Rezultat: 0.

Zadatak 193 (Ana, medicinska škola)

Zadan je kompleksan broj $z=(a+i)^2+\frac{a}{i}$, gdje je $a\in R$. Zapišite ga u standardnom obliku $(z=x+y\cdot i,\ x,\ y\in R)$.

Rješenje 193

Ponovimo!

$$(a+b)^2=a^2+2\cdot a\cdot b+b^2\quad,\quad i^2=-1\quad,\quad\frac{1}{i}=-i\quad,\quad\frac{a}{b}=a\cdot\frac{1}{b}.$$

Kompleksan broj je broj oblika

$$z=x+y\cdot i,$$

gdje su x i y realni brojevi, a i imaginarna jedinica. Broj x zove se realni dio kompleksnog broja z, a broj y imaginarni dio kompleksnog broja z. Pišemo:

$$x=\operatorname{Re}z\quad,\quad y=\operatorname{Im}z.$$

Standardni ili algebarski oblik kompleksnog broja je oblika

$$z=x+y\cdot i,$$

gdje su x i y realni brojevi.

$$z=(a+i)^2+\frac{a}{i}\Rightarrow z=a^2+2\cdot a\cdot i+i^2+a\cdot\frac{1}{i}\Rightarrow z=a^2+2\cdot a\cdot i-1+a\cdot(-i)\Rightarrow$$

$$\Rightarrow \ z = a^2 + 2 \cdot a \cdot i - 1 - a \cdot i \ \Rightarrow \ z = a^2 - 1 + a \cdot i.$$

Vježba 193

Zadan je kompleksan broj $z = (a+i)^2 - \frac{a}{i}$, gdje je $a \in R$. Zapišite ga u standardnom obliku $(z = x + y \cdot i,\ x,\ y \in R)$.

Rezultat: $z = a^2 - 1 + 3 \cdot a \cdot i.$

Zadatak 194 (Ana, medicinska škola)

Odredite apsolutnu vrijednost broja $z = 2 \cdot \cos \frac{2 \cdot \pi}{7} + i \cdot 2 \cdot \sin \frac{2 \cdot \pi}{7}$.

Rješenje 194

Ponovimo!

$$(a \cdot b)^n = a^n \cdot b^n \quad , \quad \cos^2 x + \sin^2 x = 1.$$

Kompleksan broj je broj oblika

$$z = x + y \cdot i,$$

gdje su x i y realni brojevi, a i imaginarna jedinica. Broj x zove se realni dio kompleksnog broja z, a broj y imaginarni dio kompleksnog broja z. Pišemo:

$$x = \operatorname{Re} z \quad , \quad y = \operatorname{Im} z.$$

Standardni ili algebarski oblik kompleksnog broja je oblika

$$z = x + y \cdot i,$$

gdje su x i y realni brojevi.
Modul ili apsolutna vrijednost kompleksnog broja z = x + y · i definira se formulom

$$|z| = \sqrt{x^2 + y^2}.$$

Zakon distribucije množenja prema zbrajanju.

$$a \cdot (b+c) = a \cdot b + a \cdot c \quad , \quad a \cdot b + a \cdot c = a \cdot (b+c).$$

$$\left. \begin{array}{l} z = x + y \cdot i \\ z = 2 \cdot \cos \frac{2 \cdot \pi}{7} + i \cdot 2 \cdot \sin \frac{2 \cdot \pi}{7} \end{array} \right\} \Rightarrow \left. \begin{array}{l} x = 2 \cdot \cos \frac{2 \cdot \pi}{7} \\ y = 2 \cdot \sin \frac{2 \cdot \pi}{7} \end{array} \right\} \Rightarrow \left[|z| = \sqrt{x^2 + y^2} \right] \Rightarrow$$

$$\Rightarrow |z| = \sqrt{\left(2 \cdot \cos \frac{2 \cdot \pi}{7}\right)^2 + \left(2 \cdot \sin \frac{2 \cdot \pi}{7}\right)^2} \Rightarrow |z| = \sqrt{2^2 \cdot \cos^2 \frac{2 \cdot \pi}{7} + 2^2 \cdot \sin^2 \frac{2 \cdot \pi}{7}} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow |z| = \sqrt{4 \cdot \cos^2 \frac{2 \cdot \pi}{7} + 4 \cdot \sin^2 \frac{2 \cdot \pi}{7}} \Rightarrow |z| = \sqrt{4 \cdot \left(\cos^2 \frac{2 \cdot \pi}{7} + \sin^2 \frac{2 \cdot \pi}{7}\right)} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow |z| = \sqrt{4 \cdot 1} \Rightarrow |z| = \sqrt{4} \Rightarrow |z| = 2.$$

Vježba 194

Odredite apsolutnu vrijednost broja $z = 3 \cdot \cos \frac{2 \cdot \pi}{7} + i \cdot 3 \cdot \sin \frac{2 \cdot \pi}{7}$.

Rezultat: 3.

Zadatak 195 (Darko, gimnazija)

Koliko ima kompleksnih brojeva za koje vrijede jednakosti $|z-i|=2,\ |z-4\cdot i|=1$?

$A.\ 0 \qquad B.\ 1 \qquad C.\ 2 \qquad D.\ 4$

Rješenje 195

Ponovimo!

$$\left(\sqrt{a}\right)^2=a \quad , \quad (a-b)^2=a^2-2\cdot a\cdot b+b^2 \quad , \quad a^n=0 \Rightarrow a=0.$$

Kompleksan broj je broj oblika

$$z=x+y\cdot i,$$

gdje su x i y realni brojevi, a i imaginarna jedinica. Broj x zove se realni dio kompleksnog broja z, a broj y imaginarni dio kompleksnog broja z. Pišemo:

$$x=\operatorname{Re} z \quad , \quad y=\operatorname{Im} z.$$

Standardni ili algebarski oblik kompleksnog broja je oblika

$$z=x+y\cdot i,$$

gdje su x i y realni brojevi.
Modul ili apsolutna vrijednost kompleksnog broja z = x + y · i definira se formulom

$$|z|=\sqrt{x^2+y^2}.$$

Zakon distribucije množenja prema zbrajanju.

$$a\cdot(b+c)=a\cdot b+a\cdot c \quad , \quad a\cdot b+a\cdot c=a\cdot(b+c).$$

Neka je zadan kompleksan broj

$$z=x+y\cdot i.$$

Tada vrijedi:

$$\left.\begin{array}{l}|z-i|=2\\ |z-4\cdot i|=1\end{array}\right\} \Rightarrow \left[z=x+y\cdot i\right] \Rightarrow \left.\begin{array}{l}|x+y\cdot i-i|=2\\ |x+y\cdot i-4\cdot i|=1\end{array}\right\} \Rightarrow \left.\begin{array}{l}|x+(y-1)\cdot i|=2\\ |x+(y-4)\cdot i|=1\end{array}\right\} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \left.\begin{array}{l}\sqrt{x^2+(y-1)^2}=2\\ \sqrt{x^2+(y-4)^2}=1\end{array}\right\} \Rightarrow \left.\begin{array}{l}\sqrt{x^2+(y-1)^2}=2 \ /^2\\ \sqrt{x^2+(y-4)^2}=1 \ /^2\end{array}\right\} \Rightarrow \left.\begin{array}{l}\left(\sqrt{x^2+(y-1)^2}\right)^2=2^2\\ \left(\sqrt{x^2+(y-4)^2}\right)^2=1^2\end{array}\right\} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \left.\begin{array}{l}x^2+(y-1)^2=4\\ x^2+(y-4)^2=1\end{array}\right\} \Rightarrow \left.\begin{array}{l}x^2+y^2-2\cdot y+1=4\\ x^2+y^2-8\cdot y+16=1\end{array}\right\} \Rightarrow \left.\begin{array}{l}x^2+y^2-2\cdot y=4-1\\ x^2+y^2-8\cdot y=1-16\end{array}\right\} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \left.\begin{array}{l}x^2+y^2-2\cdot y=3\\ x^2+y^2-8\cdot y=-15\end{array}\right\} \Rightarrow \left[\begin{array}{l}\text{metoda suprotnih}\\ \text{koeficijenata}\end{array}\right] \Rightarrow \left.\begin{array}{l}x^2+y^2-2\cdot y=3\\ x^2+y^2-8\cdot y=-15 \ /\cdot(-1)\end{array}\right\} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \left.\begin{array}{l}x^2+y^2-2\cdot y=3\\ -x^2-y^2+8\cdot y=15\end{array}\right\} \Rightarrow 6\cdot y=18 \Rightarrow 6\cdot y=18 \ /:6 \Rightarrow y=3.$$

Računamo x.

$$\left.\begin{array}{l}x^2+y^2-2\cdot y=3\\ y=3\end{array}\right\} \Rightarrow x^2+3^2-2\cdot 3=3 \Rightarrow x^2+9-6=3 \Rightarrow x^2+3=3 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \ x^2 + 3 = 3 \ \Rightarrow \ x^2 = 0 \ \Rightarrow \ x = 0.$$

Kompleksan broj je

$$\left. \begin{matrix} x = 0 \ , \ y = 3 \\ z = x + y \cdot i \end{matrix} \right\} \Rightarrow \ z = 0 + 3 \cdot i \ \Rightarrow \ z = 3 \cdot i.$$

Dakle, postoji jedan kompleksan broj.
Odgovor je pod B.

Vježba 195

Koliko ima kompleksnih brojeva za koje vrijede jednakosti $\left| z - i \right| = 1, \left| z - 3 \cdot i \right| = 1$?

$$A.\ 0 \qquad B.\ 1 \qquad C.\ 2 \qquad D.\ 4$$

Rezultat: B.

Zadatak 196 (4A, 4B, TUPŠ)

Napišite 5 kao umnožak nekih dvaju kompleksnih brojeva kojima su i realni i imaginarni dijelovi različiti od 0.

Rješenje 196

Ponovimo!

$$\left(\sqrt{a}\right)^2 = a \quad , \quad \frac{a}{n} + \frac{b}{n} = \frac{a+b}{n} \quad , \quad \frac{a}{b} \cdot \frac{c}{d} = \frac{a \cdot c}{b \cdot d} \quad , \quad \frac{a-b}{n} = \frac{a}{n} - \frac{b}{n}.$$

$$a^1 = a \quad , \quad a^n \cdot a^m = a^{n+m} \quad , \quad i^2 = -1.$$

Kompleksan broj je broj oblika

$$z = x + y \cdot i,$$

gdje su x i y realni brojevi, a i imaginarna jedinica. Broj x zove se realni dio kompleksnog broja z, a broj y imaginarni dio kompleksnog broja z. Pišemo:

$$x = \operatorname{Re} z \quad , \quad y = \operatorname{Im} z.$$

Standardni ili algebarski oblik kompleksnog broja je oblika

$$z = x + y \cdot i,$$

gdje su x i y realni brojevi.
Za kompleksne brojeve $x + y \cdot i$ i $x - y \cdot i$ kažemo da su kompleksno konjugirani jedan drugome.
Simbol konjugiranja jest povlaka iznad broja koji se konjugira:

$$z = x + y \cdot i \ \Rightarrow \ \bar{z} = x - y \cdot i.$$

Umnožak dvaju konjugirano kompleksnih brojeva realan je broj i nenegativan broj:

$$(x + y \cdot i) \cdot (x - y \cdot i) = x^2 + y^2.$$

Množenje zagrada

$$(a+b) \cdot (c+d) = a \cdot c + a \cdot d + b \cdot c + b \cdot d.$$

Dva su kompleksna broja jednaka ako i samo ako su im međusobno jednaki realni dijelovi i međusobno jednaki imaginarni dijelovi, tj.

$$a + b \cdot i = c + d \cdot i \ \Leftrightarrow \ a = c \ , \ b = d.$$

Skratiti razlomak znači brojnik i nazivnik tog razlomka podijeliti istim brojem različitim od nule i jedinice

$$\frac{a \cdot n}{b \cdot n} = \frac{a}{b} \ , \ n \neq 0 \ , \ n \neq 1.$$

1.inačica

Broj 5 možemo prikazati kao umnožak odgovarajućeg kompleksnog broja i pripadnog mu konjugirano kompleksnog. Primjeri:

- $\left(\sqrt{2}+i\cdot\sqrt{3}\right)\cdot\left(\sqrt{2}-i\cdot\sqrt{3}\right)=\left(\sqrt{2}\right)^2+\left(\sqrt{3}\right)^2=2+3=5$
- $(2+i)\cdot(2-i)=2^2+1^2=4+1=5$
- $\left(\sqrt{\frac{7}{2}}+i\cdot\sqrt{\frac{3}{2}}\right)\cdot\left(\sqrt{\frac{7}{2}}-i\cdot\sqrt{\frac{3}{2}}\right)=\left(\sqrt{\frac{7}{2}}\right)^2+\left(\sqrt{\frac{3}{2}}\right)^2=\frac{7}{2}+\frac{3}{2}=\frac{7+3}{2}=\frac{10}{2}=\frac{10}{2}=5$

itd.

2.inačica

Na početku možemo uzeti bilo koji kompleksan broj koji zadovoljava uvjete zadatka. Na primjer,

$$z=1-i.$$

Sada moramo odrediti kompleksan broj

$$w=x+y\cdot i$$

tako da vrijedi:

$$z\cdot w=5\ \Rightarrow\ (1-i)\cdot(x+y\cdot i)=5.$$

Izračunat ćemo x i y na dva načina.

1. način rada

$$(1-i)\cdot(x+y\cdot i)=5\ \Rightarrow\ (1-i)\cdot(x+y\cdot i)=5\ /\cdot\frac{1}{1-i}\ \Rightarrow\ x+y\cdot i=\frac{5}{1-i}\ \Rightarrow$$

$$\Rightarrow\ x+y\cdot i=\frac{5}{1-i}\cdot\frac{1+i}{1+i}\ \Rightarrow\ x+y\cdot i=\frac{5\cdot(1+i)}{(1-i)\cdot(1+i)}\ \Rightarrow\ x+y\cdot i=\frac{5+5\cdot i}{1^2+1^2}\ \Rightarrow$$

$$\Rightarrow\ x+y\cdot i=\frac{5+5\cdot i}{1+1}\ \Rightarrow\ x+y\cdot i=\frac{5+5\cdot i}{2}\ \Rightarrow\ x+y\cdot i=\frac{5}{2}+\frac{5}{2}\cdot i\ \Rightarrow\ w=\frac{5}{2}+\frac{5}{2}\cdot i.$$

Dakle, dva kompleksa broja

$$z=1-i\ ,\ \ w=\frac{5}{2}+\frac{5}{2}\cdot i$$

pomnoženi daju umnožak 5.

2. način rada

$$(1-i)\cdot(x+y\cdot i)=5\ \Rightarrow\ x+y\cdot i-x\cdot i-y\cdot i^2=5\ \Rightarrow\ x+y\cdot i-x\cdot i-y\cdot(-1)=5\ \Rightarrow$$

$$\Rightarrow\ x+y\cdot i-x\cdot i+y=5\ \Rightarrow\ (x+y)+(-x+y)\cdot i=5\ \Rightarrow\ (x+y)+(-x+y)\cdot i=5+0\cdot i\ \Rightarrow$$

$$\Rightarrow\ \begin{bmatrix}\text{jednakost}\\ \text{kompleksnih brojeva}\end{bmatrix}\ \Rightarrow\ \left.\begin{array}{l}x+y=5\\ -x+y=0\end{array}\right\}\ \Rightarrow\ \begin{bmatrix}\text{metoda suprotnih}\\ \text{koeficijenata}\end{bmatrix}\ \Rightarrow\ 2\cdot y=5\ \Rightarrow$$

$$\Rightarrow\ 2\cdot y=5\ /:2\ \Rightarrow\ y=\frac{5}{2}.$$

Računamo x.

$$\left.\begin{array}{l}-x+y=0\\ y=\frac{5}{2}\end{array}\right\}\ \Rightarrow\ -x+\frac{5}{2}=0\ \Rightarrow\ -x=-\frac{5}{2}\ \Rightarrow\ -x=-\frac{5}{2}\ /\cdot(-1)\ \Rightarrow\ x=\frac{5}{2}.$$

Dakle, kompleksan broj w glasi:

$$w=\frac{5}{2}+\frac{5}{2}\cdot i.$$

Vježba 196

Napišite 7 kao umnožak nekih dvaju kompleksnih brojeva kojima su i realni i imaginarni dijelovi različiti od 0.

Rezultat:
$$\left.\begin{array}{l} z=\sqrt{5}+i\cdot\sqrt{2}\ ,\ w=\sqrt{5}-i\cdot\sqrt{2} \\ z=1+i\ ,\ w=\frac{7}{2}-\frac{7}{2}\cdot i \end{array}\right\}.$$

Zadatak 197 (Lana, gimnazija)

Odredite realan broj b ako je $(4-2\cdot i)\cdot(-1+b\cdot i)=10\cdot i.$

Rješenje 197

Ponovimo!

$$i^2=-1.$$

Kompleksan broj je broj oblika

$$z=x+y\cdot i,$$

gdje su x i y realni brojevi, a i imaginarna jedinica. Broj x zove se realni dio kompleksnog broja z, a broj y imaginarni dio kompleksnog broja z. Pišemo:

$$x=\operatorname{Re} z\quad ,\quad y=\operatorname{Im} z.$$

Standardni ili algebarski oblik kompleksnog broja je oblika

$$z=x+y\cdot i,$$

gdje su x i y realni brojevi.

Množenje zagrada

$$(a+b)\cdot(c+d)=a\cdot c+a\cdot d+b\cdot c+b\cdot d.$$

Dva su kompleksna broja jednaka ako i samo ako su im međusobno jednaki realni dijelovi i međusobno jednaki imaginarni dijelovi, tj.

$$a+b\cdot i=c+d\cdot i\ \Leftrightarrow\ a=c\ ,\ b=d.$$

Zakon distribucije množenja prema zbrajanju.

$$a\cdot(b+c)=a\cdot b+a\cdot c\quad ,\quad a\cdot b+a\cdot c=a\cdot(b+c).$$

$$(4-2\cdot i)\cdot(-1+b\cdot i)=10\cdot i\ \Rightarrow\ -4+4\cdot b\cdot i+2\cdot i-2\cdot b\cdot i^2=10\cdot i\ \Rightarrow$$

$$\Rightarrow\ -4+4\cdot b\cdot i+2\cdot i-2\cdot b\cdot(-1)=10\cdot i\ \Rightarrow\ -4+4\cdot b\cdot i+2\cdot i+2\cdot b=10\cdot i\ \Rightarrow$$

$$\Rightarrow\ (-4+2\cdot b)+(4\cdot b\cdot i+2\cdot i)=10\cdot i\ \Rightarrow\ (-4+2\cdot b)+(4\cdot b+2)\cdot i=0+10\cdot i\ \Rightarrow$$

$$\Rightarrow\ \left.\begin{array}{l} -4+2\cdot b=0 \\ 4\cdot b+2=10 \end{array}\right\}\ \Rightarrow\ \left.\begin{array}{l} 2\cdot b=4 \\ 4\cdot b=10-2 \end{array}\right\}\ \Rightarrow\ \left.\begin{array}{l} 2\cdot b=4 \\ 4\cdot b=8 \end{array}\right\}\ \Rightarrow\ \left.\begin{array}{l} 2\cdot b=4\ /:2 \\ 4\cdot b=8\ /:4 \end{array}\right\}\ \Rightarrow\ \left.\begin{array}{l} b=2 \\ b=2 \end{array}\right\}\ \Rightarrow\ b=2.$$

Vježba 197

Odredite realan broj b ako je $(-4+2\cdot i)\cdot(1-b\cdot i)=10\cdot i.$

Rezultat: b = 2.

Zadatak 198 (Tea, gimnazija)

Koliki je argument φ u trigonometrijskome zapisu kompleksnog broja

$z=i\cdot\left(\cos\frac{\pi}{3}+i\cdot\sin\frac{\pi}{3}\right)$?

Rješenje 198

Ponovimo!

Kompleksan broj je broj oblika

$$z=x+y\cdot i,$$

gdje su x i y realni brojevi, a i imaginarna jedinica. Broj x zove se realni dio kompleksnog broja z, a broj y imaginarni dio kompleksnog broja z. Pišemo:

$$x = \mathrm{Re}\, z \quad , \quad y = \mathrm{Im}\, z.$$

Standardni ili algebarski oblik kompleksnog broja je oblika

$$z = x + y \cdot i,$$

gdje su x i y realni brojevi.
Svaki se kompleksan broj

$$z = x + y \cdot i$$

može prikazati u trigonometrijskom obliku

$$z = r \cdot (\cos \varphi + i \cdot \sin \varphi),$$

pri čemu je r modul kompleksnog broja

$$|z| = r = \sqrt{x^2 + y^2},$$

a kut φ argument kompleksnog broja za kojeg vrijedi

$$\varphi = arctg \frac{y}{x} \text{ ili } \varphi = tg^{-1}\left(\frac{y}{x}\right), \; 0 \le \varphi < 2 \cdot \pi.$$

Oznaka je

$$\varphi = \arg z.$$

Kompleksne brojeve predočujemo u koordinatnoj ravnini koju zovemo kompleksna ili Gaussova ravnina.
Zakon distribucije množenja prema zbrajanju.

$$a \cdot (b + c) = a \cdot b + a \cdot c \quad , \quad a \cdot b + a \cdot c = a \cdot (b + c).$$

Skratiti razlomak znači brojnik i nazivnik tog razlomka podijeliti istim brojem različitim od nule i jedinice

$$\frac{a \cdot n}{b \cdot n} = \frac{a}{b}, \; n \ne 0 \; , \; n \ne 1.$$

Trokut je dio ravnine omeđen s tri dužine. Te dužine zovemo stranice trokuta.
Pravokutni trokuti imaju jedan pravi kut (kut od 90º). Stranice koje zatvaraju pravi kut zovu se katete, a najdulja stranica je hipotenuza pravokutnog trokuta.
Pitagorin poučak
Trokut je pravokutan ako i samo ako je kvadrat nad hipotenuzom jednak zbroju kvadrata nad katetama.

$$c^2 = a^2 + b^2 \quad , \quad a^2 = c^2 - b^2 \quad , \quad b^2 = c^2 - a^2.$$

Tangens šiljastog kuta pravokutnog trokuta jednak je omjeru duljine katete nasuprot tog kuta i duljine katete uz taj kut.

$$a^1 = a \quad , \quad a^n \cdot a^m = a^{n+m} \quad , \quad i^2 = -1 \quad , \quad \cos\frac{\pi}{3} = \frac{1}{2} \quad , \quad \sin\frac{\pi}{3} = \frac{\sqrt{3}}{2}.$$

$$\frac{\frac{a}{b}}{\frac{c}{d}} = \frac{a \cdot d}{b \cdot c} \quad , \quad \frac{a}{b} + \frac{c}{d} = \frac{a \cdot d + b \cdot c}{b \cdot d} \quad , \quad \frac{a}{b} \cdot \frac{c}{d} = \frac{a \cdot c}{b \cdot d} \quad , \quad \left(\sqrt{a}\right)^2 = a \quad , \quad tg\frac{\pi}{6} = \frac{\sqrt{3}}{2}.$$

$$n = \frac{n}{1} \quad , \quad \frac{a}{b} - \frac{c}{d} = \frac{a \cdot d - b \cdot c}{b \cdot d}.$$

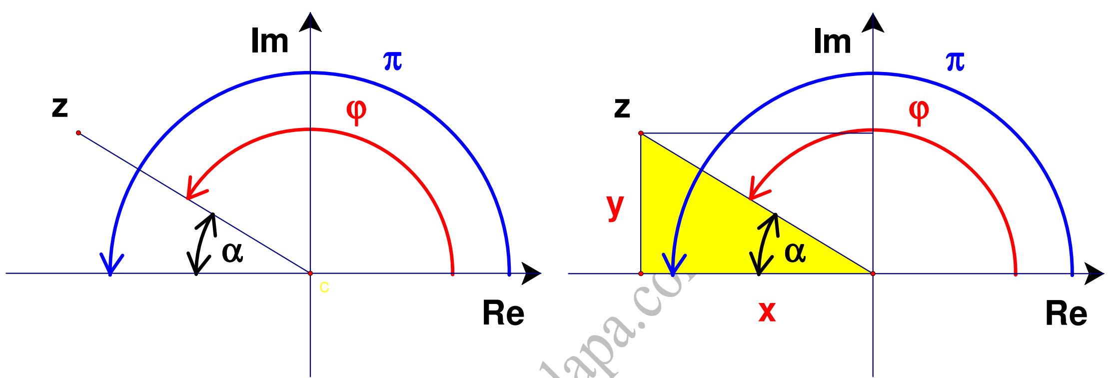
Preoblikujemo kompleksan broj tako da ga zapišemo u standardnom obliku.

$$z=i\cdot\left(\cos\frac{\pi}{3}+i\cdot\sin\frac{\pi}{3}\right)\Rightarrow\left[\begin{array}{l}\cos\frac{\pi}{3}=\frac{1}{2}\\ \sin\frac{\pi}{3}=\frac{\sqrt{3}}{2}\end{array}\right]\Rightarrow z=i\cdot\left(\frac{1}{2}+i\cdot\frac{\sqrt{3}}{2}\right)\Rightarrow$$

$$\Rightarrow z=\frac{1}{2}\cdot i+i^{2}\cdot\frac{\sqrt{3}}{2}\Rightarrow z=\frac{1}{2}\cdot i+(-1)\cdot\frac{\sqrt{3}}{2}\Rightarrow z=\frac{1}{2}\cdot i-\frac{\sqrt{3}}{2}\Rightarrow z=-\frac{\sqrt{3}}{2}+\frac{1}{2}\cdot i\Rightarrow$$

$$\Rightarrow\left.\begin{array}{l}\operatorname{Re} z=-\frac{\sqrt{3}}{2}\\ \operatorname{Im} z=\frac{1}{2}\end{array}\right\}.$$

Kompleksan broj z nalazi se u drugom kvadrantu kompleksne ravnine.



Sa slika vidi se:

$$tg\,\alpha=\frac{y}{x}\Rightarrow tg\,\alpha=\frac{\frac{1}{2}}{\frac{\sqrt{3}}{2}}\Rightarrow tg\,\alpha=\frac{\frac{1}{2}}{\frac{\sqrt{3}}{2}}\Rightarrow tg\,\alpha=\frac{1}{\sqrt{3}}\Rightarrow\left[\begin{array}{l}\text{racionalizacija}\\ \text{nazivnika}\end{array}\right]\Rightarrow$$

$$\Rightarrow tg\,\alpha=\frac{1}{\sqrt{3}}\cdot\frac{\sqrt{3}}{\sqrt{3}}\Rightarrow tg\,\alpha=\frac{\sqrt{3}}{\left(\sqrt{3}\right)^{2}}\Rightarrow tg\,\alpha=\frac{\sqrt{3}}{3}\Rightarrow\alpha=tg^{-1}\left(\frac{\sqrt{3}}{3}\right)\Rightarrow\alpha=\frac{\pi}{6}.$$

Argument φ iznosi:

$$\varphi=\pi-\alpha\Rightarrow\varphi=\pi-\frac{\pi}{6}\Rightarrow\varphi=\frac{\pi}{1}-\frac{\pi}{6}\Rightarrow\varphi=\frac{6\cdot\pi-\pi}{6}\Rightarrow\varphi=\frac{5\cdot\pi}{6}.$$

Vježba 198

Koliki je argument φ u trigonometrijskome zapisu kompleksnog broja

$z=i\cdot\left(i\cdot\sin\frac{\pi}{3}+\cos\frac{\pi}{3}\right)$?

Rezultat: $\varphi=\frac{5\cdot\pi}{6}.$

Zadatak 199 (Patrik, srednja škola)

Jednakost $(1+a\cdot i)\cdot(1-2\cdot i)=(1+i)\cdot(1-b\cdot i)$ ispunjena je ako je:

$A.\ a+b=3 \qquad B.\ a+b=-1 \qquad C.\ a+b=-4 \qquad D.\ a+b=2$

Rješenje 199

Ponovimo!

$$a^1=a \quad , \quad a^n\cdot a^m=a^{n+m} \quad , \quad i^2=-1.$$

Množenje zagrada

$$(a+b)\cdot(c+d)=a\cdot c+a\cdot d+b\cdot c+b\cdot d.$$

Kompleksan broj je broj oblika

$$z=x+y\cdot i,$$

gdje su x i y realni brojevi, a i imaginarna jedinica. Broj x zove se realni dio kompleksnog broja z, a broj y imaginarni dio kompleksnog broja z. Pišemo:

$$x=\operatorname{Re} z \quad , \quad y=\operatorname{Im} z.$$

Standardni ili algebarski oblik kompleksnog broja je oblika

$$z=x+y\cdot i,$$

gdje su x i y realni brojevi.
Zakon distribucije množenja prema zbrajanju.

$$a\cdot(b+c)=a\cdot b+a\cdot c \quad , \quad a\cdot b+a\cdot c=a\cdot(b+c).$$

Dva su kompleksna broja jednaka ako i samo ako su im međusobno jednaki realni dijelovi i međusobno jednaki imaginarni dijelovi, tj.

$$a+b\cdot i=c+d\cdot i \ \Leftrightarrow\ a=c \ ,\ b=d.$$

$$(1+a\cdot i)\cdot(1-2\cdot i)=(1+i)\cdot(1-b\cdot i) \Rightarrow 1-2\cdot i+a\cdot i-2\cdot a\cdot i^2=1-b\cdot i+i-b\cdot i^2 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 1-2\cdot i+a\cdot i-2\cdot a\cdot i^2=1-b\cdot i+i-b\cdot i^2 \Rightarrow -2\cdot i+a\cdot i-2\cdot a\cdot i^2=-b\cdot i+i-b\cdot i^2 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow -2\cdot i+a\cdot i-2\cdot a\cdot(-1)=-b\cdot i+i-b\cdot(-1) \Rightarrow -2\cdot i+a\cdot i+2\cdot a=-b\cdot i+i+b \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 2\cdot a+(-2+a)\cdot i=b+(-b+1)\cdot i \Rightarrow \left[\begin{array}{l}\text{jednakost kompleksnih}\\ \text{brojeva}\end{array}\right] \Rightarrow \left.\begin{array}{l}2\cdot a=b\\ -2+a=-b+1\end{array}\right\} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \left.\begin{array}{l}2\cdot a-b=0\\ a+b=1+2\end{array}\right\} \Rightarrow \left.\begin{array}{l}2\cdot a-b=0\\ a+b=3\end{array}\right\} \Rightarrow \left[\begin{array}{l}\text{metoda suprotnih}\\ \text{koeficijenata}\end{array}\right] \Rightarrow 3\cdot a=3 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 3\cdot a=3 \ /:3 \Rightarrow a=1.$$

Računamo b.

$$\left.\begin{array}{l}a+b=3\\ a=1\end{array}\right\} \Rightarrow 1+b=3 \Rightarrow b=3-1 \Rightarrow b=2.$$

Vidi se:

$$a+b=1+2 \Rightarrow a+b=3.$$

Odgovor je pod A.

Vježba 199

Jednakost $(-1+2\cdot i)\cdot(1+a\cdot i)=(-1+b\cdot i)\cdot(1+i)$ ispunjena je ako je:

$A.\ a+b=3 \qquad B.\ a+b=-1 \qquad C.\ a+b=-4 \qquad D.\ a+b=2$

Rezultat: A.

Zadatak 200 (Lara, gimnazija)

Iz $(1-i)^5 = a + b\cdot i$ slijedi :

$A.\ a-b=1 \qquad B.\ a+b=0 \qquad C.\ a+b=-1 \qquad D.\ a-b=0$

Rješenje 200

Ponovimo!

$$a^1 = a \quad , \quad a^n \cdot a^m = a^{n+m} \quad , \quad \left(a^n\right)^m = a^{n\cdot m} \quad , \quad i^2 = -1.$$

$$(a-b)^2 = a^2 - 2\cdot a\cdot b + b^2 \quad , \quad (a\cdot b)^n = a^n \cdot b^n.$$

Zakon distribucije množenja prema zbrajanju.

$$a\cdot(b+c) = a\cdot b + a\cdot c \quad , \quad a\cdot b + a\cdot c = a\cdot(b+c).$$

Kompleksan broj je broj oblika

$$z = x + y\cdot i,$$

gdje su x i y realni brojevi, a i imaginarna jedinica. Broj x zove se realni dio kompleksnog broja z, a broj y imaginarni dio kompleksnog broja z. Pišemo:

$$x = \mathrm{Re}\, z \quad , \quad y = \mathrm{Im}\, z.$$

Standardni ili algebarski oblik kompleksnog broja je oblika

$$z = x + y\cdot i,$$

gdje su x i y realni brojevi.
Dva su kompleksna broja jednaka ako i samo ako su im međusobno jednaki realni dijelovi i međusobno jednaki imaginarni dijelovi, tj.

$$a + b\cdot i = c + d\cdot i \;\Leftrightarrow\; a = c \;,\; b = d.$$

$$(1-i)^5 = a + b\cdot i \Rightarrow (1-i)^4\cdot(1-i)^1 = a + b\cdot i \Rightarrow \left((1-i)^2\right)^2\cdot(1-i) = a + b\cdot i \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \left(1 - 2\cdot i + i^2\right)^2\cdot(1-i) = a + b\cdot i \Rightarrow (1 - 2\cdot i - 1)^2\cdot(1-i) = a + b\cdot i \Rightarrow$$

$$\Rightarrow (1 - 2\cdot i - 1)^2\cdot(1-i) = a + b\cdot i \Rightarrow (-2\cdot i)^2\cdot(1-i) = a + b\cdot i \Rightarrow 4\cdot i^2\cdot(1-i) = a + b\cdot i \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 4\cdot(-1)\cdot(1-i) = a + b\cdot i \Rightarrow -4\cdot(1-i) = a + b\cdot i \Rightarrow -4 + 4\cdot i = a + b\cdot i \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{bmatrix} \text{jednakost kompleksnih} \\ \text{brojeva} \end{bmatrix} \Rightarrow \left.\begin{matrix} -4 = a \\ 4 = b \end{matrix}\right\} \Rightarrow \left.\begin{matrix} a = -4 \\ b = 4 \end{matrix}\right\}.$$

Tada je

$$a + b = -4 + 4 \Rightarrow a + b = -4 + 4 \Rightarrow a + b = 0.$$

Odgovor je pod B.

Vježba 200

Iz $(1-i)^5 - a - b\cdot i = 0$ slijedi :

$A.\ a-b=1 \qquad B.\ a+b=0 \qquad C.\ a+b=-1 \qquad D.\ a-b=0$

Rezultat: B.