Zadatak 161 (Tessa, gimnazija)

Jedan faktor u rastavu polinoma $x^4 - 1$ na faktore jest i kompleksan broj:

$$A.\ 1 - x \cdot i \qquad B.\ x - i \qquad C.\ -1 - x \cdot i \qquad D.\ -i$$

Rješenje 161

Ponovimo!

$$a^2 - b^2 = (a-b) \cdot (a+b) \quad , \quad \left(a^n\right)^m = a^{n \cdot m}.$$

Kompleksan broj je broj oblika

$$z = x + y \cdot i,$$

gdje su x i y realni brojevi, a i imaginarna jedinica. Broj x zove se realni dio kompleksnog broja z, a broj y imaginarni dio kompleksnog broja z. Pišemo:

$$x = \operatorname{Re} z \quad , \quad y = \operatorname{Im} z.$$

Standardni ili algebarski oblik kompleksnog broja je oblika

$$z = x + y \cdot i,$$

gdje su x i y realni brojevi.
Za kompleksne brojeve $x + y \cdot i$ i $x - y \cdot i$ kažemo da su kompleksno konjugirani jedan drugome. Simbol konjugiranja jest povlaka iznad broja koji se konjugira:

$$z = x + y \cdot i \Rightarrow \bar{z} = x - y \cdot i.$$

Umnožak dvaju konjugirano kompleksnih brojeva realan je broj i nenegativan broj:

$$(x + y \cdot i) \cdot (x - y \cdot i) = x^2 + y^2.$$

Polinom $x^4 - 1$ rastavimo na faktore.

$$x^4 - 1 = \left(x^2\right)^2 - 1^2 = \left(x^2 - 1\right) \cdot \left(x^2 + 1\right) = (x-1) \cdot (x+1) \cdot (x-i) \cdot (x+i) =$$
$$= (x-1) \cdot (x+1) \cdot (x-i) \cdot (x+i).$$

Odgovor je pod B.

Vježba 161

Jedan faktor u rastavu polinoma $x^4 - 1$ na faktore jest i kompleksan broj:

$$A.\ 1 + x \cdot i \qquad B.\ x + i \qquad C.\ -1 + x \cdot i \qquad D.\ -i$$

Rezultat: B.

Zadatak 162 (Domagoj, gimnazija)

Izračunajte : $(1+i)^{30} + (1-i)^{30}$.

Rješenje 162

Ponovimo!

$$\left(a^n\right)^m = a^{n \cdot m} \quad , \quad i^2 = -1 \quad , \quad (a+b)^2 = a^2 + 2 \cdot a \cdot b + b^2.$$

$$(a-b)^2 = a^2 - 2 \cdot a \cdot b + b^2 \quad , \quad (-a)^{2 \cdot n - 1} = -a^{2 \cdot n - 1} \ , \ 2 \cdot n - 1 \text{ je neparan broj}.$$

Kompleksan broj je broj oblika

$$z = x + y \cdot i,$$

gdje su x i y realni brojevi, a i imaginarna jedinica. Broj x zove se realni dio kompleksnog broja z, a broj y imaginarni dio kompleksnog broja z. Pišemo:

$$x = \operatorname{Re} z \quad , \quad y = \operatorname{Im} z.$$

Standardni ili algebarski oblik kompleksnog broja je oblika

$$z = x + y \cdot i,$$

gdje su x i y realni brojevi.

$$(1+i)^{30}+(1-i)^{30}=\left((1+i)^2\right)^{15}+\left((1-i)^2\right)^{15}=\left(1+2\cdot i+i^2\right)^{15}+\left(1-2\cdot i+i^2\right)^{15}=$$

$$=(1+2\cdot i-1)^{15}+(1-2\cdot i-1)^{15}=(1+2\cdot i-1)^{15}+(1-2\cdot i-1)^{15}=(2\cdot i)^{15}+(-2\cdot i)^{15}=$$

$$=(2\cdot i)^{15}-(2\cdot i)^{15}=(2\cdot i)^{15}-(2\cdot i)^{15}=0.$$

Vježba 162

Izračunajte : $(1+i)^{50}+(1-i)^{50}$.

Rezultat: 0.

Zadatak 163 (Marijana123, medicinska škola)

Odredi realne brojeve x i y iz jednakosti $(x+y)\cdot(2-i)+(x-y)\cdot(1+3\cdot i)=2+3\cdot i.$

Rješenje 163

Ponovimo!

$$a\cdot\frac{b}{c}=\frac{a\cdot b}{c}\quad,\quad n=\frac{n}{1}\quad,\quad \frac{a}{b}-\frac{c}{d}=\frac{a\cdot d-b\cdot c}{b\cdot d}.$$

Kompleksan broj je broj oblika

$$z=x+y\cdot i,$$

gdje su x i y realni brojevi, a i imaginarna jedinica. Broj x zove se realni dio kompleksnog broja z, a broj y imaginarni dio kompleksnog broja z. Pišemo:

$$x=\operatorname{Re} z\quad,\quad y=\operatorname{Im} z.$$

Standardni ili algebarski oblik kompleksnog broja je oblika

$$z=x+y\cdot i,$$

gdje su x i y realni brojevi.
Dva su kompleksna broja jednaka ako i samo ako su im međusobno jednaki realni dijelovi i međusobno jednaki imaginarni dijelovi, tj.

$$a+b\cdot i=c+d\cdot i\ \Leftrightarrow\ a=c\ ,\ b=d.$$

Množenje zagrada

$$(a+b)\cdot(c+d)=a\cdot c+a\cdot d+b\cdot c+b\cdot d.$$

Zakon distribucije množenja prema zbrajanju.

$$a\cdot(b+c)=a\cdot b+a\cdot c\quad,\quad a\cdot b+a\cdot c=a\cdot(b+c).$$

$$(x+y)\cdot(2-i)+(x-y)\cdot(1+3\cdot i)=2+3\cdot i\ \Rightarrow\ 2\cdot x-x\cdot i+2\cdot y-y\cdot i+x+3\cdot x\cdot i-y-3\cdot y\cdot i=2+3\cdot i\ \Rightarrow$$

$$\Rightarrow\ (2\cdot x+2\cdot y+x-y)+(-x\cdot i-y\cdot i+3\cdot x\cdot i-3\cdot y\cdot i)=2+3\cdot i\ \Rightarrow$$

$$\Rightarrow\ (2\cdot x+2\cdot y+x-y)+(-x-y+3\cdot x-3\cdot y)\cdot i=2+3\cdot i\ \Rightarrow\ (3\cdot x+y)+(2\cdot x-4\cdot y)\cdot i=2+3\cdot i\ \Rightarrow$$

$$\Rightarrow\left[\begin{array}{l}\text{jednakost kompleksnih}\\ \text{brojeva}\end{array}\right]\Rightarrow\left.\begin{array}{l}3\cdot x+y=2\\ 2\cdot x-4\cdot y=3\end{array}\right\}\Rightarrow\left[\begin{array}{l}\text{metoda suprotnih}\\ \text{koeficijenata}\end{array}\right]\Rightarrow$$

$$\Rightarrow\left.\begin{array}{l}3\cdot x+y=2\ /\cdot 4\\ 2\cdot x-4\cdot y=3\end{array}\right\}\Rightarrow\left.\begin{array}{l}12\cdot x+4\cdot y=8\\ 2\cdot x-4\cdot y=3\end{array}\right\}\Rightarrow\ 14\cdot x=11\ \Rightarrow\ 14\cdot x=11\ /:14\ \Rightarrow\ x=\frac{11}{14}.$$

Računamo y.

$$\left.\begin{array}{l}3\cdot x+y=2\\ x=\frac{11}{14}\end{array}\right\}\Rightarrow\ 3\cdot\frac{11}{14}+y=2\ \Rightarrow\ \frac{33}{14}+y=2\ \Rightarrow\ y=2-\frac{33}{14}\ \Rightarrow\ y=\frac{2}{1}-\frac{33}{14}\ \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \ y=\frac{28-33}{14} \ \Rightarrow \ y=-\frac{5}{14}.$$

Rješenje glasi:

$$(x,\ y)=\left(\frac{11}{14},\ -\frac{5}{14}\right).$$

Vježba 163

Odredi realne brojeve x i y iz jednakosti $(x+y)\cdot(2-i)-(y-x)\cdot(1+3\cdot i)=2+3\cdot i.$

Rezultat: $(x,\ y)=\left(\frac{11}{14},\ -\frac{5}{14}\right).$

Zadatak 164 (Marijana123, medicinska škola)

Odredi realne brojeve x i y iz jednakosti $\frac{x\cdot i}{1-i}+\frac{y\cdot i}{1+i}=\frac{1}{2}.$

Rješenje 164

Ponovimo!

$$i^2=-1.$$

Kompleksan broj je broj oblika

$$z=x+y\cdot i,$$

gdje su x i y realni brojevi, a i imaginarna jedinica. Broj x zove se realni dio kompleksnog broja z, a broj y imaginarni dio kompleksnog broja z. Pišemo:

$$x=\operatorname{Re} z \quad , \quad y=\operatorname{Im} z.$$

Standardni ili algebarski oblik kompleksnog broja je oblika

$$z=x+y\cdot i,$$

gdje su x i y realni brojevi.

Za kompleksne brojeve $x+y\cdot i$ i $x-y\cdot i$ kažemo da su kompleksno konjugirani jedan drugome.

Simbol konjugiranja jest povlaka iznad broja koji se konjugira:

$$z=x+y\cdot i \ \Rightarrow \ \bar{z}=x-y\cdot i.$$

Umnožak dvaju konjugirano kompleksnih brojeva realan je broj i nenegativan broj:

$$(x+y\cdot i)\cdot(x-y\cdot i)=x^2+y^2.$$

Dva su kompleksna broja jednaka ako i samo ako su im međusobno jednaki realni dijelovi i međusobno jednaki imaginarni dijelovi, tj.

$$a+b\cdot i=c+d\cdot i \ \Leftrightarrow \ a=c \ , \ b=d.$$

Zakon distribucije množenja prema zbrajanju.

$$a\cdot(b+c)=a\cdot b+a\cdot c \quad , \quad a\cdot b+a\cdot c=a\cdot(b+c).$$

$$\frac{x\cdot i}{1-i}+\frac{y\cdot i}{1+i}=\frac{1}{2} \ \Rightarrow \ \frac{x\cdot i}{1-i}\cdot\frac{1+i}{1+i}+\frac{y\cdot i}{1+i}\cdot\frac{1-i}{1-i}=\frac{1}{2} \ \Rightarrow \ \frac{x\cdot i+x\cdot i^2}{1^2+1^2}+\frac{y\cdot i-y\cdot i^2}{1^2+1^2}=\frac{1}{2} \ \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \ \frac{x\cdot i+x\cdot(-1)}{1+1}+\frac{y\cdot i-y\cdot(-1)}{1+1}=\frac{1}{2} \ \Rightarrow \ \frac{x\cdot i-x}{2}+\frac{y\cdot i+y}{2}=\frac{1}{2} \ \Rightarrow \ \frac{-x+x\cdot i}{2}+\frac{y+y\cdot i}{2}=\frac{1}{2} \ \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \ \frac{-x+x\cdot i}{2}+\frac{y+y\cdot i}{2}=\frac{1}{2} \ /\cdot 2 \ \Rightarrow \ -x+x\cdot i+y+y\cdot i=1 \ \Rightarrow \ (-x+y)+(x\cdot i+y\cdot i)=1 \ \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \ (-x+y)+(x+y)\cdot i=1 \ \Rightarrow \ [1=1+0\cdot i] \ \Rightarrow \ (-x+y)+(x+y)\cdot i=1+0\cdot i \ \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \ (2\cdot x+2\cdot y+x-y)+(-x-y+3\cdot x-3\cdot y)\cdot i=2+3\cdot i \ \Rightarrow \ (3\cdot x+y)+(2\cdot x-4\cdot y)\cdot i=2+3\cdot i \ \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \left.\begin{array}{l} -x+y=1 \\ x+y=0 \end{array}\right\} \Rightarrow \left[\begin{array}{l} \text{metoda suprotnih} \\ \text{koeficijenata} \end{array}\right] \Rightarrow 2\cdot y=1 \Rightarrow 2\cdot y=1 \ /:2 \Rightarrow y=\frac{1}{2}.$$

Računamo x.

$$\left.\begin{array}{l} x+y=0 \\ y=\frac{1}{2} \end{array}\right\} \Rightarrow x+\frac{1}{2}=0 \Rightarrow x=-\frac{1}{2}.$$

Rješenje iznosi:

$$(x,\ y)=\left(-\frac{1}{2},\ \frac{1}{2}\right).$$

Vježba 164

Odredi realne brojeve x i y iz jednakosti $\frac{y\cdot i}{1+i}-\frac{x\cdot i}{-1+i}=\frac{1}{2}.$

Rezultat: $(x,\ y)=\left(-\frac{1}{2},\ \frac{1}{2}\right).$

Zadatak 165 (Lajlica, gimnazija)

Provjerite jednakost: $\left(\frac{-1+i\cdot\sqrt{3}}{2}\right)^4+\left(\frac{-1-i\cdot\sqrt{3}}{2}\right)^4=-1.$

Rješenje 165

Ponovimo!

Kompleksan broj je broj oblika

$$z=x+y\cdot i,$$

gdje su x i y realni brojevi, a i imaginarna jedinica. Broj x zove se realni dio kompleksnog broja z, a broj y imaginarni dio kompleksnog broja z. Pišemo:

$$x=\operatorname{Re} z \quad , \quad y=\operatorname{Im} z.$$

Standardni ili algebarski oblik kompleksnog broja je oblika

$$z=x+y\cdot i,$$

gdje su x i y realni brojevi.

$$\left(\frac{a}{b}\right)^n=\frac{a^n}{b^n} \quad , \quad \left(a^n\right)^m=a^{n\cdot m} \quad , \quad \frac{a}{n}+\frac{b}{n}=\frac{a+b}{n} \quad , \quad (-a+b)^2=(a-b)^2.$$

$$(-a-b)^2=(a+b)^2 \quad , \quad (a-b)^2=a^2-2\cdot a\cdot b+b^2 \quad , \quad (a+b)^2=a^2+2\cdot a\cdot b+b^2.$$

$$(a\cdot b)^n=a^n\cdot b^n \quad , \quad i^2=-1 \quad , \quad \left(\sqrt{a}\right)^2=a.$$

Zakon distribucije množenja prema zbrajanju.

$$a\cdot(b+c)=a\cdot b+a\cdot c \quad , \quad a\cdot b+a\cdot c=a\cdot(b+c).$$

Skratiti razlomak znači brojnik i nazivnik tog razlomka podijeliti istim brojem različitim od nule i jedinice

$$\frac{a\cdot n}{b\cdot n}=\frac{a}{b} \ , \ n\neq 0 \ , \ n\neq 1.$$

$$\left(\frac{-1+i\cdot\sqrt{3}}{2}\right)^4+\left(\frac{-1-i\cdot\sqrt{3}}{2}\right)^4=\frac{\left(-1+i\cdot\sqrt{3}\right)^4}{2^4}+\frac{\left(-1-i\cdot\sqrt{3}\right)^4}{2^4}=$$

$$=\frac{\left(\left(-1+i\cdot\sqrt{3}\right)^2\right)^2}{16}+\frac{\left(\left(-1-i\cdot\sqrt{3}\right)^2\right)^2}{16}=\left[\begin{array}{l}(-a+b)^2=(a-b)^2\\(-a-b)^2=(a+b)^2\end{array}\right]=$$

$$=\frac{\left(\left(1-i\cdot\sqrt{3}\right)^2\right)^2}{16}+\frac{\left(\left(1+i\cdot\sqrt{3}\right)^2\right)^2}{16}=\frac{\left(\left(1-i\cdot\sqrt{3}\right)^2\right)^2+\left(\left(1+i\cdot\sqrt{3}\right)^2\right)^2}{16}=$$

$$=\frac{\left(1-2\cdot 1\cdot i\cdot\sqrt{3}+\left(i\cdot\sqrt{3}\right)^2\right)^2+\left(1+2\cdot 1\cdot i\cdot\sqrt{3}+\left(i\cdot\sqrt{3}\right)^2\right)^2}{16}=$$

$$=\frac{\left(1-2\cdot i\cdot\sqrt{3}+i^2\cdot\left(\sqrt{3}\right)^2\right)^2+\left(1+2\cdot i\cdot\sqrt{3}+i^2\cdot\left(\sqrt{3}\right)^2\right)^2}{16}=$$

$$=\frac{\left(1-2\cdot i\cdot\sqrt{3}+(-1)\cdot 3\right)^2+\left(1+2\cdot i\cdot\sqrt{3}+(-1)\cdot 3\right)^2}{16}=\frac{\left(1-2\cdot i\cdot\sqrt{3}-3\right)^2+\left(1+2\cdot i\cdot\sqrt{3}-3\right)^2}{16}=$$

$$=\frac{\left(-2-2\cdot i\cdot\sqrt{3}\right)^2+\left(-2+2\cdot i\cdot\sqrt{3}\right)^2}{16}=\left[\begin{array}{l}(-a-b)^2=(a+b)^2\\(-a+b)^2=(a-b)^2\end{array}\right]=$$

$$=\frac{\left(2+2\cdot i\cdot\sqrt{3}\right)^2+\left(2-2\cdot i\cdot\sqrt{3}\right)^2}{16}=\frac{\left(2\cdot\left(1+i\cdot\sqrt{3}\right)\right)^2+\left(2\cdot\left(1-i\cdot\sqrt{3}\right)\right)^2}{16}=$$

$$=\frac{2^2\cdot\left(1+i\cdot\sqrt{3}\right)^2+2^2\cdot\left(1-i\cdot\sqrt{3}\right)^2}{16}=\frac{4\cdot\left(1+i\cdot\sqrt{3}\right)^2+4\cdot\left(1-i\cdot\sqrt{3}\right)^2}{16}=$$

$$=\frac{4\cdot\left(\left(1+i\cdot\sqrt{3}\right)^2+\left(1-i\cdot\sqrt{3}\right)^2\right)}{16}=\frac{4\cdot\left(\left(1+i\cdot\sqrt{3}\right)^2+\left(1-i\cdot\sqrt{3}\right)^2\right)}{16}=\frac{\left(1+i\cdot\sqrt{3}\right)^2+\left(1-i\cdot\sqrt{3}\right)^2}{4}=$$

$$=\frac{1+2\cdot 1\cdot i\cdot\sqrt{3}+\left(i\cdot\sqrt{3}\right)^2+1-2\cdot 1\cdot i\cdot\sqrt{3}+\left(i\cdot\sqrt{3}\right)^2}{4}=$$

$$=\frac{1+2\cdot i\cdot\sqrt{3}+i^2\cdot\left(\sqrt{3}\right)^2+1-2\cdot i\cdot\sqrt{3}+i^2\cdot\left(\sqrt{3}\right)^2}{4}=$$

$$=\frac{1+2\cdot i\cdot\sqrt{3}+(-1)\cdot 3+1-2\cdot i\cdot\sqrt{3}+(-1)\cdot 3}{4}=\frac{1+2\cdot i\cdot\sqrt{3}-3+1-2\cdot i\cdot\sqrt{3}-3}{4}=$$

$$=\frac{1+2\cdot i\cdot\sqrt{3}-3+1-2\cdot i\cdot\sqrt{3}-3}{4}=\frac{1-3+1-3}{4}=\frac{-4}{4}=-\frac{4}{4}=-1.$$

Vježba 165

Provjerite jednakost: $\left(\frac{i\cdot\sqrt{3}-1}{2}\right)^4+\left(\frac{i\cdot\sqrt{3}+1}{2}\right)^4=-1.$

Rezultat: Točna je.

Zadatak 166 (Pavle, srednja škola)

Zadano je $z=(x+i)\cdot(a+b\cdot i);\ x,\ a,\ b\in R.$ Izračunaj vrijednost izraza $x_1 \cdot x_2$ ako je x_1 vrijednost od x za koju je z realan broj, a za x_2 z je imaginaran broj.

Rješenje 166

Ponovimo!

Kompleksan broj je broj oblika

$$z=x+y\cdot i,$$

gdje su x i y realni brojevi, a i imaginarna jedinica. Broj x zove se realni dio kompleksnog broja z, a broj y imaginarni dio kompleksnog broja z. Pišemo:

$$x=\operatorname{Re} z \quad , \quad y=\operatorname{Im} z.$$

Standardni ili algebarski oblik kompleksnog broja je oblika

$$z=x+y\cdot i,$$

gdje su x i y realni brojevi, i je imaginarna jedinica.

$$z=x+y\cdot i \Rightarrow \left.\begin{array}{l} y=0 \Rightarrow z=x - \text{realan broj} \\ x=0 \Rightarrow z=y\cdot i - \text{imaginaran broj}\end{array}\right\} \quad , \quad i^2=-1.$$

Množenje zagrada

$$(a+b)\cdot(c+d)=a\cdot c+a\cdot d+b\cdot c+b\cdot d.$$

Imaginaran broj

Umnožak y · i realnog broja y i imaginarne jedinice i zovemo imaginarnim brojem.

Skratiti razlomak znači brojnik i nazivnik tog razlomka podijeliti istim brojem različitim od nule i jedinice

$$\frac{a\cdot n}{b\cdot n}=\frac{a}{b} \ , \ n\neq 0 \ , \ n\neq 1.$$

Preoblikujemo kompleksan broj z.

$$z=(x+i)\cdot(a+b\cdot i) \Rightarrow z=x\cdot a+x\cdot b\cdot i+a\cdot i+b\cdot i^2 \Rightarrow z=x\cdot a+x\cdot b\cdot i+a\cdot i+b\cdot(-1) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow z=x\cdot a+x\cdot b\cdot i+a\cdot i-b \Rightarrow z=(x\cdot a-b)+(x\cdot b+a)\cdot i \Rightarrow \left.\begin{array}{l}\operatorname{Re}(z)=x\cdot a-b \\ \operatorname{Re}(z)=x\cdot b+a\end{array}\right\}.$$

Da bi z bio realan broj njegov imaginaran dio mora biti jednak nuli.

$$x\cdot b+a=0 \Rightarrow x\cdot b=-a \Rightarrow x\cdot b=-a \ /\cdot\frac{1}{b} \Rightarrow x_1=-\frac{a}{b}.$$

Da bi z bio imaginaran broj njegov realan dio mora biti jednak nuli.

$$x\cdot a-b=0 \Rightarrow x\cdot a=b \Rightarrow x\cdot a=b \ /\cdot\frac{1}{a} \Rightarrow x_2=\frac{b}{a}.$$

Tada je:

$$x_1\cdot x_2=-\frac{a}{b}\cdot\frac{b}{a} \Rightarrow x_1\cdot x_2=-\frac{a}{b}\cdot\frac{b}{a} \Rightarrow x_1\cdot x_2=-1.$$

Vježba 166

Zadano je $z=(x+i)\cdot(m+n\cdot i);\ x,\ m,\ n\in R.$ Izračunaj vrijednost izraza $x_1 \cdot x_2$ ako je x_1 vrijednost od x za koju je z realan broj, a za x_2 z je imaginaran broj.

Rezultat: – 1.

Zadatak 167 (Ivan, tehnička škola)

Imaginarni dio kompleksnog broja $z = \left(\frac{1-i}{1+i}\right)^2$ je:

$A.\ 1 \qquad B.\ 0 \qquad C.\ -1 \qquad D.\ 2$

Rješenje 167

Ponovimo!

Kompleksan broj je broj oblika

$$z = x + y \cdot i,$$

gdje su x i y realni brojevi, a i imaginarna jedinica. Broj x zove se realni dio kompleksnog broja z, a broj y imaginarni dio kompleksnog broja z. Pišemo:

$$x = \operatorname{Re} z \quad , \quad y = \operatorname{Im} z.$$

Standardni ili algebarski oblik kompleksnog broja je oblika

$$z = x + y \cdot i,$$

gdje su x i y realni brojevi, i je imaginarna jedinica.

Za kompleksne brojeve $x + y \cdot i$ i $x - y \cdot i$ kažemo da su kompleksno konjugirani jedan drugome. Simbol konjugiranja jest povlaka iznad broja koji se konjugira:

$$z = x + y \cdot i \Rightarrow \bar{z} = x - y \cdot i.$$

Umnožak dvaju konjugirano kompleksnih brojeva realan je broj i nenegativan broj:

$$(x + y \cdot i) \cdot (x - y \cdot i) = x^2 + y^2.$$

$$(a-b)^2 = a^2 - 2 \cdot a \cdot b + b^2 \quad , \quad i^2 = -1 \quad , \quad \left(\frac{a}{b}\right)^n = \frac{a^n}{b^n} \quad , \quad (a+b)^2 = a^2 + 2 \cdot a \cdot b + b^2.$$

Skratiti razlomak znači brojnik i nazivnik tog razlomka podijeliti istim brojem različitim od nule i jedinice

$$\frac{a \cdot n}{b \cdot n} = \frac{a}{b} \ , \ n \neq 0 \ , \ n \neq 1.$$

1.inačica

$$z = \left(\frac{1-i}{1+i}\right)^2 = \left(\frac{1-i}{1+i} \cdot \frac{1-i}{1-i}\right)^2 = \left(\frac{(1-i)^2}{(1+i) \cdot (1-i)}\right)^2 = \left(\frac{1 - 2 \cdot i + i^2}{1^2 + 1^2}\right)^2 = \left(\frac{1 - 2 \cdot i - 1}{1+1}\right)^2 =$$

$$= \left(\frac{1 - 2 \cdot i - 1}{2}\right)^2 = \left(\frac{-2 \cdot i}{2}\right)^2 = \left(\frac{-2 \cdot i}{2}\right)^2 = (-i)^2 = i^2 = -1.$$

Sada je:

$$z = -1 \Rightarrow z = -1 + 0 \cdot i \Rightarrow \operatorname{Im}(z) = 0.$$

Odgovor je pod B.

2.inačica

$$z = \left(\frac{1-i}{1+i}\right)^2 = \frac{(1-i)^2}{(1+i)^2} = \frac{1 - 2 \cdot i + i^2}{1 + 2 \cdot i + i^2} = \frac{1 - 2 \cdot i - 1}{1 + 2 \cdot i - 1} = \frac{1 - 2 \cdot i - 1}{1 + 2 \cdot i - 1} = \frac{-2 \cdot i}{2 \cdot i} = \frac{-2 \cdot i}{2 \cdot i} = -1.$$

Sada je:

$$z = -1 \Rightarrow z = -1 + 0 \cdot i \Rightarrow \operatorname{Im}(z) = 0.$$

Odgovor je pod B.

Vježba 167

Realni dio kompleksnog broja $z=\left(\frac{1-i}{1+i}\right)^2$ je:

$A.\ 1 \qquad B.\ 0 \qquad C.\ -1 \qquad D.\ 2$

Rezultat: C.

Zadatak 168 (Tomislav, maturant)

Ako za kompleksne brojeve z_1, z_2 i z_3 vrijedi $|z_1|=|z_2|=|z_3|=1$ tada je

$|z_1\cdot z_2+z_2\cdot z_3+z_3\cdot z_1|=|z_1+z_2+z_3|$. Dokaži!

Rješenje 168

Ponovimo!

$$\frac{a}{b}\cdot\frac{c}{d}=\frac{a\cdot c}{b\cdot d} \quad , \quad |z_1\cdot z_2|=|z_1|\cdot|z_2| \quad , \quad z\cdot\overline{z}=|z|^2 \quad , \quad \overline{z_1+z_2}=\overline{z_1}+\overline{z_2}.$$

$$|\overline{z}|=|z| \quad , \quad \frac{n}{1}=n.$$

Zakon distribucije množenja prema zbrajanju.

$$a\cdot(b+c)=a\cdot b+a\cdot c \quad , \quad a\cdot b+a\cdot c=a\cdot(b+c).$$

Proširiti razlomak znači brojnik i nazivnik tog razlomka pomnožiti istim brojem različitim od nule i jedinice

$$\frac{a}{b}=\frac{a\cdot n}{b\cdot n} \ , \ n\neq 0, \ n\neq 1.$$

$$|z_1\cdot z_2+z_2\cdot z_3+z_3\cdot z_1|=\left|z_1\cdot z_2\cdot z_3\cdot\left(\frac{1}{z_3}+\frac{1}{z_1}+\frac{1}{z_2}\right)\right|=|z_1\cdot z_2\cdot z_3|\cdot\left|\frac{1}{z_1}+\frac{1}{z_2}+\frac{1}{z_3}\right|=$$

$$=|z_1|\cdot|z_2|\cdot|z_3|\cdot\left|\frac{1}{z_1}+\frac{1}{z_2}+\frac{1}{z_3}\right|=1\cdot 1\cdot 1\cdot\left|\frac{1}{z_1}+\frac{1}{z_2}+\frac{1}{z_3}\right|=\left|\frac{1}{z_1}+\frac{1}{z_2}+\frac{1}{z_3}\right|=$$

$$=\left|\frac{1}{z_1}\cdot\frac{\overline{z_1}}{\overline{z_1}}+\frac{1}{z_2}\cdot\frac{\overline{z_2}}{\overline{z_2}}+\frac{1}{z_3}\cdot\frac{\overline{z_3}}{\overline{z_3}}\right|=\left|\frac{\overline{z_1}}{z_1\cdot\overline{z_1}}+\frac{\overline{z_2}}{z_2\cdot\overline{z_2}}+\frac{\overline{z_3}}{z_3\cdot\overline{z_3}}\right|=\left|\frac{\overline{z_1}}{|z_1|^2}+\frac{\overline{z_2}}{|z_2|^2}+\frac{\overline{z_3}}{|z_3|^2}\right|=$$

$$=\left[\,|z_1|=|z_2|=|z_3|=1\,\right]=$$

$$=\left|\frac{\overline{z_1}}{1^2}+\frac{\overline{z_2}}{1^2}+\frac{\overline{z_3}}{1^2}\right|=|\overline{z_1}+\overline{z_2}+\overline{z_3}|=|\overline{z_1+z_2+z_3}|=|z_1+z_2+z_3|.$$ Dokaz gotov.

Vježba 168

Ako za kompleksne brojeve z_1, z_2 i z_3 vrijedi $\frac{1}{|z_1|}=\frac{1}{|z_2|}=\frac{1}{|z_3|}=1$ tada je

$|z_1\cdot z_2+z_2\cdot z_3+z_3\cdot z_1|=|z_1+z_2+z_3|$. Dokaži!

Rezultat: Dokaz analogan.

Zadatak 169 (Matea, gimnazija)

Kompleksni broj z jedno je rješenje jednadžbe $z^2 - z + 1 = 0.$ Tada je:

$$A.\ z^{12} = -1 \qquad B.\ z^{12} = 1 - i \qquad C.\ z^{12} = i \qquad D.\ z^{12} = 1$$

Rješenje 169

Ponovimo!

$$\left(a^n\right)^m = a^{n\cdot m} \quad , \quad (a-b)^2 = a^2 - 2\cdot a\cdot b + b^2 \quad , \quad a^n \cdot a^m = a^{n+m} \quad , \quad a^1 = a.$$

Zakon distribucije množenja prema zbrajanju.

$$a\cdot(b+c) = a\cdot b + a\cdot c \quad , \quad a\cdot b + a\cdot c = a\cdot(b+c).$$

$$z^{12} = \left(z^2\right)^6 = \left[\begin{array}{l} z^2 - z + 1 = 0 \\ z^2 = z - 1 \end{array}\right] = (z-1)^6 = \left((z-1)^2\right)^3 = \left(z^2 - 2\cdot z + 1\right)^3 = \left(z^2 - z + 1 - z\right)^3 =$$

$$= \left(\left(z^2 - z + 1\right) - z\right)^3 = \left[z^2 - z + 1 = 0\right] = (0 - z)^3 = (-z)^3 = -z^3 = -z^2 \cdot z =$$

$$= \left[\begin{array}{l} z^2 - z + 1 = 0 \\ z^2 = z - 1 \end{array}\right] = -(z-1)\cdot z = -\left(z^2 - z\right) = \left[\begin{array}{l} z^2 - z + 1 = 0 \\ z^2 - z = -1 \end{array}\right] = -(-1) = 1.$$

Odgovor je pod D.

Vježba 169

Kompleksni broj z jedno je rješenje jednadžbe $(z-1)^2 + z = 0.$ Tada je:

$$A.\ z^{12} = -1 \qquad B.\ z^{12} = 1 - i \qquad C.\ z^{12} = i \qquad D.\ z^{12} = 1$$

Rezultat: D.

Zadatak 170 (Tonka, gimnazija)

Odredi realni i imaginarni dio kompleksnog broja z, ako je:

1) $z = 9 + 5\cdot i$ 2) $z = -2 + 4\cdot i$ 3) $z = 4 - 3\cdot i$

4) $z = -7 - 2\cdot i$ 5) $z = -8 + \frac{1}{2}\cdot i$ 6) $z = \sqrt{5} - 0.01\cdot i$

7) $z = -7 - \frac{40}{3}\cdot i$ 8) $z = -\frac{1}{3} + \frac{\sqrt{3}}{2}\cdot i$ 9) $z = 1 + i$

10) $z = 1 - i$ 11) $z = -1 + i$ 12) $z = -1 - i$

13) $z = -\frac{7}{3} - i$ 14) $z = 1 - \sqrt{2} - i\cdot\sqrt{3}$ 15) $z = -0.5 - 0.3\cdot i$

16) $z = \frac{\sqrt{5}}{4} - 7.25\cdot i$ 17) $z = -3.2 - \frac{\pi}{2}\cdot i$ 18) $z = \frac{3\cdot\sqrt{2}}{2} - \frac{4\cdot\sqrt{3}}{5}\cdot i$

19) $z = \frac{2 - 3\cdot i}{5}$ 20) $z = \frac{4 - 10\cdot i}{2}$ 21) $z = 2 + \sqrt{3} + \left(1 - \sqrt{3}\right)\cdot i$

22) $z = 2 - \sqrt{3} - \left(1 + \sqrt{2}\right)\cdot i$ 23) $z = 2 - \sqrt{7} - i\cdot\sqrt{3} + 2\cdot i$ 24) $z = 7 - 4\cdot i - 3\cdot i\cdot\sqrt{2}$

25) $z = \frac{1}{2} - \left(\frac{5}{3} - \sqrt{2}\right)\cdot i$ 26) $z = 5\cdot i - \sqrt{5}$ 27) $z = -2\cdot i + \frac{7}{3}$

28) $z=\frac{2}{3}+2\cdot i\cdot\sqrt{2}-7\cdot i$ 29) $z=\frac{1+\sqrt{3}-i\cdot\sqrt{5}}{2}$ 30) $z=\frac{1+\sqrt{2}+i}{3}$

31) $z=\frac{1-i}{3}$ 32) $z=\frac{1-\left(1-\sqrt{3}\right)\cdot i}{11}$ 33) $z=-1$

34) $z=-\frac{2\cdot\sqrt{3}}{7}$ 35) $z=\frac{4+\sqrt{2}}{3}$ 36) $z=7.3$

37) $z=\frac{3}{4}\cdot\pi$ 38) $z=2\cdot i-i\cdot\sqrt{3}$ 39) $z=i$

40) $z=-i$ 41) $z=-\frac{1}{2}\cdot i$ 42) $z=-\frac{0.3+\sqrt{2}}{4}\cdot i$

43) $z=-i\cdot\sqrt{7}$ 44) $z=\pi\cdot i$ 45) $z=-7\cdot i$

46) $z=0$ 47) $z=\frac{1+2\cdot i-\sqrt{2}}{3}$ 48) $z=\frac{5-3\cdot\left(1+\sqrt{2}\right)\cdot i}{9}$

Rješenje 170

Ponovimo!

$$\frac{a+b}{n}=\frac{a}{n}+\frac{b}{n} \quad , \quad \frac{a-b}{n}=\frac{a}{n}-\frac{b}{n}.$$

Zakon distribucije množenja prema zbrajanju.

$$a\cdot(b+c)=a\cdot b+a\cdot c \quad , \quad a\cdot b+a\cdot c=a\cdot(b+c).$$

Kompleksan broj je broj oblika

$$z=x+y\cdot i,$$

gdje su x i y realni brojevi, a i imaginarna jedinica. Broj x zove se realni dio kompleksnog broja z, a broj y imaginarni dio kompleksnog broja z. Pišemo:

$$x=\operatorname{Re} z \quad , \quad y=\operatorname{Im} z.$$

Standardni ili algebarski oblik kompleksnog broja je oblika

$$z=x+y\cdot i,$$

gdje su x i y realni brojevi.

1) $z=9+5\cdot i \Rightarrow \left[z=9+5\cdot i\right] \Rightarrow \left.\begin{matrix}\operatorname{Re} z=9\\ \operatorname{Im} z=5\end{matrix}\right\}.$

2) $z=-2+4\cdot i \Rightarrow \left[z=-2+4\cdot i\right] \Rightarrow \left.\begin{matrix}\operatorname{Re} z=-2\\ \operatorname{Im} z=4\end{matrix}\right\}.$

3) $z=4-3\cdot i \Rightarrow \left[z=4-3\cdot i\right] \Rightarrow \left.\begin{matrix}\operatorname{Re} z=4\\ \operatorname{Im} z=-3\end{matrix}\right\}.$

4) $z=-7-2\cdot i \Rightarrow \left[z=-7-2\cdot i\right] \Rightarrow \left.\begin{matrix}\operatorname{Re} z=-7\\ \operatorname{Im} z=-2\end{matrix}\right\}.$

5) $z=-8+\frac{1}{2}\cdot i \Rightarrow \left[z=-8+\frac{1}{2}\cdot i\right] \Rightarrow \left.\begin{matrix}\operatorname{Re} z=-8\\ \operatorname{Im} z=\frac{1}{2}\end{matrix}\right\}.$

6) $z=\sqrt{5}-0.01\cdot i \Rightarrow \left[z=\sqrt{5}-0.01\cdot i\right] \Rightarrow \left.\begin{matrix}\operatorname{Re} z=\sqrt{5}\\ \operatorname{Im} z=0.01\end{matrix}\right\}.$

7) $z=-7-\frac{40}{3}\cdot i \Rightarrow \left[\, z=-7-\frac{40}{3}\cdot i \,\right] \Rightarrow \left.\begin{matrix} \operatorname{Re} z=-7 \\ \operatorname{Im} z=-\frac{40}{3} \end{matrix}\right\}.$

8) $z=-\frac{1}{3}+\frac{\sqrt{3}}{2}\cdot i \Rightarrow \left[\, z=-\frac{1}{3}+\frac{\sqrt{3}}{2}\cdot i \,\right] \Rightarrow \left.\begin{matrix} \operatorname{Re} z=-\frac{1}{3} \\ \operatorname{Im} z=\frac{\sqrt{3}}{2} \end{matrix}\right\}.$

9) $z=1+i \Rightarrow \left[\, z=1+1\cdot i \,\right] \Rightarrow \left.\begin{matrix} \operatorname{Re} z=1 \\ \operatorname{Im} z=1 \end{matrix}\right\}.$

10) $z=1-i \Rightarrow \left[\, z=1-1\cdot i \,\right] \Rightarrow \left.\begin{matrix} \operatorname{Re} z=1 \\ \operatorname{Im} z=-1 \end{matrix}\right\}.$

11) $z=-1+i \Rightarrow \left[\, z=-1+1\cdot i \,\right] \Rightarrow \left.\begin{matrix} \operatorname{Re} z=-1 \\ \operatorname{Im} z=1 \end{matrix}\right\}.$

12) $z=-1-i \Rightarrow \left[\, z=-1-1\cdot i \,\right] \Rightarrow \left.\begin{matrix} \operatorname{Re} z=-1 \\ \operatorname{Im} z=-1 \end{matrix}\right\}.$

13) $z=-\frac{7}{3}-i \Rightarrow \left[\, z=-\frac{7}{3}-1\cdot i \,\right] \Rightarrow \left.\begin{matrix} \operatorname{Re} z=-\frac{7}{3} \\ \operatorname{Im} z=-1 \end{matrix}\right\}.$

14) $z=1-\sqrt{2}-i\cdot\sqrt{3} \Rightarrow \left[\, z=1-\sqrt{2}-\sqrt{3}\cdot i \,\right] \Rightarrow \left.\begin{matrix} \operatorname{Re} z=1-\sqrt{2} \\ \operatorname{Im} z=-\sqrt{3} \end{matrix}\right\}.$

15) $z=-0.5-0.3\cdot i \Rightarrow \left[\, z=-0.5-0.3\cdot i \,\right] \Rightarrow \left.\begin{matrix} \operatorname{Re} z=-0.5 \\ \operatorname{Im} z=-0.3 \end{matrix}\right\}.$

16) $z=\frac{\sqrt{5}}{4}-7.25\cdot i \Rightarrow \left[\, z=\frac{\sqrt{5}}{4}-7.25\cdot i \,\right] \Rightarrow \left.\begin{matrix} \operatorname{Re} z=\frac{\sqrt{5}}{4} \\ \operatorname{Im} z=-7.25 \end{matrix}\right\}.$

17) $z=-3.2-\frac{\pi}{2}\cdot i \Rightarrow \left[\, z=-3.2-\frac{\pi}{2}\cdot i \,\right] \Rightarrow \left.\begin{matrix} \operatorname{Re} z=-3.2 \\ \operatorname{Im} z=-\frac{\pi}{2} \end{matrix}\right\}.$

18) $z=\frac{3\cdot\sqrt{2}}{2}-\frac{4\cdot\sqrt{3}}{5}\cdot i \Rightarrow \left[\, z=\frac{3\cdot\sqrt{2}}{2}-\frac{4\cdot\sqrt{3}}{5}\cdot i \,\right] \Rightarrow \left.\begin{matrix} \operatorname{Re} z=\frac{3\cdot\sqrt{2}}{2} \\ \operatorname{Im} z=-\frac{4\cdot\sqrt{3}}{5} \end{matrix}\right\}.$

19) $z=\frac{2-3\cdot i}{5} \Rightarrow \left[\, z=\frac{2}{5}-\frac{3}{5}\cdot i \,\right] \Rightarrow \left.\begin{matrix} \operatorname{Re} z=\frac{2}{5} \\ \operatorname{Im} z=-\frac{3}{5} \end{matrix}\right\}.$

20) $z=\frac{4-10\cdot i}{2} \Rightarrow \left[\, z=\frac{4}{2}-\frac{10}{2}\cdot i=2-5\cdot i \,\right] \Rightarrow \left.\begin{matrix} \operatorname{Re} z=2 \\ \operatorname{Im} z=-5 \end{matrix}\right\}.$

21) $z=2+\sqrt{3}+\left(1-\sqrt{3}\right)\cdot i \Rightarrow \left[\, z=2+\sqrt{3}+\left(1-\sqrt{3}\right)\cdot i \,\right] \Rightarrow \left.\begin{matrix} \operatorname{Re} z=2+\sqrt{3} \\ \operatorname{Im} z=1-\sqrt{3} \end{matrix}\right\}.$

22) $z=2-\sqrt{3}-\left(1+\sqrt{2}\right)\cdot i \Rightarrow \left[\, z=2-\sqrt{3}-\left(1+\sqrt{2}\right)\cdot i \,\right] \Rightarrow \left.\begin{matrix} \operatorname{Re} z=2-\sqrt{3} \\ \operatorname{Im} z=-\left(1+\sqrt{2}\right) \end{matrix}\right\}.$

23) $z=2-\sqrt{7}-i\cdot\sqrt{3}+2\cdot i \Rightarrow \left[\, z=2-\sqrt{7}+\left(2-\sqrt{3}\right)\cdot i \,\right] \Rightarrow \left.\begin{matrix} \operatorname{Re} z=2-\sqrt{7} \\ \operatorname{Im} z=2-\sqrt{3} \end{matrix}\right\}.$

24) $z=7-4\cdot i-3\cdot i\cdot\sqrt{2} \Rightarrow \left[\, z=7-\left(4+3\cdot\sqrt{2}\right)\cdot i \,\right] \Rightarrow \left.\begin{matrix} \operatorname{Re} z=7 \\ \operatorname{Im} z=-\left(4+3\cdot\sqrt{2}\right) \end{matrix}\right\}.$

25) $z=\frac{1}{2}-\left(\frac{5}{3}-\sqrt{2}\right)\cdot i \Rightarrow \left[\, z=\frac{1}{2}-\left(\frac{5}{3}-\sqrt{2}\right)\cdot i \,\right] \Rightarrow \left.\begin{matrix} \operatorname{Re} z=\frac{1}{2} \\ \operatorname{Im} z=-\left(\frac{5}{3}-\sqrt{2}\right) \end{matrix}\right\}.$

26) $z=5\cdot i-\sqrt{5} \Rightarrow \left[\, z=-\sqrt{5}+5\cdot i \,\right] \Rightarrow \left.\begin{matrix} \operatorname{Re} z=-\sqrt{5} \\ \operatorname{Im} z=5 \end{matrix}\right\}.$

27) $z=-2\cdot i+\frac{7}{3} \Rightarrow \left[\, z=\frac{7}{3}-2\cdot i \,\right] \Rightarrow \left.\begin{matrix} \operatorname{Re} z=\frac{7}{3} \\ \operatorname{Im} z=-2 \end{matrix}\right\}.$

28) $z=\frac{2}{3}+2\cdot i\cdot\sqrt{2}-7\cdot i \Rightarrow \left[\, z=\frac{2}{3}+\left(2\cdot\sqrt{2}-7\right)\cdot i \,\right] \Rightarrow \left.\begin{matrix} \operatorname{Re} z=\frac{2}{3} \\ \operatorname{Im} z=2\cdot\sqrt{2}-7 \end{matrix}\right\}.$

29) $z=\frac{1+\sqrt{3}-i\cdot\sqrt{5}}{2} \Rightarrow \left[\, z=\frac{1+\sqrt{3}}{2}-\frac{\sqrt{5}}{2}\cdot i \,\right] \Rightarrow \left.\begin{matrix} \operatorname{Re} z=\frac{1+\sqrt{3}}{2} \\ \operatorname{Im} z=-\frac{\sqrt{5}}{2} \end{matrix}\right\}.$

30) $z=\frac{1+\sqrt{2}+i}{3} \Rightarrow \left[\, z=\frac{1+\sqrt{2}}{3}+\frac{1}{3}\cdot i \,\right] \Rightarrow \left.\begin{matrix} \operatorname{Re} z=\frac{1+\sqrt{2}}{3} \\ \operatorname{Im} z=\frac{1}{3} \end{matrix}\right\}.$

31) $z=\frac{1-i}{3} \Rightarrow \left[\, z=\frac{1}{3}-\frac{1}{3}\cdot i \,\right] \Rightarrow \left.\begin{matrix} \operatorname{Re} z=\frac{1}{3} \\ \operatorname{Im} z=-\frac{1}{3} \end{matrix}\right\}.$

32) $z=\frac{1-\left(1-\sqrt{3}\right)\cdot i}{11} \Rightarrow \left[\, z=\frac{1}{11}-\frac{1-\sqrt{3}}{11}\cdot i \,\right] \Rightarrow \left.\begin{matrix} \operatorname{Re} z=\frac{1}{11} \\ \operatorname{Im} z=-\frac{1-\sqrt{3}}{11} \end{matrix}\right\}.$

33) $z=-1 \Rightarrow \left[\, z=-1+0\cdot i \,\right] \Rightarrow \left.\begin{matrix} \operatorname{Re} z=-1 \\ \operatorname{Im} z=0 \end{matrix}\right\}.$

34) $z=-\dfrac{2\cdot\sqrt{3}}{7} \Rightarrow \left[z=-\dfrac{2\cdot\sqrt{3}}{7}+0\cdot i \right] \Rightarrow \left.\begin{array}{l} \operatorname{Re} z=-\dfrac{2\cdot\sqrt{3}}{7} \\ \operatorname{Im} z=0 \end{array}\right\}.$

35) $z=\dfrac{4+\sqrt{2}}{3} \Rightarrow \left[z=\dfrac{4+\sqrt{2}}{3}+0\cdot i \right] \Rightarrow \left.\begin{array}{l} \operatorname{Re} z=\dfrac{4+\sqrt{2}}{3} \\ \operatorname{Im} z=0 \end{array}\right\}.$

36) $z=7.3 \Rightarrow \left[z=7.3+0\cdot i \right] \Rightarrow \left.\begin{array}{l} \operatorname{Re} z=7.3 \\ \operatorname{Im} z=0 \end{array}\right\}.$

37) $z=\dfrac{3}{4}\cdot\pi \Rightarrow \left[z=\dfrac{3}{4}\cdot\pi+0\cdot i \right] \Rightarrow \left.\begin{array}{l} \operatorname{Re} z=\dfrac{3}{4}\cdot\pi \\ \operatorname{Im} z=0 \end{array}\right\}.$

38) $z=2\cdot i-i\cdot\sqrt{3} \Rightarrow \left[z=0+\left(2-\sqrt{3}\right)\cdot i \right] \Rightarrow \left.\begin{array}{l} \operatorname{Re} z=0 \\ \operatorname{Im} z=2-\sqrt{3} \end{array}\right\}.$

39) $z=i \Rightarrow \left[z=0+1\cdot i \right] \Rightarrow \left.\begin{array}{l} \operatorname{Re} z=0 \\ \operatorname{Im} z=1 \end{array}\right\}.$

40) $z=-i \Rightarrow \left[z=0-1\cdot i \right] \Rightarrow \left.\begin{array}{l} \operatorname{Re} z=0 \\ \operatorname{Im} z=-1 \end{array}\right\}.$

41) $z=-\dfrac{1}{2}\cdot i \Rightarrow \left[z=0-\dfrac{1}{2}\cdot i \right] \Rightarrow \left.\begin{array}{l} \operatorname{Re} z=0 \\ \operatorname{Im} z=-\dfrac{1}{2} \end{array}\right\}.$

42) $z=-\dfrac{0.3+\sqrt{2}}{4}\cdot i \Rightarrow \left[z=0-\dfrac{0.3+\sqrt{2}}{4}\cdot i \right] \Rightarrow \left.\begin{array}{l} \operatorname{Re} z=0 \\ \operatorname{Im} z=-\dfrac{0.3+\sqrt{2}}{4} \end{array}\right\}.$

43) $z=-i\cdot\sqrt{7} \Rightarrow \left[z=0-\sqrt{7}\cdot i \right] \Rightarrow \left.\begin{array}{l} \operatorname{Re} z=0 \\ \operatorname{Im} z=-\sqrt{7} \end{array}\right\}.$

44) $z=\pi\cdot i \Rightarrow \left[z=0+\pi\cdot i \right] \Rightarrow \left.\begin{array}{l} \operatorname{Re} z=0 \\ \operatorname{Im} z=\pi \end{array}\right\}.$

45) $z=-7\cdot i \Rightarrow \left[z=0-7\cdot i \right] \Rightarrow \left.\begin{array}{l} \operatorname{Re} z=0 \\ \operatorname{Im} z=-7 \end{array}\right\}.$

46) $z=0 \Rightarrow \left[z=0+0\cdot i \right] \Rightarrow \left.\begin{array}{l} \operatorname{Re} z=0 \\ \operatorname{Im} z=0 \end{array}\right\}.$

47) $z=\dfrac{1+2\cdot i-\sqrt{2}}{3} \Rightarrow \left[z=\dfrac{1-\sqrt{2}}{3}+\dfrac{2}{3}\cdot i \right] \Rightarrow \left.\begin{array}{l} \operatorname{Re} z=\dfrac{1-\sqrt{2}}{3} \\ \operatorname{Im} z=\dfrac{2}{3} \end{array}\right\}.$

48) $z=\dfrac{5-3\cdot\left(1+\sqrt{2}\right)\cdot i}{9} \Rightarrow \left[z=\dfrac{5}{9}-\dfrac{3\cdot\left(1+\sqrt{2}\right)}{9}\cdot i=\dfrac{5}{9}-\dfrac{1+\sqrt{2}}{3}\cdot i \right] \Rightarrow \left.\begin{array}{l} \operatorname{Re} z=\dfrac{5}{9} \\ \operatorname{Im} z=-\dfrac{1+\sqrt{2}}{3} \end{array}\right\}.$

Vježba 170

Odredi realni i imaginarni dio kompleksnog broja z, ako je: $z = \frac{-i \cdot \sqrt{2} + 2}{2}$.

Rezultat: $\operatorname{Re} z = 1 \quad , \quad \operatorname{Im} z = -\frac{\sqrt{2}}{2}.$

Zadatak 171 (Branko, gimnazija)

Kompleksni broj z iz prvog kvadranta kompleksne ravnine ima svojstvo da je Re z četiri puta veći od Im z. Koliko puta je Re (z^2) veći od Im (z^2)

A. 1.875 *B.* 2.55 *C.* 2.85 *D.* 16

Rješenje 171

Ponovimo!

Kompleksan broj je broj oblika

$$z = x + y \cdot i,$$

gdje su x i y realni brojevi, a i imaginarna jedinica. Broj x zove se realni dio kompleksnog broja z, a broj y imaginarni dio kompleksnog broja z. Pišemo:

$$x = \operatorname{Re} z \quad , \quad y = \operatorname{Im} z.$$

Standardni ili algebarski oblik kompleksnog broja je oblika

$$z = x + y \cdot i,$$

gdje su x i y realni brojevi.

$$a^1 = a \quad , \quad a^n \cdot a^m = a^{n+m} \quad , \quad (a+b)^2 = a^2 + 2 \cdot a \cdot b + b^2 \quad , \quad i^2 = -1.$$

$$(a \cdot b)^n = a^n \cdot b^n.$$

Skratiti razlomak znači brojnik i nazivnik tog razlomka podijeliti istim brojem različitim od nule i jedinice

$$\frac{a \cdot n}{b \cdot n} = \frac{a}{b} \quad , \quad n \neq 0 \quad , \quad n \neq 1.$$

Kompleksan broj iz prvog kvadranta kompleksne ravnine čiji je realni dio četiri puta veći od imaginarnog dijela glasi:

$$z = 4 \cdot x + x \cdot i.$$

Njegovim kvadriranjem dobije se:

$$z^2 = (4 \cdot x + x \cdot i)^2 \Rightarrow z^2 = (4 \cdot x)^2 + 2 \cdot 4 \cdot x \cdot x \cdot i + (x \cdot i)^2 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow z^2 = 16 \cdot x^2 + 8 \cdot x^2 \cdot i + x^2 \cdot i^2 \Rightarrow z^2 = 16 \cdot x^2 + 8 \cdot x^2 \cdot i + x^2 \cdot (-1) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow z^2 = 16 \cdot x^2 + 8 \cdot x^2 \cdot i - x^2 \Rightarrow z^2 = 15 \cdot x^2 + 8 \cdot x^2 \cdot i \Rightarrow \left.\begin{array}{l} \operatorname{Re}\left(z^2\right) = 15 \cdot x^2 \\ \operatorname{Im}\left(z^2\right) = 8 \cdot x^2 \end{array}\right\}.$$

Računamo kvocijent Re (z^2) i Im (z^2).

$$\frac{\operatorname{Re}\left(z^2\right)}{\operatorname{Im}\left(z^2\right)} = \frac{15 \cdot x^2}{8 \cdot x^2} \Rightarrow \frac{\operatorname{Re}\left(z^2\right)}{\operatorname{Im}\left(z^2\right)} = \frac{15 \cdot x^2}{8 \cdot x^2} \Rightarrow \frac{\operatorname{Re}\left(z^2\right)}{\operatorname{Im}\left(z^2\right)} = \frac{15}{8} \Rightarrow \frac{\operatorname{Re}\left(z^2\right)}{\operatorname{Im}\left(z^2\right)} = 1.875.$$

Odgovor je pod A.

Vježba 171

Kompleksni broj z iz prvog kvadranta kompleksne ravnine ima svojstvo da je Re z tri puta veći od Im z. Koliko puta je Re (z^2) veći od Im (z^2)

$$A.\ 0.333 \qquad B.\ 1.333 \qquad C.\ 2.333 \qquad D.\ 3.333$$

Rezultat: B.

Zadatak 172 (Tihana, ekonomska škola)

Ako je $z = \frac{1 + i \cdot \sqrt{3}}{1 - i}$, onda je zbroj Re z + Im z jednak:

$$A.\ -1 \qquad B.\ 0 \qquad C.\ 1 \qquad D.\ 2$$

Rješenje 172

Ponovimo!

Kompleksan broj je broj oblika

$$z = x + y \cdot i,$$

gdje su x i y realni brojevi, a i imaginarna jedinica. Broj x zove se realni dio kompleksnog broja z, a broj y imaginarni dio kompleksnog broja z. Pišemo:

$$x = \operatorname{Re} z \quad , \quad y = \operatorname{Im} z.$$

Standardni ili algebarski oblik kompleksnog broja je oblika

$$z = x + y \cdot i,$$

Za kompleksne brojeve $x + y \cdot i$ i $x - y \cdot i$ kažemo da su kompleksno konjugirani jedan drugome. Simbol konjugiranja jest povlaka iznad broja koji se konjugira:

$$z = x + y \cdot i \;\Rightarrow\; \bar{z} = x - y \cdot i.$$

$$(x + y \cdot i) \cdot (x - y \cdot i) = x^2 + y^2 \quad , \quad i^2 = -1.$$

$$\frac{a}{b} \cdot \frac{c}{d} = \frac{a \cdot c}{b \cdot d} \quad , \quad a^1 = a \quad , \quad a^n \cdot a^m = a^{n+m} \quad , \quad \frac{a+b}{n} = \frac{a}{n} + \frac{b}{n}.$$

Skratiti razlomak znači brojnik i nazivnik tog razlomka podijeliti istim brojem različitim od nule i jedinice

$$\frac{a \cdot n}{b \cdot n} = \frac{a}{b} \ , \ n \neq 0 \ , \ n \neq 1.$$

Zakon distribucije množenja prema zbrajanju.

$$a \cdot (b + c) = a \cdot b + a \cdot c \quad , \quad a \cdot b + a \cdot c = a \cdot (b + c).$$

Množenje zagrada

$$(a + b) \cdot (c + d) = a \cdot c + a \cdot d + b \cdot c + b \cdot d.$$

Najprije odredimo realni i imaginarni dio kompleksnog broja z.

$$z = \frac{1 + i \cdot \sqrt{3}}{1 - i} \;\Rightarrow\; z = \frac{1 + i \cdot \sqrt{3}}{1 - i} \cdot \frac{1 + i}{1 + i} \;\Rightarrow\; z = \frac{\left(1 + i \cdot \sqrt{3}\right) \cdot (1 + i)}{(1 - i) \cdot (1 + i)} \;\Rightarrow$$

$$\Rightarrow\; z = \frac{1 + i \cdot \sqrt{3} + i + i^2 \cdot \sqrt{3}}{1^2 + 1^2} \;\Rightarrow\; z = \frac{1 + i \cdot \sqrt{3} + i - \sqrt{3}}{1 + 1} \;\Rightarrow\; z = \frac{1 - \sqrt{3} + i + i \cdot \sqrt{3}}{2} \;\Rightarrow$$

$$\Rightarrow\; z = \frac{1 - \sqrt{3} + \left(1 + \sqrt{3}\right) \cdot i}{2} \;\Rightarrow\; z = \frac{1 - \sqrt{3}}{2} + \frac{1 + \sqrt{3}}{2} \cdot i \;\Rightarrow\; \left.\begin{matrix} \operatorname{Re} z = \frac{1 - \sqrt{3}}{2} \\ \operatorname{Im} z = \frac{1 + \sqrt{3}}{2} \end{matrix}\right\}.$$

Sada je:

$$\operatorname{Re} z+\operatorname{Im} z=\frac{1-\sqrt{3}}{2}+\frac{1+\sqrt{3}}{2}=\frac{1-\sqrt{3}+1+\sqrt{3}}{2}=\frac{1-\sqrt{3}+1+\sqrt{3}}{2}=\frac{2}{2}=\frac{2}{2}=1.$$

Odgovor je pod C.

Vježba 172

Ako je $z=\frac{1+i\cdot\sqrt{3}}{1-i}$, onda je umnožak Re z · Im z jednak:

$$A.\ \frac{1}{2} \qquad B.\ -\frac{1}{2} \qquad C.\ \frac{1}{4} \qquad D.\ 1$$

Rezultat: B.

Zadatak 173 (Zvonimir, srednja škola)

Ako je $z=a+b\cdot i$, onda je realni dio kompleksnog broja $z^2+3\cdot z-\frac{1}{i}$ jednak:

$A.\ a^2-b^2+3\cdot a \qquad B.\ a^2-b^2-3\cdot a \qquad C.\ a^2+b^2+1 \qquad D.\ a^2-b^2-3\cdot(a+b)$

Rješenje 173

Ponovimo!

Kompleksan broj je broj oblika

$$z=x+y\cdot i,$$

gdje su x i y realni brojevi, a i imaginarna jedinica. Broj x zove se realni dio kompleksnog broja z, a broj y imaginarni dio kompleksnog broja z. Pišemo:

$$x=\operatorname{Re} z \quad , \quad y=\operatorname{Im} z.$$

Standardni ili algebarski oblik kompleksnog broja je oblika

$$z=x+y\cdot i,$$

$$(a+b)^2=a^2+2\cdot a\cdot b+b^2 \quad , \quad (a\cdot b)^n=a^n\cdot b^n \quad , \quad i^2=-1 \quad , \quad \frac{a}{b}\cdot\frac{c}{d}=\frac{a\cdot c}{b\cdot d}.$$

Proširiti razlomak znači brojnik i nazivnik tog razlomka pomnožiti istim brojem različitim od nule i jedinice

$$\frac{a}{b}=\frac{a\cdot n}{b\cdot n} \ , \ n\neq 0 \ , \ n\neq 1.$$

Zakon distribucije množenja prema zbrajanju.

$$a\cdot(b+c)=a\cdot b+a\cdot c \quad , \quad a\cdot b+a\cdot c=a\cdot(b+c).$$

$$z^2+3\cdot z-\frac{1}{i}=\left[\ z=a+b\cdot i\ \right]=(a+b\cdot i)^2+3\cdot(a+b\cdot i)-\frac{1}{i}=$$

$$=a^2+2\cdot a\cdot b\cdot i+(b\cdot i)^2+3\cdot a+3\cdot b\cdot i-\frac{1}{i}\cdot\frac{i}{i}=a^2+2\cdot a\cdot b\cdot i+b^2\cdot i^2+3\cdot a+3\cdot b\cdot i-\frac{i}{i^2}=$$

$$=a^2+2\cdot a\cdot b\cdot i+b^2\cdot(-1)+3\cdot a+3\cdot b\cdot i-\frac{i}{-1}=a^2+2\cdot a\cdot b\cdot i-b^2+3\cdot a+3\cdot b\cdot i+i=$$

$$=a^2-b^2+3\cdot a+2\cdot a\cdot b\cdot i+3\cdot b\cdot i+i=\left(a^2-b^2+3\cdot a\right)+(2\cdot a\cdot b+3\cdot b+1)\cdot i \ \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \left.\begin{array}{l} \operatorname{Re}\left(z^2+3\cdot z-\frac{1}{i}\right)=a^2-b^2+3\cdot a \\ \operatorname{Im}\left(z^2+3\cdot z-\frac{1}{i}\right)=2\cdot a\cdot b+3\cdot b+1 \end{array}\right\}.$$

Odgovor je pod A.

Vježba 173

Ako je $z=a+b\cdot i$, onda je imaginarni dio kompleksnog broja $z^2+3\cdot z-\frac{1}{i}$ jednak:

A. $a\cdot b+b+1$ *B.* $2\cdot a\cdot b+3\cdot b-1$ *C.* $2\cdot a\cdot b+3\cdot b+1$ *D.* $2\cdot a\cdot b+2\cdot b$

Rezultat: C.

Zadatak 174 (Zvonimir, gimnazija)

Odredi prirodni broj x iz jednadžbe $(3+4\cdot i)^{x-1}-(1+i)^4=5^x$.

Rješenje 174

Ponovimo!

Kompleksan broj je broj oblika

$$z=x+y\cdot i,$$

gdje su x i y realni brojevi, a i imaginarna jedinica. Broj x zove se realni dio kompleksnog broja z, a broj y imaginarni dio kompleksnog broja z.

Modul ili apsolutna vrijednost kompleksnog broja z = x + y · i definira se formulom

$$|z|=\sqrt{x^2+y^2}.$$

Za realni broj x njegova je apsolutna vrijednost (modul) broj $|x|$ koji određujemo na ovaj način:

$$|x|=\begin{cases} x, & x\ge 0 \\ -x, & x<0. \end{cases}$$

Ako je broj x pozitivan ili nula, tada je on jednak svojoj apsolutnoj vrijednosti. Za svaki x, $x \ge 0$, vrijedi $|x| = x$.

Ako je x negativan broj, njegova apsolutna vrijednost je suprotan broj – x koji je pozitivan. Za svaki x, $x < 0$, je $|x| = -x$.

$$(a+b)^2=a^2+2\cdot a\cdot b+b^2 \quad , \quad (a\cdot b)^n=a^n\cdot b^n \quad , \quad i^2=-1 \quad , \quad a=b \Rightarrow |a|=|b|.$$

$$\left|a^n\right|=|a|^n \quad , \quad a^1=a \quad , \quad a^{n+m}=a^n\cdot a^m \quad , \quad \left(a^n\right)^m=a^{n\cdot m} \quad , \quad a^0=1.$$

$$a^{f(x)}=a^{g(x)} \Rightarrow f(x)=g(x).$$

Zakon distribucije množenja prema zbrajanju.

$$a\cdot(b+c)=a\cdot b+a\cdot c \quad , \quad a\cdot b+a\cdot c=a\cdot(b+c).$$

Preoblikujemo zadanu jednadžbu.

$$(3+4\cdot i)^{x-1}-(1+i)^4=5^x \Rightarrow (3+4\cdot i)^{x-1}-\left((1+i)^2\right)^2=5^x \Rightarrow$$

$$\Rightarrow (3+4\cdot i)^{x-1}-\left(1+2\cdot i+i^2\right)^2=5^x \Rightarrow (3+4\cdot i)^{x-1}-(1+2\cdot i-1)^2=5^x \Rightarrow$$

$$\Rightarrow (3+4\cdot i)^{x-1}-(1+2\cdot i-1)^2=5^x \Rightarrow (3+4\cdot i)^{x-1}-(2\cdot i)^2=5^x \Rightarrow$$

$$\Rightarrow (3+4\cdot i)^{x-1}-2^2\cdot i^2=5^x \Rightarrow (3+4\cdot i)^{x-1}-4\cdot(-1)=5^x \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \ (3+4\cdot i)^{x-1}+4=5^{x} \ \Rightarrow \ (3+4\cdot i)^{x-1}=5^{x}-4.$$

Uočimo da je izraz $5^{x}-4$ pozitivan (veći od 0) za svaki prirodan broj x.
Dalje slijedi:

$$\left|(3+4\cdot i)^{x-1}\right|=\left|5^{x}-4\right| \ \Rightarrow \ \left[5^{x}-4>0\right] \ \Rightarrow \ |3+4\cdot i|^{x-1}=5^{x}-4 \ \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \ \left(\sqrt{3^{2}+4^{2}}\right)^{x-1}=5^{x}-4 \ \Rightarrow \ \left(\sqrt{9+16}\right)^{x-1}=5^{x}-4 \ \Rightarrow \ \left(\sqrt{25}\right)^{x-1}=5^{x}-4 \ \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \ 5^{x-1}=5^{x}-4 \ \Rightarrow \ 5^{x}-4=5^{x-1} \ \Rightarrow \ 5^{x}-5^{x-1}=4 \ \Rightarrow \ 5^{x-1}\cdot 5^{1}-5^{x-1}=4 \ \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \ 5^{x-1}\cdot 5^{1}-5^{x-1}=4 \ \Rightarrow \ 5^{x-1}\cdot(5-1)=4 \ \Rightarrow \ 5^{x-1}\cdot 4=4 \ \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \ 5^{x-1}\cdot 4=4 \ /:4 \ \Rightarrow \ 5^{x-1}=1 \ \Rightarrow \ 5^{x-1}=5^{0} \ \Rightarrow \ x-1=0 \ \Rightarrow \ x=1.$$

Vježba 174

Odredi prirodni broj x iz jednadžbe $(3+4\cdot i)^{x-1}-5^{x}=(1+i)^{4}$.

Rezultat: 1.

Zadatak 175 (Hrvoje, gimnazija)

Modul broja $\dfrac{\left(x+i\cdot\sqrt{3}\right)^{2}}{1-i}$ iznosi $2\cdot\sqrt{2}$ $(x>0)$. Tada je x jednako:

$A.\ 2\cdot\sqrt{2}$ $\quad B.\ 2\cdot\sqrt{3}$ $\quad C.\ 1$ $\quad D.\ \sqrt{2}$

Rješenje 175

Ponovimo!

Kompleksan broj je broj oblika

$$z=x+y\cdot i,$$

gdje su x i y realni brojevi, a i imaginarna jedinica. Broj x zove se realni dio kompleksnog broja z, a broj y imaginarni dio kompleksnog broja z.
Modul ili apsolutna vrijednost kompleksnog broja z = x + y · i definira se formulom

$$|z|=\sqrt{x^{2}+y^{2}}.$$

Za modul kompleksnog broja vrijedi:

$$\left|z^{n}\right|=|z|^{n} \quad , \quad \left|\frac{z_1}{z_2}\right|=\frac{|z_1|}{|z_2|} \ , \ z_2\neq 0.$$

$$\left(\sqrt{a}\right)^{2}=a \quad , \quad a^{1}=a \quad , \quad a^{n}\cdot a^{m}=a^{n+m}.$$

$$\left|\frac{\left(x+i\cdot\sqrt{3}\right)^{2}}{1-i}\right|=2\cdot\sqrt{2} \ \Rightarrow \ \frac{\left|\left(x+i\cdot\sqrt{3}\right)^{2}\right|}{|1-i|}=2\cdot\sqrt{2} \ \Rightarrow \ \frac{\left|x+i\cdot\sqrt{3}\right|^{2}}{|1-i|}=2\cdot\sqrt{2} \ \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \frac{\left(\sqrt{x^2+\left(\sqrt{3}\right)^2}\right)^2}{\sqrt{1^2+(-1)^2}} = 2\cdot\sqrt{2} \Rightarrow \frac{x^2+\left(\sqrt{3}\right)^2}{\sqrt{1+1}} = 2\cdot\sqrt{2} \Rightarrow \frac{x^2+3}{\sqrt{2}} = 2\cdot\sqrt{2} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \frac{x^2+3}{\sqrt{2}} = 2\cdot\sqrt{2} \;/\cdot\sqrt{2} \Rightarrow x^2+3 = 2\cdot\left(\sqrt{2}\right)^2 \Rightarrow x^2+3 = 2\cdot 2 \Rightarrow x^2+3 = 4 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow x^2 = 4-3 \Rightarrow x^2 = 1 \Rightarrow x^2 = 1 \;/\sqrt{\ } \Rightarrow x_{1,2} = \pm\sqrt{1} \Rightarrow \left.\begin{array}{l} x_1 = 1 \\ x_2 = -1 \end{array}\right\} \Rightarrow \begin{bmatrix} \text{uvjet} \\ x>0 \end{bmatrix} \Rightarrow x = 1.$$

Odgovor je pod C.

Vježba 175

Modul broja $\frac{\left(x+i\cdot\sqrt{3}\right)^2}{1+i}$ iznosi $2\cdot\sqrt{2}$ $(x>0)$. Tada je x jednako:

$A.\ 2\cdot\sqrt{2}$ $\qquad B.\ 2\cdot\sqrt{3}$ $\qquad C.\ 1$ $\qquad D.\ \sqrt{2}$

Rezultat: C.

Zadatak 176 (Josip, gimnazija)

Zadan je kompleksan broj $z = 3\cdot\left(\cos\frac{2\cdot\pi}{7}+i\cdot\sin\frac{2\cdot\pi}{7}\right)$. Koja je vrijednost argumenta φ broja z^6?

Rješenje 176

Ponovimo!

$$a\cdot\frac{b}{c} = \frac{a\cdot b}{c}.$$

Svaki se kompleksni broj

$$z = x+y\cdot i$$

može prikazati u trigonometrijskom obliku

$$z = r\cdot(\cos\varphi+i\cdot\sin\varphi),$$

pri čemu je r modul kompleksnog broja

$$|z| = r = \sqrt{x^2+y^2},$$

a kut φ argument kompleksnog broja za kojeg vrijedi

$$\varphi = arctg\frac{y}{x}\ ,\ 0\le\varphi<2\cdot\pi.$$

Oznaka je

$$\varphi = \arg z.$$

Za svaki prirodni broj n vrijedi De Moivreova formula

$$z^n = r^n\cdot(\cos(n\cdot\varphi)+i\cdot\sin(n\cdot\varphi)).$$

Iz nje čitamo:

$$\left|z^n\right| = |z|^n = r^n \quad , \quad \arg\left(z^n\right) = n\cdot\arg z = n\cdot\varphi\ ,\ 0\le n\cdot\varphi<2\cdot\pi.$$

$$z = 3\cdot\left(\cos\frac{2\cdot\pi}{7}+i\cdot\sin\frac{2\cdot\pi}{7}\right) \Rightarrow z^6 = 3^6\cdot\left(\cos\left(6\cdot\frac{2\cdot\pi}{7}\right)+i\cdot\sin\left(6\cdot\frac{2\cdot\pi}{7}\right)\right) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow\ z^6=3^6\cdot\left(\cos\frac{12\cdot\pi}{7}+i\cdot\sin\frac{12\cdot\pi}{7}\right)\ \Rightarrow\ \varphi=\frac{12\cdot\pi}{7}.$$

Vježba 176

Zadan je kompleksan broj $z=3\cdot\left(\cos\frac{2\cdot\pi}{7}+i\cdot\sin\frac{2\cdot\pi}{7}\right)$. Koja je vrijednost argumenta φ broja z^3?

Rezultat: $\frac{6\cdot\pi}{7}.$

Zadatak 177 (Zvonimir, gimnazija)

Izračunaj $i^{2\cdot k-1}+i^{2\cdot k+1},\ k\in Z.$

Rješenje 177

Ponovimo!

$$a^n\cdot a^m=a^{n+m}\quad,\quad a^{-n}=\frac{1}{a^n}\quad,\quad a^1=a\quad,\quad n=\frac{n}{1}.$$

$$\frac{a}{b}+\frac{c}{d}=\frac{a\cdot d+b\cdot c}{b\cdot d}\quad,\quad i^2=-1.$$

Zakon distribucije množenja prema zbrajanju.

$$a\cdot(b+c)=a\cdot b+a\cdot c\quad,\quad a\cdot b+a\cdot c=a\cdot(b+c).$$

1.inačica

$$i^{2\cdot k-1}+i^{2\cdot k+1}=i^{2\cdot k}\cdot i^{-1}+i^{2\cdot k}\cdot i^1=i^{2\cdot k}\cdot i^{-1}+i^{2\cdot k}\cdot i^1=i^{2\cdot k}\cdot\left(i^{-1}+i^1\right)=$$

$$=i^{2\cdot k}\cdot\left(\frac{1}{i}+i\right)=i^{2\cdot k}\cdot\left(\frac{1}{i}+\frac{i}{1}\right)=i^{2\cdot k}\cdot\frac{1+i^2}{i}=i^{2\cdot k}\cdot\frac{1-1}{i}=i^{2\cdot k}\cdot\frac{0}{i}=i^{2\cdot k}\cdot 0=0.$$

2.inačica

$$i^{2\cdot k-1}+i^{2\cdot k+1}=i^{2\cdot k-1}+i^{2\cdot k-1}\cdot i^2=i^{2\cdot k-1}+i^{2\cdot k-1}\cdot i^2=i^{2\cdot k-1}\cdot\left(1+i^2\right)=$$

$$=i^{2\cdot k-1}\cdot(1-1)=i^{2\cdot k-1}\cdot 0=0.$$

3.inačica

$$i^{2\cdot k-1}+i^{2\cdot k+1}=i^{2\cdot k+1}\cdot i^{-2}+i^{2\cdot k+1}=i^{2\cdot k+1}\cdot i^{-2}+i^{2\cdot k+1}=i^{2\cdot k+1}\cdot\left(i^{-2}+1\right)=$$

$$=i^{2\cdot k+1}\cdot\left(\frac{1}{i^2}+1\right)=i^{2\cdot k+1}\cdot\left(\frac{1}{-1}+1\right)=i^{2\cdot k+1}\cdot(-1+1)=i^{2\cdot k+1}\cdot 0=0.$$

Vježba 177

Izračunaj $i^{k-1}+i^{k+1},\ k\in Z.$

Rezultat: 0.

Zadatak 178 (Ivana, tehnička škola)

Izračunaj $\left|\frac{\left(\sqrt{3}-i\right)^5}{\left(1+i\cdot\sqrt{3}\right)^7}\right|.$

Rješenje 178

Ponovimo!

Kompleksan broj je broj oblika

$$z = x + y \cdot i,$$

gdje su x i y realni brojevi, a i imaginarna jedinica. Broj x zove se realni dio kompleksnog broja z, a broj y imaginarni dio kompleksnog broja z. Pišemo:

$$x = \operatorname{Re} z \quad , \quad y = \operatorname{Im} z.$$

Standardni ili algebarski oblik kompleksnog broja je oblika

$$z = x + y \cdot i,$$

gdje su x i y realni brojevi.

Modul ili apsolutna vrijednost kompleksnog broja z = x + y · i definira se formulom

$$|z| = \sqrt{x^2 + y^2}.$$

$$\left|\frac{z_1}{z_2}\right| = \frac{|z_1|}{|z_2|}, \; z_2 \neq 0 \quad , \quad \left|z^n\right| = |z|^n \quad , \quad \left(\sqrt{a}\right)^2 = a \quad , \quad \frac{a^n}{a^m} = a^{n-m} \quad , \quad a^{-n} = \frac{1}{a^n}.$$

$$\left|\frac{\left(\sqrt{3}-i\right)^5}{\left(1+i\cdot\sqrt{3}\right)^7}\right| = \frac{\left|\left(\sqrt{3}-i\right)^5\right|}{\left|\left(1+i\cdot\sqrt{3}\right)^7\right|} = \frac{\left|\sqrt{3}-i\right|^5}{\left|1+i\cdot\sqrt{3}\right|^7} = \frac{\left(\sqrt{\left(\sqrt{3}\right)^2+(-1)^2}\right)^5}{\left(\sqrt{1^2+\left(\sqrt{3}\right)^2}\right)^7} =$$

$$= \frac{\left(\sqrt{3+1}\right)^5}{\left(\sqrt{1+3}\right)^7} = \frac{\left(\sqrt{4}\right)^5}{\left(\sqrt{4}\right)^7} = \frac{2^5}{2^7} = 2^{5-7} = 2^{-2} = \frac{1}{2^2} = \frac{1}{4}.$$

Vježba 178

Izračunaj $\left|\frac{\left(\sqrt{3}+i\right)^5}{\left(1-i\cdot\sqrt{3}\right)^7}\right|.$

Rezultat: $\frac{1}{4}.$

Zadatak 179 (Lussy, gimnazija)

Izračunaj $\frac{1+i}{1-i} + \frac{1-i}{1+i}.$

Rješenje 179

Ponovimo!

Kompleksan broj je broj oblika

$$z = x + y \cdot i,$$

gdje su x i y realni brojevi, a i imaginarna jedinica. Broj x zove se realni dio kompleksnog broja z, a broj y imaginarni dio kompleksnog broja z. Pišemo:

$$x = \operatorname{Re} z \quad , \quad y = \operatorname{Im} z.$$

Standardni ili algebarski oblik kompleksnog broja je oblika

$$z = x + y \cdot i,$$

gdje su x i y realni brojevi.

Za kompleksne brojeve x + y · i i x – y · i kažemo da su kompleksno konjugirani jedan drugome. Simbol konjugiranja jest povlaka iznad broja koji se konjugira:

$$z = x + y \cdot i \Rightarrow \bar{z} = x - y \cdot i.$$

$$(a+b)^2 = a^2 + 2 \cdot a \cdot b + b^2 \quad , \quad i^2 = -1 \quad , \quad (a-b)^2 = a^2 - 2 \cdot a \cdot b + b^2.$$

$$(x + y \cdot i) \cdot (x - y \cdot i) = x^2 + y^2 \quad , \quad \frac{0}{a} = a \ , \ a \neq 0 \quad , \quad \frac{a}{b} + \frac{c}{d} = \frac{a \cdot d + b \cdot c}{b \cdot d} \quad , \quad \frac{a}{b} \cdot \frac{c}{d} = \frac{a \cdot c}{b \cdot d}.$$

Skratiti razlomak znači brojnik i nazivnik tog razlomka podijeliti istim brojem različitim od nule i jedinice

$$\frac{a \cdot n}{b \cdot n} = \frac{a}{b} \ , \ n \neq 0 \ , \ n \neq 1.$$

Proširiti razlomak znači brojnik i nazivnik tog razlomka pomnožiti istim brojem različitim od nule i jedinice

$$\frac{a}{b} = \frac{a \cdot n}{b \cdot n} \ , \ n \neq 0 \ , \ n \neq 1.$$

1.inačica

$$\frac{1+i}{1-i} + \frac{1-i}{1+i} = \frac{(1+i)^2 + (1-i)^2}{(1-i) \cdot (1+i)} = \frac{1 + 2 \cdot i + i^2 + 1 - 2 \cdot i + i^2}{1^2 + 1^2} = \frac{1 + 2 \cdot i - 1 + 1 - 2 \cdot i - 1}{1+1} =$$

$$= \frac{1 + 2 \cdot i - 1 + 1 - 2 \cdot i - 1}{2} = \frac{0}{2} = 0.$$

2.inačica

$$\frac{1+i}{1-i} + \frac{1-i}{1+i} = \frac{1+i}{1-i} \cdot \frac{1+i}{1+i} + \frac{1-i}{1+i} \cdot \frac{1-i}{1-i} = \frac{(1+i)^2}{1^2 + 1^2} + \frac{(1-i)^2}{1^2 + 1^2} =$$

$$= \frac{1 + 2 \cdot i + i^2}{1+1} + \frac{1 - 2 \cdot i + i^2}{1+1} = \frac{1 + 2 \cdot i - 1}{2} + \frac{1 - 2 \cdot i - 1}{2} = \frac{1 + 2 \cdot i - 1}{2} + \frac{1 - 2 \cdot i - 1}{2} =$$

$$= \frac{2 \cdot i}{2} + \frac{-2 \cdot i}{2} = \frac{2 \cdot i}{2} + \frac{-2 \cdot i}{2} = i - i = 0.$$

Vježba 179

Izračunaj $\frac{1-i}{1+i} + \frac{1+i}{1-i}$.

Rezultat: 0.

Zadatak 180 (Dado, gimnazija)

Odredi $x, \ y \in R$ tako da vrijedi $(1+i) \cdot (x - 2 \cdot i \cdot y) = -i.$

Rješenje 180

Ponovimo!

Kompleksan broj je broj oblika

$$z = x + y \cdot i,$$

gdje su x i y realni brojevi, a i imaginarna jedinica. Broj x zove se realni dio kompleksnog broja z, a broj y imaginarni dio kompleksnog broja z. Pišemo:

$$x = \operatorname{Re} z \quad , \quad y = \operatorname{Im} z.$$

Standardni ili algebarski oblik kompleksnog broja je oblika

$$z = x + y \cdot i,$$

gdje su x i y realni brojevi.

$$i^2 = -1.$$

Za kompleksne brojeve $x + y \cdot i$ i $x - y \cdot i$ kažemo da su kompleksno konjugirani jedan drugome.

Simbol konjugiranja jest povlaka iznad broja koji se konjugira:

$$z = x + y \cdot i \Rightarrow \bar{z} = x - y \cdot i.$$

$$\left.\begin{array}{l} z = x + y \cdot i \\ \bar{z} = x - y \cdot i \end{array}\right\} \Rightarrow z \cdot \bar{z} = (x + y \cdot i) \cdot (x - y \cdot i) = x^2 + y^2.$$

Množenje zagrada

$$(a+b) \cdot (c+d) = a \cdot c + a \cdot d + b \cdot c + b \cdot d.$$

Zakon distribucije množenja prema zbrajanju.

$$a \cdot (b+c) = a \cdot b + a \cdot c \quad , \quad a \cdot b + a \cdot c = a \cdot (b+c).$$

Dva su kompleksna broja jednaka ako i samo ako su im međusobno jednaki realni dijelovi i međusobno jednaki imaginarni dijelovi, tj.

$$a + b \cdot i = c + d \cdot i \Leftrightarrow a = c \ , \ b = d.$$

$$(1+i) \cdot (x - 2 \cdot i \cdot y) = -i \Rightarrow x - 2 \cdot i \cdot y + x \cdot i - 2 \cdot i^2 \cdot y = -i \Rightarrow$$

$$\Rightarrow x - 2 \cdot i \cdot y + x \cdot i - 2 \cdot (-1) \cdot y = -i \Rightarrow x - 2 \cdot i \cdot y + x \cdot i + 2 \cdot y = -i \Rightarrow$$

$$\Rightarrow x + 2 \cdot y - 2 \cdot i \cdot y + x \cdot i = -i \Rightarrow (x + 2 \cdot y) + (-2 \cdot y + x) \cdot i = -i \Rightarrow$$

$$\Rightarrow (x + 2 \cdot y) + (x - 2 \cdot y) \cdot i = 0 - i \Rightarrow \left.\begin{array}{l} x + 2 \cdot y = 0 \\ x - 2 \cdot y = -1 \end{array}\right\} \Rightarrow \left[\begin{array}{l} \text{metoda suprotnih} \\ \text{koeficijenata} \end{array}\right] \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 2 \cdot x = -1 \Rightarrow 2 \cdot x = -1 \ /:2 \Rightarrow x = -\frac{1}{2}.$$

Računamo y.

$$\left.\begin{array}{l} x + 2 \cdot y = 0 \\ x = -\frac{1}{2} \end{array}\right\} \Rightarrow -\frac{1}{2} + 2 \cdot y = 0 \Rightarrow -\frac{1}{2} + 2 \cdot y = 0 \ / \cdot 2 \Rightarrow -1 + 4 \cdot y = 0 \Rightarrow 4 \cdot y = 1 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 4 \cdot y = 1 \ /:4 \Rightarrow y = \frac{1}{4}.$$

Rješenje je:

$$(x, \ y) = \left(-\frac{1}{2}, \frac{1}{4}\right).$$

Vježba 180

Odredi $x, \ y \in R$ tako da vrijedi $(1+i) \cdot (-x + 2 \cdot i \cdot y) = i.$

Rezultat: $(x, \ y) = \left(-\frac{1}{2}, \frac{1}{4}\right).$