Zadatak 141 (Branka, gimnazija)

Pojednostavnite: $\sqrt{1+i\cdot\sqrt{3}}+\sqrt{1-i\cdot\sqrt{3}}$.

$A.\ \sqrt{2}\qquad B.\ \sqrt{3}\qquad C.\ \sqrt{5}\qquad D.\ \sqrt{6}$

Rješenje 141

Ponovimo!

Kompleksan broj je broj oblika

$$z=x+y\cdot i,$$

gdje su x i y realni brojevi, a i imaginarna jedinica. Broj x zove se realni dio kompleksnog broja z, a broj y imaginarni dio kompleksnog broja z. Pišemo:

$$x=\operatorname{Re} z\quad,\quad y=\operatorname{Im} z.$$

Standardni ili algebarski oblik kompleksnog broja je oblika

$$z=x+y\cdot i,$$

gdje su x i y realni brojevi.
Za kompleksne brojeve $x+y\cdot i$ i $x-y\cdot i$ kažemo da su kompleksno konjugirani jedan drugome.
Simbol konjugiranja jest povlaka iznad broja koji se konjugira:

$$z=x+y\cdot i\ \Rightarrow\ \bar{z}=x-y\cdot i.$$

$$(a+b)^2=a^2+2\cdot a\cdot b+b^2\quad,\quad\left(\sqrt{a}\right)^2=a\quad,\quad\sqrt{a}\cdot\sqrt{b}=\sqrt{a\cdot b}\quad,\quad a^2-b^2=(a-b)\cdot(a+b).$$

$$(a+b\cdot i)\cdot(a-b\cdot i)=a^2+b^2\quad,\quad i^2=-1\quad,\quad(a\cdot b)^n=a^n\cdot b^n.$$

Stavimo da je

$$x=\sqrt{1+i\cdot\sqrt{3}}+\sqrt{1-i\cdot\sqrt{3}}.$$

Nakon kvadriranja i sređivanja dobije se:

$$x=\sqrt{1+i\cdot\sqrt{3}}+\sqrt{1-i\cdot\sqrt{3}}\ \Rightarrow\ x=\sqrt{1+i\cdot\sqrt{3}}+\sqrt{1-i\cdot\sqrt{3}}\ /^2\ \Rightarrow$$

$$\Rightarrow\ x^2=\left(\sqrt{1+i\cdot\sqrt{3}}+\sqrt{1-i\cdot\sqrt{3}}\right)^2\ \Rightarrow$$

$$\Rightarrow\ x^2=\left(\sqrt{1+i\cdot\sqrt{3}}\right)^2+2\cdot\sqrt{1+i\cdot\sqrt{3}}\cdot\sqrt{1-i\cdot\sqrt{3}}+\left(\sqrt{1-i\cdot\sqrt{3}}\right)^2\ \Rightarrow$$

$$\Rightarrow\ x^2=1+i\cdot\sqrt{3}+2\cdot\sqrt{\left(1+i\cdot\sqrt{3}\right)\cdot\left(1-i\cdot\sqrt{3}\right)}+1-i\cdot\sqrt{3}\ \Rightarrow$$

$$\Rightarrow\ x^2=1+i\cdot\sqrt{3}+2\cdot\sqrt{\left(1+i\cdot\sqrt{3}\right)\cdot\left(1-i\cdot\sqrt{3}\right)}+1-i\cdot\sqrt{3}\ \Rightarrow$$

$$\Rightarrow\ x^2=2+2\cdot\sqrt{\left(1+i\cdot\sqrt{3}\right)\cdot\left(1-i\cdot\sqrt{3}\right)}\ \Rightarrow\ x^2=2+2\cdot\sqrt{1^2-\left(i\cdot\sqrt{3}\right)^2}\ \Rightarrow$$

$$\Rightarrow\ x^2=2+2\cdot\sqrt{1-i^2\cdot\left(\sqrt{3}\right)^2}\ \Rightarrow\ x^2=2+2\cdot\sqrt{1-(-1)\cdot 3}\ \Rightarrow\ x^2=2+2\cdot\sqrt{1+3}\ \Rightarrow$$

$$\Rightarrow\ x^2=2+2\cdot\sqrt{4}\ \Rightarrow\ x^2=2+2\cdot 2\ \Rightarrow\ x^2=2+4\ \Rightarrow\ x^2=6\ \Rightarrow\ x^2=6\ /\sqrt{\ }\ \Rightarrow\ x=\sqrt{6}.$$

Odgovor je pod D.

Vježba 141

Pojednostavnite: $\sqrt{1+i\cdot\sqrt{3}}-\sqrt{1-i\cdot\sqrt{3}}$.

$A.\ \sqrt{2}\cdot i\qquad B.\ \sqrt{3}\cdot i\qquad C.\ \sqrt{5}\cdot i\qquad D.\ \sqrt{6}\cdot i$

Rezultat: A.

Zadatak 142 (Iva, gimnazija)

Izračunaj: $(1+i)^4-(1-i)^4$.

$A.\ 1 \qquad B.\ i \qquad C.\ 0 \qquad D.\ -1$

Rješenje 142

Ponovimo!

$$\left(a^n\right)^m=a^{n\cdot m} \quad , \quad (a+b)^2=a^2+2\cdot a\cdot b+b^2 \quad , \quad (a-b)^2=a^2-2\cdot a\cdot b+b^2 \quad , \quad i^1=i.$$

$$i^2=-1 \quad , \quad a^2-b^2=(a-b)\cdot(a+b) \quad , \quad (-a)^{2\cdot n}=a^{2\cdot n}.$$

Zakon distribucije množenja prema zbrajanju.

$$a\cdot(b+c)=a\cdot b+a\cdot c \quad , \quad a\cdot b+a\cdot c=a\cdot(b+c).$$

1.inačica

$$(1+i)^4-(1-i)^4=\left((1+i)^2\right)^2-\left((1-i)^2\right)^2=\left(1+2\cdot i+i^2\right)^2-\left(1-2\cdot i+i^2\right)^2=$$

$$=(1+2\cdot i-1)^2-(1-2\cdot i-1)^2=(1+2\cdot i-1)^2-(1-2\cdot i-1)^2=(2\cdot i)^2-(-2\cdot i)^2=$$

$$=(2\cdot i)^2-(2\cdot i)^2=(2\cdot i)^2-(2\cdot i)^2=0.$$

Odgovor je pod C.

2.inačica

$$(1+i)^4-(1-i)^4=\left((1+i)^2\right)^2-\left((1-i)^2\right)^2=\left((1+i)^2-(1-i)^2\right)\cdot\left((1+i)^2+(1-i)^2\right)=$$

$$=\left((1+i)-(1-i)\right)\cdot\left((1+i)+(1-i)\right)\cdot\left(1+2\cdot i+i^2+1-2\cdot i+i^2\right)=$$

$$=(1+i-1+i)\cdot(1+i+1-i)\cdot(1+2\cdot i-1+1-2\cdot i-1)=(1+i-1+i)\cdot(1+i+1-i)\cdot(1+2\cdot i-1+1-2\cdot i-1)=$$

$$=2\cdot i\cdot 2\cdot 0=0.$$

Odgovor je pod C.

Vježba 142

Izračunaj: $(1-i)^4-(1+i)^4$.

$A.\ 1 \qquad B.\ i \qquad C.\ 0 \qquad D.\ -1$

Rezultat: C.

Zadatak 143 (Željko, srednja škola)

Nađite apsolutnu vrijednost kompleksnog broja $z=2\cdot i+\frac{1}{i}+i^3$.

Rješenje 143

Ponovimo!

$$i^2=-1 \quad , \quad i^3=-i \quad , \quad n=\frac{n}{1} \quad , \quad \frac{a}{b}+\frac{c}{d}=\frac{a\cdot d+b\cdot c}{b\cdot d} \quad , \quad \frac{a}{b}\cdot\frac{c}{d}=\frac{a\cdot c}{b\cdot d}.$$

Kompleksan broj je broj oblika

$$z=x+y\cdot i,$$

gdje su x i y realni brojevi, a i imaginarna jedinica. Broj x zove se realni dio kompleksnog broja z, a broj y imaginarni dio kompleksnog broja z. Pišemo:

$$x=\operatorname{Re} z \quad , \quad y=\operatorname{Im} z.$$

Zapis $z = x + y \cdot i$ zovemo algebarski ili standardni prikaz kompleksnog broja.
Modul ili apsolutna vrijednost kompleksnog broja z = x + y · i definira se formulom

$$|z| = \sqrt{x^2 + y^2}.$$

1.inačica

$$z = 2 \cdot i + \frac{1}{i} + i^3 \Rightarrow |z| = \left|2 \cdot i + \frac{1}{i} + i^3\right| \Rightarrow |z| = \left|2 \cdot i + \frac{1}{i} - i\right| \Rightarrow |z| = \left|i + \frac{1}{i}\right| \Rightarrow |z| = \left|\frac{i}{1} + \frac{1}{i}\right| \Rightarrow$$

$$\Rightarrow |z| = \left|\frac{i^2 + 1}{i}\right| \Rightarrow |z| = \left|\frac{-1+1}{i}\right| \Rightarrow |z| = \left|\frac{0}{i}\right| \Rightarrow |z| = |0| \Rightarrow |z| = 0.$$

2.inačica

$$z = 2 \cdot i + \frac{1}{i} + i^3 \Rightarrow |z| = \left|2 \cdot i + \frac{1}{i} + i^3\right| \Rightarrow |z| = \left|2 \cdot i + \frac{1}{i} \cdot \frac{-i}{-i} - i\right| \Rightarrow |z| = \left|2 \cdot i + \frac{-i}{-i^2} - i\right| \Rightarrow$$

$$\Rightarrow |z| = \left|2 \cdot i + \frac{-i}{-(-1)} - i\right| \Rightarrow |z| = \left|2 \cdot i + \frac{-i}{1} - i\right| \Rightarrow |z| = |2 \cdot i - i - i| \Rightarrow$$

$$\Rightarrow |z| = |0| \Rightarrow |z| = 0.$$

Vježba 143

Nađite apsolutnu vrijednost kompleksnog broja $z = 3 \cdot i + \frac{1}{i} + 2 \cdot i^3$.

Rezultat: 0.

Zadatak 144 (Ana, gimnazija)

Nađite vrijednost izraza: $\frac{(1+i)^3 - (1-i)^3}{(1+i)^2 - (1-i)^2}$.

$A.\ i \qquad B.\ 2 \cdot i \qquad C.\ 1 \qquad D.\ 2$

Rješenje 144

Ponovimo!

$$(a+b)^3 = a^3 + 3 \cdot a^2 \cdot b + 3 \cdot a \cdot b^2 + b^3 \quad , \quad (a-b)^3 = a^3 - 3 \cdot a^2 \cdot b + 3 \cdot a \cdot b^2 - b^3.$$

$$(a+b)^2 = a^2 + 2 \cdot a \cdot b + b^2 \quad , \quad (a-b)^2 = a^2 - 2 \cdot a \cdot b + b^2 \quad , \quad i^1 = i \quad , \quad i^2 = -1 \quad , \quad i^3 = -i.$$

$$a^1 = a \quad , \quad a^3 - b^3 = (a-b) \cdot \left(a^2 + a \cdot b + b^2\right) \quad , \quad a^2 - b^2 = (a-b) \cdot (a+b).$$

$$(a + b \cdot i) \cdot (a - b \cdot i) = a^2 + b^2.$$

Skratiti razlomak znači brojnik i nazivnik tog razlomka podijeliti istim brojem različitim od nule i jedinice

$$\frac{a \cdot n}{b \cdot n} = \frac{a}{b} \quad , \quad n \neq 0 \quad , \quad n \neq 1.$$

Zakon distribucije množenja prema zbrajanju.

$$a \cdot (b + c) = a \cdot b + a \cdot c \quad , \quad a \cdot b + a \cdot c = a \cdot (b + c).$$

1.inačica

$$\frac{(1+i)^3-(1-i)^3}{(1+i)^2-(1-i)^2}=\frac{1^3+3\cdot1^2\cdot i^1+3\cdot1^1\cdot i^2+i^3-\left(1^3-3\cdot1^2\cdot i^1+3\cdot1^1\cdot i^2-i^3\right)}{1^2+2\cdot1\cdot i+i^2-\left(1^2-2\cdot1\cdot i+i^2\right)}=$$

$$=\frac{1+3\cdot i+3\cdot(-1)-i-(1-3\cdot i+3\cdot(-1)-(-i))}{1+2\cdot i-1-(1-2\cdot i-1)}=\frac{1+3\cdot i-3-i-(1-3\cdot i-3+i)}{1+2\cdot i-1-1+2\cdot i+1}=$$

$$=\frac{1+3\cdot i-3-i-1+3\cdot i+3-i}{1+2\cdot i-1-1+2\cdot i+1}=\frac{1+3\cdot i-3-i-1+3\cdot i+3-i}{1+2\cdot i-1-1+2\cdot i+1}=\frac{3\cdot i-i+3\cdot i-i}{2\cdot i+2\cdot i}=\frac{4\cdot i}{4\cdot i}=\frac{4\cdot i}{4\cdot i}=1.$$

Odgovor je pod C.

2.inačica

$$\frac{(1+i)^3-(1-i)^3}{(1+i)^2-(1-i)^2}=\frac{((1+i)-(1-i))\cdot\left((1+i)^2+(1+i)\cdot(1-i)+(1-i)^2\right)}{((1+i)-(1-i))\cdot((1+i)+(1-i))}=$$

$$=\frac{(1+i-1+i)\cdot\left(1+2\cdot i+i^2+1^2+1^2+1-2\cdot i+i^2\right)}{(1+i-1+i)\cdot(1+i+1-i)}=\frac{(1+i-1+i)\cdot(1+2\cdot i-1+1+1+1-2\cdot i-1)}{(1+i-1+i)\cdot(1+i+1-i)}=$$

$$=\frac{(1+i-1+i)\cdot(1+2\cdot i-1+1+1+1-2\cdot i-1)}{(1+i-1+i)\cdot(1+i+1-i)}=\frac{2\cdot i\cdot2}{2\cdot i\cdot2}=\frac{2\cdot i\cdot2}{2\cdot i\cdot2}=1.$$

Odgovor je pod C.

Vježba 144

Nađite vrijednost izraza: $\dfrac{(1+i)^2-(1-i)^2}{(1+i)^3-(1-i)^3}$.

$A.\ i \qquad B.\ 2\cdot i \qquad C.\ 1 \qquad D.\ 2$

Rezultat: C.

Zadatak 145 (MB, gimnazija)

Odredite apsolutnu vrijednost broja $z=2\cdot\cos\frac{2\cdot\pi}{7}+i\cdot2\cdot\sin\frac{2\cdot\pi}{7}$.

Rješenje 145

Ponovimo!

$$\cos^2\alpha+\sin^2\alpha=1 \quad , \quad (a\cdot b)^n=a^n\cdot b^n.$$

Kompleksan broj je broj oblika

$$z=x+y\cdot i,$$

gdje su x i y realni brojevi, a i imaginarna jedinica. Broj x zove se realni dio kompleksnog broja z, a broj y imaginarni dio kompleksnog broja z. Pišemo:

$$x=\operatorname{Re} z \quad , \quad y=\operatorname{Im} z.$$

Standardni ili algebarski oblik kompleksnog broja je oblika

$$z=x+y\cdot i,$$

gdje su x i y realni brojevi.
Modul ili apsolutna vrijednost kompleksnog broja z = x + y · i definira se formulom

$$|z|=\sqrt{x^2+y^2}.$$

Zakon distribucije množenja prema zbrajanju.

$$a\cdot(b+c)=a\cdot b+a\cdot c \quad , \quad a\cdot b+a\cdot c=a\cdot(b+c).$$

Kompleksan broj z = x + y · i napisan u trigonometrijskom obliku glasi

$$z=|z|\cdot(\cos\alpha+i\cdot\sin\alpha),$$

gdje je $|z|$ apsolutna vrijednost ili modul kompleksnog broja (udaljenost kompleksnog broja od ishodišta kompleksne ravnine), α argument kompleksnog broja.

1.inačica

$$\left.\begin{array}{l} z=|z|\cdot(\cos\alpha+i\cdot\sin\alpha) \\ z=2\cdot\cos\frac{2\cdot\pi}{7}+i\cdot 2\cdot\sin\frac{2\cdot\pi}{7}\end{array}\right\} \Rightarrow \left.\begin{array}{l} z=|z|\cdot(\cos\alpha+i\cdot\sin\alpha) \\ z=2\cdot\left(\cos\frac{2\cdot\pi}{7}+i\cdot\sin\frac{2\cdot\pi}{7}\right)\end{array}\right\} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \left.\begin{array}{l} z=|z|\cdot(\cos\alpha+i\cdot\sin\alpha) \\ z=2\cdot\left(\cos\frac{2\cdot\pi}{7}+i\cdot\sin\frac{2\cdot\pi}{7}\right)\end{array}\right\} \Rightarrow |z|=2.$$

2.inačica

$$z=2\cdot\cos\frac{2\cdot\pi}{7}+i\cdot 2\cdot\sin\frac{2\cdot\pi}{7} \Rightarrow z=\underbrace{2\cdot\cos\frac{2\cdot\pi}{7}}_{\text{realni dio}}+i\cdot\underbrace{2\cdot\sin\frac{2\cdot\pi}{7}}_{\text{imaginarni dio}} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow |z|=\sqrt{\left(2\cdot\cos\frac{2\cdot\pi}{7}\right)^2+\left(2\cdot\sin\frac{2\cdot\pi}{7}\right)^2} \Rightarrow |z|=\sqrt{2^2\cdot\left(\cos\frac{2\cdot\pi}{7}\right)^2+2^2\cdot\left(\sin\frac{2\cdot\pi}{7}\right)^2} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow |z|=\sqrt{4\cdot\cos^2\frac{2\cdot\pi}{7}+4\cdot\sin^2\frac{2\cdot\pi}{7}} \Rightarrow |z|=\sqrt{4\cdot\left(\cos^2\frac{2\cdot\pi}{7}+\sin^2\frac{2\cdot\pi}{7}\right)} \Rightarrow |z|=\sqrt{4\cdot 1} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow |z|=\sqrt{4} \Rightarrow |z|=2.$$

Vježba 145

Odredite apsolutnu vrijednost broja $z=3\cdot\cos\frac{\pi}{7}+i\cdot 3\cdot\sin\frac{\pi}{7}$.

Rezultat: 3.

Zadatak 146 (Ante, srednja škola)

Izračunaj $(1-i)^4\cdot(1+i)^6$.

$A.\ 16\cdot i \qquad B.\ 32\cdot i \qquad C.\ i \qquad D.\ 0$

Rješenje 146

Ponovimo!

$$\left(a^n\right)^m=a^{n\cdot m} \quad , \quad (a+b)^2=a^2+2\cdot a\cdot b+b^2 \quad , \quad (a-b)^2=a^2-2\cdot a\cdot b+b^2.$$

$$(a\cdot b)^n=a^n\cdot b^n \quad , \quad i^2=-1 \quad , \quad i^3=-i \quad , \quad a^n\cdot a^m=a^{n+m}.$$

1.inačica

$$(1-i)^4\cdot(1+i)^6=\left((1-i)^2\right)^2\cdot\left((1+i)^2\right)^3=\left(1-2\cdot i+i^2\right)^2\cdot\left(1+2\cdot i+i^2\right)^3=(1-2\cdot i-1)^2\cdot(1+2\cdot i-1)^3=$$

$$=(1-2\cdot i-1)^2\cdot(1+2\cdot i-1)^3=(-2\cdot i)^2\cdot(2\cdot i)^3=(-2)^2\cdot i^2\cdot 2^3\cdot i^3=4\cdot(-1)\cdot 8\cdot(-i)=32\cdot i.$$

Odgovor je pod B.

2.inačica

$$(1-i)^4\cdot(1+i)^6=(1-i)^4\cdot(1+i)^4\cdot(1+i)^2=((1-i)\cdot(1+i))^4\cdot(1+i)^2=\left(1^2+1^2\right)^4\cdot(1+i)^2=$$

$$=(1+1)^4\cdot\left(1+2\cdot i+i^2\right)=2^4\cdot(1+2\cdot i-1)=16\cdot(1+2\cdot i-1)=16\cdot 2\cdot i=32\cdot i.$$

Odgovor je pod B.

Vježba 146

Izračunaj $(i-1)^4\cdot(i+1)^6$.

$A.\ 16\cdot i \qquad B.\ 32\cdot i \qquad C.\ i \qquad D.\ 0$

Rezultat: B.

Zadatak 147 (MS, gimnazija)

Ako je $z=2+11\cdot i$, onda je $\sqrt[3]{z}+\sqrt[3]{\overline{z}}=4.$ Dokazati.

Rješenje 147

Ponovimo!

Kompleksan broj je broj oblika

$$z=x+y\cdot i,$$

gdje su x i y realni brojevi, a i imaginarna jedinica. Broj x zove se realni dio kompleksnog broja z, a broj y imaginarni dio kompleksnog broja z. Pišemo:

$$x=\operatorname{Re} z \quad , \quad y=\operatorname{Im} z.$$

Standardni ili algebarski oblik kompleksnog broja je oblika

$$z=x+y\cdot i,$$

gdje su x i y realni brojevi.

Za kompleksne brojeve $x+y\cdot i$ i $x-y\cdot i$ kažemo da su kompleksno konjugirani jedan drugome. Simbol konjugiranja jest povlaka iznad broja koji se konjugira:

$$z=x+y\cdot i \;\Rightarrow\; \overline{z}=x-y\cdot i.$$

$$\left.\begin{array}{l} z=x+y\cdot i \\ \overline{z}=x-y\cdot i \end{array}\right\} \Rightarrow z\cdot\overline{z}=x^2+y^2 \quad , \quad \left(\sqrt[n]{a}\right)^m=\sqrt[n]{a^m} \quad , \quad \sqrt[n]{a}\cdot\sqrt[n]{b}=\sqrt[n]{a\cdot b}.$$

$$\sqrt{a^2\cdot b}+\sqrt{a\cdot b^2}=\sqrt{a\cdot b}\cdot\left(\sqrt{a}+\sqrt{b}\right) \quad , \quad \sqrt[3]{a^3}=a \quad , \quad i^2=-1 \quad , \quad i^3=-i.$$

$$(a+b)^3=a^3+3\cdot a^2\cdot b+3\cdot a\cdot b^2+b^3 \quad , \quad (a-b)^3=a^3-3\cdot a^2\cdot b+3\cdot a\cdot b^2-b^3.$$

Zakon distribucije množenja prema zbrajanju.

$$a\cdot(b+c)=a\cdot b+a\cdot c \quad , \quad a\cdot b+a\cdot c=a\cdot(b+c).$$

1.inačica

Ako je $z=2+11\cdot i$, onda je $\overline{z}=2-11\cdot i.$

Transformiramo $z=2+11\cdot i$ i $\overline{z}=2-11\cdot i.$

- $z=2+11\cdot i \Rightarrow z=(8-6)+(12\cdot i-i) \Rightarrow z=8-6+12\cdot i-i \Rightarrow z=8+12\cdot i-6-i \Rightarrow$
  $$\Rightarrow z=2^3+3\cdot 2^2\cdot i+3\cdot 2\cdot i^2+i^3 \Rightarrow z=(2+i)^3.$$
- $\overline{z}=2-11\cdot i \Rightarrow \overline{z}=(8-6)+(-12\cdot i+i) \Rightarrow \overline{z}=8-6-12\cdot i+i \Rightarrow \overline{z}=8-12\cdot i-6+i \Rightarrow$
  $$\Rightarrow \overline{z}=2^3-3\cdot 2^2\cdot i+3\cdot 2\cdot i^2-i^3 \Rightarrow \overline{z}=(2-i)^3.$$

Tada vrijedi:

$$\sqrt[3]{z}+\sqrt[3]{\overline{z}}=\sqrt[3]{(2+i)^3}+\sqrt[3]{(2-i)^3}=2+i+2-i=2+i+2-i=4.$$

2.inačica

Ako je $z = 2 + 11 \cdot i$, onda je $\overline{z} = 2 - 11 \cdot i$.

$$\sqrt[3]{z} + \sqrt[3]{\overline{z}} = 4 \Rightarrow \begin{bmatrix} \text{kubiramo} \\ \text{jednakost} \end{bmatrix} \Rightarrow \sqrt[3]{z} + \sqrt[3]{\overline{z}} = 4 \ /^3 \Rightarrow \left(\sqrt[3]{z} + \sqrt[3]{\overline{z}}\right)^3 = 4^3 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \left(\sqrt[3]{z}\right)^3 + 3 \cdot \left(\sqrt[3]{z}\right)^2 \cdot \sqrt[3]{\overline{z}} + 3 \cdot \sqrt[3]{z} \cdot \left(\sqrt[3]{\overline{z}}\right)^2 + \left(\sqrt[3]{\overline{z}}\right)^3 = 4^3 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow z + 3 \cdot \sqrt[3]{z^2} \cdot \sqrt[3]{\overline{z}} + 3 \cdot \sqrt[3]{z} \cdot \sqrt[3]{\overline{z}^2} + \overline{z} = 64 \Rightarrow z + 3 \cdot \sqrt[3]{z^2 \cdot \overline{z}} + 3 \cdot \sqrt[3]{z \cdot \overline{z}^2} + \overline{z} = 64 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow z + 3 \cdot \sqrt[3]{z \cdot \overline{z}} \cdot \left(\sqrt[3]{z} + \sqrt[3]{\overline{z}}\right) + \overline{z} = 64 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 2 + 11 \cdot i + 3 \cdot \sqrt[3]{(2 + 11 \cdot i) \cdot (2 - 11 \cdot i)} \cdot \left(\sqrt[3]{z} + \sqrt[3]{\overline{z}}\right) + 2 - 11 \cdot i = 64 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 2 + 11 \cdot i + 3 \cdot \sqrt[3]{2^2 + 11^2} \cdot \left(\sqrt[3]{z} + \sqrt[3]{\overline{z}}\right) + 2 - 11 \cdot i = 64 \Rightarrow 2 + 3 \cdot \sqrt[3]{4 + 121} \cdot \left(\sqrt[3]{z} + \sqrt[3]{\overline{z}}\right) + 2 = 64 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 4 + 3 \cdot \sqrt[3]{125} \cdot \left(\sqrt[3]{z} + \sqrt[3]{\overline{z}}\right) = 64 \Rightarrow 4 + 3 \cdot \sqrt[3]{5^3} \cdot \left(\sqrt[3]{z} + \sqrt[3]{\overline{z}}\right) = 64 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 4 + 3 \cdot 5 \cdot \left(\sqrt[3]{z} + \sqrt[3]{\overline{z}}\right) = 64 \Rightarrow 4 + 15 \cdot \left(\sqrt[3]{z} + \sqrt[3]{\overline{z}}\right) = 64 \Rightarrow 15 \cdot \left(\sqrt[3]{z} + \sqrt[3]{\overline{z}}\right) = 64 - 4 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 15 \cdot \left(\sqrt[3]{z} + \sqrt[3]{\overline{z}}\right) = 60 \Rightarrow \begin{bmatrix} \text{pretpostavka} \\ \sqrt[3]{z} + \sqrt[3]{\overline{z}} = 4 \end{bmatrix} \Rightarrow 15 \cdot \underbrace{\left(\sqrt[3]{z} + \sqrt[3]{\overline{z}}\right)}_{4} = 60 \Rightarrow 15 \cdot 4 = 60 \Rightarrow 60 = 60.$$

Dobije se istinita jednakost. Dakle, početna pretpostavka je točna.

Vježba 147

Ako je $z = 2 - 11 \cdot i$, onda je $\sqrt[3]{z} + \sqrt[3]{\overline{z}} = 4$. Dokazati.

Rezultat: Dokaz analogan.

Zadatak 148 (4A, TUPŠ)

Realan dio kompleksnog broja $\frac{6 + b \cdot i}{1 - 2 \cdot i}$ jednak je 4. Koliki je realan broj b?

Rješenje 148

Ponovimo!

$$\frac{a}{b} \cdot \frac{c}{d} = \frac{a \cdot c}{b \cdot d} \quad , \quad i^2 = -1.$$

Kompleksan broj je broj oblika

$$z = x + y \cdot i,$$

gdje su x i y realni brojevi, a i imaginarna jedinica. Broj x zove se realni dio kompleksnog broja z, a broj y imaginarni dio kompleksnog broja z. Pišemo:

$$x = \operatorname{Re} z \quad , \quad y = \operatorname{Im} z.$$

Standardni ili algebarski oblik kompleksnog broja je oblika

$$z = x + y \cdot i,$$

gdje su x i y realni brojevi.

Za kompleksne brojeve x + y · i i x – y · i kažemo da su kompleksno konjugirani jedan drugome.

Simbol konjugiranja jest povlaka iznad broja koji se konjugira:

$$z = x + y \cdot i \Rightarrow \overline{z} = x - y \cdot i.$$

Množenje zagrada

$$(a+b)\cdot(c+d)=a\cdot c+a\cdot d+b\cdot c+b\cdot d.$$

$$\left.\begin{array}{l} z=x+y\cdot i \\ \bar{z}=x-y\cdot i \end{array}\right\} \Rightarrow z\cdot\bar{z}=(x+y\cdot i)\cdot(x-y\cdot i)=x^2+y^2.$$

Zakon distribucije množenja prema zbrajanju.

$$a\cdot(b+c)=a\cdot b+a\cdot c \quad , \quad a\cdot b+a\cdot c=a\cdot(b+c).$$

$$z=\frac{6+b\cdot i}{1-2\cdot i} \Rightarrow z=\frac{6+b\cdot i}{1-2\cdot i}\cdot\frac{1+2\cdot i}{1+2\cdot i} \Rightarrow z=\frac{(6+b\cdot i)\cdot(1+2\cdot i)}{(1-2\cdot i)\cdot(1+2\cdot i)} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow z=\frac{6+12\cdot i+b\cdot i+2\cdot b\cdot i^2}{1^2+2^2} \Rightarrow z=\frac{6+12\cdot i+b\cdot i+2\cdot b\cdot(-1)}{1+4} \Rightarrow z=\frac{6+12\cdot i+b\cdot i-2\cdot b}{5} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow z=\frac{(6-2\cdot b)+(12+b)\cdot i}{5} \Rightarrow z=\frac{6-2\cdot b}{5}+\frac{12+b}{5}\cdot i \Rightarrow \left.\begin{array}{l} \operatorname{Re} z=\dfrac{6-2\cdot b}{5} \\ \operatorname{Im} z=\dfrac{12+b}{5} \end{array}\right\}.$$

Iz uvjeta slijedi:

$$\left.\begin{array}{l} \operatorname{Re} z=\dfrac{6-2\cdot b}{5} \\ \operatorname{Re} z=4 \end{array}\right\} \Rightarrow \frac{6-2\cdot b}{5}=4 \Rightarrow \frac{6-2\cdot b}{5}=4 \;/\cdot 5 \Rightarrow 6-2\cdot b=20 \Rightarrow -2\cdot b=20-6 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow -2\cdot b=14 \Rightarrow -2\cdot b=14 \;/:(-2) \Rightarrow b=-7.$$

Vježba 148

Realan dio kompleksnog broja $\frac{6+b\cdot i}{1-2\cdot i}$ jednak je 2. Koliki je realan broj b?

Rezultat: b = – 2.

Zadatak 149 (Vesna, gimnazija)

Odredi realne brojeve x i y iz jednakosti $\frac{x\cdot i}{1-i}+\frac{y\cdot i}{1+i}=\frac{1}{i}$.

Rješenje 149

Ponovimo!

$$i=\sqrt{-1} \quad , \quad i^2=-1 \quad , \quad \frac{a}{b}\cdot\frac{c}{d}=\frac{a\cdot c}{b\cdot d}.$$

Kompleksan broj je broj oblika

$$z=x+y\cdot i,$$

gdje su x i y realni brojevi, a i imaginarna jedinica. Broj x zove se realni dio kompleksnog broja z, a broj y imaginarni dio kompleksnog broja z. Pišemo:

$$x=\operatorname{Re} z \quad , \quad y=\operatorname{Im} z.$$

Standardni ili algebarski oblik kompleksnog broja je oblika

$$z=x+y\cdot i,$$

gdje su x i y realni brojevi.

Za kompleksne brojeve $x + y \cdot i$ i $x - y \cdot i$ kažemo da su kompleksno konjugirani jedan drugome.

Simbol konjugiranja jest povlaka iznad broja koji se konjugira:

$$z=x+y\cdot i \Rightarrow \bar{z}=x-y\cdot i.$$

Množenje zagrada

$$(a+b)\cdot(c+d)=a\cdot c+a\cdot d+b\cdot c+b\cdot d.$$

$$\left.\begin{array}{l} z=x+y\cdot i \\ \overline{z}=x-y\cdot i \end{array}\right\} \Rightarrow z\cdot\overline{z}=(x+y\cdot i)\cdot(x-y\cdot i)=x^2+y^2.$$

Zakon distribucije množenja prema zbrajanju.

$$a\cdot(b+c)=a\cdot b+a\cdot c \quad , \quad a\cdot b+a\cdot c=a\cdot(b+c).$$

Proširiti razlomak znači brojnik i nazivnik tog razlomka pomnožiti istim brojem različitim od nule i jedinice

$$\frac{a}{b}=\frac{a\cdot n}{b\cdot n} \;,\; n\neq 0 \;,\; n\neq 1.$$

Dva su kompleksna broja jednaka ako i samo ako su im međusobno jednaki realni dijelovi i međusobno jednaki imaginarni dijelovi, tj.

$$a+b\cdot i=c+d\cdot i \;\Leftrightarrow\; a=c \;,\; b=d.$$

$$\frac{x\cdot i}{1-i}+\frac{y\cdot i}{1+i}=\frac{1}{i} \Rightarrow \frac{x\cdot i}{1-i}\cdot\frac{1+i}{1+i}+\frac{y\cdot i}{1+i}\cdot\frac{1-i}{1-i}=\frac{1}{i}\cdot\frac{-i}{-i} \Rightarrow \frac{x\cdot i\cdot(1+i)}{(1-i)\cdot(1+i)}+\frac{y\cdot i\cdot(1-i)}{(1+i)\cdot(1-i)}=\frac{-i}{-i^2} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \frac{x\cdot i+x\cdot i^2}{1^2+1^2}+\frac{y\cdot i-y\cdot i^2}{1^2+1^2}=\frac{-i}{-(-1)} \Rightarrow \frac{x\cdot i+x\cdot(-1)}{1+1}+\frac{y\cdot i-y\cdot(-1)}{1+1}=\frac{-i}{1} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \frac{x\cdot i-x}{2}+\frac{y\cdot i+y}{2}=\frac{-i}{1} \Rightarrow \frac{x\cdot i-x}{2}+\frac{y\cdot i+y}{2}=\frac{-i}{1} \;/\cdot 2 \Rightarrow x\cdot i-x+y\cdot i+y=-2\cdot i \Rightarrow$$

$$\Rightarrow (-x+y)+(x\cdot i+y\cdot i)=-2\cdot i \Rightarrow (-x+y)+(x+y)\cdot i=-2\cdot i \Rightarrow (-x+y)+(x+y)\cdot i=0-2\cdot i \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{bmatrix}\text{jednakost}\\ \text{kompleksnih brojeva}\end{bmatrix} \Rightarrow \left.\begin{array}{l} -x+y=0 \\ x+y=-2 \end{array}\right\} \Rightarrow \begin{bmatrix}\text{metoda suprotnih}\\ \text{koeficijenata}\end{bmatrix} \Rightarrow 2\cdot y=-2 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 2\cdot y=-2 \;/:2 \Rightarrow y=-1.$$

Računamo x.

$$\left.\begin{array}{l} x+y=-2 \\ y=-1 \end{array}\right\} \Rightarrow x-1=-2 \Rightarrow x=-2+1 \Rightarrow x=-1.$$

Za realne brojeve x i y vrijedi:

$$(x,\; y)=(-1,\,-1).$$

Vježba 149

Odredi realne brojeve x i y iz jednakosti $\frac{x\cdot i}{i+1}-\frac{y\cdot i}{i-1}=\frac{1}{i}$.

Rezultat: $(x,\; y)=(-1,\,-1)$.

Zadatak 150 (Vesna, gimnazija)

Izračunaj: $(1-i)^2\cdot(1-2\cdot i)^2\cdot(1-3\cdot i)^2$.

Rješenje 150

Ponovimo!

$$a^n\cdot b^n=(a\cdot b)^n \quad , \quad i=\sqrt{-1} \quad , \quad i^2=-1.$$

Kompleksan broj je broj oblika

$$z=x+y\cdot i,$$

gdje su x i y realni brojevi, a i imaginarna jedinica. Broj x zove se realni dio kompleksnog broja z, a broj y imaginarni dio kompleksnog broja z. Pišemo:

$$x = \operatorname{Re} z \quad , \quad y = \operatorname{Im} z.$$

Standardni ili algebarski oblik kompleksnog broja je oblika

$$z = x + y \cdot i,$$

gdje su x i y realni brojevi.
Za kompleksne brojeve $x + y \cdot i$ i $x - y \cdot i$ kažemo da su kompleksno konjugirani jedan drugome.
Simbol konjugiranja jest povlaka iznad broja koji se konjugira:

$$z = x + y \cdot i \Rightarrow \overline{z} = x - y \cdot i.$$

Množenje zagrada

$$(a + b) \cdot (c + d) = a \cdot c + a \cdot d + b \cdot c + b \cdot d.$$

$$\left. \begin{array}{l} z = x + y \cdot i \\ \overline{z} = x - y \cdot i \end{array} \right\} \Rightarrow z \cdot \overline{z} = (x + y \cdot i) \cdot (x - y \cdot i) = x^2 + y^2.$$

Zakon distribucije množenja prema zbrajanju.

$$a \cdot (b + c) = a \cdot b + a \cdot c \quad , \quad a \cdot b + a \cdot c = a \cdot (b + c).$$

$$(1-i)^2 \cdot (1-2 \cdot i)^2 \cdot (1-3 \cdot i)^2 = ((1-i) \cdot (1-2 \cdot i) \cdot (1-3 \cdot i))^2 = \left(\left(1-2 \cdot i-i+2 \cdot i^2\right) \cdot (1-3 \cdot i)\right)^2 =$$

$$= ((1-2 \cdot i-i+2 \cdot (-1)) \cdot (1-3 \cdot i))^2 = ((1-2 \cdot i-i-2) \cdot (1-3 \cdot i))^2 = ((-1-3 \cdot i) \cdot (1-3 \cdot i))^2 =$$

$$= (-(1+3 \cdot i) \cdot (1-3 \cdot i))^2 = \left(-\left(1^2+3^2\right)\right)^2 = (-(1+9))^2 = (-10)^2 = 100.$$

Vježba 150

Izračunaj: $(1-i)^4 \cdot (1-2 \cdot i)^4 \cdot (1-3 \cdot i)^4$.

Rezultat: 10000.

Zadatak 151 (2A, TUPŠ)

Odredi realne brojeve x i y iz jednakosti $(1-i) \cdot x + (1+i) \cdot y = i.$

Rješenje 151

Ponovimo!

Kompleksan broj je broj oblika

$$z = x + y \cdot i,$$

gdje su x i y realni brojevi, a i imaginarna jedinica. Broj x zove se realni dio kompleksnog broja z, a broj y imaginarni dio kompleksnog broja z. Pišemo:

$$x = \operatorname{Re} z \quad , \quad y = \operatorname{Im} z.$$

Standardni ili algebarski oblik kompleksnog broja je oblika

$$z = x + y \cdot i,$$

gdje su x i y realni brojevi.
Dva su kompleksna broja jednaka ako i samo ako su im međusobno jednaki realni dijelovi i međusobno jednaki imaginarni dijelovi, tj.

$$a + b \cdot i = c + d \cdot i \Leftrightarrow a = c \ , \ b = d.$$

Zakon distribucije množenja prema zbrajanju.

$$a \cdot (b + c) = a \cdot b + a \cdot c \quad , \quad a \cdot b + a \cdot c = a \cdot (b + c).$$

$$(1-i) \cdot x + (1+i) \cdot y = i \Rightarrow x - x \cdot i + y + y \cdot i = i \Rightarrow x + y - x \cdot i + y \cdot i = i \Rightarrow (x+y) + (-x+y) \cdot i = i \Rightarrow$$

$$\Rightarrow\ (x+y)+(-x+y)\cdot i=0+1\cdot i\ \Rightarrow \begin{bmatrix}\text{jednakost}\\ \text{kompleksnih}\\ \text{brojeva}\end{bmatrix} \Rightarrow \left.\begin{array}{r} x+y=0\\ -x+y=1\end{array}\right\} \Rightarrow \begin{bmatrix}\text{metoda suprotnih}\\ \text{koeficijenata}\end{bmatrix} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow\ 2\cdot y=1\ \Rightarrow\ 2\cdot y=1\ /:2\ \Rightarrow\ y=\frac{1}{2}.$$

Računamo x.

$$\left.\begin{array}{l} x+y=0\\ y=\frac{1}{2}\end{array}\right\} \Rightarrow\ x+\frac{1}{2}=0\ \Rightarrow\ x=-\frac{1}{2}.$$

Rješenje je:

$$(x,\ y)=\left(-\frac{1}{2},\ \frac{1}{2}\right).$$

Vježba 151

Odredi realne brojeve x i y iz jednakosti $(1+i)\cdot x+(1-i)\cdot y=i.$

Rezultat: $(x,\ y)=\left(\frac{1}{2},\ -\frac{1}{2}\right).$

Zadatak 152 (2A, TUPŠ)

Odredi realni i imaginarni dio kompleksnog broja $z=\frac{4+2\cdot\sqrt{2}-6\cdot\sqrt{2}\cdot i}{2}.$

Rješenje 152

Ponovimo!

$$\frac{a}{n}-\frac{b}{n}=\frac{a-b}{n}.$$

Kompleksan broj je broj oblika

$$z=x+y\cdot i,$$

gdje su x i y realni brojevi, a i imaginarna jedinica. Broj x zove se realni dio kompleksnog broja z, a broj y imaginarni dio kompleksnog broja z. Pišemo:

$$x=\operatorname{Re} z\quad,\quad y=\operatorname{Im} z.$$

Standardni ili algebarski oblik kompleksnog broja je oblika

$$z=x+y\cdot i,$$

gdje su x i y realni brojevi.

Zakon distribucije množenja prema zbrajanju.

$$a\cdot(b+c)=a\cdot b+a\cdot c\quad,\quad a\cdot b+a\cdot c=a\cdot(b+c).$$

Skratiti razlomak znači brojnik i nazivnik tog razlomka podijeliti istim brojem različitim od nule i jedinice

$$\frac{a\cdot n}{b\cdot n}=\frac{a}{b}\ ,\ n\neq 0\ ,\ n\neq 1.$$

$$z=\frac{4+2\cdot\sqrt{2}-6\cdot\sqrt{2}\cdot i}{2}\ \Rightarrow\ z=\frac{\left(4+2\cdot\sqrt{2}\right)-6\cdot\sqrt{2}\cdot i}{2}\ \Rightarrow\ z=\frac{4+2\cdot\sqrt{2}}{2}-\frac{6\cdot\sqrt{2}}{2}\cdot i\ \Rightarrow$$

$$\Rightarrow\ z=\frac{2\cdot\left(2+\sqrt{2}\right)}{2}-\frac{6\cdot\sqrt{2}}{2}\cdot i\ \Rightarrow\ z=\frac{2\cdot\left(2+\sqrt{2}\right)}{2}-\frac{6\cdot\sqrt{2}}{2}\cdot i\ \Rightarrow\ z=2+\sqrt{2}-3\cdot\sqrt{2}\cdot i\ \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \left.\begin{array}{l} \mathrm{Re}(z) = 2 + \sqrt{2} \\ \mathrm{Im}(z) = -3 \cdot \sqrt{2} \end{array}\right\}.$$

Vježba 152

Odredi realni i imaginarni dio kompleksnog broja $z = \dfrac{6 + 2 \cdot \sqrt{2} + 6 \cdot \sqrt{2} \cdot i}{2}$.

Rezultat: $\mathrm{Re}(z) = 3 + \sqrt{2}$, $\mathrm{Im}(z) = 3 \cdot \sqrt{2}$.

Zadatak 153 (2A, TUPŠ)

Pojednostavnite $(1 - i)^8$.

Rješenje 153

Ponovimo!

$$\left(a^n\right)^m = a^{n \cdot m} \quad , \quad (a - b)^2 = a^2 - 2 \cdot a \cdot b + b^2 \quad , \quad i^2 = -1.$$

$$(a \cdot b)^n = a^n \cdot b^n \quad , \quad i^4 = 1.$$

Kompleksan broj je broj oblika

$$z = x + y \cdot i,$$

gdje su x i y realni brojevi, a i imaginarna jedinica. Broj x zove se realni dio kompleksnog broja z, a broj y imaginarni dio kompleksnog broja z. Pišemo:

$$x = \mathrm{Re}\, z \quad , \quad y = \mathrm{Im}\, z.$$

Standardni ili algebarski oblik kompleksnog broja je oblika

$$z = x + y \cdot i,$$

gdje su x i y realni brojevi.

$$(1 - i)^8 = \left((1 - i)^2\right)^4 = \left(1^2 - 2 \cdot 1 \cdot i + i^2\right)^4 = (1 - 2 \cdot i - 1)^4 = (1 - 2 \cdot i - 1)^4 =$$

$$= (-2 \cdot i)^4 = (-2)^4 \cdot i^4 = 16 \cdot 1 = 16.$$

Vježba 153

Pojednostavnite $(1 + i)^8$.

Rezultat: 16.

Zadatak 154 (Nina, gimnazija)

Zadan je kompleksan broj z = 1 + 2 · i. Koliko je $|z - 3|$?

$A.\ 0 \qquad B.\ 2 \cdot \sqrt{2} \qquad C.\ \sqrt{5} - 3 \qquad D.\ 3 - \sqrt{3}$

Rješenje 154

Ponovimo!

$$\sqrt{a \cdot b} = \sqrt{a} \cdot \sqrt{b}.$$

Kompleksan broj je broj oblika

$$z = x + y \cdot i,$$

gdje su x i y realni brojevi, a i imaginarna jedinica. Broj x zove se realni dio kompleksnog broja z, a broj y imaginarni dio kompleksnog broja z. Pišemo:

$$x = \mathrm{Re}\, z \quad , \quad y = \mathrm{Im}\, z.$$

Standardni ili algebarski oblik kompleksnog broja je oblika

$$z = x + y \cdot i,$$

gdje su x i y realni brojevi.

Modul ili apsolutna vrijednost kompleksnog broja $z = x + y \cdot i$ definira se formulom

$$|z| = \sqrt{x^2 + y^2}.$$

$$|z-3| = [\, z = 1 + 2 \cdot i \,] = |1 + 2 \cdot i - 3| = |-2 + 2 \cdot i| = \sqrt{(-2)^2 + 2^2} = \sqrt{4+4} = \sqrt{4 \cdot 2} =$$
$$= \sqrt{4} \cdot \sqrt{2} = 2 \cdot \sqrt{2}.$$

Vježba 154

Zadan je kompleksan broj $z = 2 + 2 \cdot i$. Koliko je $|z - 4|$?

$A.\ 0 \qquad B.\ 2 \cdot \sqrt{2} \qquad C.\ \sqrt{5} - 3 \qquad D.\ 3 - \sqrt{3}$

Rezultat: B.

Zadatak 155 (Ana, gimnazija)

Koji je od navedenih brojeva realan?

$$A.\ 2 \cdot (\cos \pi + i \cdot \sin \pi) \qquad B.\ 4 \cdot \left(\cos \frac{\pi}{2} + i \cdot \sin \frac{\pi}{2}\right)$$

$$C.\ 6 \cdot \left(\cos \frac{\pi}{3} + i \cdot \sin \frac{\pi}{3}\right) \qquad D.\ 8 \cdot \left(\cos \frac{\pi}{4} + i \cdot \sin \frac{\pi}{4}\right)$$

Rješenje 155

Ponovimo!

$$\cos \pi = -1 \quad , \quad \sin \pi = 0 \quad , \quad \cos \frac{\pi}{2} = 0 \quad , \quad \sin \frac{\pi}{2} = 1$$

$$\cos \frac{\pi}{3} = \frac{1}{2} \quad , \quad \sin \frac{\pi}{3} = \frac{\sqrt{3}}{2} \quad , \quad \cos \frac{\pi}{4} = \frac{\sqrt{2}}{2} \quad , \quad \sin \frac{\pi}{4} = \frac{\sqrt{2}}{2}$$

Skup realnih brojeva **R** je unija skupa racionalnih brojeva **Q** i skupa iracionalnih brojeva **I**.
Imaginarni brojevi imaju oblik $b \cdot i$ gdje je b realni broj koji nije jednak nuli, a i je imaginarna jedinica za koju vrijedi

$$i = \sqrt{-1}.$$

Kompleksan broj je broj oblika

$$z = x + y \cdot i,$$

gdje su x i y realni brojevi, a i imaginarna jedinica. Broj x zove se realni dio kompleksnog broja z, a broj y imaginarni dio kompleksnog broja z. Pišemo:

$$x = \operatorname{Re} z \quad , \quad y = \operatorname{Im} z.$$

Standardni ili algebarski oblik kompleksnog broja je oblika

$$z = x + y \cdot i,$$

gdje su x i y realni brojevi.
Zakon distribucije množenja prema zbrajanju.

$$a \cdot (b + c) = a \cdot b + a \cdot c \quad , \quad a \cdot b + a \cdot c = a \cdot (b + c).$$

Skratiti razlomak znači brojnik i nazivnik tog razlomka podijeliti istim brojem različitim od nule i jedinice

$$\frac{a \cdot n}{b \cdot n} = \frac{a}{b} \ , \ n \neq 0 \ , \ n \neq 1.$$

Preoblikujemo svaki od navedenih brojeva:

- $2 \cdot (\cos \pi + i \cdot \sin \pi) = 2 \cdot (-1 + i \cdot 0) = 2 \cdot (-1 + 0) = -2$ realan broj

- $4 \cdot \left(\cos \frac{\pi}{2} + i \cdot \sin \frac{\pi}{2} \right) = 4 \cdot (0 + i \cdot 1) = 4 \cdot (0 + i) = 4 \cdot i$ imaginaran broj
- $6 \cdot \left(\cos \frac{\pi}{3} + i \cdot \sin \frac{\pi}{3} \right) = 6 \cdot \left(\frac{1}{2} + i \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} \right) = 3 + 3 \cdot \sqrt{3} \cdot i$ kompleksan broj
- $8 \cdot \left(\cos \frac{\pi}{4} + i \cdot \sin \frac{\pi}{4} \right) = 8 \cdot \left(\frac{\sqrt{2}}{2} + i \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} \right) = 4 \cdot \sqrt{2} + 4 \cdot \sqrt{2} \cdot i$ kompleksan broj.

Odgovor je pod A.

Vježba 155

Koji je od navedenih brojeva imaginaran broj?

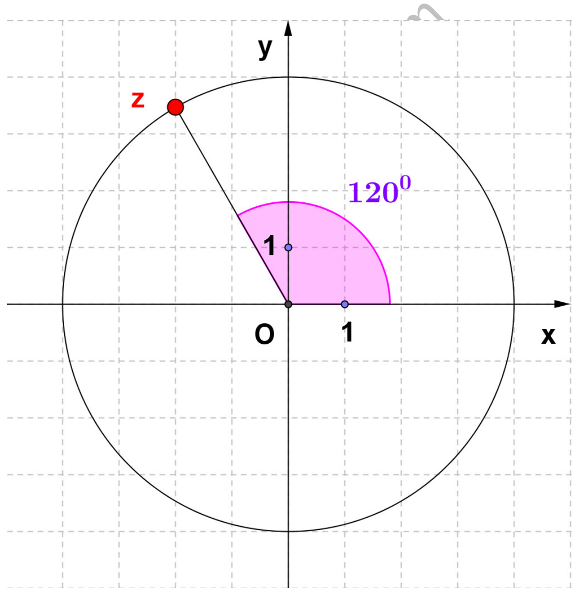
$$A.\ 2 \cdot (\cos \pi + i \cdot \sin \pi) \qquad B.\ 4 \cdot \left(\cos \frac{\pi}{2} + i \cdot \sin \frac{\pi}{2} \right)$$

$$C.\ 6 \cdot \left(\cos \frac{\pi}{3} + i \cdot \sin \frac{\pi}{3} \right) \qquad D.\ 8 \cdot \left(\cos \frac{\pi}{4} + i \cdot \sin \frac{\pi}{4} \right)$$

Rezultat: B.

Zadatak 156 (Darko, gimnazija)

Broj z prikazan je u kompleksnoj ravnini. Zapišite ga ili u trigonometrijskome ili u standardnome obliku.



Rješenje 156

Ponovimo!

$$\cos 120^0 = -\frac{1}{2} \quad , \quad \sin 120^0 = \frac{\sqrt{3}}{2} \quad , \quad \cos 60^0 = \frac{1}{2} \quad , \quad \sin 60^0 = \frac{\sqrt{3}}{2} \quad , \quad a \cdot \frac{b}{c} = \frac{a \cdot b}{c}.$$

Skratiti razlomak znači brojnik i nazivnik tog razlomka podijeliti istim brojem različitim od nule i jedinice

$$\frac{a \cdot n}{b \cdot n} = \frac{a}{b} \ , \ n \neq 0 \ , \ n \neq 1.$$

Zakon distribucije množenja prema zbrajanju.

$$a \cdot (b + c) = a \cdot b + a \cdot c \quad , \quad a \cdot b + a \cdot c = a \cdot (b + c).$$

Kompleksan broj je broj oblika

$$z = x + y \cdot i,$$

gdje su x i y realni brojevi, a i imaginarna jedinica. Broj x zove se realni dio kompleksnog broja z, a broj y imaginarni dio kompleksnog broja z. Pišemo:

$$x = \operatorname{Re} z \quad , \quad y = \operatorname{Im} z.$$

Standardni ili algebarski oblik kompleksnog broja je oblika

$$z = x + y \cdot i,$$

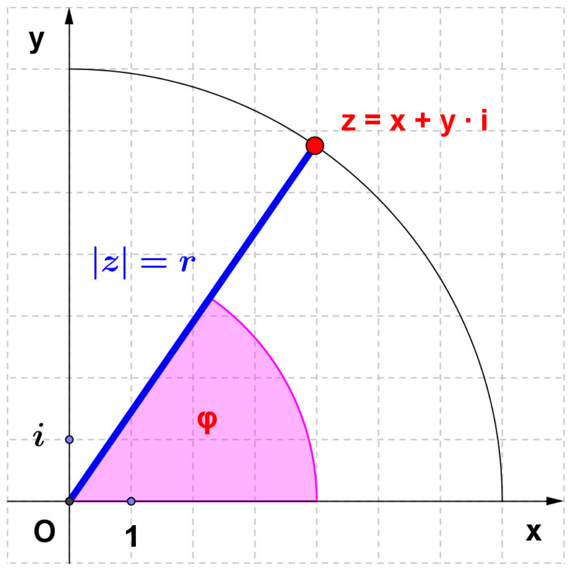
gdje su x i y realni brojevi. Kompleksne brojeve predočujemo u koordinatnoj ravnini koju zovemo kompleksna ili Gaussova ravnina.

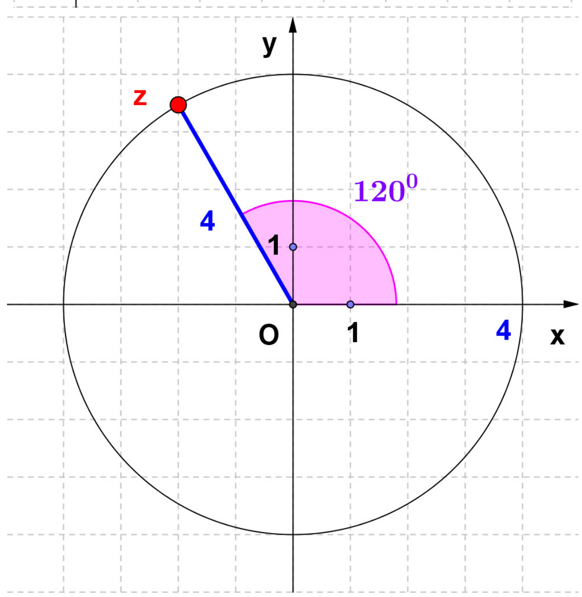
Trigonometrijski oblik kompleksnog broja

Svaki se kompleksan broj može prikazati u obliku

$$z = r \cdot (\cos\varphi + i \cdot \sin\varphi) \quad \text{ili} \quad z = |z| \cdot (\cos\varphi + i \cdot \sin\varphi).$$

Tu je r modul ili apsolutna vrijednost kompleksnog broja, r = | z |, mijenja se od 0 do + ∞, a argument ili amplituda φ = arg z od – ∞ do + ∞. Smisao okretanja oko ishodišta O uzima se pozitivnim, ako je protivan smislu okretanja kazaljke na satu.





Sa slike razabiremo da je modul kompleksnog broja z jednak polumjeru kružnice pa vrijedi:

$$\left.\begin{array}{l} r=4 \ , \ \varphi=120^0 \\ z=r\cdot(\cos\varphi+i\cdot\sin\varphi) \end{array}\right\} \Rightarrow z=4\cdot\left(\cos 120^0+i\cdot\sin 120^0\right) \Rightarrow z=4\cdot\left(-\frac{1}{2}+i\cdot\frac{\sqrt{3}}{2}\right) \Rightarrow$$

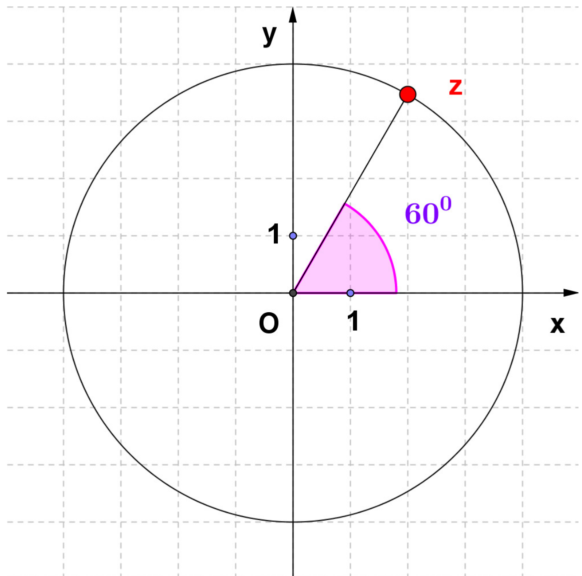
$$\Rightarrow z=-2+2\cdot\sqrt{3}\cdot i.$$

Trigonometrijski oblik kompleksnog broja glasi: $z=4\cdot\left(\cos 120^0+i\cdot\sin 120^0\right)$.

Standardni oblik kompleksnog broja glasi: $z=-2+2\cdot\sqrt{3}\cdot i$.

Vježba 156

Broj z prikazan je u kompleksnoj ravnini. Zapišite ga ili u trigonometrijskome ili u standardnome obliku.



Rezultat: $z=4\cdot\left(\cos 60^0+i\cdot\sin 60^0\right)$ ili $z=2+2\cdot\sqrt{3}\cdot i$.

Zadatak 157 (Marija, Enisa, pedagoški fakultet)

Izračunaj $(5-5\cdot i)^{20}$.

Rješenje 157

Ponovimo!

Zakon distribucije množenja prema zbrajanju.

$$a\cdot(b+c)=a\cdot b+a\cdot c \quad , \quad a\cdot b+a\cdot c=a\cdot(b+c).$$

Kompleksan broj je broj oblika

$$z=x+y\cdot i,$$

gdje su x i y realni brojevi, a i imaginarna jedinica. Broj x zove se realni dio kompleksnog broja z, a broj y imaginarni dio kompleksnog broja z.

$$(a\cdot b)^n=a^n\cdot b^n \quad , \quad \left(a^n\right)^m=a^{n\cdot m} \quad , \quad (a-b)^2=a^2-2\cdot a\cdot b+b^2 \quad , \quad (-a)^2=a^2.$$

$$i^2=-1 \quad , \quad a^n\cdot a^m=a^{n+m}.$$

Potencije imaginarne jedinice i

Za $n\in N$ vrijedi

$$i^{4\cdot n}=1 \quad , \quad i^{4\cdot n+1}=i \quad , \quad i^{4\cdot n+2}=-1 \quad , \quad i^{4\cdot n+3}=-i.$$

Preoblikujemo izraz:

$$(5-5\cdot i)^{20}=(5\cdot(1-i))^{20}=5^{20}\cdot(1-i)^{20}=5^{20}\cdot\left((1-i)^2\right)^{10}=5^{20}\cdot\left(1-2\cdot i+i^2\right)^{10}=$$

$$=5^{20}\cdot(1-2\cdot i-1)^{10}=5^{20}\cdot(1-2\cdot i-1)^{10}=5^{20}\cdot(-2\cdot i)^{10}=5^{20}\cdot(-2)^{10}\cdot i^{10}=5^{20}\cdot 2^{10}\cdot i^{10}=$$

$$=\begin{bmatrix}10:4=2\\ 2\end{bmatrix}=5^{20}\cdot 2^{10}\cdot i^2=5^{20}\cdot 2^{10}\cdot(-1)=-5^{20}\cdot 2^{10}=-\left(5^2\right)^{10}\cdot 2^{10}=-25^{10}\cdot 2^{10}=$$

$$=-(25\cdot 2)^{10}=-50^{10}.$$

Vježba 157

Izračunaj $(2-2\cdot i)^{20}$.

Rezultat: -2^{30}.

Zadatak 158 (Kiki, gimnazija)

Neka je z = x + y · i. Odredi realni i imaginarni dio kompleksnog broja $\frac{1}{z^2}$.

Rješenje 158

Ponovimo!

Kompleksan broj je broj oblika

$$z=x+y\cdot i,$$

gdje su x i y realni brojevi, a i imaginarna jedinica. Broj x zove se realni dio kompleksnog broja z, a broj y imaginarni dio kompleksnog broja z. Pišemo:

$$x=\operatorname{Re} z \quad , \quad y=\operatorname{Im} z.$$

Standardni ili algebarski oblik kompleksnog broja je oblika

$$z=x+y\cdot i,$$

gdje su x i y realni brojevi.

Za kompleksne brojeve x + y · i i x – y · i kažemo da su kompleksno konjugirani jedan drugome. Simbol konjugiranja jest povlaka iznad broja koji se konjugira:

$$z=x+y\cdot i \Rightarrow \bar{z}=x-y\cdot i.$$

$$(x+y\cdot i)\cdot(x-y\cdot i)=x^2+y^2.$$

Zakon distribucije množenja prema zbrajanju.

$$a\cdot(b+c)=a\cdot b+a\cdot c \quad , \quad a\cdot b+a\cdot c=a\cdot(b+c).$$

$$i^2=-1 \quad , \quad (a+b)^2=a^2+2\cdot a\cdot b+b^2 \quad , \quad (a\cdot b)^n=a^n\cdot b^n.$$

$$(a-b)^2=a^2-2\cdot a\cdot b+b^2 \quad , \quad \left(a^n\right)^m=a^{n\cdot m} \quad , \quad \frac{a-b}{n}=\frac{a}{n}-\frac{b}{n}.$$

$$\left(\frac{a}{b}\right)^n=\frac{a^n}{b^n} \quad , \quad \frac{a}{b}\cdot\frac{c}{d}=\frac{a\cdot c}{b\cdot d}.$$

1.inačica

$$\frac{1}{z^2}=\frac{1}{(x+y\cdot i)^2}=\frac{1}{x^2+2\cdot x\cdot y\cdot i+(y\cdot i)^2}=\frac{1}{x^2+2\cdot x\cdot y\cdot i+y^2\cdot i^2}=$$

$$=\frac{1}{x^2+2\cdot x\cdot y\cdot i+y^2\cdot(-1)}=\frac{1}{x^2+2\cdot x\cdot y\cdot i-y^2}=\frac{1}{x^2-y^2+2\cdot x\cdot y\cdot i}=$$

$$=\frac{1}{\left(x^2-y^2\right)+2\cdot x\cdot y\cdot i}=\frac{1}{\left(x^2-y^2\right)+2\cdot x\cdot y\cdot i}\cdot\frac{\left(x^2-y^2\right)-2\cdot x\cdot y\cdot i}{\left(x^2-y^2\right)-2\cdot x\cdot y\cdot i}=$$

$$=\frac{x^2-y^2-2\cdot x\cdot y\cdot i}{\left(x^2-y^2\right)^2+\left(2\cdot x\cdot y\right)^2}=\frac{x^2-y^2-2\cdot x\cdot y\cdot i}{\left(x^2\right)^2-2\cdot x^2\cdot y^2+\left(y^2\right)^2+4\cdot x^2\cdot y^2}=$$

$$=\frac{x^2-y^2-2\cdot x\cdot y\cdot i}{x^4-2\cdot x^2\cdot y^2+y^4+4\cdot x^2\cdot y^2}=\frac{x^2-y^2-2\cdot x\cdot y\cdot i}{x^4+2\cdot x^2\cdot y^2+y^4}=\frac{x^2-y^2-2\cdot x\cdot y\cdot i}{\left(x^2+y^2\right)^2}=$$

$$=\frac{x^2-y^2}{\left(x^2+y^2\right)^2}-\frac{2\cdot x\cdot y}{\left(x^2+y^2\right)^2}\cdot i.$$

Tada je:

$$\operatorname{Re}\left(\frac{1}{z^2}\right)=\frac{x^2-y^2}{\left(x^2+y^2\right)^2}\quad,\quad\operatorname{Im}\left(\frac{1}{z^2}\right)=-\frac{2\cdot x\cdot y}{\left(x^2+y^2\right)^2}.$$

2.inačica

$$\frac{1}{z^2}=\left(\frac{1}{z}\right)^2=\left(\frac{1}{x+y\cdot i}\right)^2=\left(\frac{1}{x+y\cdot i}\cdot\frac{x-y\cdot i}{x-y\cdot i}\right)^2=\left(\frac{x-y\cdot i}{x^2+y^2}\right)^2=\frac{\left(x-y\cdot i\right)^2}{\left(x^2+y^2\right)^2}=$$

$$=\frac{x^2-2\cdot x\cdot y\cdot i+\left(y\cdot i\right)^2}{\left(x^2+y^2\right)^2}=\frac{x^2-2\cdot x\cdot y\cdot i+y^2\cdot i^2}{\left(x^2+y^2\right)^2}=\frac{x^2-2\cdot x\cdot y\cdot i+y^2\cdot(-1)}{\left(x^2+y^2\right)^2}=$$

$$=\frac{x^2-2\cdot x\cdot y\cdot i-y^2}{\left(x^2+y^2\right)^2}=\frac{x^2-y^2-2\cdot x\cdot y\cdot i}{\left(x^2+y^2\right)^2}=\frac{x^2-y^2}{\left(x^2+y^2\right)^2}-\frac{2\cdot x\cdot y}{\left(x^2+y^2\right)^2}\cdot i.$$

Tada je:

$$\operatorname{Re}\left(\frac{1}{z^2}\right)=\frac{x^2-y^2}{\left(x^2+y^2\right)^2}\quad,\quad\operatorname{Im}\left(\frac{1}{z^2}\right)=-\frac{2\cdot x\cdot y}{\left(x^2+y^2\right)^2}.$$

Vježba 158

Neka je z = x + y · i. Odredi realni i imaginarni dio kompleksnog broja $\frac{1}{z^2}$.

Rezultat: $\operatorname{Re}\left(\frac{1}{z^2}\right)=\frac{5}{169}\quad,\quad\operatorname{Im}\left(\frac{1}{z^2}\right)=-\frac{12}{169}.$

Zadatak 159 (Ivan, veleučilište)

Neka je $f: C\to C$ funkcija definirana s f(x) = a · x + b, gdje su $a, b\in R$ konstante. Pokazati da za svaki $z\in C$ vrijedi jednakost $f\left(\bar{z}\right)=\overline{f\left(z\right)}$.

Rješenje 159

Ponovimo!

Kompleksan broj je broj oblika

$$z = x + y \cdot i,$$

gdje su x i y realni brojevi, a i imaginarna jedinica. Broj x zove se realni dio kompleksnog broja z, a broj y imaginarni dio kompleksnog broja z. Pišemo:

$$x = \operatorname{Re} z \quad , \quad y = \operatorname{Im} z.$$

Standardni ili algebarski oblik kompleksnog broja je oblika

$$z = x + y \cdot i,$$

gdje su x i y realni brojevi.
Za kompleksne brojeve $x + y \cdot i$ i $x - y \cdot i$ kažemo da su kompleksno konjugirani jedan drugome. Simbol konjugiranja jest povlaka iznad broja koji se konjugira:

$$z = x + y \cdot i \Rightarrow \bar{z} = \overline{x + y \cdot i} \Rightarrow \bar{z} = x - y \cdot i.$$

Zakon distribucije množenja prema zbrajanju.

$$a \cdot (b + c) = a \cdot b + a \cdot c \quad , \quad a \cdot b + a \cdot c = a \cdot (b + c).$$

Provjerimo jednakost $f(\bar{z}) = \overline{f(z)}$ tako da izračunamo svaku stranu posebno.

- $f(\bar{z}) = f(\overline{x + y \cdot i}) = f(x - y \cdot i) = [f(x) = a \cdot x + b] = a \cdot (x - y \cdot i) + b =$
  $= a \cdot x - a \cdot y \cdot i + b = a \cdot x + b - a \cdot y \cdot i,$
- $\overline{f(z)} = \overline{f(x + y \cdot i)} = [f(x) = a \cdot x + b] = \overline{a \cdot (x + y \cdot i) + b} = \overline{a \cdot x + a \cdot y \cdot i + b} =$
  $= \overline{a \cdot x + b + a \cdot y \cdot i} = a \cdot x + b - a \cdot y \cdot i.$

Zaključak:

$$\left.\begin{matrix} f(\bar{z}) = a \cdot x + b - a \cdot y \cdot i \\ \overline{f(z)} = a \cdot x + b - a \cdot y \cdot i \end{matrix}\right\} \Rightarrow f(\bar{z}) = \overline{f(z)}.$$

Vježba 159

Neka je $f : C \to C$ funkcija definirana s $f(x) = a \cdot x^2 + b \cdot x + c$, gdje su $a, b, c \in R$ konstante. Pokazati da za svaki $z \in C$ vrijedi jednakost $f(\bar{z}) = \overline{f(z)}.$

Rezultat: Dokaz analogan.

Zadatak 160 (Tessa, gimnazija)

Vrijednost potencije $\left(i^{4 \cdot k + 3}\right)^{8 \cdot k + 5}$, gdje je i imaginarna jedinica, a $k \in Z$ jednaka je:

$A.\ 1 \qquad B.\ i \qquad C.\ -1 \qquad D.\ -i$

Rješenje 160

Ponovimo!

$$a^1 = a \quad , \quad a^n \cdot a^m = a^{n+m} \quad , \quad \left(a^n\right)^m = a^{n \cdot m}.$$

Potencije imaginarne jedinice
Neka je k prirodni broj. Tada za potencije imaginarne jedinice i vrijedi:

$$i^{4 \cdot k} = 1 \quad , \quad i^{4 \cdot k + 1} = i \quad , \quad i^{4 \cdot k + 2} = -1 \quad , \quad i^{4 \cdot k + 3} = -i.$$

Ako je eksponent potencije imaginarne jedinice djeljiv s 4, vrijednost potencije je 1. Ako je ostatak pri dijeljenju eksponenta s 4 jednak 1, vrijednost potencije je i; ako je ostatak 2, vrijednost je – 1, a ako je ostatak 3, vrijednost potencije je – i.

$$\left(i^{4\cdot k+3}\right)^{8\cdot k+5}=(-i)^{8\cdot k+5}=(-i)^{8\cdot k+4}\cdot(-i)^{1}=(-i)^{8\cdot k+4}\cdot(-i)=$$

$$=\left((-i)^{2}\right)^{4\cdot k+2}\cdot(-i)=\left(i^{2}\right)^{4\cdot k+2}\cdot(-i)=\left(i^{4\cdot k+2}\right)^{2}\cdot(-i)=(-1)^{2}\cdot(-i)=1\cdot(-i)=-i.$$

Odgovor je pod D.

Vježba 160

Vrijednost potencije $\left(i^{4\cdot k+1}\right)^{8\cdot k+5}$, gdje je i imaginarna jedinica, a $k\in Z$ jednaka je:

$A.\ 1 \qquad B.\ i \qquad C.\ -1 \qquad D.\ -i$

Rezultat: B.