Zadatak 041 (Mirjana, gimnazija)

Kojoj krivulji pripada skup svih kompleksnih brojeva koji zadovoljavaju jednakost:

$$|z-i|+|z+i|=4?$$

Rješenje 041

Ako kompleksan broj prikažemo u obliku $z = x + y \cdot i$, tada je:

$$|x+y\cdot i-i|+|x+y\cdot i+i|=4 \Rightarrow |x+(y-1)\cdot i|+|x+(y+1)\cdot i|=4 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \sqrt{x^2+(y-1)^2}+\sqrt{x^2+(y+1)^2}=4 \Rightarrow \sqrt{x^2+(y-1)^2}=4-\sqrt{x^2+(y+1)^2} \;/^2 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow x^2+(y-1)^2=16-8\cdot\sqrt{x^2+(y+1)^2}+x^2+(y+1)^2 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow x^2+y^2-2\cdot y+1=16-8\cdot\sqrt{x^2+(y+1)^2}+x^2+y^2+2\cdot y+1 \Rightarrow 8\cdot\sqrt{x^2+(y+1)^2}=16+4\cdot y \;/:4 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 2\cdot\sqrt{x^2+(y+1)^2}=4+y \;/^2 \Rightarrow 4\cdot\left(x^2+(y+1)^2\right)=16+8\cdot y+y^2 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 4\cdot\left(x^2+y^2+2\cdot y+1\right)=16+8\cdot y+y^2 \Rightarrow 4\cdot x^2+4\cdot y^2+8\cdot y-y^2-8\cdot y=16-4 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 4\cdot x^2+4\cdot y^2+8\cdot y-y^2-8\cdot y=16-4 \Rightarrow 4\cdot x^2+3\cdot y^2=12. \Rightarrow (\text{elipsa})$$

Vježba 041

Kojoj krivulji pripada skup svih kompleksnih brojeva koji zadovoljavaju jednakost: $|z|=2$?

Rezultat: $x^2+y^2=4. \Rightarrow (\text{kružnica})$

Zadatak 042 (Mirjana, gimnazija)

Ako $z\in C$ zadovoljava jednakost $z\cdot\bar{z}-z-|z|^2=2-i$, koliko je z?

Rješenje 042

Neka je $z = x + y \cdot i$. Tada vrijedi:

$$z\cdot\bar{z}-z-|z|^2=2-i \Rightarrow (x+y\cdot i)\cdot(x-y\cdot i)-(x+y\cdot i)-\left(\sqrt{x^2+y^2}\right)^2=2-i \Rightarrow$$

$$\Rightarrow x^2+y^2-x-y\cdot i-x^2-y^2=2-i \Rightarrow -x-y\cdot i=2-i \Rightarrow \begin{cases}-x=2\\-y=-1\end{cases} \Rightarrow \begin{cases}x=-2\\y=1\end{cases} \Rightarrow z=-2+i.$$

Vježba 042

Ako $z\in C$ zadovoljava jednakost $z\cdot\bar{z}-z-|z|^2=2-i$, koliko je $\bar{z}$?

Rezultat: $\bar{z}=-2-i.$

Zadatak 043 (Mirjana, gimnazija)

Odredi imaginarni dio kompleksnog broja $z=\frac{1-i}{1+i}+\frac{1+i}{1-i}.$

Rješenje 043

1.inačica

$$z=\frac{1-i}{1+i}+\frac{1+i}{1-i}=\frac{(1-i)^2+(1+i)^2}{(1+i)\cdot(1-i)}=\frac{1-2\cdot i-1+1+2\cdot i-1}{1+1}=\frac{0}{2}=0=0+0\cdot i \Rightarrow \operatorname{Im} z=0.$$

2.inačica

$$z=\frac{1-i}{1+i}+\frac{1+i}{1-i}=\frac{1-i}{1+i}\cdot\frac{1-i}{1-i}+\frac{1+i}{1-i}\cdot\frac{1+i}{1+i}=\frac{(1-i)^2}{1+1}+\frac{(1+i)^2}{1+1}=\frac{1-2\cdot i-1}{2}+\frac{1+2\cdot i-1}{2}=\frac{-2\cdot i}{2}+\frac{2\cdot i}{2}=$$

$$=-i+i=0=0+0\cdot i \Rightarrow \operatorname{Im} z=0.$$

Vježba 043

Odredi realni dio kompleksnog broja $z=\frac{1-i}{1+i}+\frac{1+i}{1-i}.$

Rezultat: Re z = 0.

Zadatak 044 (Mira, gimnazija)

Izračunaj koliko je $z^{100}+z^{101}+z^{102}+z^{103}+z^{104}$, ako je z kompleksni broj za koji vrijedi $z+z^{-1}=1.$

Rješenje 044

Iz $z+\frac{1}{z}=1$ slijedi:

$$z+\frac{1}{z}=1\ /\cdot z\ \Rightarrow\ z^2-z+1=0.$$

Ako tu jednakost proširimo s z + 1, dobit ćemo:

$$z^2-z+1=0\ /\cdot(z+1)\ \Rightarrow\ (z+1)\cdot\left(z^2-z+1\right)=0\ \Rightarrow\ z^3+1=0\ \Rightarrow\ z^3=-1.$$

Vrijednost zadanog izraza glasi:

$$z^{100}+z^{101}+z^{102}+z^{103}+z^{104}=z^{100}\cdot\left(1+z+z^2+z^3+z^4\right)=\left(z^3\right)^{33}\cdot z\cdot\left(1+z+z^2+z^3+z^4\right)=$$

$$=(-1)^{33}\cdot z\cdot\left(1+z+z^2-1+z^4\right)=-z\cdot\left(z+z^2+z^4\right)=-z^2\cdot\left(1+z+z^3\right)=-z^2\cdot(1+z-1)=-z^2\cdot z=$$

$$=-z^3=-(-1)=1.$$

Vježba 044

Izračunaj koliko je $z^{100}+z^{103}$, ako je z kompleksni broj za koji vrijedi $z+z^{-1}=1.$

Rezultat: 0.

Zadatak 045 (Marko, gimnazija)

U Gaussovoj ravnini prikaži skup svih točaka koje su zadane uvjetom:

$$(1-i)\cdot\bar{z}=(1+i)\cdot z\ ,\ z=x+y\cdot i.$$

Rješenje 045

Iz jednakosti $(1-i)\cdot\bar{z}=(1+i)\cdot z$ dobivamo:

$$\left.\begin{array}{l} z=x+y\cdot i\ ,\ \bar{z}=x-y\cdot i \\ (1-i)\cdot\bar{z}=(1+i)\cdot z \end{array}\right\}\Rightarrow\ (1-i)\cdot(x-y\cdot i)=(1+i)\cdot(x+y\cdot i)\ \Rightarrow$$

$$\Rightarrow\ x-y\cdot i-x\cdot i-y=x+y\cdot i+x\cdot i-y\ \Rightarrow\ -2\cdot y\cdot i-2\cdot x\cdot i=0\ /:(-2)\ \Rightarrow\ y\cdot i+x\cdot i=0\ \Rightarrow$$

$$\Rightarrow\ (x+y)\cdot i=0\ \Rightarrow\ x+y=0\ \Rightarrow\ y=-x.$$

Skup svih točaka što je određen uvjetom jest simetrala drugog i četvrtog kvadranta.

Vježba 045

U Gaussovoj ravnini prikaži skup svih točaka koje su zadane uvjetom:

$$(1+i)\cdot\bar{z}=(1-i)\cdot z\ ,\ z=x+y\cdot i.$$

Rezultat: y = x (simetrala prvog i trećeg kvadranta)

Zadatak 046 (Marko, gimnazija)

Prikaži u Gaussovoj ravnini skup svih točaka z za koje je $|z|\geq 2$ i $|z+2\cdot i|\leq 2.$

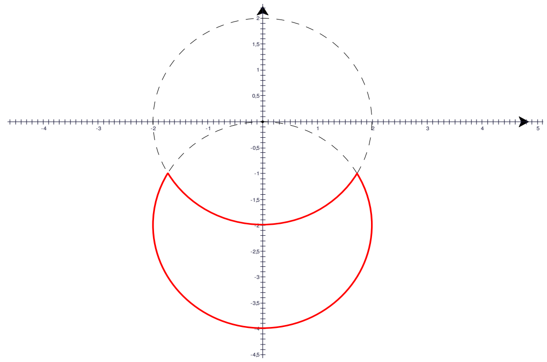
Rješenje 046

Ako kompleksan broj z prikažemo u standardnom obliku z = x + y · i, dobivamo:

$$|z| \geq 2 \Rightarrow \sqrt{x^2+y^2} \geq 2 \,/^2 \Rightarrow x^2+y^2 \geq 4 \Rightarrow [\text{vanjski dio kruga polumjera } 2 \text{ i središta } S(0,\,0)]$$

$$|z+2\cdot i| \leq 2 \Rightarrow |x+y\cdot i+2\cdot i| \leq 2 \Rightarrow |x+(y+2)\cdot i| \leq 2 \Rightarrow \sqrt{x^2+(y+2)^2} \leq 2 \,/^2 \Rightarrow$$

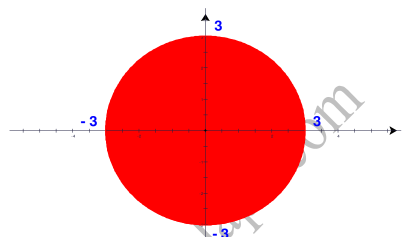
$$x^2+(y+2)^2 \leq 4 \Rightarrow [\text{unutarnji dio kruga polumjera } 2 \text{ i središta } S(0,\,-2)].$$



Vježba 046

Prikaži u Gaussovoj ravnini skup svih točaka z za koje je $|z| \leq 3.$

Rezultat:



Zadatak 047 (Mirjana, gimnazija)

Ako je $z=\frac{1}{2}\cdot\left(\sqrt{2+\sqrt{2}}+i\cdot\sqrt{2-\sqrt{2}}\right)$, koliko je z^{16}?

Rješenje 047

Ponovimo!

$$a^{n\cdot m}=\left(a^n\right)^m \quad , \quad (a+b)^2=a^2+2\cdot a\cdot b+b^2 \quad , \quad i^2=-1$$

$$z=\frac{1}{2}\cdot\left(\sqrt{2+\sqrt{2}}+i\cdot\sqrt{2-\sqrt{2}}\right) \Rightarrow z^{16}=\left[\frac{1}{2}\cdot\left(\sqrt{2+\sqrt{2}}+i\cdot\sqrt{2-\sqrt{2}}\right)\right]^{16}=$$

$$=\left[\left(\frac{1}{2}\cdot\left(\sqrt{2+\sqrt{2}}+i\cdot\sqrt{2-\sqrt{2}}\right)\right)^2\right]^8=\left[\frac{1}{4}\cdot\left(2+\sqrt{2}+2\cdot i\cdot\sqrt{2+\sqrt{2}}\cdot\sqrt{2-\sqrt{2}}-2+\sqrt{2}\right)\right]^8=$$

$$=\left[\frac{1}{4}\cdot\left(2\cdot\sqrt{2}+2\cdot i\cdot\sqrt{4-2}\right)\right]^8=\left[\frac{1}{4}\cdot\left(2\cdot\sqrt{2}+2\cdot i\cdot\sqrt{2}\right)\right]^8=\left[\frac{1}{4}\cdot 2\cdot\sqrt{2}\cdot(1+i)\right]^8=\left[\frac{\sqrt{2}}{2}\cdot(1+i)\right]^8=$$

$$=\left[\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\cdot(1+i)\right)^2\right]^4=\left[\frac{2}{4}\cdot(1+2\cdot i-1)\right]^4=\left[\frac{1}{2}\cdot 2\cdot i\right]^4=i^4=1.$$

Vježba 047

Ako je $z=\frac{1}{2}\cdot\left(\sqrt{2+\sqrt{2}}-i\cdot\sqrt{2-\sqrt{2}}\right)$, koliko je z^{16}?

Rezultat: 1.

Zadatak 048 (Mira, gimnazija)

Odredi parametar $b \in R, b \geq 0$ takav da je $\left|z_1 \cdot z_2 - z_1 \cdot \overline{z_2}\right| = 4 \cdot b$ ako je $z_1 = -1 - b \cdot \sqrt{-1}$, $z_2 = \sqrt{-4} - 1$.

Rješenje 048

$$\left.\begin{array}{l} z_1 = -1 - b \cdot \sqrt{-1} \\ z_2 = \sqrt{-4} - 1 \end{array}\right\} \Rightarrow \left.\begin{array}{l} z_1 = -1 - b \cdot i \\ z_2 = -1 + 2 \cdot i \ , \ \overline{z_2} = -1 - 2 \cdot i \end{array}\right\}.$$

$$\left|z_1 \cdot z_2 - z_1 \cdot \overline{z_2}\right| = 4 \cdot b \Rightarrow \left|z_1 \cdot \left(z_2 - \overline{z_2}\right)\right| = 4 \cdot b \Rightarrow \left|z_1\right| \cdot \left|z_2 - \overline{z_2}\right| = 4 \cdot b \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \sqrt{(-1)^2 + (-b)^2} \cdot \left|-1 + 2 \cdot i + 1 + 2 \cdot i\right| = 4 \cdot b \Rightarrow \sqrt{1 + b^2} \cdot \left|4 \cdot i\right| = 4 \cdot b \Rightarrow \sqrt{1 + b^2} \cdot 4 = 4 \cdot b \ /:4 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \sqrt{1 + b^2} = b \ /^2 \Rightarrow 1 + b^2 = b^2 \Rightarrow 1 = 0.$$

Zadatak nema rješenja.

Vježba 048

Odredi parametar $b \in R, b \geq 0$ takav da je $\left|z_1 \cdot z_2 - z_1 \cdot \overline{z_2}\right| = 6 \cdot b$ ako je $z_1 = -1 - b \cdot \sqrt{-1}$, $z_2 = \sqrt{-9} - 1$.

Rezultat: Zadatak nema rješenja.

Zadatak 049 (Gregor, gimnazija)

Koliki je umnožak realnih brojeva x i y za koje vrijedi $\frac{x-1}{3+i} + \frac{y-1}{3-i} = i$?

Rješenje 049

Ponovimo!

množenje konjugirano kompleksnih brojeva ili razlika kvadrata za kompleksne brojeve

$$(a + b \cdot i) \cdot (a - b \cdot i) = a^2 + b^2$$

jednakost kompleksnih brojeva

$$a + b \cdot i = c + d \cdot i \Rightarrow \left.\begin{array}{l} a = c \\ b = d \end{array}\right\}$$

$$\frac{x-1}{3+i} + \frac{y-1}{3-i} = i \Rightarrow \frac{(x-1) \cdot (3-i) + (y-1) \cdot (3+i)}{(3+i) \cdot (3-i)} = i \Rightarrow \frac{3 \cdot x - x \cdot i - 3 + i + 3 \cdot y + y \cdot i - 3 - i}{9+1} = i \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \frac{(3 \cdot x + 3 \cdot y - 6) + (-x + y) \cdot i}{10} = i \ / \cdot 10 \Rightarrow (3 \cdot x + 3 \cdot y - 6) + (-x + y) \cdot i = 10 \cdot i \Rightarrow$$

$$\Rightarrow (3 \cdot x + 3 \cdot y - 6) + (-x + y) \cdot i = 0 + 10 \cdot i \Rightarrow \left.\begin{array}{l} 3 \cdot x + 3 \cdot y - 6 = 0 \\ -x + y = 10 \end{array}\right\} \Rightarrow \left.\begin{array}{l} 3 \cdot x + 3 \cdot y = 6 \ /:3 \\ -x + y = 10 \end{array}\right\} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \left.\begin{array}{l} x + y = 2 \\ -x + y = 10 \end{array}\right\} \Rightarrow \left[\begin{array}{l} \text{metoda suprotnih} \\ \text{koeficijenata} \end{array}\right] \Rightarrow 2 \cdot y = 12 \ /:2 \Rightarrow y = 6 \Rightarrow \left.\begin{array}{l} x + y = 2 \\ y = 6 \end{array}\right\} \Rightarrow x + 6 = 2 \Rightarrow x = -4.$$

Umnožak realnih brojeva x i y iznosi:

$$x \cdot y = -4 \cdot 6 = -24.$$

Vježba 049

Koliki je zbroj realnih brojeva x i y za koje vrijedi $\frac{x-1}{3+i} + \frac{y-1}{3-i} = i$?

Rezultat: 2.

Zadatak 050 (Gregor, gimnazija)

Modul broja $\frac{\left(x + i \cdot \sqrt{3}\right)^2}{1 - i}$ iznosi $2 \cdot \sqrt{2}$ $(x > 0)$. Koliko iznosi x ?

Rješenje 050

Ponovimo!

$$z = x + y \cdot i \Rightarrow |z| = \sqrt{x^2 + y^2} \quad , \quad \left|\frac{z}{w}\right| = \frac{|z|}{|w|} \quad , \quad |z^n| = |z|^n$$

Broj x iznosi:

$$\left|\frac{\left(x + i \cdot \sqrt{3}\right)^2}{1 - i}\right| = 2 \cdot \sqrt{2} \Rightarrow \frac{\left|\left(x + i \cdot \sqrt{3}\right)^2\right|}{|1 - i|} = 2 \cdot \sqrt{2} \Rightarrow \frac{\left|x + i \cdot \sqrt{3}\right|^2}{|1 - i|} = 2 \cdot \sqrt{2} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \frac{\left(\sqrt{x^2 + \left(\sqrt{3}\right)^2}\right)^2}{\sqrt{1^2 + (-1)^2}} = 2 \cdot \sqrt{2} \Rightarrow \frac{x^2 + 3}{\sqrt{1 + 1}} = 2 \cdot \sqrt{2} \Rightarrow \frac{x^2 + 3}{\sqrt{2}} = 2 \cdot \sqrt{2} \;\; / \cdot \sqrt{2} \Rightarrow x^2 + 3 = 2 \cdot \left(\sqrt{2}\right)^2 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow x^2 + 3 = 4 \Rightarrow x^2 = 1 \;\; / \sqrt{\;} \Rightarrow \left.\begin{matrix} x_1 = -1 \\ x_2 = 1 \end{matrix}\right\} \Rightarrow [x > 0] \Rightarrow x = 1.$$

Vježba 050

Modul broja $\frac{\left(x + i \cdot \sqrt{3}\right)^2}{1 - i}$ iznosi $2 \cdot \sqrt{2}$ $(x < 0)$. Koliko iznosi x ?

Rezultat: – 1.

Zadatak 051 (4A, hotelijerska škola)

Kompleksni broj z iz prvog kvadranta kompleksne ravnine ima svojstvo da je Re (z) četiri puta veći od Im (z). Koliko je puta Re (z^2) veći od Im (z^2)?

Rješenje 051

$$\left.\begin{matrix} z = x + y \cdot i \\ \mathrm{Re}\,(z) = 4 \cdot \mathrm{Im}\,(z) \end{matrix}\right\} \Rightarrow z = 4 \cdot y + y \cdot i \Rightarrow z = y \cdot (4 + i).$$

Kvadriramo kompleksan broj z:

$$z = y \cdot (4 + i) \;/^2 \Rightarrow \left[(a + b)^2 = a^2 + 2 \cdot a \cdot b + b^2 \;,\; i^2 = -1\right] \Rightarrow z^2 = y^2 \cdot (16 + 8 \cdot i - 1) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow z^2 = y^2 \cdot (15 + 8 \cdot i) \Rightarrow z^2 = 15 \cdot y^2 + 8 \cdot y^2 \cdot i.$$

Gledamo omjer Re (z^2) i Im (z^2):

$$\frac{\mathrm{Re}\left(z^2\right)}{\mathrm{Im}\left(z^2\right)} = \frac{15 \cdot y^2}{8 \cdot y^2} = \frac{15}{8} = 1.875.$$

Vježba 051

Kompleksni broj z iz prvog kvadranta kompleksne ravnine ima svojstvo da je Re (z) četiri puta veći od Im (z). Koliko je puta Im (z^2) manji od Re (z^2)?

Rezultat: 0.533.

Zadatak 052 (Vedrana, gimnazija)

Koliko iznosi modul kompleksnog broja $z \neq 0$ koji zadovoljava uvjete $|z + 1| = |z + i| = 1$?

Rješenje 052

Ponovimo!

$$|a + b \cdot i| = \sqrt{a^2 + b^2} \quad , \quad (a + b)^2 = a^2 + 2 \cdot a \cdot b + b^2$$

Neka je $z = a + b \cdot i$. U zadani izraz uvrstimo kompleksni broj z:

$$\left.\begin{array}{l}|z+1|=|z+i|\\ z=a+b\cdot i\end{array}\right\}\Rightarrow |a+b\cdot i+1|=|a+b\cdot i+i| \Rightarrow |(a+1)+b\cdot i|=|a+(b+)\cdot i| \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \sqrt{(a+1)^2+b^2}=\sqrt{a^2+(b+1)^2}\ /^2 \Rightarrow (a+1)^2+b^2=a^2+(b+1)^2 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow a^2+2\cdot a+1+b^2=a^2+b^2+2\cdot b+1 \Rightarrow 2\cdot a=2\cdot b\ /:2 \Rightarrow a=b.$$

U jedan od izraza uvrstimo a = b, na primjer,

$$\left.\begin{array}{l}|z+1|=1\\ a=b\end{array}\right\}\Rightarrow |a+a\cdot i+1|=1 \Rightarrow |(a+1)+a\cdot i|=1 \Rightarrow \sqrt{(a+1)^2+a^2}=1\ /^2 \Rightarrow (a+1)^2+a^2=1 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow a^2+2\cdot a+1+a^2=1 \Rightarrow 2\cdot a^2+2\cdot a=0 \Rightarrow a\cdot(2\cdot a+2)=0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \left.\begin{array}{l}a=0\ ,\ \text{nema smisla zbog } z\neq 0\\ 2\cdot a+2=0 \Rightarrow 2\cdot a=-2\ /:2 \Rightarrow a=-1\end{array}\right\}.$$

Iz jednakosti a = b, dobije se b = – 1. Kompleksan broj z glasi: z = – 1 – i. Njegov modul iznosi:

$$|z|=|-1-i|=\sqrt{(-1)^2+(-1)^2}=\sqrt{1+1}=\sqrt{2}.$$

Vježba 052

Koliko iznosi kvadrat modula (apsolutne vrijednosti) kompleksnog broja z ≠ 0 koji zadovoljava uvjete $|z+1| = |z+i| = 1$?

Rezultat: 2.

Zadatak 053 (2A, hotelijerska škola, Andrijana, gimnazija)

Odredite realne brojeve x i y tako da vrijedi zadana jednakost: $(x+y\cdot i)\cdot(3-7\cdot i)=2+4\cdot i.$

Rješenje 053

Ponovimo!

- Kažemo da su kompleksni brojevi $z_1 = a + b \cdot i$ i $z_2 = c + d \cdot i$ jednaki ako su im jednaki realni dijelovi, a = c, i jednaki imaginarni dijelovi, b = d. Pišemo:

$$z_1=z_2 \Leftrightarrow a=c \text{ i } b=d.$$

- $a+b\cdot i=c+d\cdot i \Leftrightarrow a=c\ ,\ b=d.$
- $z_1=z_2 \Leftrightarrow \operatorname{Re}(z_1)=\operatorname{Re}(z_2)\ ,\ \operatorname{Im}(z_1)=\operatorname{Im}(z_2).$

$$(x+y\cdot i)\cdot(3-7\cdot i)=2+4\cdot i \Rightarrow \left[\begin{array}{l}\text{pomnožimo zagrade na}\\ \text{lijevoj strani jednakosti}\end{array}\right] \Rightarrow 3\cdot x-7\cdot x\cdot i+3\cdot y\cdot i-7\cdot y\cdot i^2=2+4\cdot i \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \left[i^2=-1\right] \Rightarrow 3\cdot x-7\cdot x\cdot i+3\cdot y\cdot i-7\cdot y\cdot(-1)=2+4\cdot i \Rightarrow 3\cdot x-7\cdot x\cdot i+3\cdot y\cdot i+7\cdot y=2+4\cdot i \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \left[\begin{array}{l}\text{odredimo realni i imaginarni dio}\\ \text{na lijevoj strani jednakosti}\end{array}\right] \Rightarrow (3\cdot x+7\cdot y)+(-7\cdot x+3\cdot y)\cdot i=2+4\cdot i \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \left[\begin{array}{l}\text{jednakost kompleksnih brojeva}\\ \text{daje sustav jednadžbi}\end{array}\right] \Rightarrow \left.\begin{array}{l}3\cdot x+7\cdot y=2\\ -7\cdot x+3\cdot y=4\end{array}\right\} \Rightarrow \left[\begin{array}{l}\text{metoda suprotnih}\\ \text{koeficijenata}\end{array}\right] \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \left.\begin{array}{l}3\cdot x+7\cdot y=2\ /\cdot 7\\ -7\cdot x+3\cdot y=4\ /\cdot 3\end{array}\right\} \Rightarrow \left.\begin{array}{l}21\cdot x+49\cdot y=14\\ -21\cdot x+9\cdot y=12\end{array}\right\} \Rightarrow 58\cdot y=26\ /:58 \Rightarrow y=\frac{26}{58} \Rightarrow y=\frac{13}{29} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \left.\begin{array}{l}3\cdot x+7\cdot y=2\\ y=\frac{13}{29}\end{array}\right\} \Rightarrow 3\cdot x+7\cdot\frac{13}{29}=2 \Rightarrow 3\cdot x+\frac{91}{29}=2 \Rightarrow 3\cdot x=2-\frac{91}{29} \Rightarrow 3\cdot x=\frac{58-91}{29} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 3 \cdot x = -\frac{33}{29} \Rightarrow 3 \cdot x = -\frac{33}{29} \; / \cdot \frac{1}{3} \Rightarrow x = -\frac{11}{29}.$$

Rješenje je: $(x, y) = \left(-\frac{11}{29}, \frac{13}{29}\right).$

Vježba 053

Odredite realne brojeve x i y tako da vrijedi zadana jednakost: $(x + y \cdot i) \cdot (2 + i) = 1 + 3 \cdot i.$

Rezultat: (x, y) = (1, 1).

Zadatak 054 (2A, hotelijerska škola)

Dokažite da je $z = \frac{(1+i)^6 - (1-i)^6}{(1+i)^6 \cdot (1-i)^6}$ imaginaran broj.

Rješenje 054

Ponovimo!

$$\left(a^n\right)^m = a^{n \cdot m} \quad , \quad a^n \cdot b^n = (a \cdot b)^n \quad , \quad (a+b)^2 = a^2 + 2 \cdot a \cdot b + b^2 \quad , \quad (a-b)^2 = a^2 - 2 \cdot a \cdot b + b^2$$

$$(a + b \cdot i) \cdot (a - b \cdot i) = a^2 + b^2 \quad , \quad i^3 = -i.$$

$$z = \frac{(1+i)^6 - (1-i)^6}{(1+i)^6 \cdot (1-i)^6} \Rightarrow z = \frac{\left((1+i)^2\right)^3 - \left((1-i)^2\right)^3}{\left((1+i) \cdot (1-i)\right)^6} \Rightarrow z = \frac{(1 + 2 \cdot i - 1)^3 - (1 - 2 \cdot i - 1)^3}{(1+1)^6} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow z = \frac{(2 \cdot i)^3 - (-2 \cdot i)^3}{2^6} \Rightarrow z = \frac{(2 \cdot i)^3 + (2 \cdot i)^3}{2^6} \Rightarrow z = \frac{2 \cdot (2 \cdot i)^3}{2^6} \Rightarrow z = \frac{(2 \cdot i)^3}{2^5} \Rightarrow z = \frac{2^3 \cdot i^3}{2^5} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow z = \frac{i^3}{2^2} \Rightarrow z = \frac{-i}{4} \Rightarrow z = -\frac{1}{4} \cdot i.$$

Vježba 054

Dokažite da je $z = \frac{(1+i)^2 - (1-i)^2}{(1+i)^2 \cdot (1-i)^2}$ imaginaran broj.

Rezultat: z = i.

Zadatak 055 (2A, hotelijerska škola)

Odredite skup svih točaka kompleksne ravnine za koje je $|z| = |z - 1 - i|.$

Rješenje 055

Ponovimo!

apsolutna vrijednost kompleksnog broja: $z = a + b \cdot i \Rightarrow |z| = \sqrt{a^2 + b^2} \quad , \quad (a-b)^2 = a^2 - 2 \cdot a \cdot b + b^2.$

Kompleksan broj z zapišimo u standardnom (ili algebarskom) obliku:

$$z = x + y \cdot i.$$

Iz dane jednakosti slijedi:

$$|z| = |z - 1 - i| \Rightarrow |x + y \cdot i| = |x + y \cdot i - 1 - i| \Rightarrow |x + y \cdot i| = |(x-1) + (y-1) \cdot i| \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \sqrt{x^2 + y^2} = \sqrt{(x-1)^2 + (y-1)^2} \; /^2 \Rightarrow x^2 + y^2 = (x-1)^2 + (y-1)^2 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow x^2 + y^2 = x^2 - 2 \cdot x + 1 + y^2 - 2 \cdot y + 1 \Rightarrow 0 = -2 \cdot x + 1 - 2 \cdot y + 1 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 2 \cdot x + 2 \cdot y = 2 \; / : 2 \Rightarrow x + y = 1 \Rightarrow y = -x + 1.$$

Vježba 055

Odredite skup svih točaka kompleksne ravnine za koje je $|z| = |z-2|$.

Rezultat: x = 1.

Zadatak 056 (Roby, hotelijerska škola)

Izračunajte: $2^{-50}\cdot\left(\sqrt{2}+\sqrt{2}\cdot i\right)^{50}$.

Rješenje 056

Ponovimo!

$$\left(a^n\right)^m = a^{n\cdot m} \quad , \quad a^0 = 1 \quad , \quad a^{-n} = \frac{1}{a^n} \quad , \quad \frac{a^n}{b^n} = \left(\frac{a}{b}\right)^n \quad , \quad (a+b)^2 = a^2 + 2\cdot a\cdot b + b^2$$

$$i^{4\cdot n} = 1 \quad , \quad i^{4\cdot n+1} = i \quad , \quad i^{4\cdot n+2} = -1 \quad , \quad i^{4\cdot n+3} = -i$$

1.inačica

$$2^{-50}\cdot\left(\sqrt{2}+\sqrt{2}\cdot i\right)^{50} = 2^{-50}\cdot\left(\left(\sqrt{2}+\sqrt{2}\cdot i\right)^2\right)^{25} = 2^{-50}\cdot\left(\left(\sqrt{2}\right)^2 + 2\cdot\sqrt{2}\cdot\sqrt{2}\cdot i + \left(\sqrt{2}\cdot i\right)^2\right)^{25} =$$

$$= 2^{-50}\cdot(2+4\cdot i-2)^{25} = 2^{-50}\cdot(4\cdot i)^{25} = 2^{-50}\cdot\left(2^2\cdot i\right)^{25} = 2^{-50}\cdot\left(2^2\right)^{25}\cdot i^{25} = 2^{-50}\cdot 2^{50}\cdot i^{25} =$$

$$= 2^0\cdot i^{25} = 1\cdot i^{25} = i^{25} = \begin{bmatrix} 25:4=6 \\ 1 \end{bmatrix} = i^1 = i.$$

2.inačica

$$2^{-50}\cdot\left(\sqrt{2}+\sqrt{2}\cdot i\right)^{50} = 2^{-50}\cdot\left(\sqrt{2}\cdot(1+i)\right)^{50} = 2^{-50}\cdot\left(\sqrt{2}\right)^{50}\cdot(1+i)^{50} = 2^{-50}\cdot 2^{25}\cdot\left((1+i)^2\right)^{25} =$$

$$= 2^{-25}\cdot(1+2\cdot i-1)^{25} = 2^{-25}\cdot(2\cdot i)^{25} = 2^{-25}\cdot 2^{25}\cdot i^{25} = 2^0\cdot i^{25} = 1\cdot i^{25} = i^{25} = \begin{bmatrix} 25:4=6 \\ 1 \end{bmatrix} = i^1 = i.$$

3.inačica

$$2^{-50}\cdot\left(\sqrt{2}+\sqrt{2}\cdot i\right)^{50} = \frac{\left(\sqrt{2}+\sqrt{2}\cdot i\right)^{50}}{2^{50}} = \left(\frac{\sqrt{2}+\sqrt{2}\cdot i}{2}\right)^{50} = \left(\frac{\sqrt{2}\cdot(1+i)}{2}\right)^{50} = \left(\frac{\sqrt{2}}{2}\cdot(1+i)\right)^{50} =$$

$$= \left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^{50}\cdot(1+i)^{50} = \frac{2^{25}}{2^{50}}\cdot\left((1+i)^2\right)^{25} = \frac{1}{2^{25}}\cdot(1+2\cdot i-1)^{25} = \frac{1}{2^{25}}\cdot(2\cdot i)^{25} =$$

$$= \frac{1}{2^{25}}\cdot 2^{25}\cdot i^{25} = i^{25} = \begin{bmatrix} 25:4=6 \\ 1 \end{bmatrix} = i^1 = i.$$

Vježba 056

Izračunajte: $2^{-10}\cdot\left(\sqrt{2}+\sqrt{2}\cdot i\right)^{10}$.

Rezultat: i.

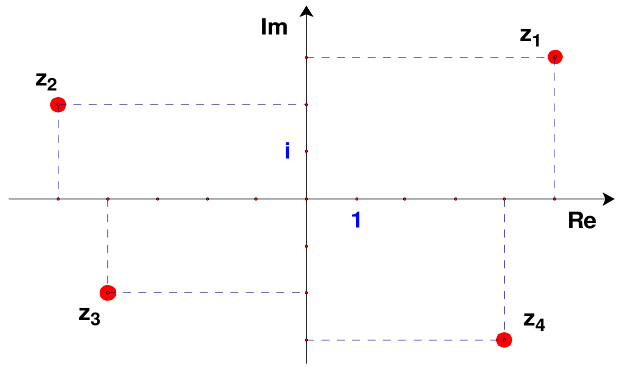
Zadatak 057 (2A, hotelijerska škola)

U kompleksnoj ili Gaussovoj ravnini točkama prikažite sljedeće kompleksne brojeve: $z_1 = 5 + 3\cdot i$, $z_2 = -5 + 2\cdot i$, $z_3 = -4 - 2\cdot i$, $z_4 = 4 - 3\cdot i$.

Rješenje 057

Ponovimo!

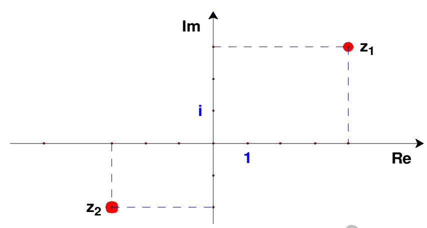
Kompleksna ili Gaussova ravnina:
Osi kompleksne ravnine zovu se realna os (Re) i imaginarna os (Im).
Realna os pokrivena je realnim brojevima, a imaginarna os imaginarnim brojevima.



Vježba 057

U kompleksnoj ili Gaussovoj ravnini točkama prikažite sljedeće kompleksne brojeve: $z_1 = 4 + 3 \cdot i$, $z_2 = -3 - 2 \cdot i$.

Rezultat:



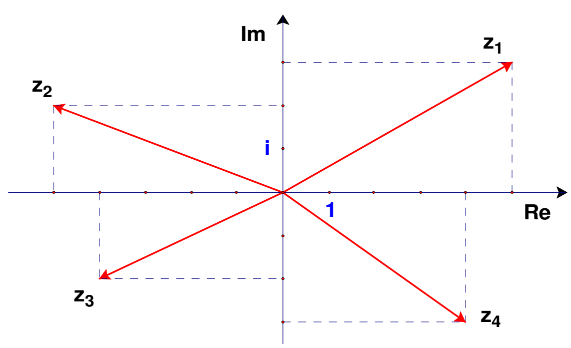
Zadatak 058 (2A, hotelijerska škola)

U kompleksnoj ili Gaussovoj ravnini radij-vektorima prikažite sljedeće kompleksne brojeve: $z_1 = 5 + 3 \cdot i$, $z_2 = -5 + 2 \cdot i$, $z_3 = -4 - 2 \cdot i$, $z_4 = 4 - 3 \cdot i$.

Rješenje 058

Ponovimo!

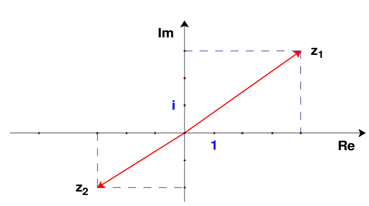
Kompleksna ili Gaussova ravnina:
Osi kompleksne ravnine zovu se realna os (Re) i imaginarna os (Im).
Realna os pokrivena je realnim brojevima, a imaginarna os imaginarnim brojevima.



Vježba 058

U kompleksnoj ili Gaussovoj ravnini radij-vektorima prikažite sljedeće kompleksne brojeve: $z_1 = 4 + 3 \cdot i$, $z_2 = -3 - 2 \cdot i$.

Rezultat:



Zadatak 059 (Andrijana, gimnazija)

Prikaži u kompleksnoj ravnini skup točaka određenih uvjetom: $|z-1|=|z-i|$.

Rješenje 059

Ponovimo!

Standardni (ili algebarski) prikaz kompleksnog broja: $z = x + y \cdot i$.

Apsolutna vrijednost (ili modul) kompleksnog broja: $|z|=\sqrt{x^2+y^2}$.

$$(a-b)^2=a^2-2\cdot a\cdot b+b^2.$$

$$\left.\begin{array}{l}|z-1|=|z-i|\\ z=x+y\cdot i\end{array}\right\} \Rightarrow |x+y\cdot i-1|=|x+y\cdot i-i| \Rightarrow |(x-1)+y\cdot i|=|x+(y-1)\cdot i| \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \sqrt{(x-1)^2+y^2}=\sqrt{x^2+(y-1)^2}\ /^2 \Rightarrow (x-1)^2+y^2=x^2+(y-1)^2 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow x^2-2\cdot x+1+y^2=x^2+y^2-2\cdot y+1 \Rightarrow -2\cdot x=-2\cdot y \Rightarrow 2\cdot y=2\cdot x\ /:2 \Rightarrow y=x.$$

Vježba 059

Prikaži u kompleksnoj ravnini skup točaka određenih uvjetom: $|z-1|=|z+i|$.

Rezultat: $y=-x$.

Zadatak 060 (Ana, hotelijerska škola)

Dokažite da je: $(1+i)^{1000}=2^{500}$.

Rješenje 060

Ponovimo!

$$\left(a^n\right)^m=a^{n\cdot m} \quad , \quad (a+b)^2=a^2+2\cdot a\cdot b+b^2 \quad , \quad i^2=-1 \quad , \quad (a\cdot b)^n=a^n\cdot b^n \quad , \quad i^0=1.$$

$$(1+i)^{1000}=\left((1+i)^2\right)^{500}=\left(1+2\cdot i+i^2\right)^{500}=(1+2\cdot i-1)^{500}=(2\cdot i)^{500}=2^{500}\cdot i^{500}=\begin{bmatrix}500:4=125\\ 10\\ \quad 20\\ \quad\ 0\end{bmatrix}=$$

$$=2^{500}\cdot i^0=2^{500}\cdot 1=2^{500}.$$

Vježba 060

Dokažite da je: $(1+i)^{800}=2^{400}$.

Rezultat: Dokaz analogan.