Zadatak 021 (Roby, hotelijerska škola)

Izračunaj $|z|$ ako je $z=\left(\frac{1-i}{1+i}\right)^2$.

Rješenje 021

1.inačica

$$z=\left(\frac{1-i}{1+i}\right)^2=\left[\left(\frac{a}{b}\right)^2=\frac{a^2}{b^2}\right]=\frac{(1-i)^2}{(1+i)^2}=\frac{1-2i+i^2}{1+2i+i^2}=\left[i^2=-1\right]=\frac{1-2i-1}{1+2i-1}=\frac{-2i}{2i}=-1 \Rightarrow |z|=|-1|=1.$$

2.inačica

$$z=x+y\cdot i \Rightarrow |z|=\sqrt{x^2+y^2}$$

$$|z|=\left|\left(\frac{1-i}{1+i}\right)^2\right|=\left[\left|a^2\right|=|a|^2\right]=\left|\frac{1-i}{1+i}\right|^2=\left[\left|\frac{a}{b}\right|=\frac{|a|}{|b|}\right]=\frac{|1-i|^2}{|1+i|^2}=\frac{\left(\sqrt{1^2+1^2}\right)^2}{\left(\sqrt{1^2+1^2}\right)^2}=1.$$

Vježba 021

Izračunaj $|z|$ ako je $z=\left(\frac{1+i}{1-i}\right)^2$.

Rezultat: 1.

Zadatak 022 (Roby, hotelijerska škola)

Koliki je zbroj realnih brojeva x i y za koje vrijedi $\frac{xi}{1+i}+\frac{yi}{1-i}=\frac{2}{i}$?

Rješenje 022

$$\frac{xi}{1+i}+\frac{yi}{1-i}=\frac{2}{i} \Rightarrow \frac{xi\cdot(1-i)+yi\cdot(1+i)}{(1+i)\cdot(1-i)}=2\cdot i^{-1} \Rightarrow \left[i^{-1}=-i\ ,\ i^2=-1\right] \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \frac{xi-xi^2+yi+yi^2}{1^2+1^2}=2\cdot(-i) \Rightarrow \frac{xi+x+yi-y}{2}=-2i\ /\cdot 2 \Rightarrow (x-y)+(x+y)\cdot i=-4i \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \left[z_1=z_2 \Leftrightarrow \operatorname{Re} z_1=\operatorname{Re} z_2 \text{ i } \operatorname{Im} z_1=\operatorname{Im} z_2\right] \Rightarrow \left.\begin{matrix} x-y=0 \\ x+y=-4 \end{matrix}\right\} \Rightarrow 2x=-4\ /:2 \Rightarrow x=-2 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \left.\begin{matrix} x=-2 \\ x+y=-4 \end{matrix}\right\} \Rightarrow -2-y=0 \Rightarrow y=-2.$$

Zbroj realnih brojeva x i y je: x + y = – 2 + (– 2) = – 4.

Vježba 022

Kolika je razlika realnih brojeva x i y za koje vrijedi $\frac{xi}{1+i}+\frac{yi}{1-i}=\frac{2}{i}$?

Rezultat: 0.

Zadatak 023 (Roby, hotelijerska škola)

Koliki je imaginarni dio broja $\frac{(1+i)^6}{1+\sqrt{3}\cdot i}$?

Rješenje 023

$$z=\frac{(1+i)^6}{1+\sqrt{3}\cdot i}=\left[a^{n\cdot m}=\left(a^n\right)^m\right]=\frac{\left((1+i)^2\right)^3}{1+\sqrt{3}\cdot i}=\frac{\left(1+2i+i^2\right)^3}{1+\sqrt{3}\cdot i}=\left[i^2=-1\right]=\frac{(1+2i-1)^3}{1+\sqrt{3}\cdot i}=\frac{(2i)^3}{1+\sqrt{3}\cdot i}=$$

$$z=\frac{(1+i)^6}{1+\sqrt{3}\cdot i}=\left[(a\cdot b)^n=a^n\cdot b^n\right]=\frac{2^3\cdot i^3}{1+\sqrt{3}\cdot i}=\left[i^3=-i\right]=\frac{-8i}{1+\sqrt{3}\cdot i}\cdot\frac{1-\sqrt{3}\cdot i}{1-\sqrt{3}\cdot i}=\frac{-8i-8\sqrt{3}}{1+\left(\sqrt{3}\right)^2}=$$

$$=\frac{-8\sqrt{3}-8i}{1+3}=\frac{-8\sqrt{3}-8i}{4}=\frac{-8\sqrt{3}}{4}-\frac{8}{4}\cdot i=-2\sqrt{3}-2i.$$

Imaginarni dio kompleksnog broja je: Im z = – 2.

Vježba 023

Koliki je realni dio broja $\frac{(1+i)^6}{1+\sqrt{3}\cdot i}$?

Rezultat: $\operatorname{Re} z=-2\sqrt{3}.$.

Zadatak 024 (Roby, hotelijerska škola)

Koliko iznosi apsolutna vrijednost kompleksnog broja $\frac{2-i}{3+i}+\frac{i+1}{i-1}$?

Rješenje 024

$$\left|\frac{2-i}{3+i}+\frac{i+1}{i-1}\right|=\left|\frac{2-i}{3+i}+\frac{1+i}{-1+i}\right|=\left|\frac{2-i}{3+i}\cdot\frac{3-i}{3-i}+\frac{1+i}{-1+i}\cdot\frac{-1-i}{-1-i}\right|=\left|\frac{6-2i-3i-1}{9+1}+\frac{-1-i-i+1}{1+1}\right|=$$

$$=\left|\frac{5-5i}{10}+\frac{-2i}{2}\right|=\left|\frac{5\cdot(1-i)}{10}-i\right|=\left|\frac{1-i}{2}-i\right|=\left|\frac{1-i-2i}{2}\right|=\left|\frac{1-3i}{2}\right|=\left|\frac{1}{2}-\frac{3}{2}\cdot i\right|=\sqrt{\left(\frac{1}{2}\right)^2+\left(-\frac{3}{2}\right)^2}=$$

$$=\sqrt{\frac{1}{4}+\frac{9}{4}}=\sqrt{\frac{10}{4}}=\frac{\sqrt{10}}{\sqrt{4}}=\frac{\sqrt{10}}{2}\left(\text{ili }\sqrt{\frac{10}{4}}=\sqrt{\frac{5}{2}}\right).$$

Vježba 024

Koliko iznosi apsolutna vrijednost kompleksnog broja $\frac{1+i}{1-i}+\frac{1-i}{1+i}$?

Rezultat: 0.

Zadatak 025 (Roby, hotelijerska škola)

Nađi $|z|$ ako je $z=2i\cdot\left(\sqrt{3}-i\right)\cdot\left(2-\sqrt{3}\cdot i\right)$.

Rješenje 025

Ponovimo!

$$z=x+yi\Rightarrow|z|=\sqrt{x^2+y^2}\quad,\quad|a\cdot b\cdot c|=|a|\cdot|b|\cdot|c|.$$

Sada je:

$$|z|=\left|2i\cdot\left(\sqrt{3}-i\right)\cdot\left(2-\sqrt{3}\cdot i\right).\right|=|2i|\cdot\left|\sqrt{3}-i\right|\cdot\left|2-\sqrt{3}\cdot i\right|=2\cdot\sqrt{\left(\sqrt{3}\right)^2+(-1)^2}\cdot\sqrt{2^2+\left(-\sqrt{3}\right)^2}=$$

$$=2\cdot\sqrt{3+1}\cdot\sqrt{4+3}=2\cdot\sqrt{4}\cdot\sqrt{7}=4\cdot\sqrt{7}.$$

Vježba 025

Nađi $|z|$ ako je $z=2i\cdot\left(\sqrt{3}+i\right)\cdot\left(2+\sqrt{3}\cdot i\right)$.

Rezultat: $4\cdot\sqrt{7}$.

Zadatak 026 (Roby, hotelijerska škola)

Grafički prikaži skup točaka zadan uvjetom $|z-i|\le 3$.

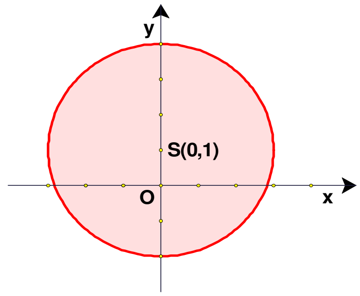
Rješenje 026

Napišimo standardni (algebarski) oblik kompleksnog broja $z=x+y\cdot i$.

Tada je:

$$\left|z-i\right|\le 3 \Rightarrow \left|x+y\cdot i-i.\right|\le 3 \Rightarrow \left|x+\left(y-1\right)\cdot i\right|\le 3 \Rightarrow \sqrt{x^2+\left(y-1\right)^2}\le 3 \;/^2 \Rightarrow x^2+\left(y-1\right)^2\le 9.$$

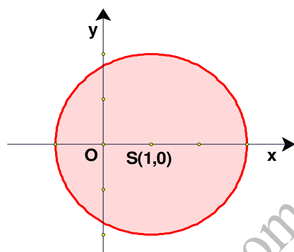
To je krug sa središtem S(0, 1) i polumjerom 3.



Vježba 026

Grafički prikaži skup točaka zadan uvjetom $\left|z-1\right|\le 2.$

Rezultat: To je krug sa središtem S(1, 0) i polumjerom 2.



Zadatak 027 (Marinko, tehnička škola)

Kompleksan broj z je rješenje jednadžbe $z^3 = 1$ za koje vrijedi Im z > 0. Koliko iznosi z^{20}?

Rješenje 027

$$z^3=1 \Rightarrow z=\sqrt[3]{1}=\sqrt[3]{1+0\cdot i} \Rightarrow \begin{cases} \left|z\right|=\sqrt{x^2+y^2}=\sqrt{1^2+0^2}=\sqrt{1}=1 \\ tg\,\varphi=0 \Rightarrow \varphi=0 \\ n=3 \\ k=0,\,1,\,2 \end{cases}.$$

Dalje računamo:

k = 0

$$z_0=\sqrt[3]{\left|z\right|}\cdot\left(\cos\frac{0+0\cdot 2\pi}{3}+i\cdot\sin\frac{0+0\cdot 2\pi}{3}\right)=\sqrt[3]{1}\cdot\left(\cos 0+i\cdot\sin 0\right)=1\cdot\left(\cos 0+i\cdot\sin 0\right)=\cos 0+i\cdot\sin 0.$$

k = 1

$$z_1=\sqrt[3]{\left|z\right|}\cdot\left(\cos\frac{0+1\cdot 2\pi}{3}+i\cdot\sin\frac{0+1\cdot 2\pi}{3}\right)=\sqrt[3]{1}\cdot\left(\cos\frac{2\pi}{3}+i\cdot\sin\frac{2\pi}{3}\right)=1\cdot\left(\cos\frac{2\pi}{3}+i\cdot\sin\frac{2\pi}{3}\right)=$$

$$=\cos\frac{2\pi}{3}+i\cdot\sin\frac{2\pi}{3}.$$

k = 2

$$z_2=\sqrt[3]{\left|z\right|}\cdot\left(\cos\frac{0+2\cdot 2\pi}{3}+i\cdot\sin\frac{0+2\cdot 2\pi}{3}\right)=\sqrt[3]{1}\cdot\left(\cos\frac{4\pi}{3}+i\cdot\sin\frac{4\pi}{3}\right)=1\cdot\left(\cos\frac{4\pi}{3}+i\cdot\sin\frac{4\pi}{3}\right)=$$

$$=\cos\frac{4\pi}{3}+i\cdot\sin\frac{4\pi}{3}.$$

Budući da je uvjet Im z > 0, rješenje je $z=\cos\frac{2\pi}{3}+i\cdot\sin\frac{2\pi}{3}$ jer je $\sin\frac{2\pi}{3}>0$. Sada je z^{20} jednako:

$$z^{20}=\left(\cos\frac{2\pi}{3}+i\cdot\sin\frac{2\pi}{3}\right)^{20}=\cos\frac{20\cdot 2\pi}{3}+i\cdot\sin\frac{20\cdot 2\pi}{3}=\cos\frac{40\pi}{3}+i\cdot\sin\frac{40\pi}{3}=$$

$$=\cos\left(\frac{4\pi}{3}+6\cdot 2\pi\right)+i\cdot\sin\left(\frac{4\pi}{3}+6\cdot 2\pi\right)=\cos\frac{4\pi}{3}+i\cdot\sin\frac{4\pi}{3}=\cos\left(\pi+\frac{\pi}{3}\right)+i\cdot\sin\left(\pi+\frac{\pi}{3}\right)=$$

$$=-\cos\frac{\pi}{3}-i\cdot\sin\frac{\pi}{3}=-\frac{1}{2}-i\cdot\frac{\sqrt{3}}{2}.$$

Vježba 027

Kompleksan broj z je rješenje jednadžbe $z^3 = 1$ za koje vrijedi Im z > 0. Koliko iznosi z^6?

Rezultat: 1.

Zadatak 028 (Mary, gimnazija)

Nađite apsolutnu vrijednost kompleksnog broja $z=2i+\frac{1}{i}+i^3$.

Rješenje 028

Ponovimo!

$$\begin{cases}\frac{1}{i}=\frac{1}{i}\cdot\frac{-i}{-i}=\frac{-i}{1}=-i\\ i^3=-i.\end{cases}$$

Apsolutna vrijednost iznosi:

$$|z|=\left|2i+\frac{1}{i}+i^3\right|=|2i-i-i|=|0|=0.$$

Vježba 028

Nađite apsolutnu vrijednost kompleksnog broja $z=-2i+\frac{1}{i}+i^3$.

Rezultat: 4.

Zadatak 029 (Mary, gimnazija)

Ako je $z=\frac{-3+i}{1-2i}+2-3i$, nađite imaginarni dio broja $\bar{z}$.

Rješenje 029

$$z=\frac{-3+i}{1-2i}+2-3i=\frac{-3+i}{1-2i}\cdot\frac{1+2i}{1+2i}+2-3i=\frac{-3-6i+i-2}{1+4}+2-3i=\frac{-5-5i}{5}+2-3i=\frac{5\cdot(-1-i)}{5}+2-3i=$$

$$=-1-i+2-3i=1-4i\ \Rightarrow\ \bar{z}=1+4i\ \Rightarrow\ \operatorname{Im}\bar{z}=4.$$

Vježba 029

Ako je $z=\frac{-3+i}{1-2i}+2-3i$, nađite realni dio broja $\bar{z}$.

Rezultat: $\operatorname{Re}\bar{z}=\operatorname{Re}z=1.$

Zadatak 030 (Mary, gimnazija)

Ako je $z=\frac{1-i+i^2-i^3+i^4}{1-i}$, nađite $\operatorname{Re}z+\operatorname{Im}z$.

Rješenje 030

Ponovimo!

$$\begin{cases}i^0=1\quad,\quad i^1=i\\ i^2=-1\quad,\quad i^3=-i\\ i^4=1\end{cases}$$

$$z=\frac{1-i+i^2-i^3+i^4}{1-i}=\frac{1-i-i+i+1}{1-i}=\frac{1}{1-i}\cdot\frac{1+i}{1+i}=\frac{1+i}{1+1}=\frac{1+i}{2}=\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\cdot i.$$

Tada je:

$$\operatorname{Re} z+\operatorname{Im} z=\frac{1}{2}+\frac{1}{2}=1.$$

Vježba 030

Ako je $z=\frac{1-i+i^2-i^3+i^4}{1-i}$, nađite $\operatorname{Re} z-\operatorname{Im} z$.

Rezultat: 0.

Zadatak 031 (Mary, gimnazija)

Odredi parametar $b\in R,\ b\geq 0$ takav da je $\left(\sqrt{b}+i\cdot\sqrt{b}\right)^8$ realan broj.

Rješenje 031

$$\left(\sqrt{b}+i\cdot\sqrt{b}\right)^8=\left[\sqrt{b}\cdot(1+i)\right]^8=\left(\sqrt{b}\right)^8\cdot(1+i)^8=b^4\cdot\left[(1+i)^2\right]^4=b^4\cdot(1+2i-1)^4=b^4\cdot(2i)^4=$$

$$=b^4\cdot 16\cdot i^4=b^4\cdot 16\cdot 1=16\cdot b^4.$$

Parametar b je nenegativan realan broj: $b\in R,\ b\geq 0$.

Vježba 031

Odredi parametar $b\in R,\ b\geq 0$ takav da je $\left(\sqrt{b}-i\cdot\sqrt{b}\right)^8$ realan broj.

Rezultat: Parametar b je nenegativan realan broj: $b\in R,\ b\geq 0$.

Zadatak 032 (Mary, gimnazija)

Izračunajte: $i+i^2+i^3+i^4+i^5+\ldots+i^{99}$.

Rješenje 032

1.inačica

Uočimo da je to geometrijski red: $a_1 = i,\ q = i,\ n = 99,\ s_{99} = ?$

Zbroj reda iznosi:

$$s_{99}=i\cdot\frac{i^{99}-1}{i-1}=\begin{bmatrix}99:4=24\\ 19\\ 3\end{bmatrix}=i\cdot\frac{i^3-1}{i-1}=\frac{i^4-i}{i-1}=\frac{1-i}{i-1}=\frac{-(i-1)}{i-1}=-1.$$

2.inačica

Primijetimo da je zbroj četiri uzastopne potencije imaginarne jedinice i jednak nuli:

$$i+i^2+i^3+i^4=i-1-i+1=0.$$

Grupiranjem dobijemo 24 takvih četvorki:

$$i+i^2+i^3+i^4+i^5+\ldots+i^{97}+i^{98}+i^{99}=24\cdot\left(i+i^2+i^3+i^4\right)+i^{97}+i^{98}+i^{99}=$$

$$=24\cdot(i-1-i+1)+i^{97}+i^{98}+i^{99}=\begin{bmatrix}97:4=24\\ 17\\ 1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}98:4=24\\ 18\\ 2\end{bmatrix}\begin{bmatrix}99:4=24\\ 19\\ 3\end{bmatrix}=$$

$$=24\cdot(i-1-i+1)+i^1+i^2+i^3=24\cdot 0+i-1-i=-1.$$

3.inačica

Budući da je zbroj svake četiri uzastopne potencije imaginarne jedinice i jednak nuli ($i + i^2 + i^3 + i^4 = i - 1 - i + 1 = 0$), preostaju nam samo tri potencije i^{97}, i^{98}, i^{99}:

$$i+i^2+i^3+i^4+\ldots+i^{93}+i^{94}+i^{95}+i^{96}+i^{97}+i^{98}+i^{99}=$$

$$=\underbrace{i-1-i+1}_{0}+\ldots+\underbrace{i-1-i+1}_{0}+i^{97}+i^{98}+i^{99}=i^{1}+i^{2}+i^{3}=i-1-i=-1.$$

Vježba 032

Izračunajte: $i+i^{2}+i^{3}+i^{4}+i^{5}+\ldots+i^{96}$.

Rezultat: 0.

Zadatak 033 (Anamarija, hotelijerska škola)

Odredi x takav da realni dio broja $z=\frac{2-2\cdot x\cdot i}{x-i}+1+x\cdot i$ bude jednak 3.

Rješenje 033

$$z=\frac{2-2\cdot x\cdot i}{x-i}+1+x\cdot i=\frac{2-2\cdot x\cdot i}{x-i}\cdot\frac{x+i}{x+i}+1+x\cdot i=\frac{2\cdot x+2\cdot i-2\cdot x^{2}\cdot i+2\cdot x}{x^{2}+1}+1+x\cdot i=$$

$$=\frac{4\cdot x+2\cdot i-2\cdot x^{2}\cdot i}{x^{2}+1}+1+x\cdot i=\frac{4\cdot x}{x^{2}+1}+\frac{2-2\cdot x^{2}}{x^{2}+1}\cdot i+1+x\cdot i=\left(\frac{4\cdot x}{x^{2}+1}+1\right)+\left(\frac{2-2\cdot x^{2}}{x^{2}+1}+x\right)\cdot i.$$

$$\left.\begin{array}{l}\operatorname{Re} z=3\\ \operatorname{Re} z=\frac{4\cdot x}{x^{2}+1}+1\end{array}\right\}\Rightarrow\frac{4\cdot x}{x^{2}+1}+1=3\Rightarrow\frac{4\cdot x}{x^{2}+1}=2\ /\cdot\left(x^{2}+1\right)\Rightarrow 4\cdot x=2\cdot\left(x^{2}+1\right)\ /:2\Rightarrow$$

$$\Rightarrow 2\cdot x=x^{2}+1\Rightarrow x^{2}-2\cdot x+1=0\Rightarrow(x-1)^{2}=0\Rightarrow x-1=0\Rightarrow x=1.$$

Vježba 033

Odredi x takav da realni dio broja $z=\frac{2-2\cdot x\cdot i}{x-i}+1+x\cdot i$ bude jednak 1.

Rezultat: x = 0.

Zadatak 034 (Anamarija, hotelijerska škola)

Ako je $z=\frac{3+4\cdot i}{4-3\cdot i}$, nađite $z^{3}+z^{2}+z+|z|$.

Rješenje 034

$$z=\frac{3+4\cdot i}{4-3\cdot i}=\frac{3+4\cdot i}{4-3\cdot i}\cdot\frac{4+3\cdot i}{4+3\cdot i}=\frac{12+9\cdot i+16\cdot i-12}{16+9}=\frac{25\cdot i}{25}=i=0+1\cdot i.$$

$$z^{3}+z^{2}+z+|z|=i^{3}+i^{2}+i+|i|=-i-1+i+\sqrt{0^{2}+1^{2}}=-i-1+i+1=0.$$

Vježba 034

Ako je $z=\frac{3+4\cdot i}{4-3\cdot i}$, nađite $z^{4}+z^{3}+z^{2}+z+|z|$.

Rezultat: 1.

Zadatak 035 (Anamarija, hotelijerska škola)

Ako je $z=4+3\cdot i$, nađite $\frac{z+\bar{z}}{1+z\cdot\bar{z}}$.

Rješenje 035

$$z=4+3\cdot i\Rightarrow\bar{z}=4-3\cdot i.$$

$$\frac{z+\bar{z}}{1+z\cdot\bar{z}}=\frac{4+3\cdot i+4-3\cdot i}{1+(4+3\cdot i)\cdot(4-3\cdot i)}=\frac{8}{1+16+9}=\frac{8}{26}=\frac{4}{13}.$$

Vježba 035

Ako je $z=4+3\cdot i$, nađite $\frac{z-\bar{z}}{1+z\cdot\bar{z}}$.

Rezultat: $\frac{3}{13} \cdot i.$

Zadatak 036 (Roby, hotelijerska škola)

Za koji je x imaginarni dio broja $z = \frac{1 - x \cdot i}{1 + i}$ jednak nula?

Rješenje 036

$$z = \frac{1 - x \cdot i}{1 + i} = \frac{1 - x \cdot i}{1 + i} \cdot \frac{1 - i}{1 - i} = \frac{1 - i - x \cdot i - x}{1 + 1} = \frac{(1 - x) - (1 + x) \cdot i}{2} = \frac{1 - x}{2} - \frac{1 + x}{2} \cdot i \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \left. \begin{array}{l} \operatorname{Im} z = 0 \text{ (uvjet zadatka)} \\ \operatorname{Im} z = -\frac{1 + x}{2} \end{array} \right\} \Rightarrow -\frac{1 + x}{2} = 0 \Rightarrow 1 + x = 0 \Rightarrow x = -1.$$

Vježba 036

Za koji je x imaginarni dio broja $z = \frac{1 - x \cdot i}{1 + i}$ jednak jedan?

Rezultat: x = – 3.

Zadatak 037 (Roby, hotelijerska škola)

Nađite imaginarni dio broja $z = \frac{(1 + 2 \cdot i)^3}{1 - 2 \cdot i}$.

Rješenje 037

1.inačica

$$z = \frac{(1 + 2 \cdot i)^3}{1 - 2 \cdot i} = \frac{1^3 + 3 \cdot 1^2 \cdot 2i + 3 \cdot 1 \cdot (2i)^2 + (2i)^3}{1 - 2 \cdot i} = \frac{1 + 6 \cdot i + 3 \cdot (-4) - 8 \cdot i}{1 - 2 \cdot i} = \frac{1 + 6 \cdot i - 12 - 8 \cdot i}{1 - 2 \cdot i} =$$

$$= \frac{-11 - 2 \cdot i}{1 - 2 \cdot i} \cdot \frac{1 + 2 \cdot i}{1 + 2 \cdot i} = \frac{-11 - 22 \cdot i - 2 \cdot i + 4}{1 + 4} = \frac{-7 - 24 \cdot i}{5} = -\frac{7}{5} - \frac{24}{5} \cdot i \Rightarrow \operatorname{Im} z = -\frac{24}{5}.$$

2.inačica

$$z = \frac{(1 + 2 \cdot i)^3}{1 - 2 \cdot i} = \frac{(1 + 2 \cdot i)^3}{1 - 2 \cdot i} \cdot \frac{1 + 2 \cdot i}{1 + 2 \cdot i} = \frac{(1 + 2 \cdot i)^4}{1 + 4} = \frac{\left[(1 + 2 \cdot i)^2\right]^2}{5} =$$

$$= \frac{[1 + 4 \cdot i - 4]^2}{5} = \frac{[-3 + 4 \cdot i]^2}{5} = \frac{9 - 24 \cdot i - 16}{5} = \frac{-7 - 24 \cdot i}{5} = -\frac{7}{5} - \frac{24}{5} \cdot i \Rightarrow \operatorname{Im} z = -\frac{24}{5}.$$

Vježba 037

Nađite realni dio broja $z = \frac{(1 + 2 \cdot i)^3}{1 - 2 \cdot i}$.

Rezultat: $\operatorname{Re} z = -\frac{7}{5}.$

Zadatak 038 (Roby, hotelijerska škola)

Nađite imaginarni dio broja $z = \left(\frac{1 + i}{1 - i}\right)^{1994}$.

Rješenje 038

1.inačica

$$z = \left(\frac{1 + i}{1 - i}\right)^{1994} = \left[\left(\frac{1 + i}{1 - i}\right)^2\right]^{997} = \left[\frac{1 + 2 \cdot i - 1}{1 - 2 \cdot i - 1}\right]^{997} = \left[\frac{2 \cdot i}{-2 \cdot i}\right]^{997} = (-1)^{997} = -1 = -1 + 0 \cdot i \Rightarrow \operatorname{Im} z = 0.$$

2.inačica

$$z=\left(\frac{1+i}{1-i}\right)^{1994}=\left(\frac{1+i}{1-i}\cdot\frac{1+i}{1+i}\right)^{1994}=\left(\frac{1+i+i-1}{1+1}\right)^{1994}=\left(\frac{2\cdot i}{2}\right)^{1994}=i^{1994}=$$

$$=\left[\begin{array}{l}1994:4=498\\ \ 39\\ \ \ 34\\ \ \ \ 2\end{array}\right]=i^2=-1=-1+0\cdot i\Rightarrow \operatorname{Im} z=0.$$

Vježba 038

Nađite realni dio broja $z=\left(\frac{1+i}{1-i}\right)^{1994}$.

Rezultat: $\operatorname{Re} z=-1.$

Zadatak 039 (Ivana, gimnazija)

Kolika je apsolutna vrijednost kompleksnog broja $z=\left(\frac{3-i}{2+i}\right)^{4}$?

Rješenje 039

1.inačica

$$z=\left(\frac{3-i}{2+i}\right)^4=\left(\frac{3-i}{2+i}\cdot\frac{2-i}{2-i}\right)^4=\left(\frac{6-3\cdot i-2\cdot i-1}{4+1}\right)^4=\left(\frac{5-5\cdot i}{5}\right)^4=\left(\frac{5}{5}-\frac{5}{5}\cdot i\right)^4=(1-i)^4=\left((1-i)^2\right)^2=$$

$$=(1-2\cdot i-1)^2=(-2\cdot i)^2=4\cdot i^2=-4\Rightarrow |z|=|-4|=4.$$

2.inačica

$$|z|=\left|\left(\frac{3-i}{2+i}\right)^4\right|=\left[\left|a^4\right|=|a|^4\right]=\left|\left(\frac{3-i}{2+i}\right)\right|^4=\left[\frac{|3-i|}{|2+i|}\right]^4=\left[\frac{\sqrt{9+1}}{\sqrt{4+1}}\right]^4=\left[\frac{\sqrt{10}}{\sqrt{5}}\right]^4=$$

$$=\left[\sqrt{\frac{10}{5}}\right]^4=\left[\sqrt{2}\right]^4=2^2=4.$$

Vježba 039

Kolika je apsolutna vrijednost kompleksnog broja $z=\left(\frac{3+i}{2-i}\right)^{4}$?

Rezultat: 4.

Zadatak 040 (Ivana, gimnazija)

Ako je $z=\frac{1+i\cdot\sqrt{3}}{1-i}$, koliko iznosi Re z + Im z?

Rješenje 040

$$z=\frac{1+i\cdot\sqrt{3}}{1-i}=\frac{1+i\cdot\sqrt{3}}{1-i}\cdot\frac{1+i}{1+i}=\frac{1+i+i\cdot\sqrt{3}-\sqrt{3}}{1+1}=\frac{\left(1-\sqrt{3}\right)+\left(1+\sqrt{3}\right)\cdot i}{2}=\frac{1-\sqrt{3}}{2}+\frac{1+\sqrt{3}}{2}\cdot i\Rightarrow$$

$$\Rightarrow \operatorname{Re} z+\operatorname{Im} z=\frac{1-\sqrt{3}}{2}+\frac{1+\sqrt{3}}{2}=\frac{2}{2}=1.$$

Vježba 040

Ako je $z=\frac{1+i\cdot\sqrt{3}}{1-i}$, koliko iznosi Im z – Re z?

Rezultat: $\sqrt{3}.$