Zadatak 061 (Ivana, ekonomska škola)

Ako je x + y = 5, y + z = 7, z + u = 9, koliko je u + x?

Rješenje 061

Ponovimo!

Zakon distribucije množenja prema zbrajanju.

$$a\cdot(b+c)=a\cdot b+a\cdot c \quad , \quad a\cdot b+a\cdot c=a\cdot(b+c).$$

1.inačica

Zbrojimo sve tri jednadžbe.

$$\left.\begin{array}{l} x+y=5 \\ y+z=7 \\ z+u=9 \end{array}\right\} \Rightarrow \left[\begin{array}{l}\text{zbrojimo} \\ \text{jednadžbe}\end{array}\right] \Rightarrow x+y+y+z+z+u=5+7+9 \Rightarrow x+2\cdot y+2\cdot z+u=21 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow x+2\cdot(y+z)+u=21.$$

Tada je

$$\left.\begin{array}{l} x+2\cdot(y+z)+u=21 \\ y+z=7 \end{array}\right\} \Rightarrow \left[\begin{array}{l}\text{metoda} \\ \text{supstitucije}\end{array}\right] \Rightarrow x+2\cdot 7+u=21 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow x+14+u=21 \Rightarrow x+u=21-14 \Rightarrow x+u=7 \Rightarrow u+x=7.$$

2.inačica

U sustavu jednadžbi

$$\left\{\begin{array}{l} x+y=5 \\ y+z=7 \\ z+u=9 \end{array}\right.$$

oduzmemo drugu jednadžbu od prve jednadžbe.

$$x+y-y-z=5-7 \Rightarrow x+y-y-z=5-7 \Rightarrow x-z=-2.$$

Sada je

$$\left.\begin{array}{l} x-z=-2 \\ z+u=9 \end{array}\right\} \Rightarrow \left[\begin{array}{l}\text{zbrojimo} \\ \text{jednadžbe}\end{array}\right] \Rightarrow x-z+z+u=-2+9 \Rightarrow x-z+z+u=-2+9 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow x+u=7 \Rightarrow u+x=7.$$

3.inačica

U sustavu jednadžbi

$$\left\{\begin{array}{l} x+y=5 \\ y+z=7 \\ z+u=9 \end{array}\right.$$

iz treće jednadžbe izračunamo z i uvrstimo u drugu jednadžbu.

$$\left.\begin{array}{l} x+y=5 \\ y+z=7 \\ z+u=9 \end{array}\right\} \Rightarrow \left.\begin{array}{l} x+y=5 \\ y+z=7 \\ z=9-u \end{array}\right\} \Rightarrow \left.\begin{array}{l} x+y=5 \\ y+9-u=7 \end{array}\right\} \Rightarrow \left.\begin{array}{l} x+y=5 \\ y=7-9+u \end{array}\right\} \Rightarrow \left.\begin{array}{l} x+y=5 \\ y=-2+u \end{array}\right\} \Rightarrow \left.\begin{array}{l} x+y=5 \\ y=u-2 \end{array}\right\} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \left[\begin{array}{l}\text{metoda} \\ \text{supstitucije}\end{array}\right] \Rightarrow x+u-2=5 \Rightarrow x+u=5+2 \Rightarrow x+u=7 \Rightarrow u+x=7.$$

Vježba 061

Ako je x + y = 5, y + z = 6, z + u =7, koliko je u + x?

Rezultat: 6.

Zadatak 062 (Jelena, gimnazija)

$$\text{Riješi sustav}: \begin{cases} x+y+z=3 \\ x^2+y^2+z^2=3 \\ x\cdot y\cdot z=1. \end{cases}$$

Rješenje 062

Ponovimo!

$$(a+b+c)^2=a^2+b^2+c^2+2\cdot a\cdot b+2\cdot a\cdot c+2\cdot b\cdot c.$$

$$(a-b)^3=a^3-3\cdot a^2\cdot b+3\cdot a\cdot b^2-b^3 \quad , \quad (a-b)^2=a^2-2\cdot a\cdot b+b^2.$$

Zakon distribucije množenja prema zbrajanju.

$$a\cdot(b+c)=a\cdot b+a\cdot c \quad , \quad a\cdot b+a\cdot c=a\cdot(b+c).$$

Kvadriramo prvu (linearnu) jednadžbu.

$$x+y+z=3 \Rightarrow x+y+z=3 \ /^2 \Rightarrow (x+y+z)^2=3^2 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow x^2+y^2+z^2+2\cdot x\cdot y+2\cdot x\cdot z+2\cdot y\cdot z=9 \Rightarrow \left[x^2+y^2+z^2=3\right] \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 3+2\cdot x\cdot y+2\cdot x\cdot z+2\cdot y\cdot z=9 \Rightarrow 2\cdot x\cdot y+2\cdot x\cdot z+2\cdot y\cdot z=9-3 \Rightarrow 2\cdot x\cdot y+2\cdot x\cdot z+2\cdot y\cdot z=6 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 2\cdot x\cdot y+2\cdot x\cdot z+2\cdot y\cdot z=6 \ /:2 \Rightarrow x\cdot y+x\cdot z+y\cdot z=3 \Rightarrow x\cdot(y+z)+y\cdot z=3.$$

Transformiramo prvu i treću jednadžbu sustava.

$$\left.\begin{matrix} x+y+z=3 \\ x\cdot y\cdot z=1 \end{matrix}\right\} \Rightarrow \left.\begin{matrix} y+z=3-x \\ x\cdot y\cdot z=1 \ /\cdot\frac{1}{x} \end{matrix}\right\} \Rightarrow \left.\begin{matrix} y+z=3-x \\ y\cdot z=\frac{1}{x} \end{matrix}\right\}.$$

Sada je:

$$x\cdot(y+z)+y\cdot z=3 \Rightarrow \begin{bmatrix} y+z=3-x \\ y\cdot z=\frac{1}{x} \end{bmatrix} \Rightarrow x\cdot(3-x)+\frac{1}{x}=3 \Rightarrow 3\cdot x-x^2+\frac{1}{x}=3 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 3\cdot x-x^2+\frac{1}{x}-3=0 \Rightarrow 3\cdot x-x^2+\frac{1}{x}-3=0 \ /\cdot x \Rightarrow 3\cdot x^2-x^3+1-3\cdot x=0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow -x^3+3\cdot x^2-3\cdot x+1=0 \Rightarrow -x^3+3\cdot x^2-3\cdot x+1=0 \ /\cdot(-1) \Rightarrow x^3-3\cdot x^2+3\cdot x-1=0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow (x-1)^3=0 \Rightarrow (x-1)^3=0 \ /\sqrt[3]{\ } \Rightarrow x-1=0 \Rightarrow x=1.$$

Uvrstimo x = 1 u prvu i treću jednadžbu sustava.

$$\left.\begin{matrix} x+y+z=3 \\ x\cdot y\cdot z=1 \\ x=1 \end{matrix}\right\} \Rightarrow \left.\begin{matrix} 1+y+z=3 \\ 1\cdot y\cdot z=1 \end{matrix}\right\} \Rightarrow \left.\begin{matrix} y+z=3-1 \\ y\cdot z=1 \end{matrix}\right\} \Rightarrow \left.\begin{matrix} y+z=2 \\ y\cdot z=1 \end{matrix}\right\} \Rightarrow \left.\begin{matrix} z=2-y \\ y\cdot z=1 \end{matrix}\right\} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{bmatrix} \text{metoda} \\ \text{supstitucije} \end{bmatrix} \Rightarrow y\cdot(2-y)=1 \Rightarrow 2\cdot y-y^2=1 \Rightarrow -y^2+2\cdot y-1=0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow -y^2+2\cdot y-1=0 \ /\cdot(-1) \Rightarrow y^2-2\cdot y+1=0 \Rightarrow (y-1)^2=0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow (y-1)^2=0 \ /\sqrt{\ } \Rightarrow y-1=0 \Rightarrow y=1.$$

Računamo nepoznanicu z.

$$\left.\begin{array}{l} z=2-y \\ y=1 \end{array}\right\} \Rightarrow z=2-1 \Rightarrow z=1.$$

Rješenje sustava je:

$$(x, y, z)=(1, 1, 1).$$

Vježba 062

$$\text{Riješi sustav}: \begin{cases} x+y+z=3 \\ (x+y)^2+z^2=3+2\cdot x\cdot y \\ x\cdot y\cdot z=1. \end{cases}$$

Rezultat: $(x, y, z)=(1, 1, 1).$

Zadatak 063 (Lucija, srednja škola)

Dva broja odnose se kao 1 : 4. Drugi broj za 15 je veći od prvoga broja. Koliko iznose ti brojevi?

Rješenje 063

Ponovimo!

Razmjer ili proporcija je jednakost dvaju jednakih omjera. Ako je

a : b = k i c : d = k,

tada je razmjer ili proporcija

a : b = c : d.

Umnožak vanjskih članova razmjera a i d jednak je umnošku unutarnjih članova razmjera b i c.

$$a : b = c : d \Rightarrow a\cdot d=b\cdot c.$$

Kako zapisati da je broj a za n veći od broja b?

$$a-n=b \quad \text{ili} \quad a=b+n \quad \text{ili} \quad a-b=n.$$

Neka su x i y traženi brojevi. Budući da se odnose kao 1 : 4, vrijedi jednadžba:

$$x : y=1 : 4 \Rightarrow y\cdot 1=4\cdot x \Rightarrow y=4\cdot x.$$

Drugi broj y za 15 je veći od prvoga broja x pa slijedi:

$$y-x=15.$$

Iz sustava jednadžbi dobiju se traženi brojevi.

$$\left.\begin{array}{l} y=4\cdot x \\ y-x=15 \end{array}\right\} \Rightarrow \left[\begin{array}{l} \text{metoda} \\ \text{supstitucije} \end{array}\right] \Rightarrow 4\cdot x-x=15 \Rightarrow 3\cdot x=15 \Rightarrow 3\cdot x=15 \;/:3 \Rightarrow x=5.$$

Računamo y.

$$\left.\begin{array}{l} x=5 \\ y=4\cdot x \end{array}\right\} \Rightarrow y=4\cdot 5 \Rightarrow y=20.$$

To su brojevi 5 i 20.

Vježba 063

Dva broja odnose se kao 1 : 3. Drugi broj za 10 je veći od prvoga broja. Koliko iznose ti brojevi?

Rezultat: 5, 15.

Zadatak 064 (4A, TUPŠ)

U sustavu jednadžbi $\begin{cases} x=2\cdot y+4 \\ y=2\cdot x+7 \end{cases}$ izračunajte nepoznanicu x.

Rješenje 064

$$\left.\begin{array}{l} x=2\cdot y+4 \\ y=2\cdot x+7 \end{array}\right\} \Rightarrow \left[\begin{array}{l} \text{metoda} \\ \text{supstitucije} \end{array}\right] \Rightarrow x=2\cdot(2\cdot x+7)+4 \Rightarrow x=4\cdot x+14+4 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow x-4\cdot x=14+4 \Rightarrow -3\cdot x=18 \Rightarrow -3\cdot x=18 \;/:(-3) \Rightarrow x=-6.$$

Vježba 064

U sustavu jednadžbi $\left\{\begin{array}{l} x=2\cdot y+4 \\ y=2\cdot x+7 \end{array}\right.$ izračunajte nepoznanicu y.

Rezultat: – 5.

Zadatak 065 (Maturanti, TUPŠ)

Dnevna potreba odrasle osobe iznosi 5 g ugljikohidrata i 0.9 g bjelančevina po 1 kg težine. Kilogram hrane A ima 10 g ugljikohidrata i 160 g bjelančevina, dok kilogram hrane B ima 220 g ugljikohidrata i 20 g bjelančevina. Koliko kilograma hrane A i B treba konzumirati da se zadovolje dnevne potrebe ugljikohidrata i bjelančevina osobe koja je teška 50 kg?

Rješenje 065

Zakon distribucije množenja prema zbrajanju.

$$a\cdot(b+c)=a\cdot b+a\cdot c \quad , \quad a\cdot b+a\cdot c=a\cdot(b+c).$$

Dnevna potreba odrasle osobe iznosi 5 g ugljikohidrata i 0.9 g bjelančevina po 1 kg težine. Budući da je osoba teška 50 kilograma, ukupna dnevna potreba je:

$$5\cdot 50=250 \; g \; \text{ugljikohidrata}$$
$$0.9\cdot 50=45 \; g \; \text{bjelančevina}.$$

Označimo slovom x broj kilograma hrane A, a slovom y broj kilograma hrane B.

Dnevna potreba odrasle osobe iznosi 250 g ugljikohidrata. Kilogram hrane A ima 10 g ugljikohidrata, a kilogram hrane B ima 220 g ugljikohidrata. Zato vrijedi jednadžba:

$$10\cdot x+220\cdot y=250.$$

Dnevna potreba odrasle osobe iznosi 45 g bjelančevina. Kilogram hrane A ima 160 g bjelančevina, a kilogram hrane B ima 20 g bjelančevina. Zato vrijedi jednadžba:

$$160\cdot x+20\cdot y=45.$$

Da bismo izračunalo koliko najmanje kilograma i hrane A i hrane B treba konzumirati da se zadovolje dnevne potrebe za ugljikohidratima i bjelančevinama moramo riješiti sustav jednadžbi:

$$\left.\begin{array}{l} 10\cdot x+220\cdot y=250 \\ 160\cdot x+20\cdot y=45 \end{array}\right\} \Rightarrow \left.\begin{array}{l} 10\cdot x+220\cdot y=250 \;/:10 \\ 160\cdot x+20\cdot y=45 \;/:5 \end{array}\right\} \Rightarrow \left.\begin{array}{l} x+22\cdot y=25 \\ 32\cdot x+4\cdot y=9 \end{array}\right\} \Rightarrow \left[\begin{array}{l} \text{metoda} \\ \text{supstitucije} \end{array}\right] \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \left.\begin{array}{l} x=25-22\cdot y \\ 32\cdot x+4\cdot y=9 \end{array}\right\} \Rightarrow 32\cdot(25-22\cdot y)+4\cdot y=9 \Rightarrow 800-704\cdot y+4\cdot y=9 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow -704\cdot y+4\cdot y=9-800 \Rightarrow -700\cdot y=-791 \Rightarrow -700\cdot y=-791 \;/:(-700) \Rightarrow y=1.13.$$

Sada računamo nepoznanicu x.

$$\left.\begin{array}{l} 10\cdot x+220\cdot y=250 \\ y=1.13 \end{array}\right\} \Rightarrow \left.\begin{array}{l} 10\cdot x+220\cdot y=250 \;/:10 \\ y=1.13 \end{array}\right\} \Rightarrow \left.\begin{array}{l} x+22\cdot y=25 \\ y=1.13 \end{array}\right\} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow x+22\cdot 1.13=25 \Rightarrow x+24.86=25 \Rightarrow x=25-24.86 \Rightarrow x=0.14.$$

Hrane A treba 0.14 kg, a hrane B treba 1.13 kg.

Vježba 065

Dnevna potreba odrasle osobe iznosi 5 g ugljikohidrata i 0.9 g bjelančevina po 1 kg težine. Kilogram hrane A ima 1 dag ugljikohidrata i 16 dag bjelančevina, dok kilogram hrane B ima 22 dag ugljikohidrata i 2 dag bjelančevina. Koliko kilograma hrane A i B treba konzumirati da se zadovolje dnevne potrebe ugljikohidrata i bjelančevina osobe koja je teška 50 kg?

Rezultat: Hrane A treba 0.14 kg, a hrane B treba 1.13 kg.

Zadatak 066 (Maturanti, TUPŠ)

Dnevna potreba odrasle osobe iznosi 250 g ugljikohidrata i 45 g bjelančevina. Kilogram hrane A ima 10 g ugljikohidrata i 160 g bjelančevina, dok kilogram hrane B ima 220 g ugljikohidrata i 20 g bjelančevina. Koliko najmanje kilograma i hrane A i hrane B treba konzumirati da se zadovolje dnevne potrebe za ugljikohidratima i bjelančevinama?

Rješenje 066

Ponovimo!

Zakon distribucije množenja prema zbrajanju.

$$a\cdot(b+c)=a\cdot b+a\cdot c \quad , \quad a\cdot b+a\cdot c=a\cdot(b+c).$$

Označimo slovom x broj kilograma hrane A, a slovom y broj kilograma hrane B.

Dnevna potreba odrasle osobe iznosi 250 g ugljikohidrata. Kilogram hrane A ima 10 g ugljikohidrata, a kilogram hrane B ima 220 g ugljikohidrata. Zato vrijedi jednadžba:

$$10\cdot x+220\cdot y=250.$$

Dnevna potreba odrasle osobe iznosi 45 g bjelančevina. Kilogram hrane A ima 160 g bjelančevina, a kilogram hrane B ima 20 g bjelančevina. Zato vrijedi jednadžba:

$$160\cdot x+20\cdot y=45.$$

Da bismo izračunalo koliko najmanje kilograma i hrane A i hrane B treba konzumirati da se zadovolje dnevne potrebe za ugljikohidratima i bjelančevinama moramo riješiti sustav jednadžbi:

$$\left.\begin{array}{l}10\cdot x+220\cdot y=250\\160\cdot x+20\cdot y=45\end{array}\right\}\Rightarrow\left.\begin{array}{l}10\cdot x+220\cdot y=250\ /:10\\160\cdot x+20\cdot y=45\ /:5\end{array}\right\}\Rightarrow\left.\begin{array}{l}x+22\cdot y=25\\32\cdot x+4\cdot y=9\end{array}\right\}\Rightarrow\left[\begin{array}{l}\text{metoda}\\\text{supstitucije}\end{array}\right]\Rightarrow$$

$$\Rightarrow\left.\begin{array}{l}x=25-22\cdot y\\32\cdot x+4\cdot y=9\end{array}\right\}\Rightarrow 32\cdot(25-22\cdot y)+4\cdot y=9\Rightarrow 800-704\cdot y+4\cdot y=9\Rightarrow$$

$$\Rightarrow -704\cdot y+4\cdot y=9-800\Rightarrow -700\cdot y=-791\Rightarrow -700\cdot y=-791\ /:(-700)\Rightarrow y=1.13.$$

Sada računamo nepoznanicu x.

$$\left.\begin{array}{l}10\cdot x+220\cdot y=250\\y=1.13\end{array}\right\}\Rightarrow\left.\begin{array}{l}10\cdot x+220\cdot y=250\ /:10\\y=1.13\end{array}\right\}\Rightarrow\left.\begin{array}{l}x+22\cdot y=25\\y=1.13\end{array}\right\}\Rightarrow$$

$$\Rightarrow x+22\cdot 1.13=25\Rightarrow x+24.86=25\Rightarrow x=25-24.86\Rightarrow x=0.14.$$

Hrane A treba 0.14 kg, a hrane B treba 1.13 kg.

Vježba 066

Dnevna potreba odrasle osobe iznosi 250 g ugljikohidrata i 45 g bjelančevina. Kilogram hrane A ima 1 dag ugljikohidrata i 16 dag bjelančevina, dok kilogram hrane B ima 22 dag ugljikohidrata i 2 dag bjelančevina. Koliko najmanje kilograma i hrane A i hrane B treba konzumirati da se zadovolje dnevne potrebe za ugljikohidratima i bjelančevinama?

Rezultat: Hrane A treba 0.14 kg, a hrane B treba 1.13 kg.

Zadatak 067 (Lara, srednja škola)

Za koji realan broj a sustav $\begin{cases} 4\cdot x+3\cdot y=3 \\ 3\cdot x+a\cdot y=5 \end{cases}$ nema rješenja?

Rješenje 067

Ponovimo!

Zakon distribucije množenja prema zbrajanju.

$$a\cdot(b+c)=a\cdot b+a\cdot c \quad , \quad a\cdot b+a\cdot c=a\cdot(b+c).$$

Računamo nepoznanicu y.

$$\left.\begin{matrix} 4\cdot x+3\cdot y=3 \\ 3\cdot x+a\cdot y=5 \end{matrix}\right\} \Rightarrow \begin{bmatrix} \text{metoda suprotnih} \\ \text{koeficijenata} \end{bmatrix} \Rightarrow \left.\begin{matrix} 4\cdot x+3\cdot y=3 \ /\cdot(-3) \\ 3\cdot x+a\cdot y=5 \ /\cdot 4 \end{matrix}\right\} \Rightarrow \left.\begin{matrix} -12\cdot x-9\cdot y=-9 \\ 12\cdot x+4\cdot a\cdot y=20 \end{matrix}\right\} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow -9\cdot y+4\cdot a\cdot y=11 \Rightarrow 4\cdot a\cdot y-9\cdot y=11 \Rightarrow y\cdot(4\cdot a-9)=11 \Rightarrow y\cdot(4\cdot a-9)=11 \ /\cdot\frac{1}{4\cdot a-9} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow y=\frac{11}{4\cdot a-9}.$$

S nulom se ne može dijeliti. Zato moramo odbaciti vrijednost broja a za koji je nazivnik jednak nuli.

$$4\cdot a-9=0 \Rightarrow 4\cdot a=9 \Rightarrow 4\cdot a=9 \ /\cdot\frac{1}{4} \Rightarrow a=\frac{9}{4}.$$

Dakle, sustav nema rješenja za

$$a=\frac{9}{4}.$$

Vježba 067

Za koji realan broj a sustav $\begin{cases} 4\cdot x+3\cdot y=1 \\ 16\cdot x+a\cdot y=7 \end{cases}$ nema rješenja?

Rezultat: a = 12.

Zadatak 068 (Barbara, opća gimnazija)

U dvjema posudama od po 50 l nalazi se izvjesna količina tekućine. Ako bi iz prve posude prelili u drugu 1/3 sadržaja, druga bi posuda bila puna. A ako bi iz druge posude prelili u prvu 1/2 sadržaja, prva bi bila puna. Koliko je u kojoj posudi tekućine?

Rješenje 068

Neka je x broj litara tekućine u prvoj posudi, a y broj litara tekućine u drugoj posudi. Obujam svake posude je 50 litara.

Ako bi iz prve posude prelili u drugu 1/3 sadržaja, druga bi posuda bila puna pa vrijedi jednadžba:

$$\frac{1}{3}\cdot x+y=50.$$

A ako bi iz druge posude prelili u prvu 1/2 sadržaja, prva bi bila puna pa vrijedi jednadžba:

$$x+\frac{1}{2}\cdot y=50.$$

Riješimo sustav jednadžbi.

$$\left.\begin{matrix} \frac{1}{3}\cdot x+y=50 \\ x+\frac{1}{2}\cdot y=50 \end{matrix}\right\} \Rightarrow \begin{bmatrix} \text{riješimo se razlomaka u jednadžbama tako} \\ \text{da prvu pomnožimo sa 3, a drugu sa 2} \end{bmatrix} \Rightarrow \left.\begin{matrix} \frac{1}{3}\cdot x+y=50 \ /\cdot 3 \\ x+\frac{1}{2}\cdot y=50 \ /\cdot 2 \end{matrix}\right\} \Rightarrow$$

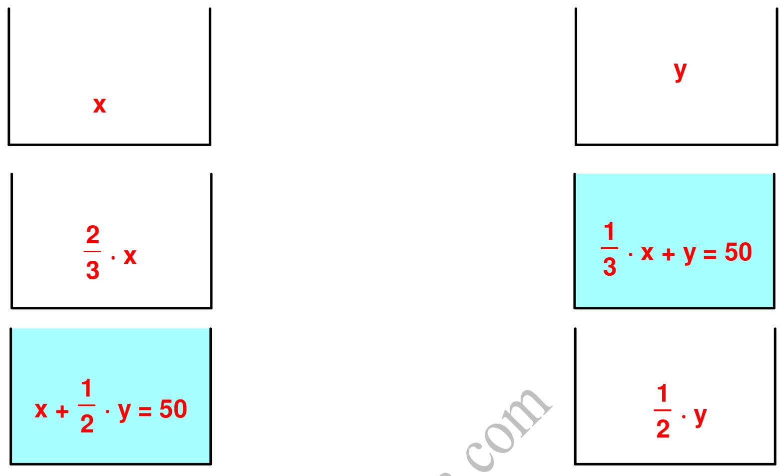
$$\Rightarrow \left.\begin{matrix} x+3\cdot y=150 \\ 2\cdot x+y=100 \end{matrix}\right\} \Rightarrow \left[\begin{matrix} \text{metoda suprotnih} \\ \text{koeficijenata} \end{matrix}\right] \Rightarrow \left.\begin{matrix} x+3\cdot y=150 \\ 2\cdot x+y=100 \;/\cdot(-3) \end{matrix}\right\} \Rightarrow \left.\begin{matrix} x+3\cdot y=150 \\ -6\cdot x-3\cdot y=-300 \end{matrix}\right\} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow -5\cdot x=-150 \Rightarrow -5\cdot x=-150 \;/:(-5) \Rightarrow x=30.$$

Računamo nepoznanicu y.

$$\left.\begin{matrix} x+\frac{1}{2}\cdot y=50 \\ x=30 \end{matrix}\right\} \Rightarrow 30+\frac{1}{2}\cdot y=50 \Rightarrow \frac{1}{2}\cdot y=50-30 \Rightarrow \frac{1}{2}\cdot y=20 \Rightarrow \frac{1}{2}\cdot y=20 \;/\cdot 2 \Rightarrow y=40.$$

U prvoj posudi je 30 litara, a u drugoj 40 litara tekućine.



Vježba 068

U dvjema posudama od po 100 l nalazi se izvjesna količina tekućine. Ako bi iz prve posude prelili u drugu 1/3 sadržaja, druga bi posuda bila puna. A ako bi iz druge posude prelili u prvu 1/2 sadržaja, prva bi bila puna. Koliko je u kojoj posudi tekućine?

Rezultat: 60 l, 80 l.

Zadatak 069 (Barbara, opća gimnazija)

Riješi sustav jednadžbi metodom uvođenja novih nepoznanica.

$$\left\{\begin{matrix} \frac{3}{x-2\cdot y}+\frac{2}{2\cdot x+y}=3 \\ \frac{2}{x-2\cdot y}-\frac{1}{4\cdot x+2\cdot y}=\frac{1}{6}. \end{matrix}\right.$$

Rješenje 069

Ponovimo!

$$n=\frac{n}{1} \quad , \quad a\cdot\frac{b}{c}=\frac{a\cdot b}{c} \quad , \quad \frac{a}{b}\cdot\frac{c}{d}=\frac{a\cdot c}{b\cdot d} \quad , \quad \frac{a}{b}=\frac{c}{d} \Rightarrow a\cdot d=b\cdot c \quad , \quad \frac{a}{b}+\frac{c}{d}=\frac{a\cdot d+b\cdot c}{b\cdot d}.$$

Zakon distribucije množenja prema zbrajanju

$$a\cdot(b+c)=a\cdot b+a\cdot c \quad , \quad a\cdot b+a\cdot c=a\cdot(b+c).$$

$$\left.\begin{matrix} \frac{3}{x-2\cdot y}+\frac{2}{2\cdot x+y}=3 \\ \frac{2}{x-2\cdot y}-\frac{1}{4\cdot x+2\cdot y}=\frac{1}{6} \end{matrix}\right\} \Rightarrow \left.\begin{matrix} \frac{3}{x-2\cdot y}+\frac{2}{2\cdot x+y}=3 \\ \frac{2}{x-2\cdot y}-\frac{1}{2\cdot(2\cdot x+y)}=\frac{1}{6} \end{matrix}\right\} \Rightarrow \left.\begin{matrix} 3\cdot\frac{1}{x-2\cdot y}+2\cdot\frac{1}{2\cdot x+y}=3 \\ 2\cdot\frac{1}{x-2\cdot y}-\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2\cdot x+y}=\frac{1}{6} \end{matrix}\right\}.$$

Uvodimo nove nepoznanice u i v

$$\left.\begin{array}{l} u=\dfrac{1}{x-2\cdot y} \\ v=\dfrac{1}{2\cdot x+y} \end{array}\right\}$$

pa zadani sustav glasi:

$$\left.\begin{array}{l} 3\cdot u+2\cdot v=3 \\ 2\cdot u-\dfrac{1}{2}\cdot v=\dfrac{1}{6} \end{array}\right\} \Rightarrow \left[\begin{array}{l} \text{metoda suprotnih} \\ \text{koeficijenata} \end{array}\right] \Rightarrow \left.\begin{array}{l} 3\cdot u+2\cdot v=3 \\ 2\cdot u-\dfrac{1}{2}\cdot v=\dfrac{1}{6}\ /\cdot 4 \end{array}\right\} \Rightarrow \left.\begin{array}{l} 3\cdot u+2\cdot v=3 \\ 8\cdot u-2\cdot v=\dfrac{4}{6} \end{array}\right\} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 11\cdot u=3+\frac{4}{6} \Rightarrow 11\cdot u=3+\frac{4}{6} \Rightarrow 11\cdot u=3+\frac{2}{3} \Rightarrow 11\cdot u=\frac{3}{1}+\frac{2}{3} \Rightarrow 11\cdot u=\frac{9+2}{3} \Rightarrow 11\cdot u=\frac{11}{3} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 11\cdot u=\frac{11}{3}\ /:11 \Rightarrow u=\frac{1}{3}.$$

Računamo nepoznanicu v.

$$\left.\begin{array}{l} u=\dfrac{1}{3} \\ 3\cdot u+2\cdot v=3 \end{array}\right\} \Rightarrow 3\cdot\frac{1}{3}+2\cdot v=3 \Rightarrow 3\cdot\frac{1}{3}+2\cdot v=3 \Rightarrow 1+2\cdot v=3 \Rightarrow 2\cdot v=3-1 \Rightarrow 2\cdot v=2 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 2\cdot v=2\ /:2 \Rightarrow v=1.$$

Vrijednost novih varijabli u i v je:

$$(u,\ v)=\left(\frac{1}{3},\ 1\right).$$

Vraćamo se starim nepoznanicama x i y.

$$\left.\begin{array}{l} u=\dfrac{1}{x-2\cdot y}\ ,\ u=\dfrac{1}{3} \\ v=\dfrac{1}{2\cdot x+y}\ ,\ v=1 \end{array}\right\} \Rightarrow \left.\begin{array}{l} \dfrac{1}{x-2\cdot y}=\dfrac{1}{3} \\ \dfrac{1}{2\cdot x+y}=1 \end{array}\right\} \Rightarrow \left.\begin{array}{l} \dfrac{1}{x-2\cdot y}=\dfrac{1}{3} \\ \dfrac{1}{2\cdot x+y}=\dfrac{1}{1} \end{array}\right\} \Rightarrow \left.\begin{array}{l} x-2\cdot y=3 \\ 2\cdot x+y=1 \end{array}\right\} \Rightarrow \left[\begin{array}{l} \text{metoda suprotnih} \\ \text{koeficijenata} \end{array}\right] \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \left.\begin{array}{l} x-2\cdot y=3 \\ 2\cdot x+y=1\ /\cdot 2 \end{array}\right\} \Rightarrow \left.\begin{array}{l} x-2\cdot y=3 \\ 4\cdot x+2\cdot y=2 \end{array}\right\} \Rightarrow 5\cdot x=5 \Rightarrow 5\cdot x=5\ /:5 \Rightarrow x=1.$$

Računamo nepoznanicu y.

$$\left.\begin{array}{l} 2\cdot x+y=1 \\ x=1 \end{array}\right\} \Rightarrow 2\cdot 1+y=1 \Rightarrow 2+y=1 \Rightarrow y=1-2 \Rightarrow y=-1.$$

Rješenje sustava glasi:

$$(x,\ y)=(1,\ -1).$$

Vježba 069

Riješi sustav jednadžbi metodom uvođenja novih nepoznanica.

$$\left\{\begin{array}{l} \dfrac{3}{x-2\cdot y}+\dfrac{2}{2\cdot x+y}=3 \\ \dfrac{4}{x-2\cdot y}-\dfrac{2}{4\cdot x+2\cdot y}=\dfrac{1}{3}. \end{array}\right.$$

Rezultat: $(x,\ y)=(1,\ -1).$

Zadatak 070 (Srdjan, pripravnik)

Zadana su dva broja. Veći broj je za 4 manji od dvostrukog manjeg. Zbroj brojeva iznosi 20. Nađi te brojeve.

Rješenje 070

Ponovimo!

Zakon distribucije množenja prema zbrajanju.

$$a \cdot (b+c) = a \cdot b + a \cdot c \quad , \quad a \cdot b + a \cdot c = a \cdot (b+c).$$

Kako zapisati dvostruku vrijednost od broja a?

$$2 \cdot a.$$

Kako zapisati da je broj a za n manji od broja b?

$$a + n = b \qquad \text{ili} \qquad a = b - n \qquad \text{ili} \qquad b - a = n.$$

1.inačica

Neka su x i y dva broja tako da je x > y (x je veće od y). Iz uvjeta zadatka dobije se sustav od dvije jednadžbe sa dvije nepoznanice.

$$\left.\begin{array}{l} x+4=2\cdot y \\ x+y=20 \end{array}\right\} \Rightarrow \left.\begin{array}{l} x=2\cdot y-4 \\ x+y=20 \end{array}\right\} \Rightarrow \left[\begin{array}{l} \text{metoda} \\ \text{supstitucije} \end{array}\right] \Rightarrow 2\cdot y-4+y=20 \Rightarrow 2\cdot y+y=20+4 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 3\cdot y=24 \Rightarrow 3\cdot y=24 \;/:3 \Rightarrow y=8.$$

Računamo nepoznanicu x.

$$\left.\begin{array}{l} x+y=20 \\ y=8 \end{array}\right\} \Rightarrow x+8=20 \Rightarrow x=20-8 \Rightarrow x=12.$$

Rješenje sustava glasi:

$$(x,\ y)=(12,\ 8).$$

2.inačica

Zbroj dva broja je 20. Ako veći broj označimo slovom x, tada manji broj iznosi 20 – x. Budući da je veći broj za 4 manji od dvostrukog manjeg, vrijedi jednadžba:

$$x+4=2\cdot(20-x) \Rightarrow x+4=40-2\cdot x \Rightarrow x+2\cdot x=40-4 \Rightarrow 3\cdot x=36 \Rightarrow 3\cdot x=36 \;/:3 \Rightarrow x=12.$$

Traženi brojevi su:

- veći broj x = 12
- manji broj 20 – x = 20 – 12 = 8.

Vježba 070

Zadana su dva broja. Veći broj je za 2 manji od trostrukog manjeg. Zbroj brojeva iznosi 6. Nađi te brojeve.

Rezultat: $(x,\ y)=(4,\ 2).$

Zadatak 071 (Maturant, gimnazija)

U dva hotela izgrađeni su bazeni pravokutnog oblika. Bazen u prvom hotelu ima površinu 240 m^2. Bazen u drugom hotelu ima površinu 350 m^2 te je 5 m duži i 2 m širi od bazena prvog hotela. Izračunajte koje dimenzije mogu imati bazeni u oba hotela. Navedite sve mogućnosti.

Rješenje 071

Ponovimo!

$$n=\frac{n}{1} \quad , \quad \frac{a}{b}\cdot\frac{c}{d}=\frac{a\cdot c}{b\cdot d}.$$

Zakon distribucije množenja prema zbrajanju.

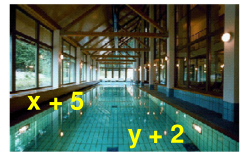
$$a \cdot (b+c) = a \cdot b + a \cdot c \quad , \quad a \cdot b + a \cdot c = a \cdot (b+c).$$

Množenje zagrada

$$(a+b)\cdot(c+d)=a\cdot c+a\cdot d+b\cdot c+b\cdot d.$$

Ploština pravokutnika duljina stranica a i b izračunava se po formuli

$$P = a \cdot b.$$



1.inačica

Neka bazen manje površine ima dimenzije:

- duljina x
- širina y.

Tada bazen veće površine ima dimenzije:

- duljina x + 5
- širina y + 2.

Za površinu manjeg bazena vrijedi:

$$x \cdot y = 240.$$

Za površinu većeg bazena vrijedi:

$$(x+5) \cdot (y+2) = 350.$$

Postavimo sustav jednadžbi.

$$\left.\begin{array}{l} x \cdot y = 240 \\ (x+5)\cdot(y+2) = 350 \end{array}\right\} \Rightarrow \left.\begin{array}{l} x \cdot y = 240 \\ x \cdot y + 2 \cdot x + 5 \cdot y + 10 = 350 \end{array}\right\} \Rightarrow 240 + 2 \cdot x + 5 \cdot y + 10 = 350 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 2 \cdot x + 5 \cdot y = 350 - 240 - 10 \Rightarrow 2 \cdot x + 5 \cdot y = 100.$$

Ponovno promatramo sustav jednadžbi i izračunamo x i y.

$$\left.\begin{array}{l} x \cdot y = 240 \\ 2 \cdot x + 5 \cdot y = 100 \end{array}\right\} \Rightarrow \left.\begin{array}{l} x \cdot y = 240 \\ 2 \cdot x = 100 - 5 \cdot y \end{array}\right\} \Rightarrow \left.\begin{array}{l} x \cdot y = 240 \\ 2 \cdot x = 100 - 5 \cdot y \;\; /:2 \end{array}\right\} \Rightarrow \left.\begin{array}{l} x \cdot y = 240 \\ x = \dfrac{100 - 5 \cdot y}{2} \end{array}\right\} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{bmatrix} \text{metoda} \\ \text{supstitucije} \end{bmatrix} \Rightarrow \frac{100 - 5 \cdot y}{2} \cdot y = 240 \Rightarrow \frac{100 - 5 \cdot y}{2} \cdot \frac{y}{1} = 240 \Rightarrow \frac{100 \cdot y - 5 \cdot y^2}{2} = 240 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \frac{100 \cdot y - 5 \cdot y^2}{2} = 240 \;\; / \cdot 2 \Rightarrow 100 \cdot y - 5 \cdot y^2 = 480 \Rightarrow -5 \cdot y^2 + 100 \cdot y - 480 = 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow -5 \cdot y^2 + 100 \cdot y - 480 = 0 \;\; /:(-5) \Rightarrow y^2 - 20 \cdot y + 96 = 0 \Rightarrow \left.\begin{array}{l} y^2 - 20 \cdot y + 96 = 0 \\ a = 1 \;,\; b = -20 \;,\; c = 96 \end{array}\right\} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \left.\begin{array}{l} a = 1 \;,\; b = -20 \;,\; c = 96 \\ y_{1,2} = \dfrac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4 \cdot a \cdot c}}{2 \cdot a} \end{array}\right\} \Rightarrow y_{1,2} = \frac{-(-20) \pm \sqrt{(-20)^2 - 4 \cdot 1 \cdot 96}}{2 \cdot 1} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow y_{1,2} = \frac{20 \pm \sqrt{400 - 384}}{2} \Rightarrow y_{1,2} = \frac{20 \pm \sqrt{16}}{2} \Rightarrow y_{1,2} = \frac{20 \pm 4}{2} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \left.\begin{array}{l} y_1 = \dfrac{20+4}{2} \\ y_2 = \dfrac{20-4}{2} \end{array}\right\} \Rightarrow \left.\begin{array}{l} y_1 = \dfrac{24}{2} \\ y_2 = \dfrac{16}{2} \end{array}\right\} \Rightarrow \left.\begin{array}{l} y_1 = 12 \\ y_2 = 8 \end{array}\right\} \Rightarrow \left[x = \frac{100 - 5 \cdot y}{2} \right] \Rightarrow \left.\begin{array}{l} x_1 = \dfrac{100 - 5 \cdot 12}{2} \\ x_2 = \dfrac{100 - 5 \cdot 8}{2} \end{array}\right\} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \left.\begin{array}{l} x_1 = \frac{100-60}{2} \\ x_2 = \frac{100-40}{2} \end{array}\right\} \Rightarrow \left.\begin{array}{l} x_1 = \frac{40}{2} \\ x_2 = \frac{60}{2} \end{array}\right\} \Rightarrow \left.\begin{array}{l} x_1 = 20 \\ x_2 = 30 \end{array}\right\}.$$

Rješenja su:

$$(x_1, y_1) = (20, 12) \quad , \quad (x_2, y_2) = (30, 8).$$

Manji bazen može imati sljedeće dimenzije:

- duljina 20 m, širina 12 m
- duljina 30 m, širina 8 m.

Veći bazen, koji je 5 m duži i 2 m širi može imati dimenzije:

- duljina 25 m, širina 14 m
- duljina 35 m, širina 10 m.

2.inačica

Neka bazen manje površine ima dimenzije:

- duljina x
- širina y.

Tada bazen veće površine ima dimenzije:

- duljina x + 5
- širina y + 2.

Za površinu manjeg bazena vrijedi:

$$x \cdot y = 240.$$

Za površinu većeg bazena vrijedi:

$$(x+5) \cdot (y+2) = 350.$$

Postavimo sustav jednadžbi.

$$\left.\begin{array}{l} x \cdot y = 240 \\ (x+5) \cdot (y+2) = 350 \end{array}\right\} \Rightarrow \left.\begin{array}{l} x \cdot y = 240 \\ x \cdot y + 2 \cdot x + 5 \cdot y + 10 = 350 \end{array}\right\} \Rightarrow 240 + 2 \cdot x + 5 \cdot y + 10 = 350 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 2 \cdot x + 5 \cdot y = 350 - 240 - 10 \Rightarrow 2 \cdot x + 5 \cdot y = 100.$$

Ponovno promatramo sustav jednadžbi i izračunamo x i y.

$$\left.\begin{array}{l} x \cdot y = 240 \\ 2 \cdot x + 5 \cdot y = 100 \end{array}\right\} \Rightarrow \left.\begin{array}{l} x \cdot y = 240 \ / \cdot \frac{1}{x} \\ 2 \cdot x + 5 \cdot y = 100 \end{array}\right\} \Rightarrow \left.\begin{array}{l} y = \frac{240}{x} \\ 2 \cdot x + 5 \cdot y = 100 \end{array}\right\} \Rightarrow \left[\begin{array}{l} \text{metoda} \\ \text{supstitucije} \end{array}\right] \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 2 \cdot x + 5 \cdot \frac{240}{x} = 100 \Rightarrow 2 \cdot x + \frac{5}{1} \cdot \frac{240}{x} = 100 \Rightarrow 2 \cdot x + \frac{1200}{x} = 100 \Rightarrow 2 \cdot x + \frac{1200}{x} = 100 \ / \cdot x \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 2 \cdot x^2 + 1200 = 100 \cdot x \Rightarrow 2 \cdot x^2 - 100 \cdot x + 1200 = 0 \Rightarrow 2 \cdot x^2 - 100 \cdot x + 1200 = 0 \ /: 2 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow x^2 - 50 \cdot x + 600 = 0 \Rightarrow \left.\begin{array}{l} x^2 - 50 \cdot x + 600 = 0 \\ a = 1 \ , \ b = -50 \ , \ c = 600 \end{array}\right\} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \left.\begin{array}{l} a = 1 \ , \ b = -50 \ , \ c = 600 \\ x_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4 \cdot a \cdot c}}{2 \cdot a} \end{array}\right\} \Rightarrow x_{1,2} = \frac{-(-50) \pm \sqrt{(-50)^2 - 4 \cdot 1 \cdot 600}}{2 \cdot 1} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow x_{1,2}=\frac{50\pm\sqrt{2500-2400}}{2} \Rightarrow x_{1,2}=\frac{50\pm\sqrt{100}}{2} \Rightarrow x_{1,2}=\frac{50\pm 10}{2} \Rightarrow \left.\begin{matrix} x_1=\frac{50+10}{2} \\ x_2=\frac{50-10}{2}\end{matrix}\right\} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \left.\begin{matrix} x_1=\frac{60}{2} \\ x_2=\frac{40}{2}\end{matrix}\right\} \Rightarrow \left.\begin{matrix} x_1=30 \\ x_2=20\end{matrix}\right\} \Rightarrow \left[y=\frac{240}{x}\right] \Rightarrow \left.\begin{matrix} y_1=\frac{240}{30} \\ y_2=\frac{240}{20}\end{matrix}\right\} \Rightarrow \left.\begin{matrix} y_1=8 \\ y_2=12\end{matrix}\right\}.$$

Rješenja su:

$$(x_1, y_1)=(20, 12) \quad , \quad (x_2, y_2)=(30, 8).$$

Manji bazen može imati sljedeće dimenzije:

- duljina 20 m, širina 12 m
- duljina 30 m, širina 8 m.

Veći bazen, koji je 5 m duži i 2 m širi može imati dimenzije:

- duljina 25 m, širina 14 m
- duljina 35 m, širina 10 m.

Vježba 071

U dva grada izgrađeni su bazeni pravokutnog oblika. Bazen u prvom gradu ima površinu 960 m^2. Bazen u drugom gradu ima površinu 1400 m^2 te je 10 m duži i 4 m širi od bazena prvog grada. Izračunajte koje dimenzije mogu imati bazeni u oba grada. Navedite sve mogućnosti.

Rezultat: Manji bazen može imati sljedeće dimenzije:

- duljina 40 m, širina 24 m
- duljina 60 m, širina 16 m.

Veći bazen, koji je 10 m duži i 4 m širi može imati dimenzije:

- duljina 50 m, širina 28 m
- duljina 70 m, širina 20 m.

Zadatak 072 (TBF, gimnazija)

Riješi sustav: $\frac{2\cdot x^2}{1+x^2}=y \ , \ \frac{2\cdot y^2}{1+y^2}=z \ , \ \frac{2\cdot z^2}{1+z^2}=x.$

Rješenje 072

Ponovimo!

$$\frac{a}{b}=\frac{c}{d} \Rightarrow \frac{b}{a}=\frac{d}{c} \quad , \quad (a-b)^2=a^2-2\cdot a\cdot b+b^2 \quad , \quad a^2+b^2=0 \Rightarrow a=b=0 \quad , \quad n=\frac{n}{1}.$$

$$a=b \Rightarrow b=a \quad , \quad \frac{a+b}{n}=\frac{a}{n}+\frac{b}{n} \quad , \quad a\cdot\frac{1}{b}=\frac{a}{b} \quad , \quad \frac{a}{b}=1 \Rightarrow a=b.$$

Uočimo najprije da sustav ima trivijalno rješenje

$$(x_1, y_1, z_1)=(0, 0, 0).$$

Zadani sustav transformiramo na sljedeći oblik:

$$\left.\begin{aligned}\frac{2\cdot x^2}{1+x^2}&=y\\ \frac{2\cdot y^2}{1+y^2}&=z\\ \frac{2\cdot z^2}{1+z^2}&=x\end{aligned}\right\}\Rightarrow\left.\begin{aligned}\frac{2\cdot x^2}{1+x^2}&=\frac{y}{1}\\ \frac{2\cdot y^2}{1+y^2}&=\frac{z}{1}\\ \frac{2\cdot z^2}{1+z^2}&=\frac{x}{1}\end{aligned}\right\}\Rightarrow\left.\begin{aligned}\frac{1+x^2}{2\cdot x^2}&=\frac{1}{y}\\ \frac{1+y^2}{2\cdot y^2}&=\frac{1}{z}\\ \frac{1+z^2}{2\cdot z^2}&=\frac{1}{x}\end{aligned}\right\}\Rightarrow\left.\begin{aligned}\frac{1}{2\cdot x^2}+\frac{x^2}{2\cdot x^2}&=\frac{1}{y}\\ \frac{1}{2\cdot y^2}+\frac{y^2}{2\cdot y^2}&=\frac{1}{z}\\ \frac{1}{2\cdot z^2}+\frac{z^2}{2\cdot z^2}&=\frac{1}{x}\end{aligned}\right\}\Rightarrow$$

$$\Rightarrow\left.\begin{aligned}\frac{1}{2\cdot x^2}+\frac{x^2}{2\cdot x^2}&=\frac{1}{y}\\ \frac{1}{2\cdot y^2}+\frac{y^2}{2\cdot y^2}&=\frac{1}{z}\\ \frac{1}{2\cdot z^2}+\frac{z^2}{2\cdot z^2}&=\frac{1}{x}\end{aligned}\right\}\Rightarrow\left.\begin{aligned}\frac{1}{2\cdot x^2}+\frac{1}{2}&=\frac{1}{y}\\ \frac{1}{2\cdot y^2}+\frac{1}{2}&=\frac{1}{z}\\ \frac{1}{2\cdot z^2}+\frac{1}{2}&=\frac{1}{x}\end{aligned}\right\}\Rightarrow\left.\begin{aligned}\frac{1}{y}&=\frac{1}{2\cdot x^2}+\frac{1}{2}\\ \frac{1}{z}&=\frac{1}{2\cdot y^2}+\frac{1}{2}\\ \frac{1}{x}&=\frac{1}{2\cdot z^2}+\frac{1}{2}\end{aligned}\right\}\Rightarrow\left[\begin{array}{l}\text{svaku jednadžbu}\\ \text{pomnožimo s } 2\end{array}\right]\Rightarrow$$

$$\Rightarrow\left.\begin{aligned}\frac{1}{y}&=\frac{1}{2\cdot x^2}+\frac{1}{2}\ /\cdot 2\\ \frac{1}{z}&=\frac{1}{2\cdot y^2}+\frac{1}{2}\ /\cdot 2\\ \frac{1}{x}&=\frac{1}{2\cdot z^2}+\frac{1}{2}\ /\cdot 2\end{aligned}\right\}\Rightarrow\left.\begin{aligned}\frac{2}{y}&=\frac{1}{x^2}+1\\ \frac{2}{z}&=\frac{1}{y^2}+1\\ \frac{2}{x}&=\frac{1}{z^2}+1\end{aligned}\right\}\Rightarrow\left[\begin{array}{l}\text{zbrojimo}\\ \text{jednadžbe}\end{array}\right]\Rightarrow$$

$$\Rightarrow\frac{2}{y}+\frac{2}{z}+\frac{2}{x}=\frac{1}{x^2}+1+\frac{1}{y^2}+1+\frac{1}{z^2}+1\Rightarrow\frac{1}{x^2}+1+\frac{1}{y^2}+1+\frac{1}{z^2}+1-\frac{2}{y}-\frac{2}{z}-\frac{2}{x}=0\Rightarrow$$

$$\Rightarrow\frac{1}{x^2}-\frac{2}{x}+1+\frac{1}{y^2}-\frac{2}{y}+1+\frac{1}{z^2}-\frac{2}{z}+1=0\Rightarrow\left(\frac{1}{x^2}-\frac{2}{x}+1\right)+\left(\frac{1}{y^2}-\frac{2}{y}+1\right)+\left(\frac{1}{z^2}-\frac{2}{z}+1\right)=0\Rightarrow$$

$$\Rightarrow\left(\frac{1}{x^2}-2\cdot\frac{1}{x}+1\right)+\left(\frac{1}{y^2}-2\cdot\frac{1}{y}+1\right)+\left(\frac{1}{z^2}-2\cdot\frac{1}{z}+1\right)=0\Rightarrow\left(\frac{1}{x}-1\right)^2+\left(\frac{1}{y}-1\right)^2+\left(\frac{1}{z}-1\right)^2=0.$$

Ova jednakost moguća je samo ako je svaki pribrojnik jednak nuli.

$$\left.\begin{aligned}\left(\frac{1}{x}-1\right)^2&=0\\ \left(\frac{1}{y}-1\right)^2&=0\\ \left(\frac{1}{z}-1\right)^2&=0\end{aligned}\right\}\Rightarrow\left.\begin{aligned}\frac{1}{x}-1&=0\\ \frac{1}{y}-1&=0\\ \frac{1}{z}-1&=0\end{aligned}\right\}\Rightarrow\left.\begin{aligned}\frac{1}{x}&=1\\ \frac{1}{y}&=1\\ \frac{1}{z}&=1\end{aligned}\right\}\Rightarrow\left.\begin{aligned}x&=1\\ y&=1\\ z&=1\end{aligned}\right\}\Rightarrow\left(x_2,\ y_2,\ z_2\right)=(1,\ 1,\ 1).$$

Vježba 072

Riješi sustav: $\dfrac{1+x^2}{2\cdot x^2}=\dfrac{1}{y}$, $\dfrac{1+y^2}{2\cdot y^2}=\dfrac{1}{z}$, $\dfrac{1+z^2}{2\cdot z^2}=\dfrac{1}{x}$.

Rezultat: (x, y, z) = (1, 1, 1).

Zadatak 073 (Sanja, srednja škola)

Riješi sustav jednadžbi: $\begin{cases} x+y=2\cdot a \\ x-y=2\cdot b \end{cases}.$

$A.\ (a+b,\ a-b)$ $B.\ (a-b,\ a+b)$ $C.\ (a,\ b)$ $D.\ (b,\ a)$

Rješenje 073

Ponovimo!

Zakon distribucije množenja prema zbrajanju.

$$a\cdot(b+c)=a\cdot b+a\cdot c \quad , \quad a\cdot b+a\cdot c=a\cdot(b+c).$$

$$\left.\begin{array}{l} x+y=2\cdot a \\ x-y=2\cdot b \end{array}\right\} \Rightarrow \left[\begin{array}{l} \text{metoda suprotnih} \\ \text{koeficijenata} \end{array}\right] \Rightarrow 2\cdot x=2\cdot a+2\cdot b \Rightarrow 2\cdot x=2\cdot(a+b) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 2\cdot x=2\cdot(a+b)\ /:2 \Rightarrow x=a+b.$$

Računamo nepoznanicu y.

$$\left.\begin{array}{l} x+y=2\cdot a \\ x=a+b \end{array}\right\} \Rightarrow \left[\begin{array}{l} \text{metoda} \\ \text{supstitucije} \end{array}\right] \Rightarrow a+b+y=2\cdot a \Rightarrow y=2\cdot a-a-b \Rightarrow y=a-b.$$

Rješenje sustava je:

$$(x,\ y)=(a+b,\ a-b).$$

Odgovor je pod A.

Vježba 073

Riješi sustav jednadžbi: $\begin{cases} x+y=a \\ x-y=b \end{cases}.$

$A.\ \left(\frac{a+b}{2},\ \frac{a-b}{2}\right)$ $B.\ \left(\frac{a-b}{2},\ \frac{a+b}{2}\right)$ $C.\ \left(\frac{a}{2},\ \frac{b}{2}\right)$ $D.\ \left(\frac{b}{2},\ \frac{a}{2}\right)$

Rezultat: A.