Zadatak 061 (Zlatko, srednja škola)

Zadani su polinomi $f_1(x) = \left(4 \cdot x^3 - 3 \cdot x^2 + x - 2\right)^{2013}$, $f_2(x) = (5 \cdot x - 3)^{2014}$ i $f_3(x) = \left(3 \cdot x^2 + 4 \cdot x - 6\right)^{2015}$. Za polinom f(x) vrijedi $f(x) = f_1(x) \cdot f_2(x) \cdot f_3(x)$. Zbroj koeficijenata polinoma f(x) napisanog u kanonskom obliku je jednak:

$$A.\ 2^{2013} \qquad B.\ -1 \qquad C.\ 0 \qquad D.\ 1$$

Rješenje 061

Ponovimo!

Polinom stupnja n je funkcija f : R → R definirana s

$$f(x) = a_n \cdot x^n + a_{n-1} \cdot x^{n-1} + a_{n-2} \cdot x^{n-2} + \ldots + a_2 \cdot x^2 + a_1 \cdot x + a_0,$$

gdje su $a_0, a_1, a_2, \ldots, a_n$ realni brojevi, $a_n \neq 0$. Brojeve $a_0, a_1, a_2, \ldots, a_n$ nazivamo koeficijentima polinoma. Koeficijent a_n nazivamo vodećim koeficijentom, koeficijent a_0 slobodnim koeficijentom. Gornji zapis nazivamo kanonskim (standardnim) oblikom polinoma jedne varijable.

Ako je zadan polinom

$$f(x) = a_n \cdot x^n + a_{n-1} \cdot x^{n-1} + a_{n-2} \cdot x^{n-2} + \ldots + a_2 \cdot x^2 + a_1 \cdot x + a_0$$

zbroj njegovih koeficijenata $a_n, a_{n-1}, a_{n-2}, \ldots, a_2, a_1, a_0$ jednak je

$$S = a_n + a_{n-1} + a_{n-2} + \ldots + a_2 + a_1 + a_0.$$

Uočimo da se za x = 1 dobije:

$$\left.\begin{array}{l} f(x) = a_n \cdot x^n + a_{n-1} \cdot x^{n-1} + a_{n-2} \cdot x^{n-2} + \ldots + a_2 \cdot x^2 + a_1 \cdot x + a_0 \\ x = 1 \end{array}\right\} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow f(1) = a_n \cdot 1^n + a_{n-1} \cdot 1^{n-1} + a_{n-2} \cdot 1^{n-2} + \ldots + a_2 \cdot 1^2 + a_1 \cdot 1 + a_0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow f(1) = a_n \cdot 1 + a_{n-1} \cdot 1 + a_{n-2} \cdot 1 + \ldots + a_2 \cdot 1 + a_1 \cdot 1 + a_0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow f(1) = a_n + a_{n-1} + a_{n-2} + \ldots + a_2 + a_1 + a_0 \Rightarrow f(1) = S \text{ − zbroj koeficijenata.}$$

Tada zbroj koeficijenata zadanog polinoma iznosi:

$$\left.\begin{array}{l} f_1(x) = \left(4 \cdot x^3 - 3 \cdot x^2 + x - 2\right)^{2013} \\ f_2(x) = (5 \cdot x - 3)^{2014} \\ f_3(x) = \left(3 \cdot x^2 + 4 \cdot x - 6\right)^{2015} \\ f(x) = f_1(x) \cdot f_2(x) \cdot f_3(x) \\ S = f(1) \end{array}\right\} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \left.\begin{array}{l} f(x) = \left(4 \cdot x^3 - 3 \cdot x^2 + x - 2\right)^{2013} \cdot (5 \cdot x - 3)^{2014} \cdot \left(3 \cdot x^2 + 4 \cdot x - 6\right)^{2015} \\ S = f(1) \end{array}\right\} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow S=\left(4\cdot 1^3-3\cdot 1^2+1-2\right)^{2013}\cdot(5\cdot 1-3)^{2014}\cdot\left(3\cdot 1^2+4\cdot 1-6\right)^{2015} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow S=(4\cdot 1-3\cdot 1+1-2)^{2013}\cdot(5\cdot 1-3)^{2014}\cdot(3\cdot 1+4\cdot 1-6)^{2015} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow S=(4-3+1-2)^{2013}\cdot(5-3)^{2014}\cdot(3+4-6)^{2015} \Rightarrow S=0^{2013}\cdot 2^{2014}\cdot 1^{2015} \Rightarrow S=0.$$

Odgovor je pod C.

Vježba 061

Zadani su polinomi $f_1(x)=\left(3\cdot x^3-5\cdot x^2+x-1\right)^{2013}$, $f_2(x)=(4\cdot x-3)^{2014}$ i $f_3(x)=\left(5\cdot x^2+2\cdot x-7\right)^{2015}$. Za polinom f(x) vrijedi $f(x)=f_1(x)\cdot f_2(x)\cdot f_3(x)$. Zbroj koeficijenata polinoma f(x) napisanog u kanonskom obliku je jednak:

$$A.\ 2^{2013} \qquad B.\ -1 \qquad C.\ 0 \qquad D.\ 1$$

Rezultat: C.

Zadatak 062 (Mira, gimnazija)

Napišite izraz $4\cdot x^2-12\cdot x\cdot y+9\cdot y^2+2\cdot x-3\cdot y$ u obliku umnoška linearnih faktora.

Rješenje 062

Ponovimo!

$$(a-b)^2=a^2-2\cdot a\cdot b+b^2.$$

Zakon distribucije množenja prema zbrajanju.

$$a\cdot(b+c)=a\cdot b+a\cdot c \quad , \quad a\cdot b+a\cdot c=a\cdot(b+c).$$

$$4\cdot x^2-12\cdot x\cdot y+9\cdot y^2+2\cdot x-3\cdot y=\left(4\cdot x^2-12\cdot x\cdot y+9\cdot y^2\right)+2\cdot x-3\cdot y=(2\cdot x-3\cdot y)^2+2\cdot x-3\cdot y=$$

$$=(2\cdot x-3\cdot y)^2+(2\cdot x-3\cdot y)=(2\cdot x-3\cdot y)\cdot(2\cdot x-3\cdot y+1).$$

Vježba 062

Napišite izraz $x^2-4\cdot x\cdot y+4\cdot y^2+x-2\cdot y$ u obliku umnoška linearnih faktora.

Rezultat: $(x-2\cdot y)\cdot(x-2\cdot y+1)$.

Zadatak 063 (Helena, gimnazija)

Ako je $f(x)=x^3+3\cdot x^2-4$, tada je $f(99998)$ jednako:

$$A.\ 99998\cdot 10^{10} \qquad B.\ 99998\cdot 10^{11} \qquad C.\ 99999\cdot 10^{9} \qquad D.\ 99997\cdot 10^{10}$$

Rješenje 063

Ponovimo!

Neka je f(x) polinom n – tog stupnja i f(a) = 0, gdje a je realan broj. Tada postoji jedinstven polinom g(x) stupnja n – 1 tako da vrijedi

$$f(x)=(x-a)\cdot g(x).$$

Zakon distribucije množenja prema zbrajanju.

$$a\cdot(b+c)=a\cdot b+a\cdot c \quad , \quad a\cdot b+a\cdot c=a\cdot(b+c).$$

$$a^n:a^m=a^{n-m} \quad , \quad a^2-b^2=(a-b)\cdot(a+b) \quad , \quad a^2+2\cdot a\cdot b+b^2=(a+b)^2.$$

$$\left(a^{n}\right)^{m}=a^{n\cdot m} \quad , \quad a^{3}+b^{3}=(a+b)\cdot\left(a^{2}-a\cdot b+b^{2}\right) \quad , \quad a^{1}=a \quad , \quad a^{n}\cdot a^{m}=a^{n\cdot m}.$$

1.inačica

Uočimo da je f(1) = 0.

$$\left.\begin{array}{l} f(x)=x^{3}+3\cdot x^{2}-4 \\ x=1 \end{array}\right\} \Rightarrow f(1)=1^{3}+3\cdot 1^{2}-4 \Rightarrow f(1)=1+3-4 \Rightarrow f(1)=0.$$

Možemo preoblikovati funkciju (polinom trećeg stupnja) metodom grupiranja tako da jedan faktor bude polinom prvog stupnja:

$$x-1.$$

$$f(x)=x^{3}+3\cdot x^{2}-4 \Rightarrow f(x)=x^{3}-x^{2}+4\cdot x^{2}-4 \Rightarrow f(x)=x^{3}-x^{2}+4\cdot x^{2}-4 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow f(x)=\left(x^{3}-x^{2}\right)+\left(4\cdot x^{2}-4\right) \Rightarrow f(x)=x^{2}\cdot(x-1)+4\cdot\left(x^{2}-1\right) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow f(x)=x^{2}\cdot(x-1)+4\cdot(x-1)\cdot(x+1) \Rightarrow f(x)=x^{2}\cdot(x-1)+4\cdot(x-1)\cdot(x+1) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow f(x)=(x-1)\cdot\left(x^{2}+4\cdot(x+1)\right) \Rightarrow f(x)=(x-1)\cdot\left(x^{2}+4\cdot x+4\right) \Rightarrow f(x)=(x-1)\cdot(x+2)^{2}.$$

Tada je:

$$\left.\begin{array}{l} f(x)=(x-1)\cdot(x+2)^{2} \\ x=99998 \end{array}\right\} \Rightarrow f(99998)=(99998-1)\cdot(99998+2)^{2} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow f(99998)=99997\cdot 100000^{2} \Rightarrow f(99998)=99997\cdot\left(10^{5}\right)^{2} \Rightarrow f(99998)=99997\cdot 10^{10}.$$

Odgovor je pod D.

2.inačica

Uočimo da je f(– 2) = 0.

$$\left.\begin{array}{l} f(x)=x^{3}+3\cdot x^{2}-4 \\ x=-2 \end{array}\right\} \Rightarrow f(-2)=(-2)^{3}+3\cdot(-2)^{2}-4 \Rightarrow f(-2)=-8+3\cdot 4-4 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow f(-2)=-8+12-4 \Rightarrow f(-2)=0.$$

Možemo preoblikovati funkciju (polinom trećeg stupnja) metodom grupiranja tako da jedan faktor bude polinom prvog stupnja:

$$x-(-2)=x+2.$$

$$f(x)=x^{3}+3\cdot x^{2}-4 \Rightarrow f(x)=x^{3}+8-8+3\cdot x^{2}+6\cdot x-6\cdot x-4 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow f(x)=x^{3}+8+3\cdot x^{2}+6\cdot x-6\cdot x-12 \Rightarrow f(x)=\left(x^{3}+8\right)+\left(3\cdot x^{2}+6\cdot x\right)+(-6\cdot x-12) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow f(x)=\left(x^{3}+2^{3}\right)+\left(3\cdot x^{2}+6\cdot x\right)+(-6\cdot x-12) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow f(x)=(x+2)\cdot\left(x^{2}-2\cdot x+4\right)+3\cdot x\cdot(x+2)-6\cdot(x+2) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow f(x)=(x+2)\cdot\left(x^{2}-2\cdot x+4\right)+3\cdot x\cdot(x+2)-6\cdot(x+2) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow f(x)=(x+2)\cdot\left(x^{2}-2\cdot x+4+3\cdot x-6\right) \Rightarrow f(x)=(x+2)\cdot\left(x^{2}+x-2\right) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow f(x)=(x+2)\cdot\left(x^{2}-1+x-1\right) \Rightarrow f(x)=(x+2)\cdot\left(\left(x^{2}-1\right)+(x-1)\right) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow f(x)=(x+2)\cdot((x-1)\cdot(x+1)+(x-1)) \Rightarrow f(x)=(x+2)\cdot((x-1)\cdot(x+1)+(x-1)) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow f(x)=(x+2)\cdot(x-1)\cdot(x+1+1) \Rightarrow f(x)=(x+2)\cdot(x-1)\cdot(x+2) \Rightarrow f(x)=(x-1)\cdot(x+2)^{2}.$$

Tada je:

$$\left.\begin{array}{l} f(x)=(x-1)\cdot(x+2)^{2} \\ x=99998 \end{array}\right\} \Rightarrow f(99998)=(99998-1)\cdot(99998+2)^{2} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow f(99998)=99997\cdot 100000^{2} \Rightarrow f(99998)=99997\cdot\left(10^{5}\right)^{2} \Rightarrow f(99998)=99997\cdot 10^{10}.$$

Odgovor je pod D.

Vježba 063

Ako je $f(x)=x^{3}-3\cdot x^{2}+4$, tada je $f(1002)$ jednako:

$A.\ 1003\cdot 10^{6}$ $\quad B.\ 1001\cdot 10^{6}$ $\quad C.\ 1002\cdot 10^{5}$ $\quad D.\ 1003\cdot 10^{7}$

Rezultat: A.

Zadatak 064 (Tony, gimnazija)

Ako je $x^{10}+x^{9}+x^{8}+x^{7}+x^{6}+x^{5}+x^{4}+x^{3}+x^{2}+x+1=a$ i $x^{10}-x^{9}+x^{8}-x^{7}+x^{6}-x^{5}+x^{4}-x^{3}+x^{2}-x+1=b$ tada je x jednako:

$A.\ x=\dfrac{a+b-2}{a-b}$ $\quad B.\ x=\dfrac{a-b}{a+b}$ $\quad C.\ x=\dfrac{a+b}{a-b-2}$ $\quad D.\ x=\dfrac{a+b+2}{a-b}$

Rješenje 064

Ponovimo!

$$a^{2\cdot n+1}+1=(a+1)\cdot\left(a^{2\cdot n}-a^{2\cdot n-1}+a^{2\cdot n-2}-\ldots+a^{2}-a+1\right)$$

$$a^{2\cdot n+1}-1=(a-1)\cdot\left(a^{2\cdot n}+a^{2\cdot n-1}+a^{2\cdot n-2}+\ldots+a^{2}+a+1\right)$$

Zakon distribucije množenja prema zbrajanju.

$$a\cdot(b+c)=a\cdot b+a\cdot c \quad , \quad a\cdot b+a\cdot c=a\cdot(b+c).$$

$$\left.\begin{array}{l} x^{10}+x^{9}+x^{8}+x^{7}+x^{6}+x^{5}+x^{4}+x^{3}+x^{2}+x+1=a \\ x^{10}-x^{9}+x^{8}-x^{7}+x^{6}-x^{5}+x^{4}-x^{3}+x^{2}-x+1=b \end{array}\right\} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \left.\begin{array}{l} x^{10}+x^{9}+x^{8}+x^{7}+x^{6}+x^{5}+x^{4}+x^{3}+x^{2}+x+1=a \ /\cdot(x-1) \\ x^{10}-x^{9}+x^{8}-x^{7}+x^{6}-x^{5}+x^{4}-x^{3}+x^{2}-x+1=b \ /\cdot(x+1) \end{array}\right\} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \left.\begin{array}{l} (x-1)\cdot\left(x^{10}+x^{9}+x^{8}+x^{7}+x^{6}+x^{5}+x^{4}+x^{3}+x^{2}+x+1\right)=a\cdot(x-1) \\ (x+1)\cdot\left(x^{10}-x^{9}+x^{8}-x^{7}+x^{6}-x^{5}+x^{4}-x^{3}+x^{2}-x+1\right)=b\cdot(x+1) \end{array}\right\} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \left.\begin{array}{l} x^{11}-1=a\cdot(x-1) \\ x^{11}+1=b\cdot(x+1) \end{array}\right\} \Rightarrow \left[\begin{array}{c} \text{oduzmemo} \\ \text{jednadžbe} \end{array}\right] \Rightarrow x^{11}+1-\left(x^{11}-1\right)=b\cdot(x+1)-a\cdot(x-1) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow x^{11}+1-x^{11}+1=b\cdot x+b-a\cdot x+a \Rightarrow x^{11}+1-x^{11}+1=b\cdot x+b-a\cdot x+a \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 2=b\cdot x+b-a\cdot x+a \Rightarrow a\cdot x-b\cdot x=b+a-2 \Rightarrow x\cdot(a-b)=a+b-2 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow x\cdot(a-b)=a+b-2 \; / \cdot \frac{1}{a-b} \Rightarrow x=\frac{a+b-2}{a-b}.$$

Odgovor je pod A.

Vježba 064

Ako je $x^6+x^5+x^4+x^3+x^2+x+1=a$ i $x^6-x^5+x^4-x^3+x^2-x+1=b$ tada je x jednako:

$A.\ x=\frac{a+b-2}{a-b}$ $\qquad B.\ x=\frac{a-b}{a+b}$ $\qquad C.\ x=\frac{a+b}{a-b-2}$ $\qquad D.\ x=\frac{a+b+2}{a-b}$

Rezultat: A.

Zadatak 065 (Tony, gimnazija)

Ako se razlomku $\frac{2\cdot x^2-3\cdot x+1}{2\cdot x^2+x-7}$ pribroji 1, tada se vrijednost razlomka udvostruči. U tom slučaju x je jednako:

$A.\ x=1$ $\qquad B.\ x=2$ $\qquad C.\ x=3$ $\qquad D.\ x=4$

Rješenje 065

Ponovimo!

$$\frac{a}{b}=1 \Rightarrow a=b \quad , \quad a=b \Rightarrow b=a.$$

Zakon distribucije množenja prema zbrajanju.

$$a\cdot(b+c)=a\cdot b+a\cdot c \quad , \quad a\cdot b+a\cdot c=a\cdot(b+c).$$

Kako zapisati dvostruku vrijednost broja x?

$$2\cdot x.$$

1.inačica

Ako nekom broju pribrojimo 1 i pritom se taj broj udvostruči to je moguće samo ako je taj broj jednak 1. Provjerimo tvrdnju:

$$x+1=2\cdot x \Rightarrow 2\cdot x=x+1 \Rightarrow 2\cdot x-x=1 \Rightarrow x=1.$$

Zato je u našem slučaju:

$$\frac{2\cdot x^2-3\cdot x+1}{2\cdot x^2+x-7}=1 \Rightarrow 2\cdot x^2-3\cdot x+1=2\cdot x^2+x-7 \Rightarrow 2\cdot x^2-3\cdot x+1=2\cdot x^2+x-7 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow -3\cdot x+1=x-7 \Rightarrow -3\cdot x-x=-7-1 \Rightarrow -4\cdot x=-8 \Rightarrow -4\cdot x=-8 \; /:(-4) \Rightarrow x=2.$$

Odgovor je pod B.

2.inačica

Prema uvjetu zadatka vrijedi:

$$\frac{2\cdot x^2-3\cdot x+1}{2\cdot x^2+x-7}+1=2\cdot\frac{2\cdot x^2-3\cdot x+1}{2\cdot x^2+x-7} \Rightarrow 2\cdot\frac{2\cdot x^2-3\cdot x+1}{2\cdot x^2+x-7}=\frac{2\cdot x^2-3\cdot x+1}{2\cdot x^2+x-7}+1 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow\ 2\cdot\frac{2\cdot x^2-3\cdot x+1}{2\cdot x^2+x-7}-\frac{2\cdot x^2-3\cdot x+1}{2\cdot x^2+x-7}=1\ \Rightarrow\ \frac{2\cdot x^2-3\cdot x+1}{2\cdot x^2+x-7}=1\ \Rightarrow$$

$$\Rightarrow\ 2\cdot x^2-3\cdot x+1=2\cdot x^2+x-7\ \Rightarrow\ 2\cdot x^2-3\cdot x+1=2\cdot x^2+x-7\ \Rightarrow$$

$$\Rightarrow\ -3\cdot x+1=x-7\ \Rightarrow\ -3\cdot x-x=-7-1\ \Rightarrow\ -4\cdot x=-8\ \Rightarrow\ -4\cdot x=-8\ /:(-4)\ \Rightarrow\ x=2.$$

Odgovor je pod B.

3.inačica

Prema uvjetu zadatka slijedi:

$$\frac{2\cdot x^2-3\cdot x+1}{2\cdot x^2+x-7}+1=2\cdot\frac{2\cdot x^2-3\cdot x+1}{2\cdot x^2+x-7}\ \Rightarrow\ \frac{2\cdot x^2-3\cdot x+1}{2\cdot x^2+x-7}+1=2\cdot\frac{2\cdot x^2-3\cdot x+1}{2\cdot x^2+x-7}\ /\cdot\left(2\cdot x^2+x-7\right)\ \Rightarrow$$

$$\Rightarrow\ 2\cdot x^2-3\cdot x+1+2\cdot x^2+x-7=2\cdot\left(2\cdot x^2-3\cdot x+1\right)\ \Rightarrow$$

$$\Rightarrow\ 2\cdot x^2-3\cdot x+1+2\cdot x^2+x-7=4\cdot x^2-6\cdot x+2\ \Rightarrow\ 2\cdot x^2-3\cdot x+1+2\cdot x^2+x-7=4\cdot x^2-6\cdot x+2\ \Rightarrow$$

$$\Rightarrow\ -3\cdot x+1+x-7=-6\cdot x+2\ \Rightarrow\ -3\cdot x+x+6\cdot x=2-1+7\ \Rightarrow\ 4\cdot x=8\ \Rightarrow\ 4\cdot x=8\ /:4\ \Rightarrow\ x=2.$$

Odgovor je pod B.

Vježba 065

Ako se razlomku $\frac{2\cdot x+1}{x-1}$ pribroji 1, tada se vrijednost razlomka udvostruči. U tom slučaju x je jednako:

$A.\ x=1$ $\quad B.\ x=-1$ $\quad C.\ x=2$ $\quad D.\ x=-2$

Rezultat: D.

Zadatak 066 (Jele, gimnazija)

Zbroj svih koeficijenata polinoma $f(x)=\left(x^2-2\cdot x+2\right)^{12}\cdot\left(x^2-5\cdot x+3\right)^{13}$ iznosi:

$A.\ 0$ $\quad B.\ 1$ $\quad C.\ 2$ $\quad D.\ -1$

Rješenje 066

Ponovimo!

Opći oblik polinoma jedne varijable je $P(x)=a_n\cdot x^n+a_{n-1}\cdot x^{n-1}+\ldots+a_1\cdot x+a_0$. Eksponent n naziva se stupanj polinoma. Koeficijenti polinoma su realni brojevi a_n, a_{n-1}, … , a_1, a_0. Koeficijent $a_n\neq 0$ naziva se vodeći koeficijent.

Za x = 1 vrijednost polinoma jednaka je zbroju njegovih koeficijenata.

$$P(1)=a_n\cdot 1^n+a_{n-1}\cdot 1^{n-1}+\ldots+a_1\cdot 1+a_0\ \Rightarrow\ P(1)=a_n+a_{n-1}+\ldots+a_1+a_0.$$

Zbroj svih koeficijenata zadanog polinoma naći ćemo tako da izračunamo f(1).

$$\left.\begin{array}{l} x=1 \\ f(x)=\left(x^2-2\cdot x+2\right)^{12}\cdot\left(x^2-5\cdot x+3\right)^{13}\end{array}\right\}\ \Rightarrow\ f(1)=\left(1^2-2\cdot 1+2\right)^{12}\cdot\left(1^2-5\cdot 1+3\right)^{13}\ \Rightarrow$$

$$\Rightarrow\ f(1)=(1-2+2)^{12}\cdot(1-5+3)^{13}\ \Rightarrow\ f(1)=1^{12}\cdot(-1)^{13}\ \Rightarrow\ f(x)=1\cdot(-1)\ \Rightarrow\ f(1)=-1.$$

Odgovor je pod D.

Vježba 066

Zbroj svih koeficijenata polinoma $f(x)=\left(x^{2}-3\cdot x+3\right)^{12}\cdot\left(x^{2}-5\cdot x+3\right)^{13}$ iznosi:

$$A.\ 0 \qquad B.\ 1 \qquad C.\ 2 \qquad D.\ -1$$

Rezultat: D.

Zadatak 067 (Filip, srednja škola)

Ako je u polinomu $f(x)=\left(x^{4}-3\cdot x^{3}+2\cdot x^{2}-a\cdot x-1\right)^{2}$ koeficijent uz x^4 jednak – 4 izračunaj a.

Rješenje 067

Ponovimo!

$$(a\cdot b)^{n}=a^{n}\cdot b^{n} \quad , \quad a^{1}=a \quad , \quad a^{n}\cdot a^{m}=a^{n+m}.$$

Opći oblik polinoma jedne varijable je $P(x)=a_{n}\cdot x^{n}+a_{n-1}\cdot x^{n-1}+\ldots+a_{1}\cdot x+a_{0}$. Eksponent n naziva se stupanj polinoma. Koeficijenti polinoma su realni brojevi a_n, a_{n-1}, … , a_1, a_0. Koeficijent $a_n \neq 0$ naziva se vodeći koeficijent.

- $(a+b)^{2}=a^{2}+b^{2}+2\cdot a\cdot b$
- $(a+b+c)^{2}=a^{2}+b^{2}+c^{2}+2\cdot a\cdot b+2\cdot a\cdot c+2\cdot b\cdot c$
- $(a+b+c+d)^{2}=a^{2}+b^{2}+c^{2}+d^{2}+2\cdot a\cdot b+2\cdot a\cdot c+2\cdot a\cdot d+2\cdot b\cdot c+2\cdot b\cdot d+2\cdot c\cdot d$

Uočimo da se pri kvadriranju polinoma pojavljuju kvadrati svih članova i dvostruki produkti svakog člana sa svakim članom.
U zadanom polinomu član x^4 pojavit će se u sljedećim slučajevima:

$$\left(2\cdot x^{2}\right)^{2}=4\cdot x^{4}$$
$$2\cdot x^{4}\cdot(-1)=-2\cdot x^{4}$$
$$2\cdot\left(-3\cdot x^{3}\right)\cdot(-a\cdot x)=6\cdot a\cdot x^{4}.$$

Zbroj koeficijenata bit će:

$$4+(-2)+6\cdot a=4-2+6\cdot a=6\cdot a+2.$$

Izjednačimo li ga s – 4 dobit ćemo

$$6\cdot a+2=-4 \;\Rightarrow\; 6\cdot a=-4-2 \;\Rightarrow\; 6\cdot a=-6 \;\Rightarrow\; 6\cdot a=-6 \;/:6 \;\Rightarrow\; a=-1.$$

Vježba 067

Ako je u polinomu $f(x)=\left(x^{4}-3\cdot x^{3}+2\cdot x^{2}-a\cdot x-1\right)^{2}$ koeficijent uz x^4 jednak – 10 izračunaj a.

Rezultat: – 2.

Zadatak 068 (Filip, gimnazija)

Ako je polinom $P(x)=x^{4}+a\cdot x^{3}+x^{2}+b\cdot x+2$ djeljiv sa $Q(x)=(x-1)\cdot(x+2)$, tada b iznosi:

$$A.\ 9 \qquad B.\ -9 \qquad C.\ 13 \qquad D.\ -8$$

Rješenje 068

Ponovimo!

Opći oblik polinoma jedne varijable je $P(x) = a_n \cdot x^n + a_{n-1} \cdot x^{n-1} + ... + a_1 \cdot x + a_0$. Eksponent n naziva se stupanj polinoma. Koeficijenti polinoma su realni brojevi a_n, a_{n-1}, … , a_1, a_0. Koeficijent $a_n \neq 0$ naziva se vodeći koeficijent.

Poučak o djeljivosti polinoma

Kada dijelimo polinom f(x) polinomom g(x) tražimo takav polinom q(x) da je

$$f(x) = g(x) \cdot q(x).$$

Ako takav polinom q(x) postoji, kažemo da je polinom f(x) djeljiv polinomom g(x).
Ako je polinom P(x) djeljiv sa Q(x), tada postoji polinom p(x) tako da je

$$P(x) = Q(x) \cdot p(x) \;\Rightarrow\; x^4 + a \cdot x^3 + x^2 + b \cdot x + 2 = (x-1) \cdot (x+2) \cdot p(x).$$

Sada vrijedi:

- za x = 1

$$1^4 + a \cdot 1^3 + 1^2 + b \cdot 1 + 2 = (1-1) \cdot (1+2) \cdot p(1) \;\Rightarrow\; 1 + a \cdot 1 + 1 + b + 2 = 0 \cdot 3 \cdot p(1) \;\Rightarrow$$

$$\Rightarrow\; 1 + a + 1 + b + 2 = 0 \;\Rightarrow\; a + b = -1 - 1 - 2 \;\Rightarrow\; a + b = -4$$

- za x = – 2

$$(-2)^4 + a \cdot (-2)^3 + (-2)^2 + b \cdot (-2) + 2 = (-2-1) \cdot (-2+2) \cdot p(-2) \;\Rightarrow$$

$$\Rightarrow\; 16 - 8 \cdot a + 4 - 2 \cdot b + 2 = -3 \cdot 0 \cdot p(-2) \;\Rightarrow\; 16 - 8 \cdot a + 4 - 2 \cdot b + 2 = 0 \;\Rightarrow$$

$$\Rightarrow\; -8 \cdot a - 2 \cdot b = -16 - 4 - 2 \;\Rightarrow\; -8 \cdot a - 2 \cdot b = -22 \;\Rightarrow\; -8 \cdot a - 2 \cdot b = -22 \;/ : (-2) \;\Rightarrow$$

$$\Rightarrow\; 4 \cdot a + b = 11.$$

Iz sustava jednadžbi izračunamo b.

$$\left.\begin{array}{l} a + b = -4 \\ 4 \cdot a + b = 11 \end{array}\right\} \Rightarrow \left[\begin{array}{l} \text{metoda suprotnih} \\ \text{koeficijenata} \end{array}\right] \Rightarrow \left.\begin{array}{l} a + b = -4 \;/ \cdot (-4) \\ 4 \cdot a + b = 11 \end{array}\right\} \Rightarrow \left.\begin{array}{l} -4 \cdot a - 4 \cdot b = 16 \\ 4 \cdot a + b = 11 \end{array}\right\} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow\; -3 \cdot b = 27 \;\Rightarrow\; -3 \cdot b = 27 \;/ : (-3) \;\Rightarrow\; b = -9.$$

Odgovor je pod B.

Vježba 068

Ako je polinom $P(x) = x^4 + a \cdot x^3 + x^2 + b \cdot x + 2$ djeljiv sa $Q(x) = (x-1) \cdot (x+2)$, tada a iznosi:

A. 6 *B.* −6 *C.* 5 *D.* −5

Rezultat: C.

Zadatak 069 (Cedric, Sean, Željko, Medox, Höhere Technische Lehranstalt)

Odrediti najmanji zajednički višekratnik i najveći zajednički djelitelj za polinome:

$$P_1(x) = x^4 - x^2 \;,\; P_2(x) = x^3 - 2 \cdot x^2 + x \;,\; P_3(x) = x^2 - 1.$$

Rješenje 069

Ponovimo!

$$a^n : a^m = a^{n-m} \quad , \quad a^1 = a \quad , \quad a^n \cdot a^m = a^{n+m} \quad , \quad a^2 - b^2 = (a-b) \cdot (a+b).$$

$$a^2 - 2 \cdot a \cdot b + b^2 = (a-b)^2.$$

Zakon distribucije množenja prema zbrajanju.

$$a \cdot (b+c) = a \cdot b + a \cdot c \quad , \quad a \cdot b + a \cdot c = a \cdot (b+c).$$

Opći oblik polinoma jedne varijable je $P(x) = a_n \cdot x^n + a_{n-1} \cdot x^{n-1} + ... + a_1 \cdot x + a_0$. Eksponent n

naziva se stupanj polinoma. Koeficijenti polinoma su realni brojevi a_n, a_{n-1}, … , a_1, a_0. Koeficijent $a_n \neq 0$ naziva se vodeći koeficijent.
Monom ili jednočlani izraz je matematički izraz u kojem nema članova koji se zbrajaju ili oduzimaju.
Polinom ili višečlani izraz je svaki algebarski zbroj sastavljen od konačno mnogo monoma. Algebarski izraz koji se ne može rastaviti na jednostavnije faktore nazivamo jednostavan faktor ili primfaktor.
Najveći zajednički djelitelj D je umnožak svih primfaktora koji su zajednički svim zadanim polinomima.
Najmanji zajednički višekratnik v je umnožak svih zajedničkih primfaktora i preostalih primfaktora svih zadanih polinoma.
Zadane polinome rastavimo na faktore:

$$\left.\begin{array}{l} P_1(x)=x^4-x^2 \\ P_2(x)=x^3-2\cdot x^2+x \\ P_3(x)=x^2-1 \end{array}\right\} \Rightarrow \left.\begin{array}{l} P_1(x)=x^2\cdot\left(x^2-1\right) \\ P_2(x)=x\cdot\left(x^2-2\cdot x+1\right) \\ P_3(x)=(x-1)\cdot(x+1) \end{array}\right\} \Rightarrow \left.\begin{array}{l} P_1(x)=x\cdot x\cdot(x-1)\cdot(x+1) \\ P_2(x)=x\cdot(x-1)^2 \\ P_3(x)=(x-1)\cdot(x+1) \end{array}\right\} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \left.\begin{array}{l} P_1(x)=x\cdot x\cdot(x-1)\cdot(x+1) \\ P_2(x)=x\cdot(x-1)\cdot(x-1) \\ P_3(x)=(x-1)\cdot(x+1) \end{array}\right\}.$$

- Pomnožimo li sve zajedničke primfaktore dobit ćemo najveći zajednički djelitelj.

$$\left.\begin{array}{l} P_1(x)=x\cdot x\cdot(x-1)\cdot(x+1) \\ P_2(x)=x\cdot(x-1)\cdot(x-1) \\ P_3(x)=(x-1)\cdot(x+1) \end{array}\right\} \Rightarrow \left.\begin{array}{l} P_1(x)=x\cdot x\cdot(x-1)\cdot(x+1) \\ P_2(x)=x\cdot(x-1)\cdot(x-1) \\ P_3(x)=(x-1)\cdot(x+1) \end{array}\right\} \Rightarrow D\left(P_1(x),\ P_2(x),\ P_3(x)\right)=x-1.$$

- Pomnožimo li sve zajedničke primfaktore i preostale primfaktore dobit ćemo najmanji zajednički višekratnik.

$$\left.\begin{array}{l} P_1(x)=x\cdot x\cdot(x-1)\cdot(x+1) \\ P_2(x)=x\cdot(x-1)\cdot(x-1) \\ P_3(x)=(x-1)\cdot(x+1) \end{array}\right\} \Rightarrow \left.\begin{array}{l} P_1(x)=\underline{x}\cdot x\cdot(x-1)\cdot\underline{\underline{(x+1)}} \\ P_2(x)=\underline{x}\cdot(x-1)\cdot\underline{\underline{\underline{(x-1)}}} \\ P_3(x)=(x-1)\cdot\underline{\underline{(x+1)}} \end{array}\right\} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow v\left(P_1(x),\ P_2(x),\ P_3(x)\right)=x\cdot x\cdot(x-1)\cdot(x+1)\cdot(x-1) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow v\left(P_1(x),\ P_2(x),\ P_3(x)\right)=x^2\cdot(x+1)\cdot(x-1)^2.$$

Vježba 069

Odrediti najmanji zajednički višekratnik i najveći zajednički djelitelj za polinome:
$P_1(x)=x^4-x^2$, $P_2(x)=x^2-1$.

Rezultat: $D\left(P_1(x),\ P_2(x)\right)=x^2-1$, $v\left(P_1(x),\ P_2(x)\right)=x^2\cdot\left(x^2-1\right)$.

Zadatak 070 (Sandra□Robert, maturanti)

Ako je $f(x-1)=x^4-3\cdot x^3+x-5$, koliko je $f(1)$?

Rješenje 070

Ponovimo!

$$(a+b)^4=a^4+4\cdot a^3\cdot b+6\cdot a^2\cdot b^2+4\cdot a\cdot b^3+b^4 \quad , \quad 1^n=1.$$

$$(a+b)^3=a^3+3\cdot a^2\cdot b+3\cdot a\cdot b^2+b^3.$$

Opći oblik polinoma jedne varijable je $P(x)=a_n\cdot x^n+a_{n-1}\cdot x^{n-1}+\ldots+a_1\cdot x+a_0$. Eksponent n naziva se stupanj polinoma. Koeficijenti polinoma su realni brojevi a_n, a_{n-1}, … , a_1, a_0. Koeficijent $a_n \neq 0$ naziva se vodeći koeficijent.

Zbroj koeficijenata svakog polinoma jednak je vrijednosti toga polinoma za x = 1.

$$\left.\begin{array}{l} x=1 \\ P(x)=a_n\cdot x^n+a_{n-1}\cdot x^{n-1}+\ldots+a_1\cdot x+a_0 \end{array}\right\} \Rightarrow P(1)=a_n+a_{n-1}+\ldots+a_1+a_0.$$

Zakon distribucije množenja prema zbrajanju.

$$a\cdot(b+c)=a\cdot b+a\cdot c \quad , \quad a\cdot b+a\cdot c=a\cdot(b+c).$$

1.inačica

Najprije odredimo polinom f.

$$f(x-1)=x^4-3\cdot x^3+x-5 \Rightarrow \left[\begin{array}{l} \text{zamjena} \\ t=x-1 \\ x=t+1 \end{array}\right] \Rightarrow f(t)=(t+1)^4-3\cdot(t+1)^3+(t+1)-5 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow f(t)=t^4+4\cdot t^3\cdot 1+6\cdot t^2\cdot 1^2+4\cdot t\cdot 1^3+1^4-3\cdot\left(t^3+3\cdot t^2\cdot 1+3\cdot t\cdot 1^2+1^3\right)+t+1-5 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow f(t)=t^4+4\cdot t^3+6\cdot t^2+4\cdot t+1-3\cdot\left(t^3+3\cdot t^2+3\cdot t+1\right)+t+1-5 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow f(t)=t^4+4\cdot t^3+6\cdot t^2+4\cdot t+1-3\cdot t^3-9\cdot t^2-9\cdot t-3+t+1-5 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow f(t)=t^4+t^3-3\cdot t^2-4\cdot t-6.$$

Dakle, polinom f zadan je pravilom

$$f(x)=x^4+x^3-3\cdot x^2-4\cdot x-6.$$

Tada je:

$$\left.\begin{array}{l} x=1 \\ f(x)=x^4+x^3-3\cdot x^2-4\cdot x-6 \end{array}\right\} \Rightarrow f(1)=1^4+1^3-3\cdot 1^2-4\cdot 1-6 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow f(1)=1+1-3-4-6 \Rightarrow f(1)=-11.$$

2.inačica

$$\left.\begin{array}{l} x=2 \\ f(x-1)=x^4-3\cdot x^3+x-5 \end{array}\right\} \Rightarrow f(2-1)=2^4-3\cdot 2^3+2-5 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow f(1)=16-3\cdot 8+2-5 \Rightarrow f(1)=16-24+2-5 \Rightarrow f(1)=-11.$$

Vježba 070

Ako je $f(x-1) = x^4 - 3 \cdot x^3 + 2 \cdot x - 6$, koliko je $f(1)$?

Rezultat: – 10.

Zadatak 071 (Sandra Robert, maturanti)

Koliki je zbroj svih koeficijenata polinoma f ako je $f(x-1) = (x+1)^3$?

Rješenje 071

Ponovimo!

$$(a+b)^3 = a^3 + 3 \cdot a^2 \cdot b + 3 \cdot a \cdot b^2 + b^3 \quad , \quad 1^n = 1.$$

Opći oblik polinoma jedne varijable je $P(x) = a_n \cdot x^n + a_{n-1} \cdot x^{n-1} + \ldots + a_1 \cdot x + a_0$. Eksponent n naziva se stupanj polinoma. Koeficijenti polinoma su realni brojevi a_n, a_{n-1}, … , a_1, a_0. Koeficijent $a_n \neq 0$ naziva se vodeći koeficijent.

Zbroj koeficijenata svakog polinoma jednak je vrijednosti toga polinoma za x = 1.

$$\left.\begin{array}{l} x = 1 \\ P(x) = a_n \cdot x^n + a_{n-1} \cdot x^{n-1} + \ldots + a_1 \cdot x + a_0 \end{array}\right\} \Rightarrow P(1) = a_n + a_{n-1} + \ldots + a_1 + a_0.$$

Zakon distribucije množenja prema zbrajanju.

$$a \cdot (b+c) = a \cdot b + a \cdot c \quad , \quad a \cdot b + a \cdot c = a \cdot (b+c).$$

1.inačica

Najprije odredimo polinom f.

$$f(x-1) = (x+1)^3 \Rightarrow \left[\begin{array}{l} \text{zamjena} \\ t = x-1 \\ x = t+1 \end{array}\right] \Rightarrow f(t) = (t+1+1)^3 \Rightarrow f(t) = (t+2)^3 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow f(t) = t^3 + 3 \cdot t^2 \cdot 2 + 3 \cdot t \cdot 2^2 + 2^3 \Rightarrow f(t) = t^3 + 6 \cdot t^2 + 12 \cdot t + 8.$$

Dakle, polinom f zadan je pravilom

$$f(x) = x^3 + 6 \cdot x^2 + 12 \cdot x + 8.$$

Tada je:

$$\left.\begin{array}{l} x = 1 \\ f(x) = x^3 + 6 \cdot x^2 + 12 \cdot x^2 + 8 \end{array}\right\} \Rightarrow f(1) = 1^3 + 6 \cdot 1^2 + 12 \cdot 1 + 8 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow f(1) = 1 + 6 + 12 + 8 \Rightarrow f(1) = 27.$$

2.inačica

$$\left.\begin{array}{l} x = 2 \\ f(x-1) = (x+1)^3 \end{array}\right\} \Rightarrow f(2-1) = (2+1)^3 \Rightarrow f(1) = 3^3 \Rightarrow f(1) = 27.$$

Vježba 071

Koliki je zbroj svih koeficijenata polinoma f ako je $f(x-1) = (x+2)^3$?

Rezultat: 64.

Zadatak 072 (Sandra, maturantica)

Odredite **sva** rješenja jednadžbe $x^4-6\cdot x^3+12\cdot x^2-8\cdot x=0.$

Rješenje 072

Ponovimo!

$$a^1=a \quad , \quad a^n : a^m = a^{n-m} \quad , \quad a^n\cdot a^m=a^{n+m}.$$

$$a^3-b^3=(a-b)\cdot\left(a^2+a\cdot b+b^2\right) \quad , \quad a^2-2\cdot a\cdot b+b^2=(a-b)^2.$$

$$a^n=0 \Rightarrow a=0.$$

Zakon distribucije množenja prema zbrajanju.

$$a\cdot(b+c)=a\cdot b+a\cdot c \quad , \quad a\cdot b+a\cdot c=a\cdot(b+c).$$

Da bi umnožak bio jednak nuli, dovoljno je da jedan faktor bude jednak nuli.

$$a\cdot b=0 \Leftrightarrow a=0 \text{ ili } b=0 \text{ ili } a=b=0.$$

Ako za polinom

$$f(x)=a_n\cdot x^n+a_{n-1}\cdot x^{n-1}+\ldots+a_1\cdot x+a_0$$

vrijedi

$$f(x_\circ)=0$$

kažemo da je $x = x_0$ nultočka polinoma f.
Ako je polinom f djeljiv polinomom

$$g(x)=(x-x_\circ)^k \quad , \quad k\in N,$$

a nije djeljiv polinomom

$$h(x)=(x-x_\circ)^{k+1}$$

onda kažemo da je $x = x_0$ k – struka nultočka od f ili da je kratnost (višestrukost) nultočke $x = x_0$ jednaka k.
Svaki polinom f stupnja $n \geq 1$ ima točno n nultočaka, ako svaku od njih brojimo onoliko puta kolika je njezina kratnost.

$$x^4-6\cdot x^3+12\cdot x^2-8\cdot x=0 \Rightarrow x\cdot\left(x^3-6\cdot x^2+12\cdot x-8\right)=0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \left.\begin{array}{l} x=0 \\ x^3-6\cdot x^2+12\cdot x-8=0 \end{array}\right\} \Rightarrow x=0 \text{ jednostruka nultočka}.$$

Ostala rješenja dobiju se iz jednadžbe:

$$x^3-6\cdot x^2+12\cdot x-8=0 \Rightarrow x^3-8-6\cdot x^2+12\cdot x=0 \Rightarrow \left(x^3-8\right)+\left(-6\cdot x^2+12\cdot x\right)=0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \left(x^3-2^3\right)-6\cdot x\cdot(x-2)=0 \Rightarrow (x-2)\cdot\left(x^2+2\cdot x+2^2\right)-6\cdot x\cdot(x-2)=0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow (x-2)\cdot\left(x^2+2\cdot x+4\right)-6\cdot x\cdot(x-2)=0 \Rightarrow (x-2)\cdot\left(x^2+2\cdot x+4-6\cdot x\right)=0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow (x-2)\cdot\left(x^2-4\cdot x+4\right)=0 \Rightarrow (x-2)\cdot(x-2)^2=0 \Rightarrow (x-2)^3=0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow x-2=0 \Rightarrow x=2 \text{ trostruka nultočka}.$$

Rješenja jednadžbe su: 0 , 2.

Vježba 072

Odredite **sva** rješenja jednadžbe $x^4-3\cdot x^3+3\cdot x^2-x=0.$

Rezultat: 0 , 1.

Zadatak 073 (Erik, gimnazija)

Zapišite u obliku umnoška polinom $(x+2)\cdot(x+3)-2.$

Rješenje 073

Ponovimo!

$$a^1=a \quad , \quad a^n\cdot a^m=a^{n+m} \quad , \quad a^2-b^2=(a-b)\cdot(a+b).$$

Zakon distribucije množenja prema zbrajanju.

$$a\cdot(b+c)=a\cdot b+a\cdot c \quad , \quad a\cdot b+a\cdot c=a\cdot(b+c).$$

Množenje zagrada

$$(a+b)\cdot(c+d)=a\cdot c+a\cdot d+b\cdot c+b\cdot d.$$

1.inačica

$$(x+2)\cdot(x+3)-2=x^2+3\cdot x+2\cdot x+6-2=x^2+5\cdot x+4=x^2+x+4\cdot x+4=$$
$$=x\cdot(x+1)+4\cdot(x+1)=x\cdot(x+1)+4\cdot(x+1)=(x+1)\cdot(x+4).$$

2.inačica

$$(x+2)\cdot(x+3)-2=x^2+3\cdot x+2\cdot x+6-2=x^2+5\cdot x+4=x^2+5\cdot x+5-1=$$
$$=x^2-1+5\cdot x+5=(x-1)\cdot(x+1)+5\cdot(x+1)=(x-1)\cdot(x+1)+5\cdot(x+1)=$$
$$=(x+1)(x-1+5)=(x+1)\cdot(x+4).$$

Vježba 073

Zapišite u obliku umnoška polinom $(x+3)\cdot(x+5)-3.$

Rezultat: $(x+2)\cdot(x+6).$

Zadatak 074 (Matej, gimnazija)

Ako je $P(x)=x^2+2\cdot x-7$ i $Q(x+1)=P(x)$ nađi $Q(x).$

Rješenje 074

Ponovimo!

$$a^2+2\cdot a\cdot b+b^2=(a+b)^2 \quad , \quad (a-b)^2=a^2-2\cdot a\cdot b+b^2.$$

Zakon distribucije množenja prema zbrajanju.

$$a\cdot(b+c)=a\cdot b+a\cdot c \quad , \quad a\cdot b+a\cdot c=a\cdot(b+c).$$

1.inačica

$$\left.\begin{array}{l} P(x)=x^2+2\cdot x-7 \\ Q(x+1)=P(x) \end{array}\right\} \Rightarrow Q(x+1)=x^2+2\cdot x-7 \Rightarrow Q(x+1)=x^2+2\cdot x+1-8 \Rightarrow$$
$$\Rightarrow Q(x+1)=\left(x^2+2\cdot x+1\right)-8 \Rightarrow Q(x+1)=(x+1)^2-8 \Rightarrow \left[\begin{array}{c} \text{zamjena} \\ x+1=t \end{array}\right] \Rightarrow$$
$$\Rightarrow Q(t)=t^2-8.$$

Polinom Q(x) glasi:

$$Q(x)=x^2-8.$$

2.inačica

$$\left.\begin{array}{l} P(x)=x^2+2\cdot x-7 \\ Q(x+1)=P(x) \end{array}\right\} \Rightarrow Q(x+1)=x^2+2\cdot x-7 \Rightarrow \left[\begin{array}{c} \text{zamjena} \\ x+1=t \\ x=t-1 \end{array}\right] \Rightarrow$$

$$\Rightarrow Q(t)=(t-1)^2+2\cdot(t-1)-7 \Rightarrow Q(t)=t^2-2\cdot t+1+2\cdot t-2-7 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow Q(t)=t^2-2\cdot t+1+2\cdot t-2-7 \Rightarrow Q(t)=t^2-8.$$

Polinom Q(x) glasi:

$$Q(x)=x^2-8.$$

Vježba 074

Ako je $P(x)=x^2+2\cdot x-1$ i $Q(x+2)=P(x)$ nađi $Q(x)$.

Rezultat: $Q(x)=x^2-2\cdot x-1.$

Zadatak 075 (Domagoj, gimnazija)

Odredite polinom najmanjega mogućega stupnja s cjelobrojnim koeficijentima kojemu je broj $\sqrt{2}+\sqrt{3}$ korijen.

Rješenje 075

Ponovimo!

$$\left(\sqrt{a}\right)^2=a \quad , \quad (a+b)^2=a^2+2\cdot a\cdot b+b^2 \quad , \quad \sqrt{a}\cdot\sqrt{b}=\sqrt{a\cdot b}.$$

$$(a\cdot b)^n=a^n\cdot b^n \quad , \quad \left(a^n\right)^m=a^{n\cdot m}.$$

Skup cijelih brojeva označavamo slovom Z, a zapisujemo

$$Z=\{\ldots, -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, \ldots\}.$$

Polinom stupnja n je funkcija f : R → R definirana s

$$f_n(x)=a_n\cdot x^n+a_{n-1}\cdot x^{n-1}+a_{n-2}\cdot x^{n-2}+\ldots+a_2\cdot x^2+a_1\cdot x+a_0,$$

gdje su $a_0, a_1, a_2, \ldots, a_n$ realni brojevi, $a_n \neq 0$. Brojeve $a_0, a_1, a_2, \ldots, a_n$ nazivamo koeficijentima polinoma. Koeficijent a_n nazivamo vodećim koeficijentom, koeficijent a_0 slobodnim koeficijentom. Gornji zapis nazivamo kanonskim (standardnim) oblikom polinoma jedne varijable.

Broj $x_\circ$ je nultočka polinoma $f_n(x)$ ako je $f_n(x_\circ)=0$.

$$x=\sqrt{2}+\sqrt{3} \Rightarrow x=\sqrt{2}+\sqrt{3} \ /^2 \Rightarrow x^2=\left(\sqrt{2}+\sqrt{3}\right)^2 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow x^2=\left(\sqrt{2}\right)^2+2\cdot\sqrt{2}\cdot\sqrt{3}+\left(\sqrt{3}\right)^2 \Rightarrow x^2=2+2\cdot\sqrt{2\cdot 3}+3 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow x^2=2+2\cdot\sqrt{6}+3 \Rightarrow x^2=5+2\cdot\sqrt{6} \Rightarrow x^2-5=2\cdot\sqrt{6} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow x^2-5=2\cdot\sqrt{6} \ /^2 \Rightarrow \left(x^2-5\right)^2=\left(2\cdot\sqrt{6}\right)^2 \Rightarrow \left(x^2\right)^2-2\cdot x^2\cdot 5+5^2=2^2\cdot\left(\sqrt{6}\right)^2 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow x^4-10\cdot x^2+25=4\cdot 6 \Rightarrow x^4-10\cdot x^2+25=24 \Rightarrow x^4-10\cdot x^2+25-24=0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow x^4-10\cdot x^2+1=0.$$

Vježba 075

Odredite polinom najmanjega mogućega stupnja s cjelobrojnim koeficijentima kojemu je broj $\sqrt{2}$ korijen.

Rezultat: $x^2 - 2 = 0.$

Zadatak 076 (Domagoj, gimnazija)

Ima li jednadžba $x^2 - 2 = 0$ racionalni korijen?

Rješenje 076

Ponovimo!

Skup prirodnih brojeva označavamo slovom N, a zapisujemo

$$N = \{1, 2, 3, 4, 5, \ldots, n, n+1, \ldots\}.$$

Prost ili prim broj je prirodan broj veći od 1 koji je djeljiv samo s 1 i samim sobom (ima točno dva djelitelja)

2, 3, 5, 7, 11, 13, 17, 19, 23, 29, 31, 37, ...

Skup cijelih brojeva označavamo slovom Z, a zapisujemo

$$Z = \{\ldots, -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, \ldots\}.$$

Za cijeli broj a kažemo da je djeljiv s cijelim brojem b (b ≠ 0) ako postoji cijeli broj k tako da vrijedi

$$a = k \cdot b.$$

Broj k zovemo količnikom brojeva a i b i pišemo

$$a : b = k \text{ ili } \frac{a}{b} = k.$$

Djeljenik je broj koji se dijeli. Djelitelj je broj kojim dijelimo.

Racionalni brojevi su brojevi koje možemo napisati u obliku razlomka $\frac{a}{b}$, gdje je brojnik a cijeli broj, nazivnik b prirodan broj. Simbol za skup racionalnih brojeva je Q.

Iracionalni brojevi su brojevi koje ne možemo napisati u obliku razlomka. Simbol za skup iracionalnih brojeva je I.

Najvećom zajedničkom mjerom prirodnih brojeva nazivamo najveći zajednički djelitelj tih brojeva. Za najveću zajedničku mjeru brojeva a i b uvodi se oznaka M(a, b).

Primjer

$$M(24, 32) = 8.$$

Ako brojevi a i b osim broja 1 nemaju drugih zajedničkih djelitelja kažemo da su relativno prosti brojevi i pišemo

$$M(a, b) = 1.$$

Polinom stupnja n je funkcija f : R → R definirana s

$$f_n(x) = a_n \cdot x^n + a_{n-1} \cdot x^{n-1} + a_{n-2} \cdot x^{n-2} + \ldots + a_2 \cdot x^2 + a_1 \cdot x + a_0,$$

gdje su $a_0, a_1, a_2, \ldots, a_n$ realni brojevi, $a_n \neq 0$. Brojeve $a_0, a_1, a_2, \ldots, a_n$ nazivamo koeficijentima polinoma. Koeficijent a_n nazivamo vodećim koeficijentom, koeficijent a_0 slobodnim koeficijentom. Gornji zapis nazivamo kanonskim (standardnim) oblikom polinoma jedne varijable.

Broj x_0 je nultočka polinoma $f_n(x)$ ako je $f_n(x_0) = 0.$

Teorem 1

Ako je racionalni broj $x_0 = \frac{p}{q}$ (p, q cijeli brojevi i q ≠ 0) korijen (rješenje) jednadžbe

$$f_n(x) = a_n \cdot x^n + a_{n-1} \cdot x^{n-1} + a_{n-2} \cdot x^{n-2} + \ldots + a_2 \cdot x^2 + a_1 \cdot x + a_\circ = 0,\ a_n \neq 0$$

s cjelobrojnim koeficijentima, onda je p djelitelj slobodnog člana a_0 i q je djelitelj vodećeg koeficijenta a_n.

Teorem 2

Ako je $x_\circ = \frac{p}{q}$ (p, q cijeli brojevi, q ≠ 0, M(p, q) = 1) racionalni korijen (rješenje) jednadžbe

$$f_n(x) = a_n \cdot x^n + a_{n-1} \cdot x^{n-1} + a_{n-2} \cdot x^{n-2} + \ldots + a_2 \cdot x^2 + a_1 \cdot x + a_\circ = 0,\ a_n \neq 0$$

s cjelobrojnim koeficijentima, onda je za svaki cijeli broj k broj p – k · q djelitelj od f(k).

1.inačica

Preoblikujemo jednadžbu.

$$x^2 - 2 = 0 \Rightarrow 1 \cdot x^2 + 0 \cdot x - 2 = 0 \Rightarrow \left.\begin{array}{l} a_2 = 1 \text{ vodeći koeficijent} \\ a_1 = 0 \\ a_\circ = -2 \text{ slobodni član} \end{array}\right\}.$$

Vodeći koeficijent jednadžbe je a_2 = 1 pa su njegovi djelitelji cijeli brojevi: – 1, 1.
Dakle, q = – 1, 1.
Slobodni član je a_0 = – 2 pa su njegovi djelitelji cijeli brojevi: – 2, – 1, 1, 2.
Dakle, p = – 2, – 1, 1, 2.

Ako jednadžba ima racionalna rješenja ona su u obliku $x = \frac{p}{q}$.

Zbog preglednosti prikažimo tablično.

p	q	$x = \frac{p}{q}$	$x^2 - 2 = 0$
– 2	– 1	$\frac{-2}{-1} = 2$	$2^2 - 2 = 4 - 2 = 2 \neq 0 \Rightarrow x \notin Q$
– 1		$\frac{-1}{-1} = 1$	$1^2 - 2 = 1 - 2 = -1 \neq 0 \Rightarrow x \notin Q$
1		$\frac{1}{-1} = -1$	$(-1)^2 - 2 = 1 - 2 = -1 \neq 0 \Rightarrow x \notin Q$
2		$\frac{2}{-1} = -2$	$(-2)^2 - 2 = 4 - 2 = 2 \neq 0 \Rightarrow x \notin Q$

p	q	$x=\frac{p}{q}$	$x^2-2=0$
– 2	1	$\frac{-2}{1}=-2$	$(-2)^2-2=4-2=2\neq 0 \Rightarrow x\notin Q$
– 1		$\frac{-1}{1}=-1$	$(-1)^2-2=1-2=-1\neq 0 \Rightarrow x\notin Q$
1		$\frac{1}{1}=1$	$1^2-2=1-2=-1\neq 0 \Rightarrow x\notin Q$
2		$\frac{2}{1}=2$	$2^2-2=4-2=2\neq 0 \Rightarrow x\notin Q$

Jednadžba $x^2-2=0$ nema racionalni korijen.

2.inačica

Preoblikujemo jednadžbu.

$$x^2-2=0 \Rightarrow 1\cdot x^2+0\cdot x-2=0 \Rightarrow \left.\begin{array}{l} a_2=1 \text{ vodeći koeficijent} \\ a_1=0 \\ a_\circ=-2 \text{ slobodni član} \end{array}\right\}.$$

Vodeći koeficijent jednadžbe je a_2 = 1 pa su njegovi djelitelji cijeli brojevi: – 1, 1.
Dakle, q = – 1, 1.
Slobodni član je a_0 = – 2 pa su njegovi djelitelji cijeli brojevi: – 2, – 1, 1, 2.
Dakle, p = – 2, – 1, 1, 2.

Ako jednadžba ima racionalna rješenja ona su u obliku $x=\frac{p}{q}$.

Uzmimo, na primjer, da je k = 1. Tada vrijedi:

$$f(x)=x^2-2 \Rightarrow f(k)=k^2-2 \Rightarrow [k=1] \Rightarrow f(1)=1^2-2 \Rightarrow f(1)=1-2 \Rightarrow f(1)=-1.$$

Sada ispišemo sve brojeve p – k · q.
Zbog preglednosti prikažimo tablično.

p	k	q	$p-k\cdot q$
– 2	1	– 1	$-2-1\cdot(-1)=-2+1=-1$
– 1			$-1-1\cdot(-1)=-1+1=0$
1			$1-1\cdot(-1)=1+1=2$
2			$2-1\cdot(-1)=2+1=3$

p	k	q	$p-k\cdot q$
– 2	1	1	$-2-1\cdot 1=-2-1=-3$
– 1			$-1-1\cdot 1=-1-1=-2$
1			$1-1\cdot 1=1-1=0$
2			$2-1\cdot 1=2-1=1$

Djelitelji p – k · q od f(1) = – 1 označeni su ružičastom bojom. Njima odgovaraju racionalni brojevi:

p	q	$x=\frac{p}{q}$	$x^2-2=0$
-2	-1	$\frac{-2}{-1}=2$	$2^2-2=4-2=2\neq 0 \Rightarrow x\notin Q$
2	1	$\frac{2}{1}=2$	$2^2-2=4-2=2\neq 0 \Rightarrow x\notin Q$

Jednadžba $x^2-2=0$ nema racionalni korijen.

Vježba 076

Ima li jednadžba $x^2-7=0$ racionalni korijen?

Rezultat: Nema. Dokaz analogan.

Zadatak 077 (Vesna, ekonomska škola)

Zadani su polinomi $f(x)=2\cdot x^3-x+1$ i $g(x)=x^4+x^2-x-1$. Izračunaj $f(a)+g(-a)$.

$A.\ (a-1)^2 \qquad B.\ a^2\cdot(a-1) \qquad C.\ a\cdot(a+1) \qquad D.\ a^2\cdot(a+1)^2$

Rješenje 077

Ponovimo!

$$a^1=a \quad , \quad a^n:a^m=a^{n-m} \quad , \quad (-a)^{2\cdot n}=a^{2\cdot n}.$$

$$a^2-2\cdot a\cdot b+b^2=(a-b)^2.$$

Zakon distribucije množenja prema zbrajanju.

$$a\cdot(b+c)=a\cdot b+a\cdot c \quad , \quad a\cdot b+a\cdot c=a\cdot(b+c).$$

$$f(a)+g(-a)=\begin{bmatrix} f(x)=2\cdot x^3-x+1 \\ g(x)=x^4+x^2-x-1 \end{bmatrix}=2\cdot a^3-a+1+(-a)^4+(-a)^2-(-a)-1=$$

$$=2\cdot a^3-a+1+a^4+a^2+a-1=2\cdot a^3-a+1+a^4+a^2+a-1=2\cdot a^3+a^4+a^2=$$

$$=a^4+2\cdot a^3+a^2=a^2\cdot\left(a^2+2\cdot a+1\right)=a^2\cdot(a+1)^2.$$

Odgovor je pod D.

Vježba 077

Zadani su polinomi $f(x)=2\cdot x^3-x+1$ i $g(x)=x^4+x^2-x-1$. Izračunaj $f(1)+g(-1)$.

Rezultat: 4.

Zadatak 078 (Fox, gimnazija)

Ako je $x^2-3\cdot x+5=0$, koliko je $x^4-6\cdot x^3+9\cdot x^2-7$?

Rješenje 078

Ponovimo!

$$(a\cdot b)^n=a^n\cdot b^n \quad , \quad \left(a^n\right)^m=a^{n\cdot m} \quad , \quad a^1=a \quad , \quad a^n\cdot a^m=a^{n+m}.$$

$$(a+b+c)^2=a^2+b^2+c^2+2\cdot a\cdot b+2\cdot a\cdot c+2\cdot b\cdot c.$$

$$(a-b)^2=a^2-2\cdot a\cdot b+b^2.$$

Zakon distribucije množenja prema zbrajanju.

$$a\cdot(b+c)=a\cdot b+a\cdot c \quad , \quad a\cdot b+a\cdot c=a\cdot(b+c).$$

1.inačica

Preoblikujemo jednadžbu.

$$x^2-3\cdot x+5=0 \Rightarrow x^2-3\cdot x+5=0 \;/^2 \Rightarrow \left(x^2-3\cdot x+5\right)^2=0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \left(x^2\right)^2+(-3\cdot x)^2+5^2+2\cdot x^2\cdot(-3\cdot x)+2\cdot x^2\cdot 5+2\cdot(-3\cdot x)\cdot 5=0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow x^4+9\cdot x^2+25-6\cdot x^3+10\cdot x^2-30\cdot x=0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow x^4-6\cdot x^3+9\cdot x^2+10\cdot x^2-30\cdot x+25=0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow x^4-6\cdot x^3+9\cdot x^2-7+7+10\cdot x^2-30\cdot x+25=0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \left(x^4-6\cdot x^3+9\cdot x^2-7\right)+10\cdot x^2-30\cdot x+32=0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \left(x^4-6\cdot x^3+9\cdot x^2-7\right)+10\cdot x^2-30\cdot x+50-50+32=0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \left(x^4-6\cdot x^3+9\cdot x^2-7\right)+\left(10\cdot x^2-30\cdot x+50\right)-50+32=0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \left(x^4-6\cdot x^3+9\cdot x^2-7\right)+\left(10\cdot x^2-30\cdot x+50\right)-18=0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \left(x^4-6\cdot x^3+9\cdot x^2-7\right)+10\cdot\left(x^2-3\cdot x+5\right)=18 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \left[x^2-3\cdot x+5=0\right] \Rightarrow \left(x^4-6\cdot x^3+9\cdot x^2-7\right)+10\cdot 0=18 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \left(x^4-6\cdot x^3+9\cdot x^2-7\right)+0=18 \Rightarrow x^4-6\cdot x^3+9\cdot x^2-7=18.$$

2.inačica

Preoblikujemo jednadžbu.

$$x^2-3\cdot x+5=0 \Rightarrow x^2-3\cdot x=-5 \Rightarrow x^2-3\cdot x=-5 \;/^2 \Rightarrow \left(x^2-3\cdot x\right)^2=(-5)^2 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \left(x^2\right)^2-2\cdot x^2\cdot 3\cdot x+(3\cdot x)^2=25 \Rightarrow x^4-6\cdot x^3+9\cdot x^2=25.$$

Sada je

$$x^4-6\cdot x^3+9\cdot x^2-7=\left(x^4-6\cdot x^3+9\cdot x^2\right)-7=$$

$$=\left[x^4-6\cdot x^3+9\cdot x^2=25\right]=25-7=18.$$

Vježba 078

Ako je $x^2-3\cdot x+4=0$, koliko je $x^4-6\cdot x^3+9\cdot x^2-7$?

Rezultat: 9.

Zadatak 079 (Darko, gimnazija)

Koliki je zbroj svih koeficijenata polinoma f ako je $f(x-1)=(x+2)^3$?

Rješenje 079

Ponovimo!

$$(a+b)^3=a^3+3\cdot a^2\cdot b+3\cdot a\cdot b^2+b^3.$$

Polinom stupnja n je funkcija f : R → R definirana s

$$f_n(x)=a_n\cdot x^n+a_{n-1}\cdot x^{n-1}+a_{n-2}\cdot x^{n-2}+\ldots+a_2\cdot x^2+a_1\cdot x+a_0,$$

gdje su a_0, a_1, a_2, … , a_n realni brojevi, $a_n \neq 0$. Brojeve a_0, a_1, a_2, … , a_n nazivamo koeficijentima polinoma. Koeficijent a_n nazivamo vodećim koeficijentom, koeficijent a_0 slobodnim koeficijentom. Gornji zapis nazivamo kanonskim (standardnim) oblikom polinoma jedne varijable.

Zbroj koeficijenata svakog polinoma jednak je vrijednosti toga polinoma za x = 1.

$$\left.\begin{array}{l} x=1 \\ P(x)=a_n\cdot x^n+a_{n-1}\cdot x^{n-1}+\ldots+a_1\cdot x+a_0 \end{array}\right\} \Rightarrow P(1)=a_n+a_{n-1}+\ldots+a_1+a_0.$$

1.inačica

Budući da zbroj koeficijenata polinoma f dobijemo za f(1), slijedi:

$$f(x-1)=(x+2)^3 \Rightarrow [x=2] \Rightarrow f(2-1)=(2+2)^3 \Rightarrow f(1)=4^3 \Rightarrow f(1)=64.$$

2.inačica

Budući da zbroj koeficijenata polinoma f dobijemo za f(1), slijedi:

$$f(x-1)=(x+2)^3 \Rightarrow \left[\begin{array}{c} \text{zamjena} \\ x-1=t \Rightarrow x=t+1 \end{array}\right] \Rightarrow f(t)=(t+1+2)^3 \Rightarrow f(t)=(t+3)^3 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow [t=1] \Rightarrow f(1)=(1+3)^3 \Rightarrow f(1)=4^3 \Rightarrow f(1)=64.$$

3.inačica

Budući da zbroj koeficijenata polinoma f dobijemo za f(1), slijedi:

$$f(x-1)=(x+2)^3 \Rightarrow \left[\begin{array}{c} \text{zamjena} \\ x-1=y \Rightarrow x=y+1 \end{array}\right] \Rightarrow f(y)=(y+1+2)^3 \Rightarrow f(y)=(y+3)^3 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow f(y)=y^3+3\cdot y^2\cdot 3+3\cdot y\cdot 3^2+3^3 \Rightarrow f(y)=y^3+9\cdot y^2+3\cdot y\cdot 9+27 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow f(y)=y^3+9\cdot y^2+27\cdot y+27 \Rightarrow [y=1] \Rightarrow f(1)=1^3+9\cdot 1^2+27\cdot 1+27 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow f(1)=1+9\cdot 1+27\cdot 1+27 \Rightarrow f(1)=1+9+27+27 \Rightarrow f(1)=64.$$

Vježba 079

Koliki je zbroj svih koeficijenata polinoma f ako je $f(x-1)=(x+1)^3$?

Rezultat: 27.