Zadatak 041 (Josip, gimnazija)

Koliki je zbroj svih koeficijenata polinoma $f(x)=\left(x^2-2\cdot x+2\right)^{12}\cdot\left(x^2-5\cdot x+3\right)^{13}$?

Rješenje 041

Ponovimo!

Ako je zadan polinom n – tog stupnja

$$P_n(x)=a_n\cdot x^n+a_{n-1}\cdot x^n+a_{n-2}\cdot x^{n-2}+\ \dots\ +a_2\cdot x^2+a_1\cdot x+a_0,$$

tada je

$$P_n(1)=a_n+a_{n-1}+a_{n-2}+\ \dots\ +a_2+a_1+a_0.$$

Budući da je zbroj svih koeficijenata polinoma P(x) jednak P(1), slijedi:

$$\left.\begin{array}{l} x=1 \\ f(x)=\left(x^2-2\cdot x+2\right)^{12}\cdot\left(x^2-5\cdot x+3\right)^{13} \end{array}\right\} \Rightarrow f(1)=\left(1^2-2\cdot 1+2\right)^{12}\cdot\left(1^2-5\cdot 1+3\right)^{13} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow f(1)=(1-2+2)^{12}\cdot(1-5+3)^{13} \Rightarrow f(1)=1^{12}\cdot(-1)^{13} \Rightarrow f(1)=1\cdot(-1) \Rightarrow f(1)=-1.$$

Vježba 041

Koliki je zbroj svih koeficijenata polinoma $f(x)=\left(x^2-2\cdot x+2\right)^{8}\cdot\left(x^2-5\cdot x+3\right)^{4}$?

Rezultat: 1.

Zadatak 042 (Neira, gimnazija)

Odredi realne brojeve m i n tako da polinom $p(x) = 2\cdot x^4 + 5\cdot x^3 - 17\cdot x^2 + m\cdot x + n$ bude djeljiv sa polinomom $f(x) = 2\cdot x^2 - x - 6$.

Rješenje 042

Ponovimo!

Poučak o nul-polinomu

Za polinom bilo kojeg stupnja vrijedi ova tvrdnja: Ako je za svaki realan broj x, $p(x) = 0$, onda su svi koeficijenti polinoma p(x) jednaki nuli.

Poučak o djeljivosti polinoma

Kada dijelimo polinom f(x) polinomom g(x) tražimo takav polinom q(x) da je

$$f(x) = g(x)\cdot q(x).$$

Ako takav polinom q(x) postoji, kažemo da je polinom f(x) djeljiv polinomom g(x). U općem slučaju bit će

$$f(x) = g(x)\cdot q(x) + r(x),$$

gdje je r(x) ostatak dijeljenja polinoma f(x) polinomom g(x). Ostatak r(x) je uvijek za bar jedan stupanj niži polinom od g(x).

Promatramo dijeljenje polinoma

$$\left(2\cdot x^4+5\cdot x^3-17\cdot x^2+m\cdot x+n\right):\left(2\cdot x^2-x-6\right).$$

Polinome koje dijelimo pišemo po padajućim potencijama. Dijelimo prvi član djeljenika, $2\cdot x^4$, prvim članom djelitelja, $2\cdot x^2$.

$$2x^4:2x^2=x^2.$$

Količnik x^2 zatim pomnožimo djeliteljem, $2\cdot x^2 - x - 6$, i umnožak potpisujemo pod odgovarajuće potencije djeljenika.

$$\left(2\cdot x^4+5\cdot x^3-17\cdot x^2+m\cdot x+n\right):\left(2\cdot x^2-x-6\right)=x^2$$
$$2\cdot x^4 \quad -x^3 \quad -6\cdot x^2$$

Potpisanim članovima $2 \cdot x^4 - x^3 - 6 \cdot x^2$ promijenimo predznake i zbrojimo s odgovarajućim članovima djeljenika. Spuštamo sljedeći član djeljenika, $m \cdot x$.

$$\begin{array}{l}\left(\;2\cdot x^4+5\cdot x^3-17\cdot x^2+m\cdot x+n\right):\left(2\cdot x^2-x-6\right)=x^2\\ -2\cdot x^4 \quad \mp x^3 \quad \mp 6\cdot x^2\\ \hline \qquad +6\cdot x^3 \quad -11\cdot x^2+m\cdot x\end{array}$$

Ponovno prvi član djeljenika, $6 \cdot x^3 - 11 \cdot x^2 + m \cdot x$, dijelimo prvim članom djelitelja, $2 \cdot x^2$.

$$6x^3 : 2x^2 = 3\cdot x.$$

Količnik $3 \cdot x$ zatim pomnožimo djeliteljem, $2 \cdot x^2 - x - 6$, i umnožak potpisujemo pod odgovarajuće potencije djeljenika.

$$\begin{array}{l}\left(\;2\cdot x^4+5\cdot x^3-17\cdot x^2+m\cdot x+n\;\right):\left(2\cdot x^2-x-6\right)=x^2+3\cdot x\\ -2\cdot x^4 \quad \mp x^3 \quad \mp 6\cdot x^2\\ \hline \qquad +6\cdot x^3 \quad -11\cdot x^2+m\cdot x\end{array}$$

Potpisanim članovima $6 \cdot x^3 - 11 \cdot x^2 + m \cdot x$ promijenimo predznake i zbrojimo s odgovarajućim članovima djeljenika. Spuštamo sljedeći član djeljenika, n.

$$\begin{array}{l}\left(\;2\cdot x^4+5\cdot x^3-17\cdot x^2+m\cdot x+n\;\right):\left(2\cdot x^2-x-6\right)=x^2+3\cdot x\\ -2\cdot x^4 \quad \mp x^3 \quad \mp 6\cdot x^2\\ \hline \qquad +6\cdot x^3 \quad -11\cdot x^2+m\cdot x\\ \qquad \pm 6\cdot x^3 \quad \mp 3\cdot x^2 \mp 18\cdot x\\ \hline \qquad\qquad -8\cdot x^2+(m+18)\cdot x+n\end{array}$$

Ponovno prvi član djeljenika, $-8 \cdot x^2 + (m + 18) \cdot x + n$, dijelimo prvim članom djelitelja, $2 \cdot x^2$.

$$-8x^2 : 2x^2 = -4.$$

Količnik -4 zatim pomnožimo djeliteljem, $2 \cdot x^2 - x - 6$, i umnožak potpisujemo pod odgovarajuće potencije djeljenika.

$$\begin{array}{l}
\left(2\cdot x^4+5\cdot x^3-17\cdot x^2+m\cdot x+n\right):\left(2\cdot x^2-x-6\right)=x^2+3\cdot x-4 \\
-2\cdot x^4 \quad \mp x^3 \quad \mp 6\cdot x^2 \\
\hline
\qquad +6\cdot x^3 \quad -11\cdot x^2+m\cdot x \\
\qquad \pm 6\cdot x^3 \quad \mp 3\cdot x^2 \mp 18\cdot x \\
\hline
\qquad\qquad -8\cdot x^2+\left(m+18\right)\cdot x+n \\
\qquad\qquad -8\cdot x^2 \qquad +4\cdot x+24
\end{array}$$

Potpisanim članovima – 8 · x^2 + 4 · x + 24 promijenimo predznake i zbrojimo s odgovarajućim članovima djeljenika.

$$\begin{array}{l}
\left(2\cdot x^4+5\cdot x^3-17\cdot x^2+m\cdot x+n\right):\left(2\cdot x^2-x-6\right)=x^2+3\cdot x-4 \\
-2\cdot x^4 \quad \mp x^3 \quad \mp 6\cdot x^2 \\
\hline
\qquad +6\cdot x^3 \quad -11\cdot x^2+m\cdot x \\
\qquad \pm 6\cdot x^3 \quad \mp 3\cdot x^2 \mp 18\cdot x \\
\hline
\qquad\qquad -8\cdot x^2+\left(m+18\right)\cdot x+n \\
\qquad\qquad \mp 8\cdot x^2 \qquad \pm 4\cdot x \pm 24 \\
\hline
\qquad\qquad \left(m+18-4\right)\cdot x+n-24=\left(m+14\right)\cdot x+n-24 \ \text{ostatak}
\end{array}$$

Ostatak je polinom prvog stupnja r(x) = (m + 14) · x + n – 24.
Budući da su polinomi djeljivi, ostatak mora biti jednak nuli, tj. mora biti nul-polinom. Zbog teorema o nul-polinomu koeficijenti ostatka, polinoma r(x) = (m + 14) · x + n – 24 jednaki su nuli:

$$\left.\begin{array}{l}\left(m+14\right)\cdot x+n-24=0 \\ \text{za svaki } x\in R\end{array}\right\} \Rightarrow \left.\begin{array}{l}m+14=0 \\ n-24=0\end{array}\right\} \Rightarrow \left.\begin{array}{l}m=-14 \\ n=24\end{array}\right\}.$$

Polinom p(x) = 2 · x^4 + 5 · x^3 – 17 · x^2 + m · x + n glasi:

$$p(x) = 2\cdot x^4 + 5\cdot x^3 - 17\cdot x^2 - 14\cdot x + 24.$$

Vježba 042

Odredi realne brojeve m i n tako da polinom p(x) = 2 · x^4 + 5 · x^3 – 17 · x^2 + m · x + 3 · n bude djeljiv sa polinomom f(x) = 2 · x^2 – x – 6.

Rezultat: m = – 14 , n = 8.

Zadatak 043 (Zvonko, maturant)

Odredi realne brojeve a i b tako da polinom P(x) = x^3 + 2 · x^2 – a · x + b pri dijeljenju s Q_1(x) = x – 2 daje ostatak 2, a pri dijeljenju s Q_2(x) = x + 1 ostatak 3.

Rješenje 043

Ponovimo!

Kada dijelimo polinom f(x) polinomom g(x) tražimo takav polinom q(x) da je

$$f(x) = g(x)\cdot q(x).$$

Ako takav polinom q(x) postoji, kažemo da je polinom f(x) djeljiv polinomom g(x). U općem slučaju bit će

$$f(x) = g(x) \cdot q(x) + r(x),$$

gdje je r(x) ostatak dijeljenja polinoma f(x) polinomom g(x). Ostatak r(x) je uvijek za bar jedan stupanj niži polinom od g(x).
Pretpostavimo da pri dijeljenju polinoma P(x) polinomom $Q_1(x)$ dobijemo količnik $q_1(x)$ i ostatak 2. To ovako zapisujemo:

$$P(x) = q_1(x) \cdot Q_1(x) + 2 \Rightarrow x^3 + 2 \cdot x^2 - a \cdot x + b = q_1(x) \cdot (x-2) + 2.$$

Pretpostavimo da pri dijeljenju polinoma P(x) polinomom $Q_2(x)$ dobijemo količnik $q_2(x)$ i ostatak 3. To ovako zapisujemo:

$$P(x) = q_2(x) \cdot Q_2(x) + 3 \Rightarrow x^3 + 2 \cdot x^2 - a \cdot x + b = q_2(x) \cdot (x+1) + 3.$$

U jednadžbu

$$x^3 + 2 \cdot x^2 - a \cdot x + b = q_1(x) \cdot (x-2) + 2$$

uvrstimo x = 2 da se x – 2 poništi:

$$2^3 + 2 \cdot 2^2 - a \cdot 2 + b = q_1(2) \cdot (2-2) + 2 \Rightarrow 8 + 8 - 2 \cdot a + b = q_1(2) \cdot 0 + 2 \Rightarrow 16 - 2 \cdot a + b = 0 + 2 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 16 - 2 \cdot a + b = 2 \Rightarrow -2 \cdot a + b = 2 - 16 \Rightarrow -2 \cdot a + b = -14.$$

U jednadžbu

$$x^3 + 2 \cdot x^2 - a \cdot x + b = q_2(x) \cdot (x+1) + 3$$

uvrstimo x = – 1 da se x + 1 poništi:

$$(-1)^3 + 2 \cdot (-1)^2 - a \cdot (-1) + b = q_2(-1) \cdot (-1+1) + 3 \Rightarrow -1 + 2 + a + b = q_2(-1) \cdot 0 + 3 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 1 + a + b = 0 + 3 \Rightarrow 1 + a + b = 3 \Rightarrow a + b = 3 - 1 \Rightarrow a + b = 2.$$

Iz sustava jednadžbi dobiju se vrijednosti za a i b:

$$\left.\begin{matrix} -2 \cdot a + b = -14 \\ a + b = 2 \end{matrix}\right\} \Rightarrow \left[\begin{matrix} \text{metoda suprotnih} \\ \text{koeficijenata} \end{matrix}\right] \Rightarrow \left.\begin{matrix} -2 \cdot a + b = -14 \;/ \cdot (-1) \\ a + b = 2 \end{matrix}\right\} \Rightarrow \left.\begin{matrix} 2 \cdot a - b = 14 \\ a + b = 2 \end{matrix}\right\} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 3 \cdot a = 16 \;/ : 3 \Rightarrow a = \frac{16}{3} \Rightarrow \left.\begin{matrix} a = \frac{16}{3} \\ a + b = 2 \end{matrix}\right\} \Rightarrow \frac{16}{3} + b = 2 \Rightarrow b = 2 - \frac{16}{3} \Rightarrow b = -\frac{10}{3}.$$

Vježba 043

Odredi realne brojeve a i b tako da polinom $P(x) = x^3 + 2 \cdot x^2 - a \cdot x + b$ pri dijeljenju s $Q_1(x) = x - 2$ daje ostatak 1, a pri dijeljenju s $Q_2(x) = x + 1$ ostatak 4.

Rezultat: a = 6 , b = – 3.

Zadatak 044 (Iva, gimnazija)

Polinom $f(x) = 2 \cdot x^2 - 3 \cdot x + 5$ razvij po potencijama od x – 2.

Rješenje 044

Ponovimo!

Poučak o jednakosti polinoma:
Dva polinoma jednaka su ako i samo ako su istog stupnja i ako su im koeficijenti uz iste potencije jednaki.

$$(a-b)^2 = a^2 - 2 \cdot a \cdot b + b^2.$$

Budući da je zadani polinom drugog stupnja, razvoj po potencijama od x – 2 glasi:

$$2 \cdot x^2 - 3 \cdot x + 5 = A \cdot (x-2)^2 + B \cdot (x-2) + C.$$

Potrebno je odrediti koeficijente A, B i C:

$$2\cdot x^2-3\cdot x+5=A\cdot(x-2)^2+B\cdot(x-2)+C \Rightarrow 2\cdot x^2-3\cdot x+5=A\cdot\left(x^2-4\cdot x+4\right)+B\cdot(x-2)+C \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 2\cdot x^2-3\cdot x+5=A\cdot x^2-4\cdot A\cdot x+4\cdot A+B\cdot x-2\cdot B+C \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 2\cdot x^2-3\cdot x+5=A\cdot x^2+(-4\cdot A+B)\cdot x+(4\cdot A-2\cdot B+C).$$

Prema poučku o jednakosti polinoma dobije se sustav jednadžbi:

$$\left.\begin{array}{l} A=2 \\ -4\cdot A+B=-3 \\ 4\cdot A-2\cdot B+C=5 \end{array}\right\} \Rightarrow \left.\begin{array}{l} -4\cdot 2+B=-3 \\ 4\cdot 2-2\cdot B+C=5 \end{array}\right\} \Rightarrow \left.\begin{array}{l} -8+B=-3 \\ 8-2\cdot B+C=5 \end{array}\right\} \Rightarrow \left.\begin{array}{l} B=-3+8 \\ 8-2\cdot B+C=5 \end{array}\right\} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \left.\begin{array}{l} B=5 \\ 8-2\cdot B+C=5 \end{array}\right\} \Rightarrow 8-2\cdot 5+C=5 \Rightarrow 8-10+C=5 \Rightarrow C=5-8+10 \Rightarrow C=7.$$

Rezultat glasi:

$$2\cdot x^2-3\cdot x+5=2\cdot(x-2)^2+5\cdot(x-2)+7.$$

Vježba 044

Polinom $f(x) = 3 \cdot x^2 + 8 \cdot x$ razvij po potencijama od $x + 1$.

Rezultat: $\quad 3\cdot x^2+8\cdot x=3\cdot(x+1)^2+2\cdot(x+1)-5.$

Zadatak 045 (Dragan, srednja škola)

Ako je polinom $p(x) = x^3 + a \cdot x^2 + b \cdot x + 2$ djeljiv polinomom $q(x) = x^2 - 1$, izračunaj $a^2 - b^2$.

Rješenje 045

Ponovimo!

Poučak o jednakosti polinoma:

Dva polinoma jednaka su ako i samo ako su istog stupnja i ako su im koeficijenti uz iste potencije jednaki.

Kada dijelimo polinom f(x) polinomom g(x) tražimo takav polinom q(x) da je

$$f(x) = g(x) \cdot q(x).$$

Ako takav polinom q(x) postoji, kažemo da je polinom f(x) djeljiv polinomom g(x). U općem slučaju bit će

$$f(x) = g(x) \cdot q(x) + r(x),$$

gdje je r(x) ostatak dijeljenja polinoma f(x) polinomom g(x). Ostatak r(x) je uvijek za bar jedan stupanj niži polinom od g(x).

1.inačica

Pri dijeljenju polinoma $p(x) = x^3 + a \cdot x^2 + b \cdot x + 2$ polinomom $q(x) = x^2 - 1$ dobijemo količnik, polinom prvog stupnja $x + c$ pa vrijedi:

$$x^3+a\cdot x^2+b\cdot x+2=\left(x^2-1\right)\cdot(x+c) \Rightarrow x^3+a\cdot x^2+b\cdot x+2=x^3+c\cdot x^2-x-c \Rightarrow$$

$$\Rightarrow x^3+a\cdot x^2+b\cdot x+2=x^3+c\cdot x^2-x-c \Rightarrow a\cdot x^2+b\cdot x+2=c\cdot x^2-x-c \Rightarrow \begin{bmatrix}\text{jednakost} \\ \text{polinoma}\end{bmatrix} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \left.\begin{array}{l} a=c \\ b=-1 \\ 2=-c \end{array}\right\} \Rightarrow \left.\begin{array}{l} a=c \\ b=-1 \\ c=-2 \end{array}\right\} \Rightarrow \left.\begin{array}{l} a=-2 \\ b=-1 \end{array}\right\} \Rightarrow a^2-b^2=(-2)^2-(-1)^2 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow a^2-b^2=4-1 \Rightarrow a^2-b^2=3.$$

2.inačica

Pri dijeljenju polinoma p(x) = $x^3 + a \cdot x^2 + b \cdot x + 2$ polinomom q(x) = $x^2 - 1$ dobijemo količnik, polinom prvog stupnja x + c pa vrijedi:

$$x^3 + a \cdot x^2 + b \cdot x + 2 = \left(x^2 - 1\right) \cdot (x + c).$$

Računamo za koje vrijednosti od x se polinom q(x) = $x^2 - 1$ poništi, tj. koje su njegove nultočke:

$$x^2 - 1 = 0 \Rightarrow x^2 = 1 \;/\sqrt{\;} \Rightarrow \left.\begin{matrix} x_1 = 1 \\ x_2 = -1 \end{matrix}\right\}.$$

Sada je:

- za x = 1

$$x^3 + a \cdot x^2 + b \cdot x + 2 = \left(x^2 - 1\right) \cdot (x + c) \Rightarrow 1^3 + a \cdot 1^2 + b \cdot 1 + 2 = \left(1^2 - 1\right) \cdot (1 + c) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 1 + a + b + 2 = (1 - 1) \cdot (1 + c) \Rightarrow 1 + a + b + 2 = 0 \cdot (1 + c) \Rightarrow 1 + a + b + 2 = 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow a + b = -1 - 2 \Rightarrow a + b = -3.$$

- za x = – 1

$$x^3 + a \cdot x^2 + b \cdot x + 2 = \left(x^2 - 1\right) \cdot (x + c) \Rightarrow (-1)^3 + a \cdot (-1)^2 + b \cdot (-1) + 2 = \left((-1)^2 - 1\right) \cdot (-1 + c) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow -1 + a - b + 2 = (1 - 1) \cdot (-1 + c) \Rightarrow -1 + a - b + 2 = 0 \cdot (1 + c) \Rightarrow -1 + a - b + 2 = 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow -1 + a - b + 2 = 1 - 2 \Rightarrow a - b = -1.$$

Riješimo sustav jednadžbi:

$$\left.\begin{matrix} a + b = -3 \\ a - b = -1 \end{matrix}\right\} \Rightarrow \begin{bmatrix} \text{metoda suprotnih} \\ \text{koeficijenata} \end{bmatrix} \Rightarrow 2 \cdot a = -4 \;/:2 \Rightarrow a = -2 \Rightarrow \left.\begin{matrix} a = -2 \\ a + b = -3 \end{matrix}\right\} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow -2 + b = -3 \Rightarrow b = -3 + 2 \Rightarrow b = -1.$$

Zato je

$$\left.\begin{matrix} a = -2 \\ b = -1 \end{matrix}\right\} \Rightarrow a^2 - b^2 = (-2)^2 - (-1)^2 \Rightarrow a^2 - b^2 = 4 - 1 \Rightarrow a^2 - b^2 = 3.$$

Vježba 045

Ako je polinom p(x) = $x^3 + a \cdot x^2 + b \cdot x + 2$ djeljiv polinomom q(x) = $x^2 - 1$, izračunaj $a^2 + b^2$.

Rezultat: 5.

Zadatak 046 (Dino, maturant)

Neka su x i y realni brojevi. Koju najmanju vrijednost može imati izraz
z = $x^2 + y^2 - 6 \cdot x + 4 \cdot y + 24$?

Rješenje 046

Ponovimo!

$$a^2 + 2 \cdot a \cdot b + b^2 = (a + b)^2 \quad , \quad a^2 - 2 \cdot a \cdot b + b^2 = (a - b)^2 \quad , \quad x^2 \geq 0 \text{ za svaki } x.$$

$$(x - y)^2 = 0 \Rightarrow x - y = 0 \Rightarrow x = y \quad , \quad (x + y)^2 = 0 \Rightarrow x + y = 0 \Rightarrow x = -y.$$

$$z = x^2 + y^2 - 6 \cdot x + 4 \cdot y + 24 \Rightarrow z = x^2 - 6 \cdot x + y^2 + 4 \cdot y + 24.$$

Najprije nadopunimo izraze $x^2 - 6 \cdot x$ i $y^2 + 4 \cdot y$ na pune kvadrate.

- Nadopunjavamo izraz $x^2 - 6 \cdot x$ na puni kvadrat.

1.inačica

Rabimo formulu

$$a^2-2\cdot a\cdot b+b^2=(a-b)^2.$$

Sada je

$$x^2-6\cdot x=x^2-2\cdot 3\cdot x=\left[\begin{array}{l}\text{izraz ne smije mijenjati vrijednost}\\ \text{pa ga nadopunimo sa } +3^2-3^2\end{array}\right]=x^2-2\cdot 3\cdot x+3^2-3^2=$$

$$=\left(x^2-2\cdot 3\cdot x+3^2\right)-3^2=(x-3)^2-3^2=(x-3)^2-9.$$

2.inačica

Rabimo formulu

$$a^2-2\cdot a\cdot b+b^2=(a-b)^2.$$

Sada je

$$\left.\begin{array}{l}x^2-6\cdot x\\ a^2-2\cdot a\cdot b+b^2\end{array}\right\}\Rightarrow\left.\begin{array}{l}x^2-6\cdot x\\ a^2-2\cdot a\cdot b+b^2\end{array}\right\}\Rightarrow\left.\begin{array}{l}a=x\\ 2\cdot a\cdot b=6\cdot x\end{array}\right\}\Rightarrow 2\cdot x\cdot b=6\cdot x\ /\cdot\frac{1}{2\cdot x}\Rightarrow b=3.$$

Budući da izraz $x^2-6\cdot x$ ne smije mijenjati vrijednost, nadopunimo ga sa $+3^2-3^2$ pa dalje slijedi:

$$\left.\begin{array}{l}x^2-6\cdot x\\ a^2-2\cdot a\cdot b+b^2=(a-b)^2\end{array}\right\}\Rightarrow\left.\begin{array}{l}x^2-6\cdot x+3^2-3^2\\ a^2-2\cdot a\cdot b+b^2=(a-b)^2\end{array}\right\}\Rightarrow\left.\begin{array}{l}\left(x^2-6\cdot x+3^2\right)-3^2\\ a^2-2\cdot a\cdot b+b^2=(a-b)^2\end{array}\right\}\Rightarrow$$

$$\Rightarrow\left(x^2-2\cdot 3\cdot x+3^2\right)-3^2\Rightarrow(x-3)^2-3^2\Rightarrow(x-3)^2-9.$$

- Nadopunjavamo izraz $y^2+4\cdot y$ na puni kvadrat.

  1.inačica

Rabimo formulu

$$a^2+2\cdot a\cdot b+b^2=(a+b)^2.$$

Sada je

$$y^2+4\cdot y=y^2+2\cdot 2\cdot y=\left[\begin{array}{l}\text{izraz ne smije mijenjati vrijednost}\\ \text{pa ga nadopunimo sa } +2^2-2^2\end{array}\right]=y^2+2\cdot 2\cdot y+2^2-2^2=$$

$$=\left(y^2+2\cdot 2\cdot y+2^2\right)-2^2=(y+2)^2-2^2=(y+2)^2-4.$$

2.inačica

Rabimo formulu

$$a^2+2\cdot a\cdot b+b^2=(a+b)^2.$$

Sada je

$$\left.\begin{array}{l}y^2+4\cdot y\\ a^2+2\cdot a\cdot b+b^2\end{array}\right\}\Rightarrow\left.\begin{array}{l}y^2+4\cdot y\\ a^2+2\cdot a\cdot b+b^2\end{array}\right\}\Rightarrow\left.\begin{array}{l}a=y\\ 2\cdot a\cdot b=4\cdot y\end{array}\right\}\Rightarrow 2\cdot y\cdot b=4\cdot y\ /\cdot\frac{1}{2\cdot y}\Rightarrow b=2.$$

Budući da izraz $y^2+4\cdot y$ ne smije mijenjati vrijednost, nadopunimo ga sa $+2^2-2^2$ pa dalje slijedi:

$$\left.\begin{array}{l}y^2+4\cdot y\\ a^2+2\cdot a\cdot b+b^2=(a+b)^2\end{array}\right\}\Rightarrow\left.\begin{array}{l}y^2+4\cdot y+2^2-2^2\\ a^2+2\cdot a\cdot b+b^2=(a+b)^2\end{array}\right\}\Rightarrow\left.\begin{array}{l}\left(y^2+4\cdot y+2^2\right)-2^2\\ a^2+2\cdot a\cdot b+b^2=(a+b)^2\end{array}\right\}\Rightarrow$$

$$\Rightarrow\left(y^2+2\cdot 2\cdot y+2^2\right)-2^2\Rightarrow(y+2)^2-2^2\Rightarrow(y+2)^2-4.$$

Nakon sređivanja izraz glasi:

$$z=x^2+y^2-6\cdot x+4\cdot y+24 \Rightarrow z=x^2-6\cdot x+y^2+4\cdot y+24 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow z=(x-3)^2-9+(y+2)^2-4+24 \Rightarrow z=(x-3)^2+(y+2)^2+11.$$

Najmanju vrijednost izraz poprima ako su izrazi u zagradama jednaki nuli:

$$\left.\begin{array}{l} x-3=0 \\ y+2=0 \end{array}\right\} \Rightarrow \left.\begin{array}{l} x=3 \\ y=-2 \end{array}\right\}.$$

Tada je njegova vrijednost jednaka:

$$z=(3-3)^2+(-2+2)^2+11 \Rightarrow z=0+9+11 \Rightarrow z=11.$$

Vježba 046

Neka su x i y realni brojevi. Koju najmanju vrijednost može imati izraz $z = x^2 + y^2 - 4 \cdot x - 6 \cdot y + 23$?

Rezultat: 10.

Zadatak 047 (Nicky, maturantica)

Zadan je polinom $f(x) = (5 \cdot x^2 - 7 \cdot x + 1)^{2009}$. Napišemo li taj polinom u kanonskom obliku, tj. $f(x) = a_n \cdot x^n + a_{n-1} \cdot x^{n-1} + \ldots + a_1 \cdot x + a_0$ tada će zbroj svih koeficijenata tog polinoma biti jednak:

$A.\ 5^{4018}-7^{2009}+1 \qquad B.\ 5^{2009}+7^{2009} \qquad C.\ 1 \qquad D.\ -1$

Rješenje 047

Ponovimo!

$$(-1)^{2\cdot n-1}=-1.$$

Zbroj svih koeficijenata polinoma u kanonskom obliku

$$f(x)=a_n\cdot x^n+a_{n-1}\cdot x^{n-1}+\ \ldots\ +a_1\cdot x+a_0$$

glasi:

$$s=a_n+a_{n-1}+\ \ldots\ +a_1+a_0.$$

Uočimo da za polinom

$$f(x)=a_n\cdot x^n+a_{n-1}\cdot x^{n-1}+\ \ldots\ +a_1\cdot x+a_0$$

vrijedi

$$f(1)=a_n\cdot 1^n+a_{n-1}\cdot 1^{n-1}+\ \ldots\ +a_1\cdot 1+a_0 \Rightarrow f(1)=a_n+a_{n-1}+\ \ldots\ +a_1+a_0.$$

Zato je

$$s=f(1).$$

Dakle, zbroj svih koeficijenata polinoma dobijemo ako za argument uzmemo 1, tj. x = 1.
Zbroj koeficijenata zadanog polinoma jednak je:

$$\left.\begin{array}{l} f(x)=\left(5\cdot x^2-7\cdot x+1\right)^{2009} \\ s=f(1) \end{array}\right\} \Rightarrow s=\left(5\cdot 1^2-7\cdot 1+1\right)^{2009} \Rightarrow s=(5-7+1)^{2009} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow s=(-1)^{2009} \Rightarrow s=-1.$$

Odgovor je pod D.

Vježba 047

Zadan je polinom $f(x) = (6 \cdot x^2 - 7 \cdot x + 1)^{2009}$. Napišemo li taj polinom u kanonskom obliku, tj. $f(x) = a_n \cdot x^n + a_{n-1} \cdot x^{n-1} + ... + a_1 \cdot x + a_0$ tada će zbroj svih koeficijenata tog polinoma biti jednak:

$A.\ 0 \qquad B.\ 2 \qquad C.\ 1 \qquad D.\ -1$

Rezultat: A.

Zadatak 048 (Maturnati, HTT)

Koliki je zbroj nultočaka polinoma $f(x) = (x+1) \cdot (x-2) \cdot (x-1-2 \cdot i) \cdot (x-1+2 \cdot i)$?

Rješenje 048

Ponovimo!

Funkcija oblika

$$f_n(x) = a_n \cdot x^n + a_{n-1} \cdot x^{n-1} + a_{n-2} \cdot x^{n-2} + \ ... \ + a_2 \cdot x^2 + a_1 \cdot x + a_0$$

zove se polinom n – tog stupnja.

Broj x_0 je nultočka polinoma $f_n(x)$ ako je $f_n(x_0) = 0$. Općenito vrijedi da polinom n – tog stupnja ima n nultočaka (one mogu biti realni ili kompleksni brojevi). Polinom

$$f_n(x) = a_n \cdot x^n + a_{n-1} \cdot x^{n-1} + a_{n-2} \cdot x^{n-2} + \ ... \ + a_2 \cdot x^2 + a_1 \cdot x + a_0$$

možemo faktorizirati:

$$f_n(x) = a_n \cdot (x - x_1) \cdot (x - x_2) \cdot (x - x_3) \cdot \ ... \ \cdot (x - x_n),$$

gdje su $x_1, x_2, x_3, ..., x_n$ nultočke polinoma.

Uočimo da je zadani polinom četvrtog stupnja pa ima četiri nultočke.

$$\left. \begin{array}{l} f(x) = (x+1) \cdot (x-2) \cdot (x-1-2 \cdot i) \cdot (x-1+2 \cdot i) \\ f_4(x) = (x-x_1) \cdot (x-x_2) \cdot (x-x_3) \cdot (x-x_4) \end{array} \right\} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \left. \begin{array}{l} f(x) = (x-(-1)) \cdot (x-2) \cdot (x-(1+2 \cdot i)) \cdot (x-(1-2 \cdot i)) \\ f_4(x) = (x-x_1) \cdot (x-x_2) \cdot (x-x_3) \cdot (x-x_4) \end{array} \right\} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \left. \begin{array}{l} f(x) = (x-(-1)) \cdot (x-2) \cdot (x-(1+2 \cdot i)) \cdot (x-(1-2 \cdot i)) \\ f_4(x) = (x-x_1) \cdot (x-x_2) \cdot (x-x_3) \cdot (x-x_4) \end{array} \right\} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \left. \begin{array}{l} x_1 = -1 \\ x_2 = 2 \\ x_3 = 1 + 2 \cdot i \\ x_4 = 1 - 2 \cdot i \end{array} \right\}.$$

Zbroj nultočaka iznosi:

$$x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = -1 + 2 + 1 + 2 \cdot i + 1 - 2 \cdot i = -1 + 2 + 1 + 2 \cdot i + 1 - 2 \cdot i = 3.$$

Vježba 048

Koliki je zbroj nultočaka polinoma $f(x) = (x+1) \cdot (x-2) \cdot (x-1-5 \cdot i) \cdot (x-1+5 \cdot i)$?

Rezultat: 3.