**Zadatak 041 (Josip, gimnazija)**

Koliki je zbroj svih koeficijenata polinoma $f(x)=\left(x^2-2\cdot x+2\right)^{12}\cdot\left(x^2-5\cdot x+3\right)^{13}$ ?

**Rješenje 041**

Ponovimo!

Ako je zadan polinom n – tog stupnja

$$P_n(x)=a_n\cdot x^n+a_{n-1}\cdot x^n+a_{n-2}\cdot x^{n-2}+\ \dots\ +a_2\cdot x^2+a_1\cdot x+a_0,$$

tada je

$$P_n(1)=a_n+a_{n-1}+a_{n-2}+\ \dots\ +a_2+a_1+a_0.$$

Budući da je zbroj svih koeficijenata polinoma P(x) jednak P(1), slijedi:

$$\left.\begin{array}{l} x=1 \\ f(x)=\left(x^2-2\cdot x+2\right)^{12}\cdot\left(x^2-5\cdot x+3\right)^{13}\end{array}\right\}\Rightarrow f(1)=\left(1^2-2\cdot 1+2\right)^{12}\cdot\left(1^2-5\cdot 1+3\right)^{13}\Rightarrow$$

$$\Rightarrow f(1)=(1-2+2)^{12}\cdot(1-5+3)^{13}\Rightarrow f(1)=1^{12}\cdot(-1)^{13}\Rightarrow f(1)=1\cdot(-1)\Rightarrow f(1)=-1.$$

**Vježba 041**

Koliki je zbroj svih koeficijenata polinoma $f(x)=\left(x^2-2\cdot x+2\right)^{8}\cdot\left(x^2-5\cdot x+3\right)^{4}$ ?

**Rezultat:** 1.



**Zadatak 042 (Neira, gimnazija)**

Odredi realne brojeve m i n tako da polinom $p(x) = 2\cdot x^4 + 5\cdot x^3 - 17\cdot x^2 + m\cdot x + n$ bude djeljiv sa polinomom $f(x) = 2\cdot x^2 - x - 6$.

**Rješenje 042**

Ponovimo!

Poučak o nul-polinomu

Za polinom bilo kojeg stupnja vrijedi ova tvrdnja: Ako je za svaki realan broj x, $p(x) = 0$, onda su svi koeficijenti polinoma p(x) jednaki nuli.

Poučak o djeljivosti polinoma

Kada dijelimo polinom f(x) polinomom g(x) tražimo takav polinom q(x) da je

$$f(x) = g(x)\cdot q(x).$$

Ako takav polinom q(x) postoji, kažemo da je polinom f(x) djeljiv polinomom g(x). U općem slučaju bit će

$$f(x) = g(x)\cdot q(x) + r(x),$$

gdje je r(x) ostatak dijeljenja polinoma f(x) polinomom g(x). Ostatak r(x) je uvijek za bar jedan stupanj niži polinom od g(x).

Promatramo dijeljenje polinoma

$$\left(2\cdot x^4+5\cdot x^3-17\cdot x^2+m\cdot x+n\right):\left(2\cdot x^2-x-6\right).$$

Polinome koje dijelimo pišemo po padajućim potencijama. Dijelimo prvi član djeljenika, $2\cdot x^4$, prvim članom djelitelja, $2\cdot x^2$.

$$2x^4:2x^2=x^2.$$

Količnik $x^2$ zatim pomnožimo djeliteljem, $2\cdot x^2 - x - 6$, i umnožak potpisujemo pod odgovarajuće potencije djeljenika.

$$\left(2\cdot x^4+5\cdot x^3-17\cdot x^2+m\cdot x+n\right):\left(2\cdot x^2-x-6\right)=x^2$$
$$2\cdot x^4 \quad -x^3 \quad -6\cdot x^2$$

Potpisanim članovima $2 \cdot x^4 - x^3 - 6 \cdot x^2$ promijenimo predznake i zbrojimo s odgovarajućim članovima djeljenika. Spuštamo sljedeći član djeljenika, $m \cdot x$.

$$\begin{array}{l}\left(\;2\cdot x^4+5\cdot x^3-17\cdot x^2+m\cdot x+n\right):\left(2\cdot x^2-x-6\right)=x^2\\ -2\cdot x^4 \quad \mp x^3 \quad \mp 6\cdot x^2\\ \hline \qquad\quad +6\cdot x^3 \quad -11\cdot x^2+m\cdot x\end{array}$$

Ponovno prvi član djeljenika, $6 \cdot x^3 - 11 \cdot x^2 + m \cdot x$, dijelimo prvim članom djelitelja, $2 \cdot x^2$.

$$6x^3 : 2x^2 = 3\cdot x.$$

Količnik $3 \cdot x$ zatim pomnožimo djeliteljem, $2 \cdot x^2 - x - 6$, i umnožak potpisujemo pod odgovarajuće potencije djeljenika.

$$\begin{array}{l}\left(\;2\cdot x^4+5\cdot x^3-17\cdot x^2+m\cdot x+n\quad\right):\left(2\cdot x^2-x-6\right)=x^2+3\cdot x\\ -2\cdot x^4 \quad \mp x^3 \quad \mp 6\cdot x^2\\ \hline \qquad\quad +6\cdot x^3 \quad -11\cdot x^2+m\cdot x\end{array}$$

Potpisanim članovima $6 \cdot x^3 - 11 \cdot x^2 + m \cdot x$ promijenimo predznake i zbrojimo s odgovarajućim članovima djeljenika. Spuštamo sljedeći član djeljenika, $n$.

$$\begin{array}{l}\left(\;2\cdot x^4+5\cdot x^3-17\cdot x^2+m\cdot x+n\quad\right):\left(2\cdot x^2-x-6\right)=x^2+3\cdot x\\ -2\cdot x^4 \quad \mp x^3 \quad \mp 6\cdot x^2\\ \hline \qquad\quad +6\cdot x^3 \quad -11\cdot x^2+m\cdot x\\ \qquad\quad \pm 6\cdot x^3 \quad \mp 3\cdot x^2 \mp 18\cdot x\\ \hline \qquad\qquad\qquad -8\cdot x^2+\left(m+18\right)\cdot x+n\end{array}$$

Ponovno prvi član djeljenika, $-8 \cdot x^2 + (m + 18) \cdot x + n$, dijelimo prvim članom djelitelja, $2 \cdot x^2$.

$$-8x^2 : 2x^2 = -4.$$

Količnik $-4$ zatim pomnožimo djeliteljem, $2 \cdot x^2 - x - 6$, i umnožak potpisujemo pod odgovarajuće potencije djeljenika.

$$\left(\quad 2\cdot x^4+5\cdot x^3-17\cdot x^2+m\cdot x+n\quad\right):\left(2\cdot x^2-x-6\right)=x^2+3\cdot x-4$$

$$-2\cdot x^4\quad \mp x^3\quad \mp 6\cdot x^2$$

$$+6\cdot x^3\ -11\cdot x^2+m\cdot x$$

$$\pm 6\cdot x^3\ \mp 3\cdot x^2\ \mp 18\cdot x$$

$$-8\cdot x^2+(m+18)\cdot x+n$$

$$-8\cdot x^2\qquad +4\cdot x+24$$

Potpisanim članovima $-8\cdot x^2+4\cdot x+24$ promijenimo predznake i zbrojimo s odgovarajućim članovima djeljenika.

$$\left(\quad 2\cdot x^4+5\cdot x^3-17\cdot x^2+m\cdot x+n\quad\right):\left(2\cdot x^2-x-6\right)=x^2+3\cdot x-4$$

$$-2\cdot x^4\quad \mp x^3\quad \mp 6\cdot x^2$$

$$+6\cdot x^3\ -11\cdot x^2+m\cdot x$$

$$\pm 6\cdot x^3\ \mp 3\cdot x^2\ \mp 18\cdot x$$

$$-8\cdot x^2+(m+18)\cdot x+n$$

$$\mp 8\cdot x^2\qquad \pm 4\cdot x\pm 24$$

$$(m+18-4)\cdot x+n-24=(m+14)\cdot x+n-24\ \text{ ostatak}$$



Ostatak je polinom prvog stupnja r(x) = (m + 14) · x + n – 24.
Budući da su polinomi djeljivi, ostatak mora biti jednak nuli, tj. mora biti nul-polinom. Zbog teorema o nul-polinomu koeficijenti ostatka, polinoma r(x) = (m + 14) · x + n – 24 jednaki su nuli:

$$\left.\begin{array}{l}(m+14)\cdot x+n-24=0\\ \text{za svaki } x\in R\end{array}\right\}\Rightarrow\left.\begin{array}{l}m+14=0\\ n-24=0\end{array}\right\}\Rightarrow\left.\begin{array}{l}m=-14\\ n=24\end{array}\right\}.$$

Polinom $p(x) = 2\cdot x^4 + 5\cdot x^3 - 17\cdot x^2 + m\cdot x + n$ glasi:

$$p(x) = 2\cdot x^4 + 5\cdot x^3 - 17\cdot x^2 - 14\cdot x + 24.$$

**Vježba 042**

Odredi realne brojeve m i n tako da polinom $p(x) = 2\cdot x^4 + 5\cdot x^3 - 17\cdot x^2 + m\cdot x + 3\cdot n$ bude djeljiv sa polinomom $f(x) = 2\cdot x^2 - x - 6$.

**Rezultat:** m = – 14 , n = 8.

**Zadatak 043 (Zvonko, maturant)**

Odredi realne brojeve a i b tako da polinom $P(x) = x^3 + 2\cdot x^2 - a\cdot x + b$ pri dijeljenju s $Q_1(x) = x - 2$ daje ostatak 2, a pri dijeljenju s $Q_2(x) = x + 1$ ostatak 3.

**Rješenje 043**

Ponovimo!

Kada dijelimo polinom f(x) polinomom g(x) tražimo takav polinom q(x) da je

$$f(x) = g(x)\cdot q(x).$$

Ako takav polinom q(x) postoji, kažemo da je polinom f(x) djeljiv polinomom g(x). U općem slučaju bit će

$$f(x) = g(x) \cdot q(x) + r(x),$$

gdje je r(x) ostatak dijeljenja polinoma f(x) polinomom g(x). Ostatak r(x) je uvijek za bar jedan stupanj niži polinom od g(x).

Pretpostavimo da pri dijeljenju polinoma P(x) polinomom $Q_1(x)$ dobijemo količnik $q_1(x)$ i ostatak 2. To ovako zapisujemo:

$$P(x) = q_1(x) \cdot Q_1(x) + 2 \Rightarrow x^3 + 2 \cdot x^2 - a \cdot x + b = q_1(x) \cdot (x-2) + 2.$$

Pretpostavimo da pri dijeljenju polinoma P(x) polinomom $Q_2(x)$ dobijemo količnik $q_2(x)$ i ostatak 3. To ovako zapisujemo:

$$P(x) = q_2(x) \cdot Q_2(x) + 3 \Rightarrow x^3 + 2 \cdot x^2 - a \cdot x + b = q_2(x) \cdot (x+1) + 3.$$

U jednadžbu

$$x^3 + 2 \cdot x^2 - a \cdot x + b = q_1(x) \cdot (x-2) + 2$$

uvrstimo x = 2 da se x – 2 poništi:

$$2^3 + 2 \cdot 2^2 - a \cdot 2 + b = q_1(2) \cdot (2-2) + 2 \Rightarrow 8 + 8 - 2 \cdot a + b = q_1(2) \cdot 0 + 2 \Rightarrow 16 - 2 \cdot a + b = 0 + 2 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 16 - 2 \cdot a + b = 2 \Rightarrow -2 \cdot a + b = 2 - 16 \Rightarrow -2 \cdot a + b = -14.$$

U jednadžbu

$$x^3 + 2 \cdot x^2 - a \cdot x + b = q_2(x) \cdot (x+1) + 3$$

uvrstimo x = – 1 da se x + 1 poništi:

$$(-1)^3 + 2 \cdot (-1)^2 - a \cdot (-1) + b = q_2(-1) \cdot (-1+1) + 3 \Rightarrow -1 + 2 + a + b = q_2(-1) \cdot 0 + 3 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 1 + a + b = 0 + 3 \Rightarrow 1 + a + b = 3 \Rightarrow a + b = 3 - 1 \Rightarrow a + b = 2.$$

Iz sustava jednadžbi dobiju se vrijednosti za a i b:

$$\left.\begin{matrix} -2 \cdot a + b = -14 \\ a + b = 2 \end{matrix}\right\} \Rightarrow \begin{bmatrix} \text{metoda suprotnih} \\ \text{koeficijenata} \end{bmatrix} \Rightarrow \left.\begin{matrix} -2 \cdot a + b = -14 \; / \cdot (-1) \\ a + b = 2 \end{matrix}\right\} \Rightarrow \left.\begin{matrix} 2 \cdot a - b = 14 \\ a + b = 2 \end{matrix}\right\} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 3 \cdot a = 16 \; /: 3 \Rightarrow a = \frac{16}{3} \Rightarrow \left.\begin{matrix} a = \frac{16}{3} \\ a + b = 2 \end{matrix}\right\} \Rightarrow \frac{16}{3} + b = 2 \Rightarrow b = 2 - \frac{16}{3} \Rightarrow b = -\frac{10}{3}.$$



**Vježba 043**

Odredi realne brojeve a i b tako da polinom $P(x) = x^3 + 2 \cdot x^2 - a \cdot x + b$ pri dijeljenju s $Q_1(x) = x - 2$ daje ostatak 1, a pri dijeljenju s $Q_2(x) = x + 1$ ostatak 4.

**Rezultat:** a = 6 , b = – 3.

**Zadatak 044 (Iva, gimnazija)**

Polinom $f(x) = 2 \cdot x^2 - 3 \cdot x + 5$ razvij po potencijama od x – 2.

**Rješenje 044**

Ponovimo!

Poučak o jednakosti polinoma:

Dva polinoma jednaka su ako i samo ako su istog stupnja i ako su im koeficijenti uz iste potencije jednaki.

$$(a-b)^2 = a^2 - 2 \cdot a \cdot b + b^2.$$

Budući da je zadani polinom drugog stupnja, razvoj po potencijama od x – 2 glasi:

$$2 \cdot x^2 - 3 \cdot x + 5 = A \cdot (x-2)^2 + B \cdot (x-2) + C.$$

Potrebno je odrediti koeficijente A, B i C:

$$2\cdot x^2-3\cdot x+5=A\cdot(x-2)^2+B\cdot(x-2)+C \Rightarrow 2\cdot x^2-3\cdot x+5=A\cdot\left(x^2-4\cdot x+4\right)+B\cdot(x-2)+C \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 2\cdot x^2-3\cdot x+5=A\cdot x^2-4\cdot A\cdot x+4\cdot A+B\cdot x-2\cdot B+C \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 2\cdot x^2-3\cdot x+5=A\cdot x^2+(-4\cdot A+B)\cdot x+(4\cdot A-2\cdot B+C).$$

Prema poučku o jednakosti polinoma dobije se sustav jednadžbi:

$$\left.\begin{array}{l} A=2 \\ -4\cdot A+B=-3 \\ 4\cdot A-2\cdot B+C=5 \end{array}\right\} \Rightarrow \left.\begin{array}{l} -4\cdot 2+B=-3 \\ 4\cdot 2-2\cdot B+C=5 \end{array}\right\} \Rightarrow \left.\begin{array}{l} -8+B=-3 \\ 8-2\cdot B+C=5 \end{array}\right\} \Rightarrow \left.\begin{array}{l} B=-3+8 \\ 8-2\cdot B+C=5 \end{array}\right\} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \left.\begin{array}{l} B=5 \\ 8-2\cdot B+C=5 \end{array}\right\} \Rightarrow 8-2\cdot 5+C=5 \Rightarrow 8-10+C=5 \Rightarrow C=5-8+10 \Rightarrow C=7.$$

Rezultat glasi:

$$2\cdot x^2-3\cdot x+5=2\cdot(x-2)^2+5\cdot(x-2)+7.$$

**Vježba 044**

Polinom $f(x) = 3 \cdot x^2 + 8 \cdot x$ razvij po potencijama od $x + 1$.

**Rezultat:** $3\cdot x^2+8\cdot x=3\cdot(x+1)^2+2\cdot(x+1)-5.$

**Zadatak 045 (Dragan, srednja škola)**

Ako je polinom $p(x) = x^3 + a \cdot x^2 + b \cdot x + 2$ djeljiv polinomom $q(x) = x^2 - 1$, izračunaj $a^2 - b^2$.



**Rješenje 045**

Ponovimo!

Poučak o jednakosti polinoma:

Dva polinoma jednaka su ako i samo ako su istog stupnja i ako su im koeficijenti uz iste potencije jednaki.

Kada dijelimo polinom f(x) polinomom g(x) tražimo takav polinom q(x) da je

$$f(x) = g(x) \cdot q(x).$$

Ako takav polinom q(x) postoji, kažemo da je polinom f(x) djeljiv polinomom g(x). U općem slučaju bit će

$$f(x) = g(x) \cdot q(x) + r(x),$$

gdje je r(x) ostatak dijeljenja polinoma f(x) polinomom g(x). Ostatak r(x) je uvijek za bar jedan stupanj niži polinom od g(x).

1.inačica

Pri dijeljenju polinoma $p(x) = x^3 + a \cdot x^2 + b \cdot x + 2$ polinomom $q(x) = x^2 - 1$ dobijemo količnik, polinom prvog stupnja $x + c$ pa vrijedi:

$$x^3+a\cdot x^2+b\cdot x+2=\left(x^2-1\right)\cdot(x+c) \Rightarrow x^3+a\cdot x^2+b\cdot x+2=x^3+c\cdot x^2-x-c \Rightarrow$$

$$\Rightarrow x^3+a\cdot x^2+b\cdot x+2=x^3+c\cdot x^2-x-c \Rightarrow a\cdot x^2+b\cdot x+2=c\cdot x^2-x-c \Rightarrow \begin{bmatrix}\text{jednakost} \\ \text{polinoma}\end{bmatrix} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \left.\begin{array}{l} a=c \\ b=-1 \\ 2=-c \end{array}\right\} \Rightarrow \left.\begin{array}{l} a=c \\ b=-1 \\ c=-2 \end{array}\right\} \Rightarrow \left.\begin{array}{l} a=-2 \\ b=-1 \end{array}\right\} \Rightarrow a^2-b^2=(-2)^2-(-1)^2 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow a^2-b^2=4-1 \Rightarrow a^2-b^2=3.$$

2.inačica

Pri dijeljenju polinoma p(x) = $x^3$ + a · $x^2$ + b · x + 2 polinomom q(x) = $x^2$ – 1 dobijemo količnik, polinom prvog stupnja x + c pa vrijedi:

$$x^3+a\cdot x^2+b\cdot x+2=\left(x^2-1\right)\cdot(x+c).$$

Računamo za koje vrijednosti od x se polinom q(x) = $x^2$ – 1 poništi, tj. koje su njegove nultočke:

$$x^2-1=0\ \Rightarrow\ x^2=1\ /\sqrt{\ }\ \Rightarrow\ \left.\begin{matrix}x_1=1\\x_2=-1\end{matrix}\right\}.$$

Sada je:

- za x = 1

$$x^3+a\cdot x^2+b\cdot x+2=\left(x^2-1\right)\cdot(x+c)\ \Rightarrow\ 1^3+a\cdot 1^2+b\cdot 1+2=\left(1^2-1\right)\cdot(1+c)\ \Rightarrow$$
$$\Rightarrow\ 1+a+b+2=(1-1)\cdot(1+c)\ \Rightarrow\ 1+a+b+2=0\cdot(1+c)\ \Rightarrow\ 1+a+b+2=0\ \Rightarrow$$
$$\Rightarrow\ a+b=-1-2\ \Rightarrow\ a+b=-3.$$

- za x = – 1

$$x^3+a\cdot x^2+b\cdot x+2=\left(x^2-1\right)\cdot(x+c)\ \Rightarrow\ (-1)^3+a\cdot(-1)^2+b\cdot(-1)+2=\left((-1)^2-1\right)\cdot(-1+c)\ \Rightarrow$$
$$\Rightarrow\ -1+a-b+2=(1-1)\cdot(-1+c)\ \Rightarrow\ -1+a-b+2=0\cdot(1+c)\ \Rightarrow\ -1+a-b+2=0\ \Rightarrow$$
$$\Rightarrow\ -1+a-b+2=1-2\ \Rightarrow\ a-b=-1.$$

Riješimo sustav jednadžbi:

$$\left.\begin{matrix}a+b=-3\\a-b=-1\end{matrix}\right\}\ \Rightarrow\ \left[\begin{matrix}\text{metoda suprotnih}\\\text{koeficijenata}\end{matrix}\right]\ \Rightarrow\ 2\cdot a=-4\ /:2\ \Rightarrow\ a=-2\ \Rightarrow\ \left.\begin{matrix}a=-2\\a+b=-3\end{matrix}\right\}\ \Rightarrow$$
$$\Rightarrow\ -2+b=-3\ \Rightarrow\ b=-3+2\ \Rightarrow\ b=-1.$$

Zato je

$$\left.\begin{matrix}a=-2\\b=-1\end{matrix}\right\}\ \Rightarrow\ a^2-b^2=(-2)^2-(-1)^2\ \Rightarrow\ a^2-b^2=4-1\ \Rightarrow\ a^2-b^2=3.$$



**Vježba 045**

Ako je polinom p(x) = $x^3$ + a · $x^2$ + b · x + 2 djeljiv polinomom q(x) = $x^2$ – 1, izračunaj $a^2$ + $b^2$.

**Rezultat:** 5.

**Zadatak 046 (Dino, maturant)**

Neka su x i y realni brojevi. Koju najmanju vrijednost može imati izraz z = $x^2$ + $y^2$ – 6 · x + 4 · y + 24?

**Rješenje 046**

Ponovimo!

$$a^2+2\cdot a\cdot b+b^2=(a+b)^2\quad,\quad a^2-2\cdot a\cdot b+b^2=(a-b)^2\quad,\quad x^2\ge 0\ \text{za svaki}\ x.$$
$$(x-y)^2=0\ \Rightarrow\ x-y=0\ \Rightarrow\ x=y\quad,\quad (x+y)^2=0\ \Rightarrow\ x+y=0\ \Rightarrow\ x=-y.$$

$$z=x^2+y^2-6\cdot x+4\cdot y+24\ \Rightarrow\ z=x^2-6\cdot x+y^2+4\cdot y+24.$$

Najprije nadopunimo izraze $x^2$ – 6 · x i $y^2$ + 4 · y na pune kvadrate.

- Nadopunjavamo izraz $x^2$ – 6 · x na puni kvadrat.

1.inačica

Rabimo formulu

$$a^2 - 2 \cdot a \cdot b + b^2 = (a-b)^2.$$

Sada je

$$x^2 - 6 \cdot x = x^2 - 2 \cdot 3 \cdot x = \left[\begin{array}{l}\text{izraz ne smije mijenjati vrijednost} \\ \text{pa ga nadopunimo sa } +3^2 - 3^2\end{array}\right] = x^2 - 2 \cdot 3 \cdot x + 3^2 - 3^2 =$$

$$= \left(x^2 - 2 \cdot 3 \cdot x + 3^2\right) - 3^2 = (x-3)^2 - 3^2 = (x-3)^2 - 9.$$

2.inačica

Rabimo formulu

$$a^2 - 2 \cdot a \cdot b + b^2 = (a-b)^2.$$

Sada je

$$\left.\begin{array}{l} x^2 - 6 \cdot x \\ a^2 - 2 \cdot a \cdot b + b^2 \end{array}\right\} \Rightarrow \left.\begin{array}{l} x^2 - 6 \cdot x \\ a^2 - 2 \cdot a \cdot b + b^2 \end{array}\right\} \Rightarrow \left.\begin{array}{l} a = x \\ 2 \cdot a \cdot b = 6 \cdot x \end{array}\right\} \Rightarrow 2 \cdot x \cdot b = 6 \cdot x \; / \cdot \frac{1}{2 \cdot x} \Rightarrow b = 3.$$

Budući da izraz $x^2 - 6 \cdot x$ ne smije mijenjati vrijednost, nadopunimo ga sa $+ 3^2 - 3^2$ pa dalje slijedi:

$$\left.\begin{array}{l} x^2 - 6 \cdot x \\ a^2 - 2 \cdot a \cdot b + b^2 = (a-b)^2 \end{array}\right\} \Rightarrow \left.\begin{array}{l} x^2 - 6 \cdot x + 3^2 - 3^2 \\ a^2 - 2 \cdot a \cdot b + b^2 = (a-b)^2 \end{array}\right\} \Rightarrow \left.\begin{array}{l} \left(x^2 - 6 \cdot x + 3^2\right) - 3^2 \\ a^2 - 2 \cdot a \cdot b + b^2 = (a-b)^2 \end{array}\right\} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \left(x^2 - 2 \cdot 3 \cdot x + 3^2\right) - 3^2 \Rightarrow (x-3)^2 - 3^2 \Rightarrow (x-3)^2 - 9.$$

- Nadopunjavamo izraz $y^2 + 4 \cdot y$ na puni kvadrat.

1.inačica

Rabimo formulu

$$a^2 + 2 \cdot a \cdot b + b^2 = (a+b)^2.$$

Sada je

$$y^2 + 4 \cdot y = y^2 + 2 \cdot 2 \cdot y = \left[\begin{array}{l}\text{izraz ne smije mijenjati vrijednost} \\ \text{pa ga nadopunimo sa } +2^2 - 2^2\end{array}\right] = y^2 + 2 \cdot 2 \cdot y + 2^2 - 2^2 =$$

$$= \left(y^2 + 2 \cdot 2 \cdot y + 2^2\right) - 2^2 = (y+2)^2 - 2^2 = (y+2)^2 - 4.$$

2.inačica

Rabimo formulu

$$a^2 + 2 \cdot a \cdot b + b^2 = (a+b)^2.$$

Sada je

$$\left.\begin{array}{l} y^2 + 4 \cdot y \\ a^2 + 2 \cdot a \cdot b + b^2 \end{array}\right\} \Rightarrow \left.\begin{array}{l} y^2 + 4 \cdot y \\ a^2 + 2 \cdot a \cdot b + b^2 \end{array}\right\} \Rightarrow \left.\begin{array}{l} a = y \\ 2 \cdot a \cdot b = 4 \cdot y \end{array}\right\} \Rightarrow 2 \cdot y \cdot b = 4 \cdot y \; / \cdot \frac{1}{2 \cdot y} \Rightarrow b = 2.$$

Budući da izraz $y^2 + 4 \cdot y$ ne smije mijenjati vrijednost, nadopunimo ga sa $+ 2^2 - 2^2$ pa dalje slijedi:

$$\left.\begin{array}{l} y^2 + 4 \cdot y \\ a^2 + 2 \cdot a \cdot b + b^2 = (a+b)^2 \end{array}\right\} \Rightarrow \left.\begin{array}{l} y^2 + 4 \cdot y + 2^2 - 2^2 \\ a^2 + 2 \cdot a \cdot b + b^2 = (a+b)^2 \end{array}\right\} \Rightarrow \left.\begin{array}{l} \left(y^2 + 4 \cdot y + 2^2\right) - 2^2 \\ a^2 + 2 \cdot a \cdot b + b^2 = (a+b)^2 \end{array}\right\} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \left(y^2 + 2 \cdot 2 \cdot y + 2^2\right) - 2^2 \Rightarrow (y+2)^2 - 2^2 \Rightarrow (y+2)^2 - 4.$$

Nakon sređivanja izraz glasi:

$$z = x^2 + y^2 - 6 \cdot x + 4 \cdot y + 24 \Rightarrow z = x^2 - 6 \cdot x + y^2 + 4 \cdot y + 24 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow z = (x-3)^2 - 9 + (y+2)^2 - 4 + 24 \Rightarrow z = (x-3)^2 + (y+2)^2 + 11.$$

Najmanju vrijednost izraz poprima ako su izrazi u zagradama jednaki nuli:

$$\left.\begin{matrix} x-3=0 \\ y+2=0 \end{matrix}\right\} \Rightarrow \left.\begin{matrix} x=3 \\ y=-2 \end{matrix}\right\}.$$

Tada je njegova vrijednost jednaka:

$$z = (3-3)^2 + (-2+2)^2 + 11 \Rightarrow z = 0 + 9 + 11 \Rightarrow z = 11.$$

**Vježba 046**

Neka su x i y realni brojevi. Koju najmanju vrijednost može imati izraz $z = x^2 + y^2 - 4 \cdot x - 6 \cdot y + 23$?

**Rezultat:** 10.

**Zadatak 047 (Nicky, maturantica)**

Zadan je polinom $f(x) = (5 \cdot x^2 - 7 \cdot x + 1)^{2009}$. Napišemo li taj polinom u kanonskom obliku, tj. $f(x) = a_n \cdot x^n + a_{n-1} \cdot x^{n-1} + \ldots + a_1 \cdot x + a_0$ tada će zbroj svih koeficijenata tog polinoma biti jednak:

$$A.\ 5^{4018} - 7^{2009} + 1 \qquad B.\ 5^{2009} + 7^{2009} \qquad C.\ 1 \qquad D.\ -1$$

**Rješenje 047**

Ponovimo!

$$(-1)^{2 \cdot n - 1} = -1.$$

Zbroj svih koeficijenata polinoma u kanonskom obliku

$$f(x) = a_n \cdot x^n + a_{n-1} \cdot x^{n-1} + \ldots + a_1 \cdot x + a_0$$

glasi:

$$s = a_n + a_{n-1} + \ldots + a_1 + a_0.$$

Uočimo da za polinom

$$f(x) = a_n \cdot x^n + a_{n-1} \cdot x^{n-1} + \ldots + a_1 \cdot x + a_0$$

vrijedi

$$f(1) = a_n \cdot 1^n + a_{n-1} \cdot 1^{n-1} + \ldots + a_1 \cdot 1 + a_0 \Rightarrow f(1) = a_n + a_{n-1} + \ldots + a_1 + a_0.$$

Zato je

$$s = f(1).$$

Dakle, zbroj svih koeficijenata polinoma dobijemo ako za argument uzmemo 1, tj. x = 1.
Zbroj koeficijenata zadanog polinoma jednak je:

$$\left.\begin{matrix} f(x) = \left(5 \cdot x^2 - 7 \cdot x + 1\right)^{2009} \\ s = f(1) \end{matrix}\right\} \Rightarrow s = \left(5 \cdot 1^2 - 7 \cdot 1 + 1\right)^{2009} \Rightarrow s = (5 - 7 + 1)^{2009} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow s = (-1)^{2009} \Rightarrow s = -1.$$

Odgovor je pod D.

**Vježba 047**

Zadan je polinom $f(x) = (6 \cdot x^2 - 7 \cdot x + 1)^{2009}$. Napišemo li taj polinom u kanonskom obliku, tj. $f(x) = a_n \cdot x^n + a_{n-1} \cdot x^{n-1} + \ldots + a_1 \cdot x + a_0$ tada će zbroj svih koeficijenata tog polinoma biti jednak:

$$A.\ 0 \qquad B.\ 2 \qquad C.\ 1 \qquad D.\ -1$$

**Rezultat:** A.

**Zadatak 048 (Maturanti, HTT)**

Koliki je zbroj nultočaka polinoma $f(x) = (x+1) \cdot (x-2) \cdot (x-1-2 \cdot i) \cdot (x-1+2 \cdot i)$?

**Rješenje 048**

Ponovimo!

Funkcija oblika

$$f_n(x) = a_n \cdot x^n + a_{n-1} \cdot x^{n-1} + a_{n-2} \cdot x^{n-2} + \ \ldots \ + a_2 \cdot x^2 + a_1 \cdot x + a_0$$

zove se polinom n – tog stupnja.

Broj $x_0$ je nultočka polinoma $f_n(x)$ ako je $f_n(x_0) = 0.$ Općenito vrijedi da polinom n – tog stupnja ima n nultočaka (one mogu biti realni ili kompleksni brojevi). Polinom

$$f_n(x) = a_n \cdot x^n + a_{n-1} \cdot x^{n-1} + a_{n-2} \cdot x^{n-2} + \ \ldots \ + a_2 \cdot x^2 + a_1 \cdot x + a_0$$

možemo faktorizirati:

$$f_n(x) = a_n \cdot (x-x_1) \cdot (x-x_2) \cdot (x-x_3) \cdot \ \ldots \ \cdot (x-x_n),$$

gdje su $x_1, x_2, x_3, \ldots, x_n$ nultočke polinoma.

Uočimo da je zadani polinom četvrtog stupnja pa ima četiri nultočke.



$$\left. \begin{array}{l} f(x) = (x+1) \cdot (x-2) \cdot (x-1-2 \cdot i) \cdot (x-1+2 \cdot i) \\ f_4(x) = (x-x_1) \cdot (x-x_2) \cdot (x-x_3) \cdot (x-x_4) \end{array} \right\} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \left. \begin{array}{l} f(x) = (x-(-1)) \cdot (x-2) \cdot (x-(1+2 \cdot i)) \cdot (x-(1-2 \cdot i)) \\ f_4(x) = (x-x_1) \cdot (x-x_2) \cdot (x-x_3) \cdot (x-x_4) \end{array} \right\} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \left. \begin{array}{l} f(x) = (x-(-1)) \cdot (x-2) \cdot (x-(1+2 \cdot i)) \cdot (x-(1-2 \cdot i)) \\ f_4(x) = (x-x_1) \cdot (x-x_2) \cdot (x-x_3) \cdot (x-x_4) \end{array} \right\} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \left. \begin{array}{l} x_1 = -1 \\ x_2 = 2 \\ x_3 = 1+2 \cdot i \\ x_4 = 1-2 \cdot i \end{array} \right\}.$$

Zbroj nultočaka iznosi:

$$x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = -1+2+1+2 \cdot i+1-2 \cdot i = -1+2+1+2 \cdot i+1-2 \cdot i = 3.$$

**Vježba 048**

Koliki je zbroj nultočaka polinoma $f(x) = (x+1) \cdot (x-2) \cdot (x-1-5 \cdot i) \cdot (x-1+5 \cdot i)$?

**Rezultat:** 3.

**Zadatak 049 (Marina, gimnazija)**

Skrati razlomak dijeljenjem polinoma u brojniku i nazivniku: $\dfrac{x^2 - x + 1}{x^5 + x - 1}.$

**Rješenje 049**

Ponovimo!
Funkcija oblika

$$f_n(x) = a_n \cdot x^n + a_{n-1} \cdot x^{n-1} + a_{n-2} \cdot x^{n-2} + \ ... \ + a_2 \cdot x^2 + a_1 \cdot x + a_0$$

zove se polinom n – tog stupnja. Eksponent n naziva se stupanj polinoma. Koeficijenti polinoma su realni brojevi $a_n$, $a_{n-1}$, $a_{n-2}$, ... , $a_2$, $a_1$, $a_0$. Koeficijent $a_n \neq 0$ naziva se vodeći koeficijent.
Kada dijelimo polinom f(x) polinomom g(x) tražimo takav polinom q(x) da je

$$f(x) = g(x) \cdot q(x).$$

Ako takav polinom q(x) postoji, kažemo da je polinom f(x) djeljiv polinomom g(x). U općem slučaju bit će

$$f(x) = g(x) \cdot q(x) + r(x),$$

gdje je r(x) ostatak dijeljenja polinoma f(x) polinomom g(x). Ostatak r(x) je uvijek za bar jedan stupanj niži polinom od g(x).
Polinom u nazivniku možemo podijeliti polinomom u brojniku jer je većeg stupnja.
Budući da u polinomu

$$x^5 + x - 1$$

nedostaju članovi uz potencije $x^4$, $x^3$ i $x^2$, njihovi koeficijenti jednaki su nuli. U polinomu ćemo ostaviti prostor na odgovarajućem mjestu radi lakšeg potpisivanja. Podijelit ćemo polinome. Da bismo našli količnik, odredit ćemo najprije njegov prvi član. Njega dobijemo kao količnik prvih članova ovih dvaju polinoma.

$$x^5 : x^2 = x^3.$$

Prvi član količnika bit će $x^3$. S tim članom pomnoži se djelitelj i rezultat oduzme od djeljenika.
Rezultat zapisujemo u obliku tablice.
Promatramo dijeljenje polinoma

$$(x^5 \qquad\qquad + x - 1) : (x^2 - x + 1).$$

Polinome koje dijelimo pišemo po padajućim potencijama. Dijelimo prvi član djeljenika, $x^5$, prvim članom djelitelja, $x^2$.

$$x^5 : x^2 = x^3.$$

Količnik $x^3$ zatim pomnožimo djeliteljem, $x^2 - x + 1$ i umnožak potpisujemo pod odgovarajuće potencije djeljenika.

$$\begin{array}{l} \left( x^5 \qquad\qquad + x - 1 \right) : \left( x^2 - x + 1 \right) = x^3 \\ \underline{+x^5 - x^4 + x^3} \end{array}$$

Potpisanim članovima $+x^5 - x^4 + x^3$ promijenimo predznake i zbrojimo s odgovarajućim članovima djeljenika. Spuštamo sljedeći član djeljenika, x.

$$\begin{array}{l} \left( x^5 \qquad\qquad + x - 1 \right) : \left( x^2 - x + 1 \right) = x^3 \\ \underline{\pm x^5 \mp x^4 \pm x^3} \\ \qquad x^4 - x^3 \quad + x \end{array}$$

Ponovno prvi član djeljenika, $x^4 - x^3 + x$ dijelimo prvim članom djelitelja, $x^2 - x + 1$.

$$x^4 : x^2 = x^2.$$

Količnik $x^2$ zatim pomnožimo djeliteljem, $x^2 - x + 1$, i umnožak potpisujemo pod odgovarajuće potencije djeljenika.

$$
\begin{array}{l}
\left(x^5 \qquad\qquad\qquad + x - 1\right) : \left(x^2 - x + 1\right) = x^3 + x^2 \\
\underline{\pm x^5 \mp x^4 \pm x^3} \\
\qquad x^4 - x^3 \qquad\qquad + x \\
\qquad \underline{x^4 - x^3 + x^2}
\end{array}
$$

Potpisanim članovima $x^4 - x^3 + x^2$ promijenimo predznake i zbrojimo s odgovarajućim članovima djeljenika. Spuštamo sljedeći član djeljenika, – 1.

$$
\begin{array}{l}
\left(x^5 \qquad\qquad\qquad + x - 1\right) : \left(x^2 - x + 1\right) = x^3 + x^2 \\
\underline{\pm x^5 \mp x^4 \pm x^3} \\
\qquad x^4 - x^3 \qquad\qquad + x \\
\qquad \underline{\pm x^4 \mp x^3 \pm x^2} \\
\qquad\qquad\qquad - x^2 + x - 1
\end{array}
$$

Ponovno prvi član djeljenika, $-x^2 + x - 1$ dijelimo prvim članom djelitelja, $x^2 - x + 1$.

$$-x^2 : x^2 = -1.$$

Količnik – 1 zatim pomnožimo djeliteljem, $x^2 - x + 1$, i umnožak potpisujemo pod odgovarajuće potencije djeljenika.



$$
\begin{array}{l}
\left(x^5 \qquad\qquad\qquad + x - 1\right) : \left(x^2 - x + 1\right) = x^3 + x^2 - 1 \\
\underline{\pm x^5 \mp x^4 \pm x^3} \\
\qquad x^4 - x^3 \qquad\qquad + x \\
\qquad \underline{\pm x^4 \mp x^3 \pm x^2} \\
\qquad\qquad\qquad - x^2 + x - 1 \\
\qquad\qquad\qquad \underline{-x^2 + x - 1}
\end{array}
$$

Potpisanim članovima $-x^2 + x - 1$ promijenimo predznake i zbrojimo s odgovarajućim članovima djeljenika.

$$
\begin{array}{l}
\left(x^5 \qquad\qquad\qquad + x - 1\right) : \left(x^2 - x + 1\right) = x^3 + x^2 - 1 \\
\underline{\pm x^5 \mp x^4 \pm x^3} \\
\qquad x^4 - x^3 \qquad\qquad + x \\
\qquad \underline{\pm x^4 \mp x^3 \pm x^2} \\
\qquad\qquad\qquad - x^2 + x - 1 \\
\qquad\qquad\qquad \underline{\mp x^2 \pm x \mp 1} \\
\qquad\qquad\qquad\qquad 0
\end{array}
$$

Ostatak dijeljenja je nula. Dakle, polinom $x^5 + x - 1$ djeljiv je polinomom $x^2 - x + 1$ pa možemo zapisati:

$$x^5+x-1=\left(x^2-x+1\right)\cdot\left(x^3+x^2-1\right).$$

Sada kratimo razlomak:

$$\frac{x^2-x+1}{x^5+x-1}=\frac{x^2-x+1}{\left(x^2-x+1\right)\cdot\left(x^3+x^2-1\right)}=\frac{x^2-x+1}{\left(x^2-x+1\right)\cdot\left(x^3+x^2-1\right)}=\frac{1}{x^3+x^2-1}.$$

**Vježba 049**

Skrati razlomak dijeljenjem polinoma u brojniku i nazivniku: $\frac{x^4-x^3+x^2+2}{x^2-2\cdot x+2}$.

**Rezultat:** $x^2+x+1.$

**Zadatak 050 (Boris, gimnazija)**

Odredite realne brojeve a i b tako da polinom f bude djeljiv polinomom g, ako je

$f(x)=x^3+2\cdot x^2+a\cdot x+b$ , $g(x)=x^2+x+a\cdot b.$

**Rješenje 050**

Ponovimo!

Funkcija oblika

$$f_n(x)=a_n\cdot x^n+a_{n-1}\cdot x^{n-1}+a_{n-2}\cdot x^{n-2}+\ ...\ +a_2\cdot x^2+a_1\cdot x+a_0$$

zove se polinom n – tog stupnja. Eksponent n naziva se stupanj polinoma. Koeficijenti polinoma su realni brojevi $a_n$, $a_{n-1}$, $a_{n-2}$, ... , $a_2$, $a_1$, $a_0$. Koeficijent $a_n \neq 0$ naziva se vodeći koeficijent.
Kada dijelimo polinom f(x) polinomom g(x) tražimo takav polinom q(x) da je

$$f(x) = g(x)\cdot q(x).$$

Ako takav polinom q(x) postoji, kažemo da je polinom f(x) djeljiv polinomom g(x). U općem slučaju bit će

$$f(x) = g(x)\cdot q(x) + r(x),$$

gdje je r(x) ostatak dijeljenja polinoma f(x) polinomom g(x). Ostatak r(x) je uvijek za bar jedan stupanj niži polinom od g(x).
Da bi umnožak bio jednak nuli, dovoljno je da jedan faktor bude jednak nuli.

$$a\cdot b=0\ \Leftrightarrow\ a=0\ \text{ili}\ b=0\ \text{ili}\ a=b=0.$$

Podijelit ćemo polinome. Da bismo našli količnik, odredit ćemo najprije njegov prvi član. Njega dobijemo kao količnik prvih članova ovih dvaju polinoma.

$$x^3 : x^2 = x.$$

Prvi član količnika bit će x. S tim članom pomnoži se djelitelj i rezultat oduzme od djeljenika. Rezultat zapisujemo u obliku tablice.
Promatramo dijeljenje polinoma

$$\left(x^3+2\cdot x^2+a\cdot x+b\right):\left(x^2+x+a\cdot b\right).$$

Polinome koje dijelimo pišemo po padajućim potencijama. Dijelimo prvi član djeljenika, $x^3$, prvim članom djelitelja, $x^2$.

$$x^3 : x^2 = x.$$

Količnik x zatim pomnožimo djeliteljem, $x^2 + x + a\cdot b$ i umnožak potpisujemo pod odgovarajuće potencije djeljenika.

$$\begin{array}{l}\left(x^3+2\cdot x^2+a\cdot x+b\right):\left(x^2+x+a\cdot b\right)=x\\ \underline{x^3+\ \ x^2+a\cdot b\cdot x}\end{array}$$

Potpisanim članovima $x^3 + x + a \cdot b \cdot x$ promijenimo predznake i zbrojimo s odgovarajućim članovima djeljenika. Spuštamo sljedeći član djeljenika, b.

$$\begin{array}{l}
\left(x^3 + 2\cdot x^2 + a\cdot x + b\right) : \left(x^2 + x + a\cdot b\right) = x + 1 \\
\underline{\pm x^3 \pm x^2 \pm a\cdot b\cdot x} \\
\qquad x^2 + (a - a\cdot b)\cdot x + b
\end{array}$$

Ponovno prvi član djeljenika, $x^2 + (a - a \cdot b) \cdot x + b$ dijelimo prvim članom djelitelja, $x^2 + x + a \cdot b$.

$$x^2 : x^2 = 1.$$

Količnik 1 zatim pomnožimo djeliteljem, $x^2 + x + a \cdot b$, i umnožak potpisujemo pod odgovarajuće potencije djeljenika.

$$\begin{array}{l}
\left(x^3 + 2\cdot x^2 + a\cdot x + b\right) : \left(x^2 + x + a\cdot b\right) = x + 1 \\
\underline{\pm x^3 \pm x^2 \pm a\cdot b\cdot x} \\
\qquad x^2 + (a - a\cdot b)\cdot x + b \\
\qquad \underline{x^2 + x \qquad\qquad + a\cdot b}
\end{array}$$

Potpisanim članovima $x^2 + x + a \cdot b$ promijenimo predznake i zbrojimo s odgovarajućim članovima djeljenika.

$$\begin{array}{l}
\left(x^3 + 2\cdot x^2 + a\cdot x + b\right) : \left(x^2 + x + a\cdot b\right) = x + 1 \\
\underline{\pm x^3 \pm x^2 \pm a\cdot b\cdot x} \\
\qquad x^2 + (a - a\cdot b)\cdot x + b \\
\qquad \underline{-x^2 \pm x \qquad\qquad \pm a\cdot b} \\
\qquad\quad (a - a\cdot b - 1)\cdot x + b - a\cdot b
\end{array}$$



Ostatak dijeljenja je polinom prvog stupnja $(a - a \cdot b - 1) \cdot x + b - a \cdot b$. Da bi ostatak bio jednak nuli za svaki x, mora biti ispunjeno:

$$\left.\begin{array}{l} a - a\cdot b - 1 = 0 \\ b - a\cdot b = 0 \end{array}\right\}.$$

Rješavamo sustav jednadžbi.

$$\left.\begin{array}{l} a - a\cdot b - 1 = 0 \\ b - a\cdot b = 0 \end{array}\right\} \Rightarrow \left.\begin{array}{l} a - a\cdot b = 1 \\ b - a\cdot b = 0 \end{array}\right\} \Rightarrow \left.\begin{array}{l} a - a\cdot b = 1 \\ b\cdot(1 - a) = 0 \end{array}\right\} \Rightarrow \left.\begin{array}{l} a - a\cdot b = 1 \\ b = 0 \\ 1 - a = 0 \end{array}\right\}.$$

1.slučaj

$$\left.\begin{array}{l} a - a\cdot b = 1 \\ b = 0 \end{array}\right\} \Rightarrow a - a\cdot 0 = 1 \Rightarrow a - 0 = 1 \Rightarrow a = 1 \Rightarrow (a, b) = (1, 0).$$

2.slučaj

$$\left.\begin{array}{l} a - a\cdot b = 1 \\ 1 - a = 0 \end{array}\right\} \Rightarrow \left.\begin{array}{l} a - a\cdot b = 1 \\ -a = -1 \end{array}\right\} \Rightarrow \left.\begin{array}{l} a - a\cdot b = 1 \\ -a = -1 \;/\cdot(-1) \end{array}\right\} \Rightarrow \left.\begin{array}{l} a - a\cdot b = 1 \\ a = 1 \end{array}\right\} \Rightarrow 1 - 1\cdot b = 1 \Rightarrow 1 - b = 1 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow -b = 1 - 1 \Rightarrow -b = 0 \Rightarrow b = 0 \Rightarrow (a, b) = (1, 0).$$

**Vježba 050**

Odredite realne brojeve a i b tako da polinom f bude djeljiv polinomom g, ako je

$f(x) = x^3 + 5 \cdot x^2 + a \cdot x + b \;\; , \;\; g(x) = x + 3.$

**Rezultat:** a = 7 , b = 3.

**Zadatak 051 (Nina, gimnazija)**

Čemu je, nakon sređivanja, jednak izraz: $(2 \cdot x - 1) \cdot (x - 3) \cdot (x + 2)$?

$$A.\ 2 \cdot x^3 - 3 \cdot x^2 - 11 \cdot x + 6 \quad , \quad B.\ 2 \cdot x^3 - 3 \cdot x^2 + 11 \cdot x + 6$$

$$C.\ 2 \cdot x^3 - x^2 - 11 \cdot x - 6 \quad , \quad D.\ 2 \cdot x^3 - x^2 + 13 \cdot x - 6$$

**Rješenje 051**

Ponovimo!

$$a^1 = a \quad , \quad a^m \cdot a^n = a^{m+n}.$$

Množenje zagrada:

$$(a + b) \cdot (c + d) = a \cdot c + a \cdot d + b \cdot c + b \cdot d.$$

Svaki član prve zagrade pomnožimo svakim članom druge zagrade.

1.inačica

Najprije pomnožimo prve dvije zagrade međusobno.

$$(2 \cdot x - 1) \cdot (x - 3) \cdot (x + 2) = ((2 \cdot x - 1) \cdot (x - 3)) \cdot (x + 2) = \left(2 \cdot x^2 - 6 \cdot x - x + 3\right) \cdot (x + 2) =$$

$$= \left(2 \cdot x^2 - 7 \cdot x + 3\right) \cdot (x + 2) = 2 \cdot x^3 + 4 \cdot x^2 - 7 \cdot x^2 - 14 \cdot x + 3 \cdot x + 6 = 2 \cdot x^3 - 3 \cdot x^2 - 11 \cdot x + 6.$$

Odgovor je pod A.

2.inačica

Najprije pomnožimo zadnje dvije zagrade međusobno.

$$(2 \cdot x - 1) \cdot (x - 3) \cdot (x + 2) = (2 \cdot x - 1) \cdot ((x - 3) \cdot (x + 2)) = (2 \cdot x - 1) \cdot \left(x^2 + 2 \cdot x - 3 \cdot x - 6\right) =$$

$$= (2 \cdot x - 1) \cdot \left(x^2 - x - 6\right) = 2 \cdot x^3 - 2 \cdot x^2 - 12 \cdot x - x^2 + x + 6 = 2 \cdot x^3 - 3 \cdot x^3 - 11 \cdot x + 6.$$

Odgovor je pod A.

**Vježba 051**

Čemu je, nakon sređivanja, jednak izraz: $(1 - 2 \cdot x) \cdot (3 - x) \cdot (x + 2)$?

$$A.\ 2 \cdot x^3 - 3 \cdot x^2 - 11 \cdot x + 6 \quad , \quad B.\ 2 \cdot x^3 - 3 \cdot x^2 + 11 \cdot x + 6$$

$$C.\ 2 \cdot x^3 - x^2 - 11 \cdot x - 6 \quad , \quad D.\ 2 \cdot x^3 - x^2 + 13 \cdot x - 6$$

**Rezultat:** A.

**Zadatak 052 (Den, gimnazija)**

Odredi najmanju vrijednost polinoma $P(x) = x^4 - 4 \cdot x^3 + 6 \cdot x^2 - 4 \cdot x + 2.$

**Rješenje 052**

Ponovimo!

$$(a - b)^2 = a^2 - 2 \cdot a \cdot b + b^2 \quad , \quad (a + b)^2 = a^2 + 2 \cdot a \cdot b + b^2 \quad , \quad \left(a^n\right)^m = a^{n \cdot m}.$$

$$a^{2 \cdot n} \geq 0 \; , \; a \in R \quad , \quad (a - b)^4 = a^4 - 4 \cdot a^3 \cdot b + 6 \cdot a^2 \cdot b^2 - 4 \cdot a \cdot b^3 + b^4.$$

Zakon distribucije množenja prema zbrajanju.

$$a\cdot(b+c)=a\cdot b+a\cdot c \quad , \quad a\cdot b+a\cdot c=a\cdot(b+c).$$

1.inačica

$$P(x)=x^4-4\cdot x^3+6\cdot x^2-4\cdot x+2 \Rightarrow P(x)=x^4-4\cdot x^3+6\cdot x^2-4\cdot x+2 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow P(x)=x^4-4\cdot x^3+4\cdot x^2+2\cdot x^2-4\cdot x+2 \Rightarrow P(x)=\left(x^4-4\cdot x^3+4\cdot x^2\right)+\left(2\cdot x^2-4\cdot x\right)+2 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow P(x)=\underbrace{\left(x^4-4\cdot x^3+4\cdot x^2\right)}_{\text{kvadrat zbroja}}+2\cdot\left(x^2-2\cdot x\right)+2 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow P(x)=\left(x^2-2\cdot x\right)^2+2\cdot\left(x^2-2\cdot x\right)+2 \Rightarrow P(x)=\left(x^2-2\cdot x\right)^2+2\cdot\left(x^2-2\cdot x\right)+2 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow P(x)=\left(x^2-2\cdot x\right)^2+2\cdot\left(x^2-2\cdot x\right)+1+1 \Rightarrow P(x)=\underbrace{\left(x^2-2\cdot x\right)^2+2\cdot\left(x^2-2\cdot x\right)+1}_{\text{kvadrat zbroja}}+1 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow P(x)=\left(\left(x^2-2\cdot x\right)+1\right)^2+1 \Rightarrow P(x)=\left(x^2-2\cdot x+1\right)^2+1 \Rightarrow P(x)=\left(\underbrace{x^2-2\cdot x+1}_{\text{kvadrat zbroja}}\right)^2+1 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow P(x)=\left((x-1)^2\right)^2+1 \Rightarrow P(x)=(x-1)^4+1.$$

Uočimo da je

$$(x-1)^4\geq 0$$

za svaki realni broj x pa zato vrijedi:

$$P(x)=(x-1)^4+1\geq 1.$$

Za x = 1 postiže se najmanja vrijednost polinoma P(x) i iznosi:

$$\left.\begin{array}{l} P(x)=(x-1)^4+1\geq 1 \\ x=1 \end{array}\right\} \Rightarrow P(1)=(1-1)^4+1 \Rightarrow P(1)=0+1 \Rightarrow P(1)=1.$$

2.inačica

Transformacijom polinoma

$$P(x)=x^4-4\cdot x^3+6\cdot x^2-4\cdot x+2$$

na oblik

$$P(x)=x^4-4\cdot x^3+6\cdot x^2-4\cdot x+1+1$$

prepoznajemo formulu

$$(a-b)^4=a^4-4\cdot a^3\cdot b+6\cdot a^2\cdot b^2-4\cdot a\cdot b^3+b^4$$

pa vrijedi:

$$P(x)=x^4-4\cdot x^3+6\cdot x^2-4\cdot x+1+1 \Rightarrow P(x)=\left(x^4-4\cdot x^3+6\cdot x^2-4\cdot x+1\right)+1 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow P(x)=(x-1)^4+1.$$

Uočimo da je

$$(x-1)^4\geq 0$$

za svaki realni broj x pa zato vrijedi:

$$P(x)=(x-1)^4+1\geq 1.$$

Za x = 1 postiže se najmanja vrijednost polinoma P(x) i iznosi:

$$\left.\begin{array}{l} P(x)=(x-1)^4+1\geq 1 \\ x=1 \end{array}\right\} \Rightarrow P(1)=(1-1)^4+1 \Rightarrow P(1)=0+1 \Rightarrow P(1)=1.$$

**Vježba 052**

Odredi najmanju vrijednost polinoma $P(x)=x^4-4\cdot x^3+6\cdot x^2-4\cdot x+3.$

**Rezultat:** $P(1)=2.$

**Zadatak 053 (Nikola, gimnazija)**

Jednakost $4\cdot x^2-3\cdot x-1=(a\cdot x+b)\cdot(c\cdot x+d)$, gdje su a, b, c i d cijeli brojevi, jest identitet. Tada je:

A. $a\cdot b\cdot c\cdot d=-1$ B. $a\cdot b\cdot c\cdot d=-2$ C. $a\cdot b\cdot c\cdot d=-3$ D. $a\cdot b\cdot c\cdot d=-4$

**Rješenje 053**

Ponovimo!

$$a^1=a \quad , \quad a^n\cdot a^m=a^{n\cdot m}.$$

Skup cijelih brojeva je skup koji uključuje prirodne brojeve, nulu i negativne cijele brojeve. Označavamo ga velikim slovom Z

$$Z=\{\ldots -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, \ldots\}.$$

Množenje zagrada

$$(a+b)\cdot(c+d)=a\cdot c+a\cdot d+b\cdot c+b\cdot d.$$

Dva polinoma su jednaka ako i samo ako su istog stupnja i ako su im koeficijenti uz iste potencije jednaki.

Zakon distribucije množenja prema zbrajanju.

$$a\cdot(b+c)=a\cdot b+a\cdot c \quad , \quad a\cdot b+a\cdot c=a\cdot(b+c).$$

Transformiramo zadanu jednakost.

$$4\cdot x^2-3\cdot x-1=(a\cdot x+b)\cdot(c\cdot x+d) \Rightarrow 4\cdot x^2-3\cdot x-1=a\cdot c\cdot x^2+a\cdot d\cdot x+b\cdot c\cdot x+b\cdot d \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 4\cdot x^2-3\cdot x-1=a\cdot c\cdot x^2+(a\cdot d+b\cdot c)\cdot x+b\cdot d \Rightarrow \left[\begin{array}{l}\text{jednakost} \\ \text{polinoma}\end{array}\right] \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \left.\begin{array}{l} a\cdot c=4 \\ a\cdot d+b\cdot c=-3 \\ b\cdot d=-1 \end{array}\right\} \Rightarrow \left[\begin{array}{l}\text{pomnožimo prvu i} \\ \text{treću jednakost}\end{array}\right] \Rightarrow a\cdot c\cdot b\cdot d=4\cdot(-1) \Rightarrow a\cdot b\cdot c\cdot d=-4.$$

Odgovor je pod D.

**Vježba 053**

Jednakost $4\cdot x^2-3\cdot x-0.25=(a\cdot x+b)\cdot(c\cdot x+d)$, gdje su a, b, c i d cijeli brojevi, jest identitet. Tada je:

A. $a\cdot b\cdot c\cdot d=-1$ B. $a\cdot b\cdot c\cdot d=-2$ C. $a\cdot b\cdot c\cdot d=-3$ D. $a\cdot b\cdot c\cdot d=-4$

**Rezultat:** A.

**Zadatak 054 (Mihaela, gimnazija)**

Ostatak pri dijeljenju polinoma f s polinomom x – a je $r_1$, a s polinomom x – b je $r_2$. Koliki je ostatak dijeljenja polinoma f s g(x) = (x – a) · (x – b)?

**Rješenje 054**

Ponovimo!

$$n=\frac{n}{1} \quad , \quad \frac{a}{b}-\frac{c}{d}=\frac{a\cdot d-b\cdot c}{b\cdot d}.$$

Zakon distribucije množenja prema zbrajanju.

$$a\cdot(b+c)=a\cdot b+a\cdot c \quad , \quad a\cdot b+a\cdot c=a\cdot(b+c).$$

Kada dijelimo polinom f(x) polinomom g(x) tražimo takav polinom q(x) da je

$$f(x) = g(x) \cdot q(x).$$

Ako takav polinom q(x) postoji, kažemo da je polinom f(x) djeljiv polinomom g(x). U općem slučaju bit će

$$f(x) = g(x) \cdot q(x) + r(x),$$

gdje je r(x) ostatak dijeljenja polinoma f(x) polinomom g(x). Ostatak r(x) je uvijek za bar jedan stupanj niži polinom od g(x).

Poseban slučaj je dijeljenje polinoma f linearnim polinomom x – c, $c\in R$ (c je element skupa R):

$$f(x)=(x-c)\cdot q(x)+r.$$

Ta jednakost vrijedi za sve $x\in R$, posebno za x = c:

$$f(c)=(c-c)\cdot q(c)+r \;\Rightarrow\; f(c)=0\cdot q(c)+r \;\Rightarrow\; f(c)=r.$$

Zapamtimo!

$$f(x)=(x-c)\cdot q(x)+f(c).$$

Pri dijeljenju polinoma f s (x – c) ostatak je f(c).

- Kada se polinom f dijeli polinomom prvog stupnja x – a ostatak je polinom najviše stupnja nula, tj. konstantni polinom $r_1$, $r_1\in R$. Neka je $q_1(x)$ količnik. Tada je:

$$f(x)=(x-a)\cdot q_1(x)+r_1.$$

Uočimo da za x = a vrijedi:

$$\left.\begin{array}{l} x=a \\ f(x)=(x-a)\cdot q_1(x)+r_1 \end{array}\right\} \Rightarrow f(a)=(a-a)\cdot q_1(a)+r_1 \;\Rightarrow\; f(a)=0\cdot q_1(a)+r_1 \;\Rightarrow$$

$$\Rightarrow f(a)=0+r_1 \;\Rightarrow\; f(a)=r_1.$$

- Kada se polinom f dijeli polinomom prvog stupnja x – b ostatak je polinom najviše stupnja nula, tj. konstantni polinom $r_2$, $r_2\in R$. Neka je $q_2(x)$ količnik. Tada je:

$$f(x)=(x-b)\cdot q_1(x)+r_1.$$

Uočimo da za x = b vrijedi:

$$\left.\begin{array}{l} x=b \\ f(x)=(x-b)\cdot q_2(x)+r_2 \end{array}\right\} \Rightarrow f(b)=(b-b)\cdot q_2(b)+r_2 \;\Rightarrow\; f(b)=0\cdot q_2(b)+r_2 \;\Rightarrow$$

$$\Rightarrow f(b)=0+r_2 \;\Rightarrow\; f(b)=r_2.$$

- Kada se polinom f dijeli polinomom drugog stupnja (x – a) · (x – b) ostatak je polinom najviše prvog stupnja, tj. linearna funkcija $r_3(x) = \alpha \cdot x + \beta$, $\alpha, \beta\in R$. Neka je $q_3(x)$ količnik. Tada je:

$$f(x)=(x-a)\cdot(x-b)\cdot q_3(x)+r_3(x) \;\Rightarrow\; f(x)=(x-a)\cdot(x-b)\cdot q_3(x)+\alpha\cdot x+\beta.$$

Za x = a dobije se:

$$f(a)=(a-a)\cdot(a-b)\cdot q_3(a)+\alpha\cdot a+\beta \;\Rightarrow\; f(a)=0\cdot(a-b)\cdot q_3(a)+\alpha\cdot a+\beta \;\Rightarrow$$

$$\Rightarrow f(a)=0+\alpha\cdot a+\beta \;\Rightarrow\; f(a)=\alpha\cdot a+\beta \;\Rightarrow \begin{bmatrix} \text{zbog} \\ f(a)=r_1 \end{bmatrix} \Rightarrow r_1=\alpha\cdot a+\beta \;\Rightarrow\; \alpha\cdot a+\beta=r_1.$$

Za x = b dobije se:

$$f(b)=(b-a)\cdot(b-b)\cdot q_3(b)+\alpha\cdot b+\beta \Rightarrow f(b)=(b-a)\cdot 0\cdot q_3(b)+\alpha\cdot b+\beta \Rightarrow$$

$$\Rightarrow f(b)=0+\alpha\cdot b+\beta \Rightarrow f(b)=\alpha\cdot b+\beta \Rightarrow \begin{bmatrix}\text{zbog}\\ f(b)=r_2\end{bmatrix} \Rightarrow r_2=\alpha\cdot b+\beta \Rightarrow \alpha\cdot b+\beta=r_2.$$

Iz sustava jednadžbi odrede se koeficijenti α i β.

$$\left.\begin{aligned}\alpha\cdot a+\beta&=r_1\\ \alpha\cdot b+\beta&=r_2\end{aligned}\right\} \Rightarrow \begin{bmatrix}\text{metoda suprotnih}\\ \text{koeficijenata}\end{bmatrix} \Rightarrow \left.\begin{aligned}\alpha\cdot a+\beta&=r_1 \;/\cdot(-1)\\ \alpha\cdot b+\beta&=r_2\end{aligned}\right\} \Rightarrow \left.\begin{aligned}-\alpha\cdot a-\beta&=-r_1\\ \alpha\cdot b+\beta&=r_2\end{aligned}\right\} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \alpha\cdot b-\alpha\cdot a=r_2-r_1 \Rightarrow \alpha\cdot(b-a)=r_2-r_1 \Rightarrow \alpha\cdot(b-a)=r_2-r_1 \;/\cdot\frac{1}{b-a} \Rightarrow \alpha=\frac{r_2-r_1}{b-a}.$$

Računamo β.

$$\left.\begin{aligned}\alpha\cdot a+\beta&=r_1\\ \alpha&=\frac{r_2-r_1}{b-a}\end{aligned}\right\} \Rightarrow \left.\begin{aligned}\beta&=r_1-\alpha\cdot a\\ \alpha&=\frac{r_2-r_1}{b-a}\end{aligned}\right\} \Rightarrow \beta=r_1-\frac{r_2-r_1}{b-a}\cdot a \Rightarrow \beta=\frac{r_1}{1}-\frac{r_2-r_1}{b-a}\cdot a \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \beta=\frac{r_1\cdot(b-a)-(r_2-r_1)\cdot a}{b-a} \Rightarrow \beta=\frac{r_1\cdot b-r_1\cdot a-r_2\cdot a+r_1\cdot a}{b-a} \Rightarrow \beta=\frac{r_1\cdot b-r_1\cdot a-r_2\cdot a+r_1\cdot a}{b-a} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \beta=\frac{r_1\cdot b-r_2\cdot a}{b-a}.$$

Traženi ostatak dijeljenja polinoma glasi:

$$\left.\begin{aligned}&r_3(x)=\alpha\cdot x+\beta\\ &\alpha=\frac{r_2-r_1}{b-a}\;,\;\beta=\frac{r_1\cdot b-r_2\cdot a}{b-a}\end{aligned}\right\} \Rightarrow r_3(x)=\frac{r_2-r_1}{b-a}\cdot x+\frac{r_1\cdot b-r_2\cdot a}{b-a} \Rightarrow r_3(x)=\frac{r_2-r_1}{b-a}\cdot x+\frac{b\cdot r_1-a\cdot r_2}{b-a}.$$

Ili:

$$r_3(x)=\frac{f(b)-f(a)}{b-a}\cdot x+\frac{b\cdot f(a)-a\cdot f(b)}{b-a}.$$

**Vježba 054**

Ostatak pri dijeljenju polinoma f s polinomom x – 1 je 7, a s polinomom x – 3 je 5. Koliki je ostatak dijeljenja polinoma f s g(x) = (x – 1) · (x – 3)?

**Rezultat:** – x + 8.

**Zadatak 055 (Anita, gimnazija)**

Koliki je ostatak pri dijeljenju polinoma $f(x) = x^4 - x - 2$ polinomom $g(x) = x^2 - 1$?

**Rješenje 055**

Ponovimo!

$$a^n : a^m = a^{n-m} \quad , \quad a^1 = a \quad , \quad a^0 = 1 \quad , \quad a^n \cdot a^m = a^{n+m}.$$

Kada dijelimo polinom f(x) polinomom g(x) tražimo takav polinom q(x) da je

$$f(x) = g(x) \cdot q(x).$$

Ako takav polinom q(x) postoji, kažemo da je polinom f(x) djeljiv polinomom g(x). U općem slučaju bit će

$$f(x) = g(x) \cdot q(x) + r(x),$$

gdje je r(x) ostatak dijeljenja polinoma f(x) polinomom g(x). Ostatak r(x) je uvijek za bar jedan stupanj niži polinom od g(x).

1.inačica

Promatramo dijeljenje polinoma

$$(x^4 - x - 2) : (x^2 - 1).$$

Polinome koje dijelimo pišemo po padajućim potencijama. Dijelimo prvi član djeljenika, $x^4$, prvim članom djelitelja, $x^2$.

$$x^4 : x^2 = x^2.$$

Količnik $x^2$ zatim pomnožimo djeliteljem, $x^2 - 1$, i umnožak potpisujemo pod odgovarajuće potencije djeljenika.

$$\begin{array}{l}
\left(x^4 \quad -x-2\right):\left(x^2-1\right)=x^2 \\
\underline{+x^4-x^2}
\end{array}$$

Potpisanim članovima $x^4 - x^2$ promijenimo predznake i zbrojimo s odgovarajućim članovima djeljenika. Spuštamo sljedeći član djeljenika, $-$ x.

$$\begin{array}{l}
\left(x^4 \quad -x-2\right):\left(x^2-1\right)=x^2 \\
\underline{\pm x^4 \mp x^2} \\
\qquad x^2-x
\end{array}$$

Ponovno prvi član djeljenika, $x^2 - x$ dijelimo prvim članom djelitelja, $x^2$.

$$x^2 : x^2 = 1.$$

Količnik 1 zatim pomnožimo djeliteljem, $x^2 - 1$, i umnožak potpisujemo pod odgovarajuće potencije djeljenika.

$$\begin{array}{l}
\left(x^4 \quad -x-2\right):\left(x^2-1\right)=x^2+1 \\
\underline{\pm x^4 \mp x^2} \\
\qquad x^2-x \\
\qquad \underline{x^2 \quad -1}
\end{array}$$

Potpisanim članovima $x^2 - 1$ promijenimo predznake i zbrojimo s odgovarajućim članovima djeljenika.

$$\begin{array}{l}
\left(x^4 \quad -x-2\right):\left(x^2-1\right)=x^2+1 \\
\underline{\pm x^4 \quad \mp x^2} \\
\qquad x^2-x \\
\qquad \underline{\pm x^2 \quad \mp 1} \\
\qquad\quad -x-1 \rightarrow \text{ostatak}
\end{array}$$

Ostatak je polinom prvog stupnja

$$r(x) = -x - 1.$$

2.inačica

Polinom g(x) je drugog stupnja. Kada se polinom f(x) dijeli polinomom drugog stupnja g(x) ostatak može biti polinom prvog stupnja ili polinom nultog stupnja (konstanta). Pretpostavimo da je ostatak polinom prvog stupnja

$$r(x)=a\cdot x+b.$$

Tada, prema teoremu o dijeljenju polinoma, vrijedi jednakost

$$f(x)=\left(x^2-1\right)\cdot q(x)+r(x) \;\Rightarrow\; x^4-x-2=\left(x^2-1\right)\cdot q(x)+a\cdot x+b$$

koja je ispunjena za svaki realni broj x. Uvrstimo li za x vrijednosti 1 i – 1, dobit ćemo jednakosti:

- $$\left.\begin{matrix} x=1 \\ x^4-x-2=\left(x^2-1\right)\cdot q(x)+a\cdot x+b \end{matrix}\right\} \Rightarrow 1^4-1-2=\left(1^2-1\right)\cdot q(1)+a\cdot 1+b \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 1-1-2=(1-1)\cdot q(1)+a+b \;\Rightarrow\; 1-1-2=0\cdot q(1)+a+b \;\Rightarrow\; -2=0+a+b \;\Rightarrow$$

$$\Rightarrow -2=a+b \;\Rightarrow\; a+b=-2.$$

- $$\left.\begin{matrix} x=-1 \\ x^4-x-2=\left(x^2-1\right)\cdot q(x)+a\cdot x+b \end{matrix}\right\} \Rightarrow (-1)^4-(-1)-2=\left((-1)^2-1\right)\cdot q(-1)+a\cdot(-1)+b \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 1+1-2=(1-1)\cdot q(-1)-a+b \;\Rightarrow\; 1+1-2=0\cdot q(-1)-a+b \;\Rightarrow\; 0=0-a+b \;\Rightarrow$$

$$\Rightarrow 0=-a+b \;\Rightarrow\; a-b=0.$$

Iz sustava jednadžbi dobije se:

$$\left.\begin{matrix} a+b=-2 \\ a-b=0 \end{matrix}\right\} \Rightarrow \begin{bmatrix} \text{metoda suprotnih} \\ \text{koeficijenata} \end{bmatrix} \Rightarrow 2\cdot a=-2 \;\Rightarrow\; 2\cdot a=-2 \;/:2 \;\Rightarrow\; a=-1.$$

Računamo b.

$$\left.\begin{matrix} a=-1 \\ a+b=-2 \end{matrix}\right\} \Rightarrow -1+b=-2 \;\Rightarrow\; b=-2+1 \;\Rightarrow\; b=-1.$$

Ostatak pri dijeljenju polinoma f polinomom g je polinom prvog stupnja

$$\left.\begin{matrix} a=-1 \;,\; b=-1 \\ r(x)=a\cdot x+b \end{matrix}\right\} \Rightarrow r(x)=-x-1.$$



**Vježba 055**

Koliki je ostatak pri dijeljenju polinoma f(x) = $x^4$ + x + 2 polinomom g(x) = $x^2$ – 1?

**Rezultat:** x + 3.

**Zadatak 056 (Jenny, gimnazija)**

Pokazati da je polinom $P(x)=x^2\cdot\left(x^2+10\right)+\left(x^2+1\right)\cdot(1-6\cdot x)$ potpuni kvadrat nekog polinoma.

**Rješenje 056**

Ponovimo!

$$a^n\cdot a^m=a^{n+m} \quad , \quad a^1=a \quad , \quad (a\cdot b)^n=a^n\cdot b^n \quad , \quad \left(a^n\right)^m=a^{n\cdot m}.$$

Zakon distribucije množenja prema zbrajanju.

$$a\cdot(b+c)=a\cdot b+a\cdot c \quad , \quad a\cdot b+a\cdot c=a\cdot(b+c).$$

Množenje zagrada

$$(a+b)\cdot(c+d)=a\cdot c+a\cdot d+b\cdot c+b\cdot d.$$

Kvadrat trinoma

$$(a+b+c)^2=a^2+b^2+c^2+2\cdot a\cdot b+2\cdot a\cdot c+2\cdot b\cdot c.$$

Teorem o jednakosti polinoma
Polinomi

$$f(x)=a_n\cdot x^n+a_{n-1}\cdot x^{n-1}+\ ...\ +a_1\cdot x+a_0\quad \text{i}\quad g(x)=b_m\cdot x^m+b_{m-1}\cdot x^{m-1}+\ ...\ +b_1\cdot x+b_0,$$

$a_n\neq 0,\ b_m\neq 0,$ jednaki su ako i samo ako vrijedi:

$$m=n\ ,\ a_i=b_i\ \text{za svaki}\ i=0,\ 1,\ 2,\ ...,\ n.$$

Polinom P(x) je polinom četvrtog stupnja.

$$P(x)=x^2\cdot\left(x^2+10\right)+\left(x^2+1\right)\cdot(1-6\cdot x)\ \Rightarrow\ P(x)=x^4+10\cdot x^2+x^2-6\cdot x^3+1-6\cdot x\ \Rightarrow$$

$$\Rightarrow\ P(x)=x^4-6\cdot x^3+11\cdot x^2-6\cdot x+1.$$

Uočimo da zadani polinom četvrtog stupnja P(x) možemo zapisati kao kvadrat polinoma drugog stupnja.

$$x^4-6\cdot x^3+11\cdot x^2-6\cdot x+1=\left(a\cdot x^2+b\cdot x+c\right)^2\ \Rightarrow$$

$$\Rightarrow\ x^4-6\cdot x^3+11\cdot x^2-6\cdot x+1=\left(a\cdot x^2\right)^2+(b\cdot x)^2+c^2+2\cdot a\cdot x^2\cdot b\cdot x+2\cdot a\cdot x^2\cdot c+2\cdot b\cdot x\cdot c\ \Rightarrow$$

$$\Rightarrow\ x^4-6\cdot x^3+11\cdot x^2-6\cdot x+1=a^2\cdot x^4+b^2\cdot x^2+c^2+2\cdot a\cdot b\cdot x^3+2\cdot a\cdot c\cdot x^2+2\cdot b\cdot c\cdot x\ \Rightarrow$$

$$\Rightarrow\ x^4-6\cdot x^3+11\cdot x^2-6\cdot x+1=a^2\cdot x^4+2\cdot a\cdot b\cdot x^3+\left(b^2+2\cdot a\cdot c\right)\cdot x^2+2\cdot b\cdot c\cdot x+c^2.$$

Prema teoremu o jednakosti polinoma slijedi:

$$\left.\begin{array}{l} a^2=1\\ 2\cdot a\cdot b=-6\\ b^2+2\cdot a\cdot c=11\\ 2\cdot b\cdot c=-6\\ c^2=1\end{array}\right\}\ \Rightarrow\ \left.\begin{array}{l} a^2=1\\ 2\cdot a\cdot b=-6\ /:(-2)\\ b^2+2\cdot a\cdot c=11\\ 2\cdot b\cdot c=-6\ /:(-2)\\ c^2=1\end{array}\right\}\ \Rightarrow\ \left.\begin{array}{l} a^2=1\\ a\cdot b=-3\\ b^2+2\cdot a\cdot c=11\\ b\cdot c=-3\\ c^2=1\end{array}\right\}.$$

Dobili smo sustav od pet jednadžbi sa tri nepoznanice a, b i c. Takav se sustav zove preodređen sustav jer ima više jednadžbi nego nepoznanica.
Promatrajmo samo tri jednadžbe.

$$\left.\begin{array}{l} a^2=1\\ a\cdot b=-3\\ b\cdot c=-3\end{array}\right\}\ \Rightarrow\ \left.\begin{array}{l} a^2=1\ /\sqrt{\ }\\ a\cdot b=-3\\ b\cdot c=-3\end{array}\right\}\ \Rightarrow\ \left.\begin{array}{l} a_{1,2}=\pm\sqrt{1}\\ a\cdot b=-3\\ b\cdot c=-3\end{array}\right\}\ \Rightarrow\ \left.\begin{array}{l} a_{1,2}=\pm 1\\ a\cdot b=-3\\ b\cdot c=-3\end{array}\right\}.$$

- Za a = 1 izračunamo vrijednosti nepoznanica b i c.

$$\left.\begin{array}{l} a=1\\ a\cdot b=-3\\ b\cdot c=-3\end{array}\right\}\ \Rightarrow\ \left[\begin{array}{l}\text{metoda}\\ \text{supstitucije}\end{array}\right]\ \Rightarrow\ \left.\begin{array}{l} 1\cdot b=-3\\ b\cdot c=-3\end{array}\right\}\ \Rightarrow\ \left.\begin{array}{l} b=-3\\ b\cdot c=-3\end{array}\right\}\ \Rightarrow\ \left[\begin{array}{l}\text{metoda}\\ \text{supstitucije}\end{array}\right]\ \Rightarrow\ -3\cdot c=-3\ \Rightarrow$$

$$\Rightarrow\ -3\cdot c=-3\ /:(-3)\ \Rightarrow\ c=1.$$

Provjerimo da rješenja

$$(a,\ b,\ c)=(1,\ -3,\ 1)$$

zadovoljavaju i preostale dvije jednadžbe

$$\left.\begin{array}{l} a=1\ ,\ b=-3\ ,\ c=1 \\ b^2+2\cdot a\cdot c=11 \\ c^2=1 \end{array}\right\} \Rightarrow \left[\begin{array}{l}\text{metoda}\\ \text{supstitucije}\end{array}\right] \Rightarrow \left.\begin{array}{l}(-3)^2+2\cdot 1\cdot 1=11 \\ 1^2=1\end{array}\right\} \Rightarrow \left.\begin{array}{l}9+2=11\\ 1=1\end{array}\right\} \Rightarrow \left.\begin{array}{l}11=11\\ 1=1\end{array}\right\}.$$

Tada vrijedi:

$$\left.\begin{array}{l} a=1\ ,\ b=-3\ ,\ c=1 \\ x^4-6\cdot x^3+11\cdot x^2-6\cdot x+1=\left(a\cdot x^2+b\cdot x+c\right)^2 \end{array}\right\} \Rightarrow x^4-6\cdot x^3+11\cdot x^2-6\cdot x+1=\left(x^2-3\cdot x+1\right)^2.$$

- Za a = – 1 izračunamo vrijednosti nepoznanica b i c.

$$\left.\begin{array}{l} a=-1 \\ a\cdot b=-3 \\ b\cdot c=-3 \end{array}\right\} \Rightarrow \left[\begin{array}{l}\text{metoda}\\ \text{supstitucije}\end{array}\right] \Rightarrow \left.\begin{array}{l}-1\cdot b=-3\\ b\cdot c=-3\end{array}\right\} \Rightarrow \left.\begin{array}{l}-b=-3\\ b\cdot c=-3\end{array}\right\} \Rightarrow \left.\begin{array}{l}-b=-3\ /\cdot(-1)\\ b\cdot c=-3\end{array}\right\} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \left.\begin{array}{l}b=3\\ b\cdot c=-3\end{array}\right\} \Rightarrow \left[\begin{array}{l}\text{metoda}\\ \text{supstitucije}\end{array}\right] \Rightarrow 3\cdot c=-3 \Rightarrow 3\cdot c=-3\ /:3 \Rightarrow c=-1.$$

Provjerimo da rješenja

$$(a,\ b,\ c)=(-1,\ 3,\ -1)$$

zadovoljavaju i preostale dvije jednadžbe

$$\left.\begin{array}{l} a=-1\ ,\ b=3\ ,\ c=-1 \\ b^2+2\cdot a\cdot c=11 \\ c^2=1 \end{array}\right\} \Rightarrow \left[\begin{array}{l}\text{metoda}\\ \text{supstitucije}\end{array}\right] \Rightarrow \left.\begin{array}{l}3^2+2\cdot(-1)(-1)=11 \\ (-1)^2=1\end{array}\right\} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \left.\begin{array}{l}9+2=11\\ 1=1\end{array}\right\} \Rightarrow \left.\begin{array}{l}11=11\\ 1=1\end{array}\right\}.$$



Tada vrijedi:

$$\left.\begin{array}{l} a=-1\ ,\ b=3\ ,\ c=-1 \\ x^4-6\cdot x^3+11\cdot x^2-6\cdot x+1=\left(a\cdot x^2+b\cdot x+c\right)^2 \end{array}\right\} \Rightarrow x^4-6\cdot x^3+11\cdot x^2-6\cdot x+1=\left(-x^2+3\cdot x-1\right)^2.$$

**Vježba 056**

Pokazati da je polinom $P(x)=x\cdot\left(x^3+10\cdot x\right)-\left(x^2+1\right)\cdot(6\cdot x-1)$ potpuni kvadrat nekog polinoma.

**Rezultat:**

$$x^4-6\cdot x^3+11\cdot x^2-6\cdot x+1=\left(x^2-3\cdot x+1\right)^2,$$

$$x^4-6\cdot x^3+11\cdot x^2-6\cdot x+1=\left(-x^2+3\cdot x-1\right)^2.$$

**Zadatak 057 (Ana, gimnazija)**

Ako je $f(x)=x^3-1,\ g(x)=x^3+1,$ onda je $f(a+1)-g(a-1)$ jednako:

$A.\ 2\cdot a-3 \qquad B.\ 6\cdot a^2 \qquad C.\ 2\cdot a+3 \qquad D.\ a-3$

**Rješenje 057**

Ponovimo!

$$(a+b)^3=a^3+3\cdot a^2\cdot b+3\cdot a\cdot b^2+b^3 \quad , \quad (a-b)^3=a^3-3\cdot a^2\cdot b+3\cdot a\cdot b^2-b^3.$$

$$a^3-b^3=(a-b)\cdot\left(a^2+a\cdot b+b^2\right) \quad , \quad (a+b)^2=a^2+2\cdot a\cdot b+b^2.$$

$$(a-b)\cdot(a+b)=a^2-b^2 \quad , \quad (a-b)^2=a^2-2\cdot a\cdot b+b^2.$$

Zakon distribucije množenja prema zbrajanju.

$$a\cdot(b+c)=a\cdot b+a\cdot c \quad , \quad a\cdot b+a\cdot c=a\cdot(b+c).$$

1.inačica

$$f(a+1)-g(a-1)=\begin{bmatrix} f(x)=x^3-1 \\ g(x)=x^3+1 \end{bmatrix}=\left((a+1)^3-1\right)-\left((a-1)^3+1\right)=(a+1)^3-1-(a-1)^3-1=$$

$$=a^3+3\cdot a^2+3\cdot a+1-1-\left(a^3-3\cdot a^2+3\cdot a-1\right)-1=$$

$$=a^3+3\cdot a^2+3\cdot a+1-1-a^3+3\cdot a^2-3\cdot a+1-1=$$

$$=a^3+3\cdot a^2+3\cdot a+1-1-a^3+3\cdot a^2-3\cdot a+1-1=3\cdot a^2+3\cdot a^2=6\cdot a^2.$$

Odgovor je pod B.

2.inačica

$$f(a+1)-g(a-1)=\begin{bmatrix} f(x)=x^3-1 \\ g(x)=x^3+1 \end{bmatrix}=\left((a+1)^3-1\right)-\left((a-1)^3+1\right)=(a+1)^3-1-(a-1)^3-1=$$

$$=(a+1)^3-(a-1)^3-2=\left((a+1)-(a-1)\right)\cdot\left((a+1)^2+(a+1)\cdot(a-1)+(a-1)^2\right)-2=$$

$$=(a+1-a+1)\cdot\left(a^2+2\cdot a+1+a^2-1+a^2-2\cdot a+1\right)-2=$$

$$=(a+1-a+1)\cdot\left(a^2+2\cdot a+1+a^2-1+a^2-2\cdot a+1\right)-2=(1+1)\cdot\left(a^2+a^2+a^2+1\right)-2=$$

$$=(a+1-a+1)\cdot\left(a^2+2\cdot a+1+a^2-1+a^2-2\cdot a+1\right)-2=2\cdot\left(3\cdot a^2+1\right)-2=$$

$$=6\cdot a^2+2-2=6\cdot a^2+2-2=6\cdot a^2.$$

Odgovor je pod B.

**Vježba 057**

Ako je $f(x)=x^3-1,\ g(x)=x^3+1,$ onda je $g(a-1)-f(a+1)$ jednako:

$A.\ -2\cdot a+3 \qquad B.\ -6\cdot a^2 \qquad C.\ -2\cdot a+3 \qquad D.\ -a-3$

**Rezultat:** B.

**Zadatak 058 (Ana, gimnazija)**

Dan je polinom $f(x)=a\cdot x^5-b\cdot x^3+c\cdot x-1.$ Ako je $f(-2)=5,$ onda je $f(2)$ jednako:

$A.\ -1 \qquad B.\ -3 \qquad C.\ -5 \qquad D.\ -7$

**Rješenje 058**

Ponovimo!

Zakon distribucije množenja prema zbrajanju.

$$a\cdot(b+c)=a\cdot b+a\cdot c \quad , \quad a\cdot b+a\cdot c=a\cdot(b+c).$$

Ako je f(– 2) = 5, slijedi:

$$\left.\begin{array}{l} f(x)=a\cdot x^5-b\cdot x^3+c\cdot x-1 \\ f(-2)=5 \end{array}\right\} \Rightarrow a\cdot(-2)^5-b\cdot(-2)^3+c\cdot(-2)-1=5 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow a\cdot(-32)-b\cdot(-8)+c\cdot(-2)-1=5 \Rightarrow -32\cdot a+8\cdot b-2\cdot c-1=5 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow -32\cdot a+8\cdot b-2\cdot c=5+1 \Rightarrow -32\cdot a+8\cdot b-2\cdot c=6 \Rightarrow -32\cdot a+8\cdot b-2\cdot c=6 \;/\cdot(-1) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 32\cdot a-8\cdot b+2\cdot c=-6.$$

Sada je:

$$\left.\begin{array}{l} f(x)=a\cdot x^5-b\cdot x^3+c\cdot x-1 \\ x=2 \end{array}\right\} \Rightarrow f(2)=a\cdot 2^5-b\cdot 2^3+c\cdot 2-1 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow f(2)=32\cdot a-8\cdot b+2\cdot c-1 \Rightarrow f(2)=(32\cdot a-8\cdot b+2\cdot c)-1 \Rightarrow \left[\begin{array}{c}\text{supstitucija} \\ 32\cdot a-8\cdot b+2\cdot c=-6\end{array}\right] \Rightarrow$$

$$\Rightarrow f(2)=-6-1 \Rightarrow f(2)=-7.$$

Odgovor je pod D.

**Vježba 058**

Dan je polinom $f(x)=a\cdot x^5-b\cdot x^3+c\cdot x-1$. Ako je $f(2)=-7$, onda je $f(-2)$ jednako :

$A.\ 1 \qquad B.\ 3 \qquad C.\ 5 \qquad D.\ 7$

**Rezultat:** C.



**Zadatak 059 (4A, TUPŠ)**

Polinom $f(x)=(3\cdot x+2)^7\cdot(x-1)^7$ zapisan je u standardnom obliku. Koliko iznosi koeficijent uz x u tome polinomu? Napomena: Standardni oblik polinoma je

$$f(x)=a_n\cdot x^n+a_{n-1}\cdot x^{n-1}+a_{n-2}\cdot x^{n-2}+\ldots+a_2\cdot x^2+a_1\cdot x+a_0,$$

gdje su koeficijenti $a_0$, $a_1$, … , $a_n$ realni brojevi.

$A.\ -1307 \qquad B.\ -448 \qquad C.\ 348 \qquad D.\ 1207$

**Rješenje 059**

Ponovimo!

Polinom stupnja n je funkcija f : R → R definirana s

$$f(x)=a_n\cdot x^n+a_{n-1}\cdot x^{n-1}+a_{n-2}\cdot x^{n-2}+\ldots+a_2\cdot x^2+a_1\cdot x+a_0,$$

gdje su $a_0$, $a_1$, $a_2$, … , $a_n$ realni brojevi, $a_n \neq 0$. Brojeve $a_0$, $a_1$, $a_2$, … , $a_n$ nazivamo koeficijentima polinoma. Koeficijent $a_n$ nazivamo vodećim koeficijentom, koeficijent $a_0$ slobodnim koeficijentom. Gornji zapis nazivamo kanonskim (standardnim) oblikom polinoma jedne varijable.

Binomni poučak

Za svaki $a, b \in R$, $n \in N$ vrijedi

$$(a+b)^n=a^n+\binom{n}{1}\cdot a^{n-1}\cdot b^1+\binom{n}{2}\cdot a^{n-2}\cdot b^2+\ \ldots\ +\binom{n}{n-1}\cdot a^1\cdot b^{n-1}+b^n.$$

Binomni koeficijent

Neka je n prirodan broj, a k prirodan broj ili 0 i k ≤ n. Binomni koeficijent označavamo simbolom $\binom{n}{k}$ i definiramo

$$\binom{n}{k}=\frac{n\cdot(n-1)\cdot(n-2)\cdot\ \ldots\ \cdot(n-k+1)}{1\cdot 2\cdot 3\cdot\ \ldots\ \cdot k}.$$

$$\binom{n}{k}=\binom{n}{n-k}\quad,\quad\binom{n}{1}=n\quad,\quad a^{1}=a\quad,\quad a^{0}=1.$$

Da bismo našli koeficijent uz x u polinomu koji je umnožak dvaju danih polinoma

$$h(x)=a_n\cdot x^{n}+a_{n-1}\cdot x^{n-1}+a_{n-2}\cdot x^{n-2}+\ldots+a_2\cdot x^{2}+a_1\cdot x+a_0$$

i

$$g(x)=b_m\cdot x^{m}+b_{m-1}\cdot x^{m-1}+b_{m-2}\cdot x^{m-2}+\ldots+b_2\cdot x^{2}+b_1\cdot x+b_0$$

ne moramo množiti te polinome. Lako je zaključiti da će članovi koji sadrže x biti

$$(a_1\cdot x)\cdot b_0\ \text{i}\ a_0\cdot(b_1\cdot x)$$

pa je koeficijent uz x jednak

$$(a_1\cdot x)\cdot b_0+a_0\cdot(b_1\cdot x)=a_1\cdot x\cdot b_0+a_0\cdot b_1\cdot x=(a_1\cdot b_0+a_0\cdot b_1)\cdot x=\underbrace{(a_1\cdot b_0+a_0\cdot b_1)}_{\text{koeficijent}}\cdot x.$$

Ako faktore polinoma $f(x)=(3\cdot x+2)^{7}\cdot(x-1)^{7}$ zapišemo u standardnom obliku dobije se:

$$f(x)=(3\cdot x+2)^{7}\cdot(x-1)^{7}=$$

$$=\left((3\cdot x)^{7}+\ldots+\binom{7}{6}\cdot(3\cdot x)^{1}\cdot 2^{6}+2^{7}\right)\cdot\left(x^{7}+\ldots+\binom{7}{6}\cdot x^{1}\cdot(-1)^{6}+(-1)^{7}\right).$$

Sada računamo koeficijent uz x u polinomu f(x).

$$\binom{7}{6}\cdot(3\cdot x)^{1}\cdot 2^{6}\cdot(-1)^{7}+\binom{7}{6}\cdot x^{1}\cdot(-1)^{6}\cdot 2^{7}=\binom{7}{1}\cdot 3\cdot x\cdot 2^{6}\cdot(-1)^{7}+\binom{7}{1}\cdot x\cdot 1\cdot 2^{7}=$$

$$=7\cdot 3\cdot x\cdot 64\cdot(-1)+7\cdot x\cdot 1\cdot 128=-1344\cdot x+896\cdot x=-448\cdot x.$$

Odgovor je pod B.

**Vježba 059**

Polinom $f(x)=(3\cdot x+2)^{7}\cdot(x-1)^{7}$ zapisan je u standardnom obliku. Koliko iznosi slobodni koeficijent u tome polinomu? Napomena: Standardni oblik polinoma je

$$f(x)=a_n\cdot x^{n}+a_{n-1}\cdot x^{n-1}+a_{n-2}\cdot x^{n-2}+\ldots+a_2\cdot x^{2}+a_1\cdot x+a_0,$$

gdje su koeficijenti $a_0$, $a_1$, … , $a_n$ realni brojevi.

$A.\ -128\qquad B.\ 128\qquad C.\ 348\qquad D.\ -348$

**Rezultat:** A.

**Zadatak 060 (Ivan, gimnazija)**

Dokažite da je polinom $f(x)=x^{4}+2\cdot x^{3}+2\cdot x^{2}+x$ djeljiv polinomom $g(x)=x^{2}+x.$

**Rješenje 060**

Ponovimo!

Polinom stupnja n je funkcija $f: R\to R$ definirana s

$$f(x)=a_n\cdot x^{n}+a_{n-1}\cdot x^{n-1}+a_{n-2}\cdot x^{n-2}+\ldots+a_2\cdot x^{2}+a_1\cdot x+a_0,$$

gdje su $a_0, a_1, a_2, \ldots, a_n$ realni brojevi, $a_n \neq 0$. Brojeve $a_0, a_1, a_2, \ldots, a_n$ nazivamo koeficijentima polinoma. Koeficijent $a_n$ nazivamo vodećim koeficijentom, koeficijent $a_0$ slobodnim koeficijentom. Gornji zapis nazivamo kanonskim (standardnim) oblikom polinoma jedne varijable.
Kada dijelimo polinom f(x) polinomom g(x) tražimo takav polinom q(x) da je

$$f(x) = g(x) \cdot q(x).$$

Ako takav polinom q(x) postoji, kažemo da je polinom f(x) djeljiv polinomom g(x). U općem slučaju bit će

$$f(x) = g(x) \cdot q(x) + r(x),$$

gdje je r(x) ostatak dijeljenja polinoma f(x) polinomom g(x). Ostatak r(x) je uvijek za bar jedan stupanj niži polinom od g(x).

$$a^1 = a \quad , \quad a^n : a^m = a^{n-m} \quad , \quad a^n \cdot a^m = a^{n+m}.$$

$$(-a)^{2\cdot n-1} = -a^{2\cdot n-1} \quad , \quad (-a)^{2\cdot n} = a^{2\cdot n}.$$

Zakon distribucije množenja prema zbrajanju.

$$a \cdot (b+c) = a \cdot b + a \cdot c \quad , \quad a \cdot b + a \cdot c = a \cdot (b+c).$$

Da bi umnožak bio jednak nuli, dovoljno je da jedan faktor bude jednak nuli.

$$a \cdot b = 0 \;\Leftrightarrow\; a = 0 \text{ ili } b = 0 \text{ ili } a = b = 0.$$

Nultočka polinoma

$$f(x) = a_n \cdot x^n + a_{n-1} \cdot x^{n-1} + a_{n-2} \cdot x^{n-2} + \ldots + a_2 \cdot x^2 + a_1 \cdot x + a_0$$

je svaki kompleksni broj $x_0$ za koji je

$$f(x_0) = 0.$$

Ako je $x_0$ realan broj, onda se $x_0$ zove realna nultočka, a ako je $x_0$ kompleksan broj onda se $x_0$ zove kompleksna nultočka.

1.inačica

Polinom f(x) podijelimo polinomom g(x). Ako je ostatak tog dijeljenja jednak nuli, tada je f(x) djeljiv s g(x).
Promatramo dijeljenje polinoma

$$\left(x^4 + 2 \cdot x^3 + 2 \cdot x^2 + x\right) : \left(x^2 + x\right).$$

Polinome koje dijelimo pišemo po padajućim potencijama. Dijelimo prvi član djeljenika, $x^4$, prvim članom djelitelja, $x^2$.

$$x^4 : x^2 = x^2.$$

Količnik $x^2$ zatim pomnožimo djeliteljem, $x^2 + x$, i umnožak potpisujemo pod odgovarajuće potencije djeljenika.

$$\begin{array}{l} \left(\;x^4 + 2 \cdot x^3 + 2 \cdot x^2 + x\right) : \left(x^2 + x\right) = x^2 \\ \underline{+x^4 + \quad x^3} \end{array}$$

Potpisanim članovima $x^4 + x^3$ promijenimo predznake i zbrojimo s odgovarajućim članovima djeljenika. Spuštamo sljedeći član djeljenika, $2 \cdot x^2$.

$$
\begin{array}{l}
\left(x^4+2\cdot x^3+2\cdot x^2+x\right):\left(x^2+x\right)=x^2\\
\underline{\underline{\pm}x^4\,\underline{\pm}\,x^3\qquad\qquad}\\
\qquad\quad x^3+2\cdot x^2
\end{array}
$$

Ponovno prvi član djeljenika, $x^3 + 2 \cdot x^2$ dijelimo prvim članom djelitelja, $x^2$.

$$x^3 : x^2 = x.$$

Količnik x zatim pomnožimo djeliteljem, $x^3 + 2 \cdot x$, i umnožak potpisujemo pod odgovarajuće potencije djeljenika.

$$
\begin{array}{l}
\left(x^4+2\cdot x^3+2\cdot x^2+x\right):\left(x^2+x\right)=x^2+x\\
\underline{\underline{\pm}x^4\,\underline{\pm}\,x^3\qquad\qquad}\\
\qquad\quad x^3+2\cdot x^2\\
\qquad\quad \underline{x^3+\;\;x^2}
\end{array}
$$

Potpisanim članovima $x^3 + x^2$ promijenimo predznake i zbrojimo s odgovarajućim članovima djeljenika. Spuštamo sljedeći član djeljenika, x.

$$
\begin{array}{l}
\left(x^4+2\cdot x^3+2\cdot x^2+x\right):\left(x^2+x\right)=x^2+x\\
\underline{\underline{\pm}x^4\,\underline{\pm}\,x^3\qquad\qquad}\\
\qquad\quad x^3+2\cdot x^2\\
\qquad\ \underline{-x^3\,\underline{\pm}\;\;x^2}\\
\qquad\qquad\quad\ \underline{x^2+x}
\end{array}
$$



Ponovno prvi član djeljenika, $x^2$ + x dijelimo prvim članom djelitelja, $x^2$.

$$x^2 : x^2 = 1.$$

Količnik 1 zatim pomnožimo djeliteljem, $x^2$ + x, i umnožak potpisujemo pod odgovarajuće potencije djeljenika.

$$
\begin{array}{l}
\left(x^4+2\cdot x^3+2\cdot x^2+x\right):\left(x^2+x\right)=x^2+x+1\\
\underline{\underline{\pm}x^4\,\underline{\pm}\,x^3\qquad\qquad}\\
\qquad\quad x^3+2\cdot x^2\\
\qquad\ \underline{-x^3\,\underline{\pm}\;\;x^2}\\
\qquad\qquad\quad\ \underline{x^2+x}\\
\qquad\qquad\quad\ \underline{x^2+x}
\end{array}
$$

Potpisanim članovima $x^2$ + x promijenimo predznake i zbrojimo s odgovarajućim članovima djeljenika.

$$\begin{array}{l}
\left(x^4+2\cdot x^3+2\cdot x^2+x\right):\left(x^2+x\right)=x^2+x+1 \\
\underline{\underline{+}x^4\underline{+}\;x^3} \\
\qquad x^3+2\cdot x^2 \\
\qquad \underline{-x^3\underline{+}\;x^2} \\
\qquad\qquad \underline{x^2+x} \\
\qquad\qquad \underline{-x^2\underline{+}x} \\
\qquad\qquad\quad 0
\end{array}$$

Ostatak je 0. Dakle, vrijedi:

$$\left(x^4+2\cdot x^3+2\cdot x^2+x\right)=\left(x^2+x\right)\cdot\left(x^2+x+1\right).$$

2.inačica

Da bismo dokazali da je polinom f(x) djeljiv polinomom g(x) faktoriziramo polinom f(x) tako da jedan faktor bude polinom g(x).

$$f(x)=x^4+2\cdot x^3+2\cdot x^2+x \;\Rightarrow\; f(x)=x^4+x^3+x^3+x^2+x^2+x \;\Rightarrow$$

$$\Rightarrow\; f(x)=\left(x^4+x^3\right)+\left(x^3+x^2\right)+\left(x^2+x\right) \;\Rightarrow\; f(x)=x^2\cdot\left(x^2+x\right)+x\cdot\left(x^2+x\right)+\left(x^2+x\right) \;\Rightarrow$$

$$\Rightarrow\; f(x)=x^2\cdot\left(x^2+x\right)+x\cdot\left(x^2+x\right)+\left(x^2+x\right) \;\Rightarrow\; f(x)=\left(x^2+x\right)\cdot\left(x^2+x+1\right).$$

3.inačica

Ako je polinom f(x) djeljiv polinomom g(x), tada postoji polinom q(x) tako da je

$$f(x)=g(x)\cdot q(x).$$

Uočimo ako je polinom f(x) djeljiv polinomom g(x), tada je svaka nultočka polinoma g(x) ujedno i nultočka polinoma f(x). Obrat ne vrijedi.

Ako je $x_0$ nultočka polinoma g(x), tada je:

$$\left.\begin{array}{l} g\left(x_0\right)=0 \;,\; x_0 - \text{nultočka polinom } g \\ f(x)=g(x)\cdot q(x) \end{array}\right\} \Rightarrow\; f\left(x_0\right)=g\left(x_0\right)\cdot q\left(x_0\right) \;\Rightarrow\; f\left(x_0\right)=0\cdot q\left(x_0\right) \;\Rightarrow$$

$$\Rightarrow\; f\left(x_0\right)=0 \;,\; x_0 - \text{nultočka polinoma } f.$$

Postupak se može provesti ako znamo nultočke polinoma g(x), tj. ako znamo riješiti jednadžbu g(x) = 0.

Izračunamo nultočke polinoma g(x).

$$\left.\begin{array}{l} g(x)=x^2+x \\ g(x)=0 \end{array}\right\} \Rightarrow\; x^2+x=0 \;\Rightarrow\; x\cdot(x+1)=0 \;\Rightarrow\; \left.\begin{array}{l} x=0 \\ x+1=0 \end{array}\right\} \Rightarrow\; \left.\begin{array}{l} x_1=0 \\ x_2=-1 \end{array}\right\}.$$

Sada treba pokazati da je

$$f\left(x_1\right)=0 \quad , \quad f\left(x_2\right)=0.$$

$$f(x)=x^4+2\cdot x^3+2\cdot x^2+x \;\Rightarrow\; \left.\begin{array}{l} f(0)=0^4+2\cdot 0^3+2\cdot 0^2+0 \\ f(-1)=(-1)^4+2\cdot(-1)^3+2\cdot(-1)^2+(-1) \end{array}\right\} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \left.\begin{array}{l} f(0)=0+2\cdot 0+2\cdot 0+0 \\ f(-1)=1+2\cdot(-1)+2\cdot 1-1 \end{array}\right\} \Rightarrow \left.\begin{array}{l} f(0)=0+0+0+0 \\ f(-1)=1-2+2-1 \end{array}\right\} \Rightarrow \left.\begin{array}{l} f(0)=0 \\ f(-1)=0 \end{array}\right\}.$$

Zbog toga je polinom f(x) djeljiv polinomom g(x).

**Vježba 060**

Dokažite da je polinom $f(x)=x^4-2\cdot x^3+x$ djeljiv polinomom $g(x)=x^2-x.$

**Rezultat:** $x^4-2\cdot x^3+x=\left(x^2-x\right)\cdot\left(x^2-x-1\right).$