Zadatak 021 (Andrea, gimnazija)

Za koji m je polinom $f(x) = x^5 + x^4 - x^3 - 12x - m$ djeljiv polinomom $g(x) = x^2 - 4$?

Rješenje 021

Kada dijelimo polinom f(x) polinomom g(x) tražimo takav polinom q(x) da je

$$f(x) = g(x) \cdot q(x).$$

Ako takav polinom q(x) postoji, kažemo da je polinom f(x) djeljiv polinomom g(x). U općem slučaju bit će

$$f(x) = g(x) \cdot q(x) + r(x),$$

gdje je r(x) ostatak dijeljenja polinoma f(x) polinomom g(x). Ostatak r(x) je uvijek za bar jedan stupanj niži polinom od g(x).

Ako je polinom f(x) djeljiv polinomom g(x) tada je ostatak pri dijeljenju r(x) jednak nuli:

$$x^5 + x^4 - x^3 - 12x - m = (x^2 - 4) \cdot q(x).$$

Za x = 2 slijedi:

$$2^5 + 2^4 - 2^3 - 12 \cdot 2 - m = \left(2^2 - 4\right) \cdot q(2) \Rightarrow 32 + 16 - 8 - 24 - m = 0 \Rightarrow 16 - m = 0 \Rightarrow m = 16.$$

Vježba 021

Za koji m je polinom $f(x) = x^5 + x^4 - x^3 - 12x - 2m$ djeljiv polinomom $g(x) = x^2 - 4$?

Rezultat: m = 8.

Zadatak 022 (Andrea, gimnazija)

Nađite a za koji je polinom $f(x) = 2x^4 - x^3 + x^2 + ax + b$ djeljiv polinomom $g(x) = x^2 - 3x + 2$.

Rješenje 022

Budući da je polinom f(x) djeljiv polinomom g(x) ostatak r(x) jednak je nuli:

$$\left.\begin{array}{l} f(x) = g(x) \cdot q(x) + r(x) \\ r(x) = 0 \end{array}\right\} \Rightarrow 2 \cdot x^4 - x^3 + x^2 + a \cdot x + b = \left(x^2 - 3 \cdot x + 2\right) \cdot q(x).$$

Polinom $g(x) = x^2 - 3x + 2$ može se rastaviti na faktore:

$$g(x) = x^2 - 3 \cdot x + 2 = x^2 - 2 \cdot x - x + 2 = x \cdot (x - 2) - (x - 2) = (x - 2) \cdot (x - 1).$$

Slijedi:

$$2 \cdot x^4 - x^3 + x^2 + a \cdot x + b = (x - 2)(x - 1) \cdot q(x) \Rightarrow \text{uvrstimo} \left.\begin{array}{l} x = 2 \\ x = 1 \end{array}\right\} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \left.\begin{array}{l} 2 \cdot 2^4 - 2^3 + 2^2 + a \cdot 2 + b = (2 - 2)(2 - 1) \cdot q(2) \\ 2 \cdot 1^4 - 1^3 + 1^2 + a \cdot 1 + b = (1 - 2)(1 - 1) \cdot q(1) \end{array}\right\} \Rightarrow \left.\begin{array}{l} 32 - 8 + 4 + 2 \cdot a + b = 0 \\ 2 - 1 + 1 + a + b = 0 \end{array}\right\} \Rightarrow \left.\begin{array}{l} 2 \cdot a + b = -28 \\ a + b = -2 \end{array}\right\} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \left.\begin{array}{l} 2 \cdot a + b = -28 \\ a + b = -2 \;/ \cdot (-1) \end{array}\right\} \Rightarrow \left.\begin{array}{l} 2 \cdot a + b = -28 \\ -a - b = 2 \end{array}\right\} \Rightarrow a = -26.$$

Vježba 022

Nađite b za koji je polinom $f(x) = 2x^4 - x^3 + x^2 + ax + b$ djeljiv polinomom $g(x) = x^2 - 3x + 2$.

Rezultat: b = 24.

Zadatak 023 (Martina, ekonomska škola)

Ako je polinom $p(x) = x^4 + a \cdot x^2 + b \cdot x + c$ djeljiv polinomom $g(x) = (x - 1)^3$, izračunaj a + b + c.

Rješenje 023

Ako je polinom p(x) djeljiv polinomom g(x), tada je ostatak pri dijeljenju jednak nuli, r(x) = 0:

$$p(x) = g(x) \cdot q(x) + r(x) \Rightarrow x^4 + a \cdot x^2 + b \cdot x + c = (x - 1)^3 \cdot q(x) + 0 \Rightarrow \begin{bmatrix} \text{uvrstimo} \\ x = 1 \end{bmatrix} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 1^4 + a \cdot 1^2 + b \cdot 1 + c = (1 - 1)^3 \cdot q(1) \Rightarrow 1 + a + b + c = 0 \Rightarrow a + b + c = -1.$$

Vježba 023

Ako je polinom $p(x) = x^4 + a \cdot x^2 + b \cdot x + c$ djeljiv polinomom $g(x) = (x - 1)^2$, izračunaj $a + b + c$.

Rezultat: $a + b + c = - 1.$

Zadatak 024 (Anamarija, gimnazija)

Dokaži da ne postoji polinom $f : R \to R$ trećeg stupnja s cjelobrojnim koeficijentima za koji je $f(5) = 6$ i $f(2) = 1$.

Rješenje 024

Neka je $f(x) = a_3 \cdot x^3 + a_2 \cdot x^2 + a_1 \cdot x + a_0, \ (a_i \in Z)$ polinom trećeg stupnja s cjelobrojnim koeficijentima. Tada je:

$$f(5) - f(2) = a_3 \cdot 5^3 + a_2 \cdot 5^2 + a_1 \cdot 5 + a_0 - a_3 \cdot 2^3 - a_2 \cdot 2^2 - a_1 \cdot 2 - a_0 =$$

$$= a_3 \cdot \left(5^3 - 2^3\right) + a_2 \cdot \left(5^2 - 2^2\right) + a_1 \cdot (5 - 2) = 117 \cdot a_3 + 21 \cdot a_2 + 3 \cdot a_1 = 3 \cdot \left(39 \cdot a_3 + 7 \cdot a_2 + a_1\right).$$

Kako je:

$$f(5) - f(2) = 6 - 1 = 5,$$

a broj 5 nije djeljiv sa 3, odatle slijedi tvrdnja.

Vježba 024

Dokaži da ne postoji polinom $f : R \to R$ trećeg stupnja s cjelobrojnim koeficijentima za koji je $f(5) = 8$ i $f(2) = 1$.

Rezultat: Tvrdnja je točna.

Zadatak 025 (Vedrana, gimnazija)

Ako je polinom $x^4 + 2 \cdot x^3 + a \cdot x^2 + b \cdot x + 3$ djeljiv sa $x^2 + 1$, koliko iznosi $a + b$?

Rješenje 025

1.inačica

Ponovimo!

Kažemo da je polinom f djeljiv polinomom g ako postoji polinom h, tako da bude $f = g \cdot h$. Dva polinoma su jednaka samo ako su istog stupnja i ako su im koeficijenti uz iste potencije jednaki.

Budući da je polinom $x^4 + 2 \cdot x^3 + a \cdot x^2 + b \cdot x + 3$ djeljiv polinomom $x^2 + 1$, vrijedi:

$$x^4 + 2 \cdot x^3 + a \cdot x^2 + b \cdot x + 3 = \left(x^2 + 1\right) \cdot \left(x^2 + c \cdot x + d\right).$$

Nakon izjednačavanja odgovarajućih koeficijenata dobivamo jednostavan sustav jednadžbi iz kojeg je:

$$x^4 + 2 \cdot x^3 + a \cdot x^2 + b \cdot x + 3 = \left(x^2 + 1\right) \cdot \left(x^2 + c \cdot x + d\right) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow x^4 + 2 \cdot x^3 + a \cdot x^2 + b \cdot x + 3 = x^4 + c \cdot x^3 + d \cdot x^2 + x^2 + c \cdot x + d \Rightarrow$$

$$\Rightarrow x^4 + 2 \cdot x^3 + a \cdot x^2 + b \cdot x + 3 = x^4 + c \cdot x^3 + (d + 1) \cdot x^2 + c \cdot x + d \Rightarrow \left.\begin{array}{l} 2 = c \\ a = d + 1 \\ b = c \\ 3 = d \end{array}\right\} \Rightarrow \left.\begin{array}{l} c = 2 \\ b = 2 \\ a = 4 \end{array}\right\} \Rightarrow a + b = 6.$$

2.inačica

Ponovimo!

Kažemo da je polinom f djeljiv polinomom g ako postoji polinom h, tako da bude $f = g \cdot h$. Dva polinoma su jednaka samo ako su istog stupnja i ako su im koeficijenti uz iste potencije jednaki.

Budući da je polinom $x^4 + 2 \cdot x^3 + a \cdot x^2 + b \cdot x + 3$ djeljiv polinomom $x^2 + 1$, vrijedi:

$$x^4 + 2 \cdot x^3 + a \cdot x^2 + b \cdot x + 3 = \left(x^2 + 1\right) \cdot q(x), \text{ za svaki } x \text{ pa i za } x = i.$$

Dalje slijedi:

$$\left. x^4 + 2 \cdot x^3 + a \cdot x^2 + b \cdot x + 3 = \left(x^2 + 1\right) \cdot q(x) \ , \ x = i \right\} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow i^4+2\cdot i^3+a\cdot i^2+b\cdot i+3=\left(i^2+1\right)\cdot q(i) \Rightarrow \begin{bmatrix} i^2=-1 \\ i^3=-i \\ i^4=1 \end{bmatrix} \Rightarrow 1-2\cdot i-a+b\cdot i+3=(-1+1)\cdot q(i) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 4-2\cdot i-a+b\cdot i=0\cdot q(i) \Rightarrow (4-a)+(b-2)\cdot i=0 \Rightarrow \left[x+y\cdot i=0 \Rightarrow x=0\ ,\ y=0\right] \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \left.\begin{matrix} 4-a=0 \\ b-2=0 \end{matrix}\right\} \Rightarrow \left.\begin{matrix} a=4 \\ b=2 \end{matrix}\right\} \Rightarrow a+b=6.$$

Vježba 025

Ako je polinom $x^4 + 2 \cdot x^3 + a \cdot x^2 + b \cdot x + 3$ djeljiv sa $x^2 + 1$, koliko iznosi $a - b$?

Rezultat: 2.

Zadatak 026 (Ivana, hotelijerska škola)

Broj $1 - 2 \cdot i$ je nultočka polinoma $x^3 + a \cdot x + b$ s realnim koeficijentima. Koliko iznosi njegova realna nultočka?

Rješenje 026

Ponovimo!

- Ako su x_1, x_2, i x_3 korijeni (nultočke) kubne jednadžbe $a \cdot x^3 + b \cdot x^2 + c \cdot x + d = 0$, tada vrijedi:

$$a\cdot x^3+b\cdot x^2+c\cdot x+d=a\cdot\left(x-x_1\right)\cdot\left(x-x_2\right)\cdot\left(x-x_3\right).$$

- Dva polinoma su jednaka ako i samo ako su istog stupnja i ako su im koeficijenti uz iste potencije jednaki.
- $(a-b)\cdot(a+b)=a^2-b^2 \quad , \quad (a-b)^2=a^2-2\cdot a\cdot b+b^2.$

Ako je kompleksni broj $x_1 = 1 - 2 \cdot i$ nultočka polinoma, tada je i njemu konjugirano kompleksni broj $x_2 = 1 + 2 \cdot i$ također nultočka polinoma.

$$x^3+a\cdot x+b=\left(x-x_1\right)\cdot\left(x-x_2\right)\cdot\left(x-x_3\right) \Rightarrow x^3+a\cdot x+b=\left[x-(1-2\cdot i)\right]\cdot\left[x-(1+2\cdot i)\right]\cdot\left(x-x_3\right) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow x^3+a\cdot x+b=\left[x-1+2\cdot i\right]\cdot\left[x-1-2\cdot i\right]\cdot\left(x-x_3\right) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow x^3+a\cdot x+b=\left[(x-1)+2\cdot i\right]\cdot\left[(x-1)-2\cdot i\right]\cdot\left(x-x_3\right) \Rightarrow x^3+a\cdot x+b=\left[(x-1)^2+4\right]\cdot\left(x-x_3\right) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow x^3+a\cdot x+b=\left[x^2-2\cdot x+1+4\right]\cdot\left(x-x_3\right) \Rightarrow x^3+a\cdot x+b=\left[x^2-2\cdot x+5\right]\cdot\left(x-x_3\right) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow x^3+a\cdot x+b=x^3-x^2\cdot x_3-2\cdot x^2+2\cdot x\cdot x_3+5\cdot x-5\cdot x_3 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow x^3+a\cdot x+b=x^3+\left(-x_3-2\right)\cdot x^2+\left(2\cdot x_3+5\right)\cdot x-5\cdot x_3.$$

Iz jednakosti polinoma slijedi da je koeficijent uz potenciju x^2 jednak nuli, tj.

$$-x_3-2=0 \Rightarrow x_3=-2.$$

Vježba 026

Broj $1 - 2 \cdot i$ je nultočka polinoma $x^3 + a \cdot x + b$ s realnim koeficijentima. Koliko iznosi zbroj nultočka?

Rezultat: 0.

Zadatak 027 (Ivana, hotelijerska škola)

Koji je od navedenih polinoma djeljiv s $(x - 1) \cdot (x - 2)$?

$A.\ x^5-x^4+x^2+x-2 \qquad B.\ x^4-2\cdot x^3-x+2 \qquad C.\ x^4-2\cdot x^3+x^2-x+3$

$D.\ x^5-2\cdot x^4+3\cdot x^2-5\cdot x-2 \qquad E.\ x^3-2\cdot x+1$

Rješenje 027

1.inačica

Svaki od ponuđenih polinoma podijelimo s polinomom:

$$Q(x)=(x-1)\cdot(x-2)\;\Rightarrow\;Q(x)=x^2-3\cdot x+2.$$

Ako je ostatak dijeljenja 0 (nulpolinom), našli smo traženi polinom. Na primjer,

$$\begin{array}{l}
\left(x^4-2\cdot x^3\qquad\quad -x+2\right):\left(x^2-3\cdot x+2\right)=x^2+x+1\\
\underline{\pm x^4\mp 3\cdot x^3\pm 2\cdot x^2}\\
\qquad\quad x^3-2\cdot x^2-x\\
\qquad\quad \underline{\pm x^3\mp 2\cdot x^2\pm x}\\
\qquad\qquad x^2-3\cdot x+2\\
\qquad\qquad \underline{\pm x^2\mp 3\cdot x\pm 2}\\
\qquad\qquad\qquad 0
\end{array}$$

Odgovor je pod B.

2.inačica

Svaki od ponuđenih polinoma pokušamo rastaviti na faktore. Traženi polinom mora sadržavati faktore x – 1 i x – 2. Na primjer,

$$B.\quad x^4-2\cdot x^3-x+2=x^3\cdot(x-2)-(x-2)=(x-2)\cdot\left(x^3-1\right)=\underline{(x-2)\cdot(x-1)}\cdot\left(x^2+x+1\right).$$

Odgovor je pod B.
Najelegantnija je treća inačica.

3.inačica

Uočimo da su $x_1 = 1$ i $x_2 = 2$ nultočke polinoma

$$Q(x)=(x-1)\cdot(x-2).$$

Brojevi $x_1 = 1$ i $x_2 = 2$ ujedno su i nultočke traženog polinoma. Računamo redom:

$$A.\;\left.\begin{array}{l} x_1=1,\ P(x)=x^5-x^4+x^2+x-2\\ x_2=2,\ P(x)=x^5-x^4+x^2+x-2\end{array}\right\}\Rightarrow\left.\begin{array}{l}P(1)=1^5-1^4+1^2+1-2\\ P(2)=2^5-2^4+2^2+2-2\end{array}\right\}\Rightarrow\left.\begin{array}{l}P(1)=1-1+1+1-2\\ P(2)=32-16+4+2-2\end{array}\right\}\Rightarrow$$

$$\Rightarrow\left.\begin{array}{l}P(1)=0\\ P(2)=20\end{array}\right\}\Rightarrow\ \text{nije rješenje}$$

$$B.\;\left.\begin{array}{l} x_1=1,\ P(x)=x^4-2\cdot x^3-x+2\\ x_2=2,\ P(x)=x^4-2\cdot x^3-x+2\end{array}\right\}\Rightarrow\left.\begin{array}{l}P(1)=1^4-2\cdot 1^3-1+2\\ P(2)=2^4-2\cdot 2^3-2+2\end{array}\right\}\Rightarrow\left.\begin{array}{l}P(1)=1-2-1+2\\ P(2)=16-16-2+2\end{array}\right\}\Rightarrow$$

$$\Rightarrow\left.\begin{array}{l}P(1)=0\\ P(2)=0\end{array}\right\}\Rightarrow\ \text{je rješenje}$$

Ostale slučajeve ne treba računati jer je samo jedan odgovor točan. Odgovor je pod B.

Vježba 027

Koji je od navedenih polinoma djeljiv s x · (x – 1) · (x – 2)?

$A.\ x^5-x^4+x^2+x-2\qquad B.\ x^5-2\cdot x^4-x^2+2\cdot x\qquad C.\ x^4-2\cdot x^3+x^2-x+3$

$D.\ x^5-2\cdot x^4+3\cdot x^2-5\cdot x-2\qquad B.\ x^3-2\cdot x+1$

Rezultat: Odgovor je pod B.

Zadatak 028 (Lily, gimnazija)

Nađite ostatak pri dijeljenju polinoma f polinomom g ako je: $f(x)=3\cdot x^2-5\cdot x+7,\ g(x)=x+3.$

Rješenje 028

Ponovimo!

Ako je pri dijeljenju polinoma f polinomom g rezultat q i ostatak r, tj. ako je f = q · g + r, onda je r = 0 (tada je f djeljiv s g) ili je stupanj polinoma r manji od stupnja polinoma g.

Poseban slučaj je dijeljenje polinoma f linearnim polinomom x – c, $c\in R$ (c je element skupa R):

$$f(x)=(x-c)\cdot q(x)+r.$$

Ta jednakost vrijedi za sve $x\in R$, posebno za x = c:

$$f(c)=(c-c)\cdot q(c)+r \Rightarrow f(c)=0\cdot q(c)+r \Rightarrow f(c)=r.$$

Zapamtimo!

$$f(x)=(x-c)\cdot q(x)+f(c).$$

Pri dijeljenju polinoma f s (x – c) ostatak je f(c).

Računamo traženi ostatak pri dijeljenju polinoma. Budući da je x + 3 = x – (– 3), ostatak je f(– 3). Dakle,

$$r=f(-3)=3\cdot(-3)^2-5\cdot(-3)+7=3\cdot 9+15+7=27+15+7=49.$$

Vježba 028

Nađite ostatak pri dijeljenju polinoma f polinomom g ako je:

$$f(x)=5\cdot x^3+2\cdot x^2-6\cdot x+1,\ g(x)=x-1.$$

Rezultat: 2.

Zadatak 029 (Maturant, gimnazija)

Nađite ostatak pri dijeljenju polinoma p(x) = $x^{512}-x^{310}+3$ polinomom q(x) = x^2-1.

Rješenje 029

Kada dijelimo polinom p(x) polinomom q(x) tražimo takav polinom Q(x) da je

p(x) = q(x) · Q(x).

Ako takav polinom Q(x) postoji, kažemo da je polinom p(x) djeljiv polinomom q(x). U općem slučaju bit će

p(x) = q(x) · Q(x) + R(x),

gdje je R(x) ostatak dijeljenja polinoma p(x) polinomom q(x). Ostatak R(x) je uvijek za bar jedan stupanj niži polinom od q(x).

Budući da je polinom q(x) = x^2-1 polinom drugog stupnja, ostatak dijeljenja ima oblik R(x) = a · x + b. Ostatak dijeljenja iznosi:

$$p(x)=\left(x^2-1\right)\cdot Q(x)+R(x) \Rightarrow x^{512}-x^{310}+3=\left(x^2-1\right)\cdot Q(x)+a\cdot x+b \Rightarrow \left.\begin{matrix}\text{nultočke polinoma}\\ q(x)=\left(x^2-1\right)\\ x=1\ ,\ x=-1\end{matrix}\right\} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \left.\begin{matrix}x=1 \Rightarrow 1^{512}-1^{310}+3=\left(1^2-1\right)\cdot Q(1)+a\cdot 1+b\\ x=-1 \Rightarrow (-1)^{512}-(-1)^{310}+3=\left((-1)^2-1\right)\cdot Q(-1)+a\cdot(-1)+b\end{matrix}\right\} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \left.\begin{matrix}1-1+3=0\cdot Q(1)+a+b\\ 1-1+3=0\cdot Q(-1)-a+b\end{matrix}\right\} \Rightarrow \left.\begin{matrix}3=a+b\\ 3=-a+b\end{matrix}\right\} \Rightarrow \begin{bmatrix}\text{metoda suprotnih}\\ \text{koeficijenata}\end{bmatrix} \Rightarrow 6=2\cdot b \Rightarrow b=3 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \left.\begin{matrix}b=3\\ a+b=3\end{matrix}\right\} \Rightarrow a=0.$$

Ostatak pri dijeljenju je 3.

Vježba 029

Nađite ostatak pri dijeljenju polinoma $p(x) = x^{512} - x^{310} + 3$ polinomom $q(x) = x - 1$.

Rezultat: 3.

Zadatak 030 (Los-Habalos, gimnazija)

Kolika je najveća zajednička mjera polinoma:

$$P_1(x) = 9 \cdot x^3 - 72 \quad , \quad P_2(x) = 9 \cdot x^2 - 36 \quad , \quad P_3(x) = 9 \cdot x^4 - 72 \cdot x^2 + 144?$$

Rješenje 030

Ponovimo!

$$a^3 - b^3 = (a - b) \cdot \left(a^2 + a \cdot b + b^2\right) \quad , \quad a^2 - b^2 = (a - b) \cdot (a + b) \quad , \quad a^2 - 2 \cdot a \cdot b + b^2 = (a - b)^2.$$

Najveća zajednička mjera je umnožak svih faktora koji su zajednički za sve polinome. Prvo polinome rastavimo na faktore:

- $P_1(x) = 9 \cdot x^3 - 72 = 9 \cdot \left(x^3 - 8\right) = 9 \cdot (x - 2) \cdot \left(x^2 + 2 \cdot x + 4\right)$
- $P_2(x) = 9 \cdot x^2 - 36 = 9 \cdot \left(x^2 - 4\right) = 9 \cdot (x - 2) \cdot (x + 2)$
- $P_3(x) = 9 \cdot x^4 - 72 \cdot x^2 + 144 = 9 \cdot \left(x^4 - 8 \cdot x + 16\right) = 9 \cdot \left(x^2 - 4\right)^2 = 9 \cdot (x - 2) \cdot (x + 2) \cdot (x - 2) \cdot (x + 2).$

Sad je

$$M\left(P_1(x), P_2(x), P_3(x)\right) = 9 \cdot (x - 2).$$

Vježba 030

Kolika je najveća zajednička mjera polinoma:

$$P_1(x) = 9 \cdot x^3 - 72 \quad , \quad P_2(x) = 9 \cdot x^2 - 36?$$

Rezultat: $M\left(P_1(x), P_2(x)\right) = 9 \cdot (x - 2).$

Zadatak 031 (Los-Habalos, gimnazija)

Koliki je najmanji zajednički višekratnik polinoma:

$$P_1(x) = (x^2 + 2 \cdot x + 4) \cdot (x + 2) \quad , \quad P_2(x) = x - 2 \quad , \quad P_3(x) = x^2 - 4?$$

Rješenje 031

Ponovimo!

$$(a - b) \cdot \left(a^2 + a \cdot b + b^2\right) = a^3 - b^3 \quad , \quad a^2 - b^2 = (a - b) \cdot (a + b).$$

Najmanji zajednički višekratnik jednak je produktu faktora koji se javljaju ili u jednom, ili u drugom ili u trećem polinomu. Rastavi na faktore tih polinoma glase:

- $P_1(x) = \left(x^2 + 2 \cdot x + 4\right) \cdot (x + 2)$
- $P_2(x) = x - 2$
- $P_3(x) = x^2 - 4 = (x - 2) \cdot (x + 2)$

pa je

$$v\left(P_1(x), P_2(x), P_3(x)\right) = \left(x^2 + 2 \cdot x + 4\right) \cdot (x + 2) \cdot (x - 2) = (x - 2) \cdot \left(x^2 + 2 \cdot x + 4\right) \cdot (x + 2) = \left(x^3 - 8\right) \cdot (x + 2).$$

Vježba 031

Koliki je najmanji zajednički višekratnik polinoma:

$$P_1(x) = x - 2 \quad , \quad P_2(x) = x^2 - 4?$$

Rezultat: $M\left(P_1(x), P_2(x)\right) = x^2 - 4.$

Zadatak 032 (Anamarija, maturantica)

Ako je polinom P(x) = 2 · x^4 + 2 · x^3 + a · x^2 + b · x – 3 djeljiv polinomom Q(x) = x^2 + x + 3, nađite P(– 1).

Rješenje 032

Najprije podijelimo polinome da bismo dobili ostatak:

$$\begin{array}{l}\left(2\cdot x^4 \quad +2\cdot x^3 \quad +a\cdot x^2 \quad +b\cdot x \quad -3\right):\left(x^2+x+3\right)=2\cdot x^2+(a-6)\\ \pm 2\cdot x^4 \quad \pm 2\cdot x^3 \quad \pm 6\cdot x^2\\ \hline \qquad (a-6)\cdot x^2 \quad +b\cdot x \quad -3\\ \qquad \pm(a-6)\cdot x^2 \pm (a-6)\cdot x \quad \pm 3\cdot(a-6)\\ \hline \qquad\qquad (b-a+6)\cdot x+(-3-3\cdot a+18) \Rightarrow \text{ostatak}\end{array}$$

Budući da ostatak mora biti jednak nuli za svaki x, vrijedi:

$$\left.\begin{array}{l} b-a+6=0 \\ -3-3\cdot a+18=0 \end{array}\right\} \Rightarrow \left.\begin{array}{l} b-a=-6 \\ -3\cdot a=3-18 \end{array}\right\} \Rightarrow \left.\begin{array}{l} b-a=-6 \\ -3\cdot a=-15 \ /:(-3) \end{array}\right\} \Rightarrow \left.\begin{array}{l} b-a=-6 \\ a=5 \end{array}\right\} \Rightarrow b-5=-6 \Rightarrow b=-1.$$

Polinom P(x) glasi:

$$P(x)=2\cdot x^4+2\cdot x^3+5\cdot x^2-x-3$$

pa je

$$P(-1)=2\cdot(-1)^4+2\cdot(-1)^3+5\cdot(-1)^2-(-1)-3 \Rightarrow P(-1)=2-2+5+1-3 \Rightarrow P(-1)=3.$$

Vježba 032

Ako je polinom P(x) = 2 · x^4 + 2 · x^3 + a · x^2 + b · x – 3 djeljiv polinomom Q(x) = x^2 + x + 3, nađite P(1).

Rezultat: P(1) = 5.

Zadatak 033 (Tihomir, gimnazija)

Zadan je polinom f(x, y, z) = x + y – z. Provjeri valjanost ove jednakosti:

$$a\cdot f(a, b, c)+b\cdot f(b, c, a)+c\cdot f(c, a, b)=a^2+b^2+c^2.$$

Rješenje 033

$$a\cdot f(a, b, c)+b\cdot f(b, c, a)+c\cdot f(c, a, b)=a\cdot(a+b-c)+b\cdot(b+c-a)+c\cdot(c+a-b)=$$

$$=a^2+a\cdot b-a\cdot c+b^2+b\cdot c-a\cdot b+c^2+a\cdot c-b\cdot c=a^2+a\cdot b-a\cdot c+b^2+b\cdot c-a\cdot b+c^2+a\cdot c-b\cdot c=$$

$$=a^2+b^2+c^2.$$

Vježba 033

Zadan je polinom f(x, y, z) = x + y – z. Provjeri valjanost ove jednakosti:

$$f(a, b, c) + f(b, c, a) + f(c, a, b) = a + b + c.$$

Rezultat: Točna je.

Zadatak 034 (Hrvoje, gimnazija)

Odredi realan broj k tako da polinom f(x) = k · x^2 – k · x + k – 3 bude potpuni kvadrat nekog dvočlanog izraza.

Rješenje 034

Ponovimo!

$$(a+b)^2=a^2+2\cdot a\cdot b+b^2 \quad , \quad a\cdot b=0 \Leftrightarrow a=0 \text{ ili } b=0 \text{ ili } a=b=0.$$

Diskriminanta kvadratne jednadžbe a · x^2 + b · x + c = 0 je broj

$$D = b^2 - 4\cdot a\cdot c.$$

- Ako je D > 0, jednadžba ima dva realna rješenja.
- Ako je D = 0, jednadžba ima jedno dvostruko realno rješenje.
- Ako je D < 0, jednadžba ima kompleksno-konjugirana rješenja.

Poučak o jednakosti polinoma:
Dva polinoma su jednaka ako i samo ako su istog stupnja i ako su im koeficijenti uz iste potencije jednaki.

Faktorizacija kvadratnog trinoma
Svaki se kvadratni trinom može napisati u obliku

$$a\cdot x^2+b\cdot x+c=a\cdot\left(x-x_1\right)\cdot\left(x-x_2\right),$$

gdje su x_1 i x_2 rješenja pripadne kvadratne jednadžbe

$$a\cdot x^2+b\cdot x+c=0.$$

1.inačica
Da bi polinom $f(x) = k\cdot x^2 - k\cdot x + k - 3$ bio potpuni kvadrat nekog dvočlanog izraza, treba naći realan broj k za koji kvadratna jednadžba

$$k\cdot x^2 - k\cdot x + k - 3 = 0$$

ima jedno dvostruko realno rješenje:

$$\left.\begin{array}{l} k\cdot x^2-k\cdot x+k-3=0 \\ a=k\ ,\ b=-k\ ,\ c=k-3 \\ D=0 \end{array}\right\}\Rightarrow \left.\begin{array}{l} a=k\ ,\ b=-k\ ,\ c=k-3 \\ b^2-4\cdot a\cdot c=0 \end{array}\right\}\Rightarrow (-k)^2-4\cdot k\cdot(k-3)=0\Rightarrow$$

$$\Rightarrow k^2-4\cdot k^2+12\cdot k=0\Rightarrow -3\cdot k^2+12\cdot k=0\ /:(-3)\Rightarrow k^2-4\cdot k=0\Rightarrow k\cdot(k-4)=0\Rightarrow$$

$$\Rightarrow \left.\begin{array}{l} k=0 \\ k-4=0 \end{array}\right\}\Rightarrow \left.\begin{array}{l} k_1=0\ \text{nema smisla} \\ k_2=4 \end{array}\right\}\Rightarrow k=4.$$

2.inačica
Da bi se polinom $f(x) = k\cdot x^2 - k\cdot x + k - 3$ mogao napisati kao potpuni kvadrat nekog dvočlanog izraza, taj izraz mora biti linearnog oblika, $a\cdot x + b$:

$$k\cdot x^2-k\cdot x+k-3=(a\cdot x+b)^2\Rightarrow k\cdot x^2-k\cdot x+k-3=a^2\cdot x^2+2\cdot a\cdot b\cdot x+b^2\Rightarrow\left[\begin{array}{l}\text{jednakost}\\ \text{polinoma}\end{array}\right]\Rightarrow$$

$$\Rightarrow \left.\begin{array}{l} a^2=k \\ 2\cdot a\cdot b=-k \\ b^2=k-3 \end{array}\right\}\Rightarrow\left[\begin{array}{l}\text{pomnožimo prvu}\\ \text{i treću jednadžbu}\end{array}\right]\Rightarrow \left.\begin{array}{l} a^2\cdot b^2=k\cdot(k-3) \\ 2\cdot a\cdot b=-k \end{array}\right\}\Rightarrow\left[\begin{array}{l}\text{kvadriramo drugu}\\ \text{jednadžbu}\end{array}\right]\Rightarrow$$

$$\Rightarrow \left.\begin{array}{l} a^2\cdot b^2=k\cdot(k-3) \\ 2\cdot a\cdot b=-k\ /^2 \end{array}\right\}\Rightarrow\left[\begin{array}{l}\text{kvadriramo drugu}\\ \text{jednadžbu}\end{array}\right]\Rightarrow \left.\begin{array}{l} a^2\cdot b^2=k\cdot(k-3) \\ 4\cdot a^2\cdot b^2=k^2 \end{array}\right\}\Rightarrow\left[\begin{array}{l}\text{metoda}\\ \text{supstitucije}\end{array}\right]\Rightarrow$$

$$\Rightarrow 4\cdot k\cdot(k-3)=k^2\Rightarrow 4\cdot k^2-12\cdot k=k^2\Rightarrow 4\cdot k^2-12\cdot k-k^2=0\Rightarrow 3\cdot k^2-12\cdot k=0\ /:3\Rightarrow$$

$$\Rightarrow k^2-4\cdot k=0\Rightarrow k\cdot(k-4)=0\Rightarrow \left.\begin{array}{l} k=0 \\ k-4=0 \end{array}\right\}\Rightarrow \left.\begin{array}{l} k_1=0\ \text{nema smisla} \\ k_2=4 \end{array}\right\}\Rightarrow k=4.$$

Vježba 034

Odredi realan broj k tako da polinom $f(x) = (k + 1)\cdot x^2 + (k + 1)\cdot x + 1$ bude potpuni kvadrat nekog dvočlanog izraza.

Rezultat: k = 3.

Zadatak 035 (Tea, srednja škola)

Odredi polinom P(x), ako je $P(2\cdot x)=(x+1)^3-3\cdot\left(x^2-1\right)\cdot(x+1)+3\cdot\left(x^2-1\right)\cdot(x-1)-(x-1)^3$.

Rješenje 035

Ponovimo!

$$a^2-b^2=(a-b)\cdot(a+b)\quad,\quad(a-b)^3=a^3-3\cdot a^2\cdot b+3\cdot a\cdot b^2-b^3.$$

Za funkciju f kažemo da je konstanta ako vrijedi

$$f(x)=konst.$$

za svaki realni broj x.

1.inačica

Zadani polinom transformiramo na jednostavniji oblik:

$$P(2\cdot x)=(x+1)^3-3\cdot\left(x^2-1\right)\cdot(x+1)+3\cdot\left(x^2-1\right)\cdot(x-1)-(x-1)^3\Rightarrow$$

$$\Rightarrow P(2\cdot x)=(x+1)^3-3\cdot(x-1)\cdot(x+1)\cdot(x+1)+3\cdot(x-1)\cdot(x+1)\cdot(x-1)-(x-1)^3\Rightarrow$$

$$\Rightarrow P(2\cdot x)=(x+1)^3-3\cdot(x+1)^2\cdot(x-1)+3\cdot(x+1)\cdot(x-1)^2-(x-1)^3\Rightarrow$$

$$\Rightarrow P(2\cdot x)=\left((x+1)-(x-1)\right)^3\Rightarrow P(2\cdot x)=(x+1-x+1)^3\Rightarrow P(2\cdot x)=2^3\Rightarrow P(2\cdot x)=8.$$

Zaključujemo da je polinom P konstanta, tj. P(x) = 8 za svaki realan broj x.

2.inačica

$$P(2\cdot x)=(x+1)^3-3\cdot\left(x^2-1\right)\cdot(x+1)+3\cdot\left(x^2-1\right)\cdot(x-1)-(x-1)^3\Rightarrow$$

$$\Rightarrow P(2\cdot x)=x^3+3\cdot x^2+3\cdot x+1-3\cdot\left(x^3+x^2-x-1\right)+3\cdot\left(x^3-x^2-x+1\right)-\left(x^3-3\cdot x^2+3\cdot x-1\right)\Rightarrow$$

$$\Rightarrow P(2\cdot x)=x^3+3\cdot x^2+3\cdot x+1-3\cdot x^3-3\cdot x^2+3\cdot x+3+3\cdot x^3-3\cdot x^2-3\cdot x+3-x^3+3\cdot x^2-3\cdot x+1\Rightarrow$$

$$\Rightarrow P(2\cdot x)=x^3+3\cdot x^2+3\cdot x+1-3\cdot x^3-3\cdot x^2+3\cdot x+3+3\cdot x^3-3\cdot x^2-3\cdot x+3-x^3+3\cdot x^2-3\cdot x+1\Rightarrow$$

$$\Rightarrow P(2\cdot x)=8.$$

Zaključujemo da je polinom P konstanta, tj. P(x) = 8 za svaki realan broj x.

Vježba 035

Odredi polinom P(x), ako je $P(5\cdot x)=(x+1)^3-3\cdot\left(x^2-1\right)\cdot(x+1)+3\cdot\left(x^2-1\right)\cdot(x-1)-(x-1)^3$.

Rezultat: $P(5\cdot x)=8.$

Zadatak 036 (Željka, gimnazija)

Ako je $x^2-3\cdot x+5=0$, koliko je $x^4-6\cdot x^3+9\cdot x^2-7$?

Rješenje 036

Ponovimo!

$$(a+b+c)^2=a^2+b^2+c^2+2\cdot a\cdot b+2\cdot a\cdot c+2\cdot b\cdot c\quad,\quad a^n\cdot a^m=a^{n+m}.$$

$$x^2-3\cdot x+5=0\Rightarrow\left[\text{kvadriramo jednadžbu}\right]\Rightarrow x^2-3\cdot x+5=0\,/^2\Rightarrow$$

$$\Rightarrow\left(x^2\right)^2+(-3\cdot x)^2+5^2+2\cdot x^2\cdot(-3\cdot x)+2\cdot x^2\cdot 5+2\cdot(-3\cdot x)\cdot 5=0\Rightarrow$$

$$\Rightarrow x^4+9\cdot x^2+25-6\cdot x^3+10\cdot x^2-30\cdot x=0\Rightarrow x^4-6\cdot x^3+9\cdot x^2+10\cdot x^2-30\cdot x+25=0\Rightarrow$$

$$\Rightarrow x^4-6\cdot x^3+9\cdot x^2-7+7+10\cdot x^2-30\cdot x+25=0\Rightarrow x^4-6\cdot x^3+9\cdot x^2-7+10\cdot x^2-30\cdot x+25+7=0\Rightarrow$$

$$\Rightarrow x^4-6\cdot x^3+9\cdot x^2-7+10\cdot x^2-30\cdot x+32=0 \Rightarrow x^4-6\cdot x^3+9\cdot x^2-7+10\cdot x^2-30\cdot x+50-18=0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow x^4-6\cdot x^3+9\cdot x^2-7+\left(10\cdot x^2-30\cdot x+50\right)-18=0 \Rightarrow x^4-6\cdot x^3+9\cdot x^2-7+10\cdot\left(x^2-3\cdot x+5\right)-18=0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow x^4-6\cdot x^3+9\cdot x^2-7+10\cdot 0-18=0 \Rightarrow x^4-6\cdot x^3+9\cdot x^2-7+0-18=0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow x^4-6\cdot x^3+9\cdot x^2-7=18.$$

Vježba 036

Ako je $x^2-x+2=0$, koliko je $x^4-2\cdot x^3+x^2+7$?

Rezultat: 11.

Zadatak 037 (Andrija, gimnazija)

Koliki je zbroj svih koeficijenata polinoma P(x), ako je P(x – 1) = (x + 1)^3?

Rješenje 037

Ponovimo!

Ako je zadan polinom n – tog stupnja

$$P_n(x)=a_n\cdot x^n+a_{n-1}\cdot x^n+a_{n-2}\cdot x^{n-2}+\ ...\ +a_2\cdot x^2+a_1\cdot x+a_0,$$

tada je

$$P_n(1)=a_n+a_{n-1}+a_{n-2}+\ ...\ +a_2+a_1+a_0.$$

1.inačica

Budući da je zbroj svih koeficijenata polinoma P(x) jednak P(1), slijedi:

$$\left.\begin{array}{l} x=2 \\ P(x-1)=(x+1)^3 \end{array}\right\} \Rightarrow P(2-1)=(2+1)^3 \Rightarrow P(1)=3^3 \Rightarrow P(1)=27.$$

2.inačica

Najprije odredimo polinom P(x):

$$P(x-1)=(x+1)^3 \Rightarrow \left[\begin{array}{l} \text{zamjena (supstitucija)} \\ x-1=t \Rightarrow x=t+1 \end{array}\right] \Rightarrow P(t)=(t+1+1)^3 \Rightarrow P(t)=(t+2)^3 \Rightarrow P(x)=(x+2)^3.$$

Budući da je zbroj svih koeficijenata polinoma P(x) jednak P(1), slijedi:

$$\left.\begin{array}{l} x=1 \\ P(x)=(x+2)^3 \end{array}\right\} \Rightarrow P(1)=(1+2)^3 \Rightarrow P(1)=3^3 \Rightarrow P(1)=27.$$

Vježba 037

Koliki je zbroj svih koeficijenata polinoma P(x), ako je P(x – 2) = (x + 1)^3?

Rezultat: 64.

Zadatak 038 (Kiki, gimnazija)

Koeficijenti polinoma f su prirodni brojevi manji od 10. Ako je f(10) = 53124, nađi f(x).

Rješenje 038

Zadani polinom razvijemo po potencijama od 10:

$$f(10)=53124 \Rightarrow f(10)=50000+3000+100+20+4 \Rightarrow f(10)=5\cdot 10000+3\cdot 1000+100+2\cdot 10+4 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow f(10)=5\cdot 10^4+3\cdot 10^3+10^2+2\cdot 10^1+4.$$

Budući da su koeficijenti traženog polinoma f prirodni brojevi manji od 10, polinom ima oblik

$$f(x)=5\cdot x^4+3\cdot x^3+x^2+2\cdot x+4.$$

Vježba 038

Koeficijenti polinoma f su prirodni brojevi manji od 10. Ako je f(10) = 876, nađi f(x).

Rezultat: $f(x)=8\cdot x^2+7\cdot x+6.$

Zadatak 039 (Kiki, gimnazija)

Odredi koeficijent uz x^3 u uobičajenom prikazu polinoma $f(x)=\left(x^3-2\cdot x^2+x-1\right)^2$.

Rješenje 039

Ponovimo!

Polinom n – tog stupnja ima oblik:

$$P_n(x)=a_n\cdot x^n+a_{n-1}\cdot x^n+a_{n-2}\cdot x^{n-2}+\ ...\ +a_2\cdot x^2+a_1\cdot x+a_0\ ,\ a_n\neq 0.$$

$$(a+b+c+d)^2=a^2+b^2+c^2+d^2+2\cdot a\cdot b+2\cdot a\cdot c+2\cdot a\cdot d+2\cdot b\cdot c+2\cdot b\cdot d+2\cdot c\cdot d.$$

$$a^n\cdot a^m=a^{n+m}.$$

Kvadrirajući četveročlani izraz u polinomu $f(x)=\left(x^3-2\cdot x^2+x-1\right)^2$ vidimo da se potencija x^3 dobije u dva slučaja:

$$2\cdot x^3\cdot(-1)\ \text{i}\ 2\cdot\left(-2\cdot x^2\right)\cdot x.$$

Koeficijent uz x^3 iznosi:

$$2\cdot x^3\cdot(-1)+2\cdot\left(-2\cdot x^2\right)\cdot x=-2\cdot x^3-4\cdot x^3=-6\cdot x^3\ \Rightarrow\ -6\ \text{koeficijent}.$$

Vježba 039

Odredi koeficijent uz x^4 u uobičajenom prikazu polinoma $f(x)=\left(x^3-2\cdot x^2+x-1\right)^2$.

Rezultat: 6.

Zadatak 040 (Kiki, gimnazija)

Pri dijeljenju polinoma f polinomom g dobije se kvocijent $q = x^2 + 1$ i ostatak $r = x^3 + 5\cdot x$. Koliki se ostatak dobije pri dijeljenju polinoma f polinomom q?

Rješenje 040

Ponovimo!

$$\frac{a+b}{n}=\frac{a}{n}+\frac{b}{n}.$$

Teorem o dijeljenju polinoma:

Za svaka dva polinoma f i g, $g\neq 0$, postoje jedinstveni polinomi q i r takvi da vrijedi

$$f=g\cdot q+r.$$

U slučaju da je $r\neq 0$, tada vrijedi da je stupanj polinoma r manji od stupnja polinoma g.

Prema teoremu o dijeljenju polinoma imamo:

$$f=g\cdot q+r\ \Rightarrow\ f=g\cdot\left(x^2+1\right)+x^3+5\cdot x\ \Rightarrow\ f=g\cdot\left(x^2+1\right)+x^3+5\cdot x\ /\cdot\frac{1}{x^2+1}\ \Rightarrow$$

$$\Rightarrow\ \frac{f}{x^2+1}=g+\frac{x^3+5\cdot x}{x^2+1}\ \Rightarrow\ \frac{f}{x^2+1}=g+\frac{x^3+x+4\cdot x}{x^2+1}\ \Rightarrow\ \frac{f}{x^2+1}=g+\frac{x^3+x}{x^2+1}+\frac{4\cdot x}{x^2+1}\ \Rightarrow$$

$$\Rightarrow\ \frac{f}{x^2+1}=g+\frac{x\cdot\left(x^2+1\right)}{x^2+1}+\frac{4\cdot x}{x^2+1}\ \Rightarrow\ \frac{f}{x^2+1}=g+x+\frac{4\cdot x}{x^2+1}\ \Rightarrow\ \frac{f}{x^2+1}=g+x+\frac{4\cdot x}{x^2+1}\ /\cdot\left(x^2+1\right)\ \Rightarrow$$

$$\Rightarrow\ f=(g+x)\cdot\left(x^2+1\right)+4\cdot x\ \Rightarrow\ \text{ostatak}\ \ r=4\cdot x.$$

Vježba 040

Pri dijeljenju polinoma f polinomom g dobije se kvocijent $q = x^2 + 1$ i ostatak $r = x^3 + 3\cdot x$. Koliki se ostatak dobije pri dijeljenju polinoma f polinomom q?

Rezultat: $2\cdot x$.