Zadatak 001 (Ivan, tehnička škola)

Nađite ostatak r(x) pri dijeljenju polinoma $f(x) = 3x^2 + 5x + 3$ polinomom $g(x) = x + 1$.

Rješenje 001

1.inačica

Kada dijelimo polinom f(x) polinomom g(x) tražimo takav polinom q(x) da je

$$f(x) = g(x) \cdot q(x).$$

Ako takav polinom q(x) postoji, kažemo da je polinom f(x) djeljiv polinomom g(x). U općem slučaju bit će

$$f(x) = g(x) \cdot q(x) + r(x),$$

gdje je r(x) ostatak dijeljenja polinoma f(x) polinomom g(x). Ostatak r(x) je uvijek za bar jedan stupanj niži polinom od g(x).

Promatramo dijeljenje polinoma

$$(3x^2 + 5x + 3) : (x + 1).$$

Polinome koje dijelimo pišemo po padajućim potencijama. Dijelimo prvi član djeljenika, $3x^2$, prvim članom djelitelja, x.

$$3x^2 : x = 3x.$$

Količnik 3x zatim pomnožimo djeliteljem, x + 1, i umnožak potpisujemo pod odgovarajuće potencije djeljenika.

$$\begin{array}{l} \left(3x^2 + 5x + 3\right) : \left(x + 1\right) = 3x \\ \underline{+3x^2 + 3x} \end{array}$$

Potpisanim članovima $+3x^2 + 3x$ promijenimo predznake i zbrojimo s odgovarajućim članovima djeljenika. Spuštamo sljedeći član djeljenika, 3.

$$\begin{array}{l} \left(3x^2 + 5x + 3\right) : \left(x + 1\right) = 3x \\ \underline{\underline{+}3x^2 \underline{+}3x} \\ \qquad\quad + 2x + 3 \end{array}$$

Ponovno prvi član djeljenika, $2x + 3$ dijelimo prvim članom djelitelja, x.

$$2x : x = 2.$$

Količnik 2 zatim pomnožimo djeliteljem, x + 1, i umnožak potpisujemo pod odgovarajuće potencije djeljenika.

$$\begin{array}{l} \left(3x^2 + 5x + 3\right) : \left(x + 1\right) = 3x + 2 \\ \underline{\underline{+}3x^2 \underline{+}3x} \\ \qquad\quad + 2x + 3 \\ \qquad\quad \underline{\underline{+}2x \underline{+} 2} \\ \qquad\qquad\quad 1 \end{array}$$

Ostatak je 1.

2.inačica

Polinom g(x) je prvog stupnja. To znači da ostatak r(x) može biti realan broj r(x) = k. Prema teoremu o dijeljenju polinoma:

$$f(x) = g(x) \cdot q(x) + r(x),$$

dobije se

$$3x^2 + 5x + 3 = (x + 1) \cdot q(x) + r(x),$$

$$3x^2 + 5x + 3 = (x + 1) \cdot q(x) + k.$$

Za $x = -1$ dobiva se

$$3 \cdot (-1)^2 + 5 \cdot (-1) + 3 = (-1 + 1) \cdot q(x) + k,$$

$$3 - 5 + 3 = 0 \cdot q(x) + k,$$

$$k = 1 \quad \Rightarrow \text{ostatak je } 1.$$

Vježba 001

Nađite ostatak r(x) pri dijeljenju polinoma $f(x) = x^2 - 3x + 5$ polinomom $g(x) = x - 1$.

Rezultat: 3.

Zadatak 002 (Kika, gimnazija)

Koliki je zbroj koeficijenata polinoma $f(x) = (x^2 - 2x + 2)^5 \cdot (x^2 - 5x + 3)^3$?

Rješenje 002

Promatrajmo polinom n–tog stupnja s realnim koeficijentima:

$$f(x) = a_n \cdot x^n + a_{n-1} \cdot x^{n-1} + a_{n-2} \cdot x^{n-2} + \ldots + a_2 \cdot x^2 + a_1 \cdot x + a_0.$$

Za x = 1 upravo se dobije zbroj koeficijenata:

$$f(x) = a_n + a_{n-1} + a_{n-2} + \ldots + a_2 + a_1 + a_0.$$

Sada je:

$$f(x) = (x^2 - 2x + 2)^5 \cdot (x^2 - 5x + 3)^3,$$

$$f(1) = (1^2 - 2 \cdot 1 + 2)^5 \cdot (1^2 - 5 \cdot 1 + 3)^3 = (1 - 2 + 2)^5 \cdot (1 - 5 + 3)^3 = 1^5 \cdot (-1)^3 = -1.$$

Vježba 002

Koliki je zbroj koeficijenata polinoma $f(x) = (3x^2 + 4x - 6)^3 \cdot (2x^2 + 5x - 5)^2$?

Rezultat: 4.

Zadatak 003 (Ana, gimnazija)

Zadan je polinom $f(x) = x^3 + x + 1$. Provjeri da za svaki realan broj a vrijedi $f(a) + f(-a) = 2$.

Rješenje 003

$$f(x) = x^3 + x + 1,$$

$$f(a) + f(-a) = a^3 + a + 1 + (-a)^3 + (-a) + 1 = a^3 + a + 1 - a^3 - a + 1 = 2.$$

Vježba 003

Zadan je polinom $f(x) = x^4 - 2x^2 + 1$. Provjeri da za svaki realan broj a vrijedi $f(a) - f(-a) = 0$.

Rezultat: Točno je.

Zadatak 004 (Ines, gimnazija)

Ako je polinom $P(x) = x^4 + ax^2 + bx + c$ djeljiv polinomom $Q(x) = (x - 1)^3$, koliko je a + b + c?

Rješenje 004

Polinom $P(x) = x^4 + ax^2 + bx + c$ je četvrtog stupnja. Polinom $Q(x) = (x - 1)^3 = x^3 - 3x^2 + 3x - 1$ je polinom trećeg stupnja. Dijelimo polinom P(x) polinomom Q(x). Ostatak mora biti jednak nuli jer su polinomi djeljivi.

$$\left(x^4 \qquad + \; ax^2 \quad + \; bx \quad + \; c\right) : \left(x^3 - 3x^2 + 3x - 1\right) = x + 3$$

$$\pm x^4 \mp 3x^3 \quad \pm 3x^2 \quad \mp x$$

$$3x^3 + (a-3)x^2 + (b+1)x \quad + c$$

$$\pm 3x^3 \quad \mp 9x^2 \quad \pm 9x \quad \mp 3$$

$$(a+6)x^2 + (b-81)x + (c+3)$$

Ostatak će biti jednak nuli ako su svi koeficijenti jednaki nuli:

$$(a + 6)x^2 + (b - 8)x + (c + 3) = 0,$$

$$a + 6 = 0,\ b - 8 = 0,\ c + 3 = 0,$$

$$a = -6,\ b = 8,\ c = -3.$$

Sada je:

$$a + b + c = -6 + 8 - 3 = -1.$$

Vježba 004

Ako je polinom $P(x) = x^4 + ax^2 + bx + c$ djeljiv polinomom $Q(x) = (x + 1)^3$, koliko je $a + b + c$?

Rezultat: $a + b + c = -17.$

Zadatak 005 (Ines, gimnazija)

Ako je ostatak prilikom dijeljenja polinoma $P(x) = x^4 + ax^2 + bx + c$ polinomom $Q(x) = (x - 1)^3$ jednak nuli, koliko iznosi $a \cdot b \cdot c$?

Rješenje 005

Polinom $P(x) = x^4 + ax^2 + bx + c$ je četvrtog stupnja. Polinom $Q(x) = (x - 1)^3 = x^3 - 3x^2 + 3x - 1$ je polinom trećeg stupnja. Dijelimo polinom P(x) polinomom Q(x), a ostatak je prema uvjetu zadatka jednak nuli:

$$\begin{array}{llllll}
\left(x^4\right. & & +\ ax^2 & +\ bx & \left.+\ c\right) : \left(x^3 - 3x^2 + 3x - 1\right) = x + 3 \\
\pm x^4 & \mp 3x^3 & \pm 3x^2 & \mp x & \\
\hline
 & 3x^3 & +(a-3)x^2 & +(b+1)x & +c \\
 & \pm 3x^3 & \mp 9x^2 & \pm 9x & \mp 3 \\
\hline
 & & (a+6)x^2 & +(b-81)x & +(c+3)
\end{array}$$

Ostatak će biti jednak nuli ako su svi koeficijenti jednaki nuli:

$$(a + 6)x^2 + (b - 8)x + (c + 3) = 0,$$

$$a + 6 = 0,\ b - 8 = 0,\ c + 3 = 0,$$

$$a = -6,\ b = 8,\ c = -3.$$

Sada je:

$$a \cdot b \cdot c = -6 \cdot 8 \cdot (-3) = 144.$$

Vježba 005

Ako je ostatak prilikom dijeljenja polinoma $P(x) = x^4 + ax^2 + bx + c$ polinomom $Q(x) = (x + 1)^3$ jednak nuli, koliko
iznosi $a \cdot b \cdot c$?

Rezultat: $a \cdot b \cdot c = -144.$

Zadatak 006 (Goran, tehnička škola)

Koliki je koeficijent a ako je u polinomu $f(x) = (ax^4 - 3x^3 - 5x^2 + ax - 1)^2$ koeficijent uz x^4 jednak 9?

Rješenje 006

Zadani polinom napišemo kao umnožak:

$$f(x) = (ax^4 - 3x^3 - 5x^2 + ax - 1) \cdot (ax^4 - 3x^3 - 5x^2 + ax - 1).$$

Množeći svaki član prve zagrade sa svakim članom druge zagrade dobit ćemo 25 članova. Zanimaju nas samo članovi koji sadrže potenciju x^4. Potencija x^4 dobije se množenjem:

x^4 s brojem
x^3 s x
x^2 s x^2
x^1 s x^3
broj s x^4

Zato ćemo množiti samo te članove zadanog polinoma:

$$f(x) = ax^4 \cdot (-1) - 3x^3 \cdot ax - 5x^2 \cdot (-5x^2) + ax \cdot (-3x^3) - 1 \cdot ax^4 + \ldots =$$

$$= -ax^4 - 3ax^4 + 25x^4 - 3ax^4 - ax^4 + \ldots = -8ax^4 + 25x^4 + \ldots = (-8a + 25) \cdot x^4 + \ldots .$$

Budući da je uz x^4 koeficijent 9, slijedi

$$-8a + 25 = 9 \quad \Rightarrow \quad a = 2.$$

Vježba 006

Koliki je koeficijent a ako je u polinomu $f(x) = (ax^4 - 3x^3 - 5x^2 + ax - 1)^2$ koeficijent uz x^4 jednak 1?

Rezultat: $a = 3.$

Zadatak 007 (Ines, gimnazija)

Za koji je realan broj a polinom $f(x) = x^6 + x^3 + a$ djeljiv polinomom $g(x) = x^3 + x + a$?

Rješenje 007

Kako se dijele polinomi? Vidi Zadatak001

$$\left(x^6 \quad + x^3 \quad + a\right) : \left(x^3 + x + a\right) = x^3 - x + (1 - a)$$

$$\pm x^6 \quad \pm x^4 \quad \pm ax^3$$

$$\overline{\quad -x^4 + (1-a)x^3 \quad + a}$$

$$\mp x^4 \quad \mp x^2 \quad \mp ax$$

$$\overline{\quad (1-a)x^3 + x^2 + ax + a}$$

$$\pm (1-a)x^3 \quad \pm (1-a)x \pm a(1-a)$$

$$\overline{\quad x^2 + (a - 1 + a)x + a - a + a^2 = x^2 + (2a - 1)x + a^2}$$

Ostatak će biti jednak nuli ako su svi koeficijenti jednaki nuli. Ostatak je polinom drugog stupnja. Budući da uz x^2 stoji koeficijent 1, ne postoji takav broj a za koji su polinomi f(x) i g(x) djeljivi.

Vježba 007

Za koji je realan broj a polinom $f(x) = x^3 + x + a$ djeljiv polinomom $g(x) = x + a$?

Rezultat: $a = 0.$

Zadatak 008 (Ines, gimnazija)

Ako je $x^2 - 3x + 5 = 0$, koliko je $x^4 - 6x^3 + 9x^2 - 7$?

Rješenje 008

Podsjetimo se formule za kvadrat trinoma:

$$\mathbf{(a + b + c)^2 = a^2 + b^2 + c^2 + 2ab + 2ac + 2bc.}$$

Kvadriramo zadanu jednakost:

$$x^2 - 3x + 5 = 0 \quad /^2$$

$$x^4 + 9x^2 + 25 - 6x^3 + 10x^2 - 30x = 0.$$

Izdvojimo izraz čiju vrijednost tražimo:

$$x^4-6x^3+9x^2-7\underline{+7+25}+10x^2-30x=0,$$

$$(x^4-6x^3+9x^2-7)+10x^2-30x+32=0,$$

$$(x^4-6x^3+9x^2-7)+10x^2-30x+50-18=0,$$

$$(x^4-6x^3+9x^2-7)+(10x^2-30x+50)-18=0,$$

$$(x^4-6x^3+9x^2-7)+10\cdot(x^2-3x+5)-18=0,$$

$$(x^4-6x^3+9x^2-7)+10\cdot 0-18=0,$$

$$x^4-6x^3+9x^2-7=18.$$

Vježba 008

Ako je $x^2 + x + 1 = 0$, koliko je $x^4 + 2x^3 + x^2$?

Rezultat: 1.

Zadatak 009 (Ines, gimnazija)

Ako je $x = 2$ jedna nultočka polinoma $P(x) = x^3 - x^2 - x - 2$, koliki je zbroj preostalih nultočaka?

Rješenje 009

Uporabit ćemo Vièteovu formulu za polinom trećeg stupnja. O Vièteovim formulama pogledaj Zadatak012.

Za polinom trećeg stupnja $P(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$ vrijedi:

$$x_1+x_2+x_3=-\frac{b}{a}.$$

Iz zadatka slijedi:

$$P(x)=x^3-x^2-x-2,$$

$$a=1,\ b=-1,\ c=-1,\ d=-2,$$

$$x_1+x_2+x_3=-\frac{-1}{1}=1.$$

Budući da je jedna nultočka poznata, $x_1 = 2$, pišemo:

$$2+x_2+x_3=1\ \Rightarrow\ x_2+x_3=-1.$$

Vježba 009

Ako je $x = 5$jedna nultočka polinoma $P(x) = x^3 - x^2 - x - 2$, koliki je zbroj preostalih nultočaka?

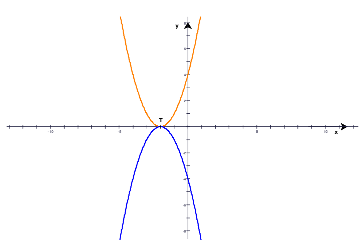
Rezultat: -4.

Zadatak 010 (Ines, gimnazija)

Broj -2 dvostruka je nultočka funkcije $f(x) = ax^2 + bx + c$. Ako je $f(-1) + f(5) = 25$, koliko je $a + b + c = ?$

Rješenje 010

Ako je broj $x = -2$ dvostruka nultočka polinoma drugog stupnja $f(x) = ax^2 + bx + c$, znači da tjeme parabole leži na x – osi pa je njegova apscisa jednaka -2.



$$T\left(-\frac{b}{2a},\frac{4ac-b^2}{4a}\right)\ \Rightarrow\ -\frac{b}{2a}=-2\ /\cdot(-2a)\ \Rightarrow\ b=4a.$$

Budući da je x = – 2 nultočka polinoma, vrijedi:

$$a \cdot (-2)^2 + b \cdot (-2) + c = 0,$$

$$4a - 2b + c = 0.$$

Iz f(– 1) + f(5) = 25 slijedi:

$$a \cdot (-1)^2 + b \cdot (-1) + c + a \cdot 5^2 + b \cdot 5 + c = 25,$$

$$a - b + c + 25a + 5b + c = 25,$$

$$26a + 4b + 2c = 25.$$

Dobili smo sustav tri linearne jednadžbe s tri nepoznanice:

$$\left.\begin{array}{r} b = 4a \\ 4a - 2b + c = 0 \\ 26a + 4b + 2c = 25 \end{array}\right\} \Rightarrow \left.\begin{array}{r} 4a - 2 \cdot 4a + c = 0 \\ 26a + 4 \cdot 4a + 2c = 25 \end{array}\right\} \Rightarrow \left.\begin{array}{r} 4a - 8a + c = 0 \\ 26a + 16a + 2c = 25 \end{array}\right\} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \left.\begin{array}{r} -4a + c = 0 \\ 42a + 2c = 25 \end{array}\right\} \Rightarrow \left.\begin{array}{l} c = 4a \\ 42a + 2c = 25 \end{array}\right\} \Rightarrow 42a + 2 \cdot 4a = 25 \Rightarrow 42a + 8a = 25 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 50a = 25 \Rightarrow a = \frac{25}{50} = \frac{1}{2} \Rightarrow c = 4 \cdot a = 4 \cdot \frac{1}{2} = 2, \; b = 4 \cdot a = 4 \cdot \frac{1}{2} = 2.$$

Zbroj je jednak:

$$a + b + c = \frac{1}{2} + 2 + 2 = \frac{9}{2}.$$

Vježba 010

Broj 0 dvostruka je nultočka funkcije $f(x) = ax^2 + bx + c$. Ako je f(– 1) + f(5) = 52, koliko je a + b + c = ?

Rezultat: 2.

Zadatak 011 (Ines, gimnazija)

Koliko iznosi koeficijent a ako za kompoziciju polinoma $P_1(x) = ax + 1$ i $P_2(x) = x^2 + 1$ vrijedi $P_1 \circ P_2 = P_2 \circ P_1$?

Rješenje 011

Iz uvjeta $P_1 \circ P_2 = P_2 \circ P_1$ slijedi:

$$(P_1 \circ P_2)(x) = (P_2 \circ P_1)(x) \Rightarrow P_1(P_2(x)) = P_2(P_1(x)) \Rightarrow P_1(x^2 + 1) = P_2(ax + 1) \Rightarrow$$

$$a \cdot (x^2 + 1) + 1 = (ax + 1)^2 + 1 \Rightarrow a \cdot (x^2 + 1) = (ax + 1)^2.$$

Dobivena jednakost vrijedi za svaki realan broj x $(\forall x \in R)$. Kako jednakost vrijedi za svaki x, to vrijedi i za x = 0:

$$a \cdot (0 + 1) = (a \cdot 0 + 1)^2 \Rightarrow a = 1.$$

Jednakost mora vrijediti i za bilo koji drugi realan broj x, na primjer, za x = 1:

$$a \cdot (1 + 1) = (a \cdot 1 + 1)^2 \Rightarrow 2a = (a + 1)^2 \Rightarrow 2a = a^2 + 2a + 1 \Rightarrow a^2 = -1 \Rightarrow a = \sqrt{-1} = i.$$

To je kontradikcija. Zaključujemo da ne postoji a takav da bi jednakost kompozicije vrijedila za svako $x \in R$.

Vježba 011

Koliko iznosi koeficijent a ako za kompoziciju polinoma $P_1(x) = ax + 1$ i $P_2(x) = x + 1$ vrijedi $P_1 \circ P_2 = P_2 \circ P_1$?

Rezultat: a = 1.

Zadatak 012 (Ines, gimnazija)

Dani su polinomi $P(x) = x^n \cdot (x - 1)$ i $Q(x) = (x^2 + x + 1)^m$. Kojeg je stupnja produkt $P(x) \cdot Q(x)$?

Rješenje 012

Ponovimo!

$$a^n \cdot a^m = a^{n+m} \quad , \quad \left(a^n\right)^m = a^{n \cdot m}$$

Zadani polinomi su:

$$P(x) = x^n \cdot (x-1) = x^{n+1} - x^n \quad , \quad Q(x) = \left(x^2 + x + 1\right)^m = x^{2m} + \ldots .$$

Polinom $P(x)$ je stupnja $n + 1$. Polinom $Q(x)$ je stupnja $2m$.
Njihov umnožak $P(x) \cdot Q(x)$ je polinom stupnja $2m + n + 1$:

$$P(x) \cdot Q(x) = \left(x^{n+1} - x^n\right) \cdot \left(x^{2m} + \ldots\right) = x^{2m+n+1} - x^{2m+n} + \ldots .$$

Vježba 012

Dani su polinomi $P(x) = x^n \cdot (x - 1)$ i $Q(x) = (x^2 + x + 1)^{4m}$. Kojeg je stupnja produkt $P(x) \cdot Q(x)$?

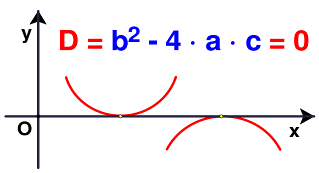
Rezultat: $8m + n + 1$.

Zadatak 013 (4A, hotelijerska škola)

Ako polinom $f(x) = ax^2 - 2x - 2$ ima dvostruki korijen, nađite $f(1) + f(-1)$.

Rješenje 013

Graf polinoma drugog stupnja je parabola. Ona će dirati x – os (tj. polinom će imati dvostruki korijen) ako je diskriminanta pripadne kvadratne jednadžbe jednaka nuli. Slijedi:



$$\left.\begin{array}{l} ax^2 - 2x - 2 = 0 \\ a = a, \; b = -2, \; c = -2 \\ D = b^2 - 4 \cdot a \cdot c = 0 \end{array}\right\} \Rightarrow 4 - 4 \cdot a \cdot (-2) = 0 \Rightarrow 4 + 8a = 0 \Rightarrow a = -\frac{1}{2}.$$

Konačno je:

$$f(x) = -\frac{1}{2} \cdot x^2 - 2 \cdot x - 2 \Rightarrow f(1) + f(-1) = -\frac{1}{2} \cdot 1^2 - 2 \cdot 1 - 2 - \frac{1}{2} \cdot (-1)^2 - 2 \cdot (-1) - 2 =$$

$$= -\frac{1}{2} - 2 - 2 - \frac{1}{2} + 2 - 2 = -5.$$

Vježba 013

Ako polinom $f(x) = ax^2 - 2x - 2$ ima dvostruki korijen, nađite $f(0) + f(2)$.

Rezultat: -10.

Zadatak 014 (Ante, tehnička škola)

Ako je $x = 1$ jedna nultočka polinoma $P(x) = x^3 - 1$, koliki je zbroj preostalih nultočaka?

Rješenje 014

$$P(x) = (x-1) \cdot \left(x^2 + x + 1\right).$$

Budući da je $x = 1$ nultočka polinoma $P(x)$, za zbroj preostalih nultočaka vrijedi:

$$\left.\begin{array}{l} x^2 + x + 1 = 0 \\ a = 1, \; b = 1, \; c = 1 \end{array}\right\} \Rightarrow [\text{Vièteova formula}] \Rightarrow x_2 + x_3 = -\frac{b}{a} = -1.$$

Vježba 014

Ako je $x = 2$ jedna nultočka polinoma $P(x) = x^3 - 8$, koliki je zbroj preostalih nultočaka?

Rezultat: -2.

Zadatak 015 (Tomislav, gimnazija)

Koje je kratnosti nultočka $x = 1$ polinoma $P(x) = x^4 - 4x^3 + 6x^2 - 4x + 1$?

Rješenje 015

Uočimo da se polinom pomoću binomne formule može ovako zapisati:

$$P(x)=x^4-4\cdot x^3+6\cdot x^2-4\cdot x+1=(x-1)^4.$$

Broj x = 1 je nultočka kratnosti 4.

Vježba 015

Koje je kratnosti nultočka x = 1 polinoma $P(x) = x^3 - 3x^2 + 3x - 1$?

Rezultat: Kratnost je 3.

Zadatak 016 (Tomislav, gimnazija)

Koje je kratnosti nultočka x = 1 polinoma $P(x)=x^3-x^2-x+1$?

Rješenje 016

Rastavimo polinom na faktore:

$$P(x)=x^3-x^2-x+1=x^3-x-x^2+1=x\cdot\left(x^2-1\right)-\left(x^2-1\right)=\left(x^2-1\right)\cdot(x-1)=$$

$$=(x-1)\cdot(x+1)\cdot(x-1)=(x-1)^2\cdot(x+1).$$

Broj x = 1 je dvostruka nultočka ili nultočka kratnosti 2.

Vježba 016

Koje je kratnosti nultočka x = – 1 polinoma $P(x)=x^3+x^2-x-1$?

Rezultat: Kratnost je 2.

Zadatak 017 (Goga, gimnazija)

Nađite ostatak r(x) pri dijeljenju polinoma $f(x) = x^{16} + x^9 + x^5 + 1$ polinomom $g(x) = x + 1$.

Rješenje 017

Polinom g(x) je prvog stupnja. To znači da ostatak r(x) može biti realan broj r(x) = k. Prema teoremu o dijeljenju polinoma:

$$f(x) = g(x)\cdot q(x) + r(x),$$

dobije se

$$x^{16} + x^9 + x^5 + 1 = (x + 1)\cdot q(x) + k.$$

Za x = – 1 slijedi:

$$(-1)^{16} + (-1)^9 + (-1)^5 + 1 = (-1 + 1)\cdot q(x) + k,$$

$$1 - 1 - 1 + 1 = 0\cdot q(-1) + k,$$

$k = 0$ => nema ostatka, vidimo da je polinom f(x) djeljiv sa g(x).

Vježba 017

Nađite ostatak r(x) pri dijeljenju polinoma $f(x) = x^{16} + x^9 + x^5 + 5$ polinomom $g(x) = x + 1$.

Rezultat: 4.

Zadatak 018 (Goga, gimnazija)

Za koji a je ostatak r(x) pri dijeljenju polinoma $f(x) = x^5 + x^2 + ax + 5$ polinomom $g(x) = x - 1$ jednak 3?

Rješenje 018

Polinom g(x) je prvog stupnja. To znači da ostatak r(x) može biti realan broj r(x) = k. Ako podijelimo f(x) sa g(x) dobijemo ostatak r(x) = 3. Prema teoremu o dijeljenju polinoma:

$$f(x) = g(x)\cdot q(x) + r(x),$$

dobije se

$$x^5 + x^2 + ax + 5 = (x - 1)\cdot q(x) + 3.$$

Za x = 1 slijedi:

$$1^5 + 1^2 + a\cdot 1 + 5 = (1 - 1)\cdot q(1) + 3 \Rightarrow 1 + 1 + a + 5 = 0\cdot q(1) + 3 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow a + 7 = 3 \Rightarrow a = -4.$$

Vježba 018

Za koji a je ostatak r(x) pri dijeljenju polinoma $f(x) = x^5 + x^2 + ax + 5$ polinomom $g(x) = x - 1$ jednak 6?

Rezultat: $a = -1$.

Zadatak 019 (Goga, gimnazija)

Koji uvjet moraju zadovoljavati koeficijenti polinoma f drugog stupnja, tako da on bude kvadrat nekog polinoma?

Rješenje 019

Podsjetimo se da kvadratna jednadžba $ax^2 + bx + c = 0$ ima dvostruko realno rješenje ako je diskriminanta jednaka nuli. Da bi polinom $f(x) = ax^2 + bx + c$ bio kvadrat nekog polinoma, mora biti:

$$\begin{cases} b^2 - 4 \cdot a \cdot c = 0 \\ a > 0 \quad , \quad c > 0. \end{cases}$$

Vježba 019

Napiši polinom $f(x) = 4x^2 + 20x + 25$ kao kvadrat nekog polinoma.

Rezultat: $f(x) = (2x + 5)^2$.

Zadatak 020 (Goga, gimnazija)

Ako su brojevi 1 i 2 nultočke polinoma $f(x) = 2x^3 + ax + b$, izračunaj $f(-1)$.

Rješenje 020

$$\left.\begin{array}{l} f(1)=0 \\ f(2)=0 \end{array}\right\} \Rightarrow \left.\begin{array}{l} 2 \cdot 1^3 + a \cdot 1 + b = 0 \\ 2 \cdot 2^3 + a \cdot 2 + b = 0 \end{array}\right\} \Rightarrow \left.\begin{array}{l} 2 + a + b = 0 \\ 16 + 2 \cdot a + b = 0 \end{array}\right\} \Rightarrow \left.\begin{array}{l} a + b = -2 \\ 2 \cdot a + b = -16 \end{array}\right\} \Rightarrow \left.\begin{array}{l} a + b = -2 \; / \cdot (-1) \\ 2 \cdot a + b = -16 \end{array}\right\} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \left.\begin{array}{l} -a - b = 2 \\ 2 \cdot a + b = -16 \end{array}\right\} \Rightarrow a = -14 \Rightarrow \left.\begin{array}{l} a + b = -2 \\ a = -14 \end{array}\right\} \Rightarrow -14 + b = -2 \Rightarrow b = 12.$$

Računamo $f(-1)$:

$$\left.\begin{array}{l} f(x) = 2 \cdot x^3 - 14 \cdot x + 12 \\ x = -1 \end{array}\right\} \Rightarrow f(-1) = 2 \cdot (-1)^3 - 14 \cdot (-1) + 12 = -2 + 14 + 12 = 24.$$

Vježba 020

Ako su brojevi 1 i 2 nultočke polinoma $f(x) = 2x^3 + ax + b$, izračunaj $f(3)$.

Rezultat: 24.