

**Zadatak 081 (Ella, gimnazija)**

$$\text{Riješi jednađžu } \frac{2}{|3 \cdot x - 6|} + 1 = \frac{3}{|2 \cdot x - 4|}.$$

**Rješenje 081**

Ponovimo!

Za realni broj  $x$  njegova je apsolutna vrijednost (modul) broj  $|x|$  koji određujemo na ovaj način:

$$|x| = \begin{cases} x, & x \geq 0 \\ -x, & x < 0. \end{cases}$$

Ako je broj  $x$  pozitivan ili nula, tada je on jednak svojoj apsolutnoj vrijednosti. Za svaki  $x$ ,  $x \geq 0$ , vrijedi  $|x| = x$ .

Ako je  $x$  negativan broj, njegova apsolutna vrijednost je suprotan broj  $-x$  koji je pozitivan. Za svaki  $x$ ,  $x < 0$ , je  $|x| = -x$ .

**S nulom se ne može dijeliti. Zato moramo odbaciti vrijednost nepoznanice  $x$  za koju je nazivnik jednak nuli.**

$$|x| = a, a > 0 \Rightarrow \begin{cases} x_1 = -a \\ x_2 = a \end{cases}, \quad n = \frac{n}{1}, \quad \frac{a}{b} + \frac{c}{d} = \frac{a \cdot d + b \cdot c}{b \cdot d}, \quad \frac{a}{b} - \frac{c}{d} = \frac{a \cdot d - b \cdot c}{b \cdot d}.$$

$$|a \cdot b| = |a| \cdot |b|, \quad \frac{a}{b} \cdot \frac{b}{a} = 1, \quad \frac{a}{b} = \frac{c}{d} \Rightarrow \frac{b}{a} = \frac{d}{c}.$$

Zakon distribucije množenja prema zbrajanju.

$$a \cdot (b + c) = a \cdot b + a \cdot c, \quad a \cdot b + a \cdot c = a \cdot (b + c).$$

1. inačica

Preoblikujemo zadanu jednađžu na sljedeći način:

$$\begin{aligned} \frac{2}{|3 \cdot x - 6|} + 1 &= \frac{3}{|2 \cdot x - 4|} \Rightarrow \frac{2}{|3 \cdot (x - 2)|} + 1 = \frac{3}{|2 \cdot (x - 2)|} \Rightarrow \\ \Rightarrow \frac{2}{|3 \cdot |x - 2||} + 1 &= \frac{3}{|2 \cdot |x - 2||} \Rightarrow \frac{2}{3 \cdot |x - 2|} + 1 = \frac{3}{2 \cdot |x - 2|}. \end{aligned}$$

Najprije raspravimo za koju vrijednost  $x$  nazivnik ne smije biti jednak nuli.

$$x - 2 \neq 0 \Rightarrow x \neq 2.$$

Sada vrijedi:

$$\begin{aligned} \frac{2}{3 \cdot |x - 2|} + 1 &= \frac{3}{2 \cdot |x - 2|} \Rightarrow \frac{2}{3 \cdot |x - 2|} + 1 = \frac{3}{2 \cdot |x - 2|} \quad / \cdot 6 \cdot |x - 2| \Rightarrow \\ \Rightarrow 4 + 6 \cdot |x - 2| &= 9 \Rightarrow 6 \cdot |x - 2| = 9 - 4 \Rightarrow 6 \cdot |x - 2| = 5 \Rightarrow 6 \cdot |x - 2| = 5 \quad / : 6 \Rightarrow \\ \Rightarrow |x - 2| = \frac{5}{6} &\Rightarrow \begin{cases} x - 2 = -\frac{5}{6} \\ x - 2 = \frac{5}{6} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = -\frac{5}{6} + 2 \\ x = \frac{5}{6} + 2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = -\frac{5}{6} + \frac{2}{1} \\ x = \frac{5}{6} + \frac{2}{1} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = \frac{-5 + 12}{6} \\ x = \frac{5 + 12}{6} \end{cases} \Rightarrow \\ \Rightarrow \begin{cases} x_1 = \frac{7}{6} \\ x_2 = \frac{17}{6} \end{cases}. \end{aligned}$$

2. inačica

Preoblikujemo zadanu jednađžu na sljedeći način:

$$\begin{aligned} \frac{2}{|3 \cdot x - 6|} + 1 &= \frac{3}{|2 \cdot x - 4|} \Rightarrow \frac{2}{|3 \cdot (x-2)|} + 1 = \frac{3}{|2 \cdot (x-2)|} \Rightarrow \\ &\Rightarrow \frac{2}{|3 \cdot |x-2||} + 1 = \frac{3}{|2 \cdot |x-2||} \Rightarrow \frac{2}{3 \cdot |x-2|} + 1 = \frac{3}{2 \cdot |x-2|} \Rightarrow \\ &\Rightarrow 1 = \frac{3}{2 \cdot |x-2|} - \frac{2}{3 \cdot |x-2|} \Rightarrow 1 = \frac{9-4}{6 \cdot |x-2|} \Rightarrow 1 = \frac{5}{6 \cdot |x-2|} \Rightarrow \frac{5}{6 \cdot |x-2|} = 1 \Rightarrow \\ &\Rightarrow \frac{5}{6 \cdot |x-2|} = 1 \quad /: \frac{5}{6} \Rightarrow \frac{1}{|x-2|} = \frac{6}{5}. \end{aligned}$$

Najprije raspravimo za koju vrijednost  $x$  nazivnik ne smije biti jednak nuli.

$$x-2 \neq 0 \Rightarrow x \neq 2.$$

Sada vrijedi:

$$\begin{aligned} \frac{1}{|x-2|} = \frac{6}{5} &\Rightarrow |x-2| = \frac{5}{6} \Rightarrow \\ \Rightarrow \left. \begin{array}{l} x-2 = -\frac{5}{6} \\ x-2 = \frac{5}{6} \end{array} \right\} &\Rightarrow \left. \begin{array}{l} x = -\frac{5}{6} + 2 \\ x = \frac{5}{6} + 2 \end{array} \right\} \Rightarrow \left. \begin{array}{l} x = -\frac{5}{6} + \frac{2}{1} \\ x = \frac{5}{6} + \frac{2}{1} \end{array} \right\} \Rightarrow \left. \begin{array}{l} x = \frac{-5+12}{6} \\ x = \frac{5+12}{6} \end{array} \right\} \Rightarrow \left. \begin{array}{l} x_1 = \frac{7}{6} \\ x_2 = \frac{17}{6} \end{array} \right\}. \end{aligned}$$

3. inačica

Preoblikujemo zadanu jednadžbu na sljedeći način:

$$\begin{aligned} \frac{2}{|3 \cdot x - 6|} + 1 &= \frac{3}{|2 \cdot x - 4|} \Rightarrow \frac{2}{|3 \cdot (x-2)|} + 1 = \frac{3}{|2 \cdot (x-2)|} \Rightarrow \\ &\Rightarrow \frac{2}{|3 \cdot |x-2||} + 1 = \frac{3}{|2 \cdot |x-2||} \Rightarrow \frac{2}{3 \cdot |x-2|} + 1 = \frac{3}{2 \cdot |x-2|}. \end{aligned}$$

Najprije raspravimo za koju vrijednost  $x$  nazivnik ne smije biti jednak nuli.

$$x-2 \neq 0 \Rightarrow x \neq 2.$$

Sada promatramo dva slučaja:

1. slučaj

$$\begin{aligned} x-2 > 0 &\Rightarrow x > 2 \Rightarrow |x-2| = x-2. \\ \left. \begin{array}{l} \frac{2}{3 \cdot |x-2|} + 1 = \frac{3}{2 \cdot |x-2|} \\ |x-2| = x-2 \end{array} \right\} &\Rightarrow \frac{2}{3 \cdot (x-2)} + 1 = \frac{3}{2 \cdot (x-2)} \Rightarrow \\ &\Rightarrow \frac{2}{3 \cdot (x-2)} + 1 = \frac{3}{2 \cdot (x-2)} \quad /: 6 \cdot (x-2) \Rightarrow 4 + 6 \cdot (x-2) = 9 \Rightarrow 6 \cdot (x-2) = 9 - 4 \Rightarrow \\ &\Rightarrow 6 \cdot (x-2) = 5 \Rightarrow 6 \cdot (x-2) = 5 \quad /: 6 \Rightarrow x-2 = \frac{5}{6} \Rightarrow x = \frac{5}{6} + 2 \Rightarrow \\ &\Rightarrow x = \frac{5}{6} + \frac{2}{1} \Rightarrow x = \frac{5+12}{6} \Rightarrow x_1 = \frac{17}{6} \end{aligned}$$

jer je uvjet  $x > 2$  zadovoljen.

2. slučaj

$$x-2 < 0 \Rightarrow x < 2 \Rightarrow |x-2| = -(x-2) \Rightarrow |x-2| = -x+2 \Rightarrow |x-2| = 2-x.$$

$$\left. \begin{array}{l} \frac{2}{3 \cdot |x-2|} + 1 = \frac{3}{2 \cdot |x-2|} \\ |x-2| = 2-x \end{array} \right\} \Rightarrow \frac{2}{3 \cdot (2-x)} + 1 = \frac{3}{2 \cdot (2-x)} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \frac{2}{3 \cdot (2-x)} + 1 = \frac{3}{2 \cdot (2-x)} \quad / \cdot 6 \cdot (2-x) \Rightarrow 4 + 6 \cdot (2-x) = 9 \Rightarrow 6 \cdot (2-x) = 9 - 4 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 6 \cdot (2-x) = 5 \Rightarrow 6 \cdot (2-x) = 5 \quad / : 6 \Rightarrow 2-x = \frac{5}{6} \Rightarrow -x = \frac{5}{6} - 2 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow -x = \frac{5}{6} - \frac{2}{1} \Rightarrow -x = \frac{5-12}{6} \Rightarrow -x = -\frac{7}{6} \Rightarrow -x = -\frac{7}{6} \quad / \cdot (-1) \Rightarrow x_2 = \frac{7}{6}$$

jer je uvjet  $x < 2$  zadovoljen.

### Vježba 081

Riješi jednačbu  $\frac{2}{|x-2|} - 1 = \frac{1}{2 \cdot |x-2|}$ .

**Rezultat:**  $x_1 = \frac{1}{2}, x_2 = \frac{7}{2}$ .

### Zadatak 082 (Iva ☺, maturantica TUPŠ - a)

Riješi jednačbu  $|x-2| = 2 \cdot x - 1$ .

### Rješenje 082

Ponovimo!

Za realni broj  $x$  njegova je apsolutna vrijednost (modul) broj  $|x|$  koji određujemo na ovaj način:

$$|x| = \begin{cases} x, & x \geq 0 \\ -x, & x < 0. \end{cases}$$

Apsolutna vrijednost:

- pozitivnog broja jednaka je tom broju

$$|x| = x \text{ za } x > 0$$

- negativnog broja suprotna je tom broju

$$|x| = -x \text{ za } x < 0$$

- nule jednaka je nuli

$$|x| = 0 \text{ za } x = 0.$$

Zakon distribucije množenja prema zbrajanju.

$$a \cdot (b+c) = a \cdot b + a \cdot c \quad , \quad a \cdot b + a \cdot c = a \cdot (b+c).$$

Jednačba

$$|x| = a$$

- ima dva rješenja  $x_1 = a$  i  $x_2 = -a$  ako je  $a > 0$
- ima rješenje  $x = 0$  ako je  $a = 0$
- nema rješenja ako je  $a < 0$ .

1. inačica

$ x-2  = 2 \cdot x - 1$	
Uvjet: $x-2 \geq 0 \Rightarrow x \geq 2$ $ x-2  = x-2$	Uvjet: $x-2 < 0 \Rightarrow x < 2$ $ x-2  = -(x-2)$
$x-2 = 2 \cdot x - 1$ $x-2 \cdot x = -1+2$ $-x = 1$ $-x = 1 \ / \cdot (-1)$ $x = -1$	$-(x-2) = 2 \cdot x - 1$ $-x+2 = 2 \cdot x - 1$ $-x-2 \cdot x = -1-2$ $-3 \cdot x = -3$ $-3 \cdot x = -3 \ / \cdot (-3)$ $x = 1$
Zbog uvjeta $x \geq 2$ slijedi da $x = -1$ nije rješenje jednadžbe.	Zbog uvjeta $x < 2$ slijedi da $x = 1$ je rješenje jednadžbe.

2. inačica

Pretpostavimo li kao pri rješavanju jednadžbe  $|x| = a$  dobije se:

$ x-2  = 2 \cdot x - 1$	
$x-2 = 2 \cdot x - 1$ $x-2 \cdot x = -1+2$ $-x = 1$ $-x = 1 \ / \cdot (-1)$ $x = -1$	$x-2 = -(2 \cdot x - 1)$ $x-2 = -2 \cdot x + 1$ $x+2 \cdot x = 1+2$ $3 \cdot x = 3$ $3 \cdot x = 3 \ / \cdot 3$ $x = 1$

Provjeravamo rješenja, tj. izvršimo pokus.

$ x-2  = 2 \cdot x - 1$	$ x-2  = 2 \cdot x - 1$
$x = -1$	$x = 1$
$ -1-2  = 2 \cdot (-1) - 1$ $ -3  = -2 - 1$ $3 = -3$ <b>nije istinito</b>	$ 1-2  = 2 \cdot 1 - 1$ $ -1  = 2 - 1$ $1 = 1$ <b>istinito</b>
$x = -1$ nije rješenje jednadžbe.	$x = 1$ je rješenje jednadžbe.

### Vježba 082

Riješi jednadžbu  $|2-x| = 2 \cdot x - 1$ .

**Rezultat:**  $x = 1$ .

### Zadatak 083 (Marija, gimnazija)

Riješi nejednadžbu  $|x| > x$ .

### Rješenje 083

Ponovimo!

$$a > b, c < 0 \Rightarrow a \cdot c < b \cdot c.$$

Za realni broj  $x$  njegova je apsolutna vrijednost (modul) broj  $|x|$  koji određujemo na ovaj način:

$$|x| = \begin{cases} x, & x \geq 0 \\ -x, & x < 0. \end{cases}$$

Apsolutna vrijednost:

- pozitivnog broja jednaka je tom broju

$$|x| = x \text{ za } x > 0$$

- negativnog broja suprotna je tom broju

$$|x| = -x \text{ za } x < 0$$

- nule jednaka je nuli

$$|x| = 0 \text{ za } x = 0.$$

U zadanoj nejednadžbi  $|x| > x$  postoje dvije mogućnosti:

- $x < 0$
- $x > 0$ .

Dakle, pojavljuju se dva intervala  $\langle -\infty, 0 \rangle$  i  $\langle 0, +\infty \rangle$  za koje dana nejednadžba ima dva različita zapisa.

Za  $x < 0$  nejednadžba ima oblik

$$\left. \begin{array}{l} |x| > x \\ x < 0 \end{array} \right\} \Rightarrow -x > x \Rightarrow -x - x > 0 \Rightarrow -2 \cdot x > 0 \Rightarrow -2 \cdot x > 0 \text{ } /: (-2) \Rightarrow x < 0.$$

Zbog uvjeta  $x < 0$  rješenje je:

$$x \in \langle -\infty, 0 \rangle.$$

Za  $x > 0$  nejednadžba ima oblik

$$\left. \begin{array}{l} |x| > x \\ x > 0 \end{array} \right\} \Rightarrow x > x \text{ nema smisla.}$$

Prikaz pomoću tablice.

$ x  > x$	
Uvjet: $x < 0$ $ x  = -x$	Uvjet: $x > 0$ $ x  = x$
$-x > x$ $-x - x > 0$ $-2 \cdot x > 0$ $-2 \cdot x > 0 \text{ } /: (-2)$ $x < 0$	$x > x$ <b>nema smisla</b>
Zbog uvjeta $x < 0$ slijedi $x \in \langle -\infty, 0 \rangle.$	Nema rješenja.

Rješenje nejednadžbe je  $x \in \langle -\infty, 0 \rangle.$

### Vježba 083

Riješi nejednadžbu  $|x| - x > 0$ .

**Rezultat:**  $x \in \langle -\infty, 0 \rangle$ .

### Zadatak 084 (Vlado, gimnazija)

Koliko rješenja ima jednadžba  $|2 - |1 - |x||| = 1$ ?

### Rješenje 084

Ponovimo!

Za realni broj  $x$  njegova je apsolutna vrijednost (modul) broj  $|x|$  koji određujemo na ovaj način:

$$|x| = \begin{cases} x, & x \geq 0 \\ -x, & x < 0. \end{cases}$$

Apsolutna vrijednost:

- pozitivnog broja jednaka je tom broju

$$|x| = x \text{ za } x > 0$$

- negativnog broja suprotna je tom broju

$$|x| = -x \text{ za } x < 0$$

- nule jednaka je nuli

$$|x| = 0 \text{ za } x = 0.$$

$$|x| = a, \quad a > 0 \Rightarrow \begin{cases} x_1 = a \\ x_2 = -a \end{cases}$$

$$\begin{aligned}
|2 - |1 - |x||| = 1 &\Rightarrow \left. \begin{array}{l} 2 - |1 - |x|| = 1 \\ 2 - |1 - |x|| = -1 \end{array} \right\} \Rightarrow \left. \begin{array}{l} -|1 - |x|| = 1 - 2 \\ -|1 - |x|| = -1 - 2 \end{array} \right\} \Rightarrow \left. \begin{array}{l} -|1 - |x|| = -1 \\ -|1 - |x|| = -3 \end{array} \right\} \Rightarrow \\
\Rightarrow \left. \begin{array}{l} -|1 - |x|| = -1 \cdot (-1) \\ -|1 - |x|| = -3 \cdot (-2) \end{array} \right\} \Rightarrow \left. \begin{array}{l} |1 - |x|| = 1 \\ |1 - |x|| = 3 \end{array} \right\} \Rightarrow \left. \begin{array}{l} 1 - |x| = 1 \\ 1 - |x| = 3 \\ 1 - |x| = -1 \\ 1 - |x| = -3 \end{array} \right\} \Rightarrow \left. \begin{array}{l} -|x| = 1 - 1 \\ -|x| = -1 - 1 \\ -|x| = 3 - 1 \\ -|x| = -3 - 1 \end{array} \right\} \Rightarrow \\
\Rightarrow \left. \begin{array}{l} -|x| = 0 \\ -|x| = -2 \\ -|x| = 2 \\ -|x| = -4 \end{array} \right\} \Rightarrow \left. \begin{array}{l} -|x| = 0 \cdot (-1) \\ -|x| = -2 \cdot (-1) \\ -|x| = 2 \cdot (-1) \\ -|x| = -4 \cdot (-1) \end{array} \right\} \Rightarrow \left. \begin{array}{l} |x| = 0 \\ |x| = 2 \\ |x| = -2 \\ |x| = 4 \end{array} \right\} \Rightarrow \left. \begin{array}{l} x_1 = 0 \\ x_{2,3} = \pm 2 \\ |x| = -2 \text{ nema smisla} \\ x_{4,5} = \pm 4 \end{array} \right\}.
\end{aligned}$$

Ima pet rješenja.

### Vježba 084

Koliki je zbroj svih rješenja jednadžbe  $|2 - |1 - |x||| = 1$ ?

**Rezultat:** 0.

**Zadatak 085 (Antun, gimnazija)**

Za  $x < 0$  razlomak  $\frac{\sqrt{x^2 - x \cdot \sqrt{8} + 2}}{x - \sqrt{2}}$  jednak je :

- A. 1      B.  $x + \sqrt{2}$       C. -1      D.  $\sqrt{2} - x$

**Rješenje 085**

Ponovimo!

$$\sqrt{a \cdot b} = \sqrt{a} \cdot \sqrt{b} \quad , \quad (\sqrt{a})^2 = a \quad , \quad a^2 - 2 \cdot a \cdot b + b^2 = (a-b)^2 \quad , \quad \sqrt{a^2} = |a|.$$

Za realni broj  $x$  njegova je apsolutna vrijednost (modul) broj  $|x|$  koji određujemo na ovaj način:

$$|x| = \begin{cases} x, & x \geq 0 \\ -x, & x < 0. \end{cases}$$

Apsolutna vrijednost:

- pozitivnog broja jednaka je tom broju

$$|x| = x \text{ za } x > 0$$

- negativnog broja suprotna je tom broju

$$|x| = -x \text{ za } x < 0$$

- nule jednaka je nuli

$$|x| = 0 \text{ za } x = 0.$$

Skratiti razlomak znači brojnik i nazivnik tog razlomka podijeliti istim brojem različitim od nule i jedinice

$$\frac{a \cdot n}{b \cdot n} = \frac{a}{b} \quad , \quad n \neq 0 \quad , \quad n \neq 1.$$

$$\begin{aligned} \frac{\sqrt{x^2 - x \cdot \sqrt{8} + 2}}{x - \sqrt{2}} &= \frac{\sqrt{x^2 - \sqrt{8} \cdot x + 2}}{x - \sqrt{2}} = \frac{\sqrt{x^2 - \sqrt{4 \cdot 2} \cdot x + 2}}{x - \sqrt{2}} = \frac{\sqrt{x^2 - \sqrt{4} \cdot \sqrt{2} \cdot x + 2}}{x - \sqrt{2}} = \\ &= \frac{\sqrt{x^2 - 2 \cdot \sqrt{2} \cdot x + 2}}{x - \sqrt{2}} = \frac{\sqrt{x^2 - 2 \cdot \sqrt{2} \cdot x + (\sqrt{2})^2}}{x - \sqrt{2}} = \frac{\sqrt{(x - \sqrt{2})^2}}{x - \sqrt{2}} = \frac{|x - \sqrt{2}|}{x - \sqrt{2}} = \\ &= \left[ x < 0 \Rightarrow x - \sqrt{2} < 0 \right] = \frac{-(x - \sqrt{2})}{x - \sqrt{2}} = \frac{-(x - \sqrt{2})}{x - \sqrt{2}} = -1. \end{aligned}$$

Odgovor je pod C.

**Vježba 085**

Za  $x > \sqrt{2}$  razlomak  $\frac{\sqrt{x^2 - x \cdot \sqrt{8} + 2}}{x - \sqrt{2}}$  jednak je :

- A. 1      B.  $x + \sqrt{2}$       C. -1      D.  $\sqrt{2} - x$

**Rezultat:** A.

**Zadatak 086 (Paula, srednja škola)**

Ako je  $x \in \langle 1, 3 \rangle$ , koliko je  $|2 \cdot x + 3| + |1 - 5 \cdot x|$ ?

- A.  $-7 \cdot x - 2$       B.  $-3 \cdot x + 4$       C.  $3 \cdot x - 4$       D.  $7 \cdot x + 2$

**Rješenje 086**

Ponovimo!

Za realni broj  $x$  njegova je apsolutna vrijednost (modul) broj  $|x|$  koji određujemo na ovaj način:

$$|x| = \begin{cases} x, & x \geq 0 \\ -x, & x < 0. \end{cases}$$

Apsolutna vrijednost:

- pozitivnog broja jednaka je tom broju

$$|x| = x \text{ za } x > 0$$

- negativnog broja suprotna je tom broju

$$|x| = -x \text{ za } x < 0$$

- nule jednaka je nuli

$$|x| = 0 \text{ za } x = 0.$$

Zakon distribucije množenja prema zbrajanju.

$$a \cdot (b + c) = a \cdot b + a \cdot c \quad , \quad a \cdot b + a \cdot c = a \cdot (b + c).$$

Budući da je  $x \in \langle 1, 3 \rangle$ , vrijedi:

- izraz  $2 \cdot x + 3$  je pozitivan
- izraz  $1 - 5 \cdot x$  je negativan.

$$x \in \langle 1, 3 \rangle \Rightarrow \left. \begin{array}{l} 2 \cdot x + 3 > 0 \\ 1 - 5 \cdot x > 0 \end{array} \right\}$$

Sada je

$$\begin{aligned} |2 \cdot x + 3| + |1 - 5 \cdot x| &= \left| \underbrace{2 \cdot x + 3}_+ \right| + \left| \underbrace{1 - 5 \cdot x}_- \right| = 2 \cdot x + 3 - (1 - 5 \cdot x) = \\ &= 2 \cdot x + 3 - 1 + 5 \cdot x = 7 \cdot x + 2. \end{aligned}$$

Odgovor je pod D.

**Vježba 086**

Ako je  $x \in \langle 1, 3 \rangle$ , koliko je  $|3 \cdot x + 3| + |1 - 4 \cdot x|$ ?

- A.  $-7 \cdot x - 2$       B.  $-3 \cdot x + 4$       C.  $3 \cdot x - 4$       D.  $7 \cdot x + 2$

**Rezultat:** D.

**Zadatak 087 (Paula, gimnazija)**

Riješimo jednadžbu:  $\frac{1}{|x-3|} + 4 = \frac{2}{|3-x|}$ ,  $x \neq 3$ .

**Rješenje 087**

Ponovimo!

Za realni broj  $x$  njegova je apsolutna vrijednost (modul) broj  $|x|$  koji određujemo na ovaj način:

$$|x| = \begin{cases} x, & x \geq 0 \\ -x, & x < 0. \end{cases}$$

Apsolutna vrijednost:



- pozitivnog broja jednaka je tom broju

$$|x| = x \text{ za } x > 0$$

- negativnog broja suprotna je tom broju

$$|x| = -x \text{ za } x < 0$$

- nule jednaka je nuli

$$|x| = 0 \text{ za } x = 0.$$

$$|a-b| = |b-a|, \quad |x| = a, a \geq 0 \Rightarrow \left. \begin{array}{l} x_1 = -a \\ x_2 = a \end{array} \right\}, \quad n = \frac{n}{1}, \quad \frac{a}{b} = a \cdot \frac{1}{b}.$$

$$\frac{a}{b} = \frac{c}{d} \Rightarrow \frac{b}{a} = \frac{d}{c}, \quad \frac{a}{n} - \frac{b}{n} = \frac{a-b}{n}, \quad \frac{a}{b} + \frac{c}{d} = \frac{a \cdot d + b \cdot c}{b \cdot d}.$$

1. inačica

$$\frac{1}{|x-3|} + 4 = \frac{2}{|3-x|} \Rightarrow \frac{1}{|x-3|} + 4 = \frac{2}{|x-3|} \Rightarrow 4 = \frac{2}{|x-3|} - \frac{1}{|x-3|} \Rightarrow 4 = \frac{1}{|x-3|} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \frac{1}{|x-3|} = 4 \Rightarrow \frac{1}{|x-3|} = \frac{4}{1} \Rightarrow |x-3| = \frac{1}{4} \Rightarrow \left. \begin{array}{l} x-3 = -\frac{1}{4} \\ x-3 = \frac{1}{4} \end{array} \right\} \Rightarrow \left. \begin{array}{l} x = -\frac{1}{4} + 3 \\ x = \frac{1}{4} + 3 \end{array} \right\} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \left. \begin{array}{l} x = -\frac{1}{4} + \frac{3}{1} \\ x = \frac{1}{4} + \frac{3}{1} \end{array} \right\} \Rightarrow \left. \begin{array}{l} x = \frac{-1+12}{4} \\ x = \frac{1+12}{4} \end{array} \right\} \Rightarrow \left. \begin{array}{l} x_1 = \frac{11}{4} \\ x_2 = \frac{13}{4} \end{array} \right\}.$$

2. inačica

$$\frac{1}{|x-3|} + 4 = \frac{2}{|3-x|} \Rightarrow \frac{1}{|x-3|} + 4 = \frac{2}{|x-3|} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \frac{1}{|x-3|} + 4 = \frac{2}{|x-3|} \quad / \cdot |x-3| \Rightarrow 1 + 4 \cdot |x-3| = 2 \Rightarrow 4 \cdot |x-3| = 2 - 1 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 4 \cdot |x-3| = 1 \Rightarrow 4 \cdot |x-3| = 1 \quad / \cdot \frac{1}{4} \Rightarrow |x-3| = \frac{1}{4} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \left. \begin{array}{l} x-3 = -\frac{1}{4} \\ x-3 = \frac{1}{4} \end{array} \right\} \Rightarrow \left. \begin{array}{l} x = -\frac{1}{4} + 3 \\ x = \frac{1}{4} + 3 \end{array} \right\} \Rightarrow \left. \begin{array}{l} x = -\frac{1}{4} + \frac{3}{1} \\ x = \frac{1}{4} + \frac{3}{1} \end{array} \right\} \Rightarrow \left. \begin{array}{l} x = \frac{-1+12}{4} \\ x = \frac{1+12}{4} \end{array} \right\} \Rightarrow \left. \begin{array}{l} x_1 = \frac{11}{4} \\ x_2 = \frac{13}{4} \end{array} \right\}.$$

3. inačica

$$\frac{1}{|x-3|} + 4 = \frac{2}{|3-x|} \Rightarrow \frac{1}{|x-3|} + 4 = \frac{2}{|x-3|} \Rightarrow \left[ \begin{array}{l} \text{zamjena} \\ t = \frac{1}{|x-3|} \end{array} \right] \Rightarrow t + 4 = 2 \cdot t \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 2 \cdot t = t + 4 \Rightarrow 2 \cdot t - t = 4 \Rightarrow t = 4.$$

Vraćamo se na zamjenu.

$$\left. \begin{array}{l} t = \frac{1}{|x-3|} \\ t = 4 \end{array} \right\} \Rightarrow \frac{1}{|x-3|} = 4 \Rightarrow \frac{1}{|x-3|} = \frac{4}{1} \Rightarrow |x-3| = \frac{1}{4} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \left. \begin{array}{l} x-3 = -\frac{1}{4} \\ x-3 = \frac{1}{4} \end{array} \right\} \Rightarrow \left. \begin{array}{l} x = -\frac{1}{4} + 3 \\ x = \frac{1}{4} + 3 \end{array} \right\} \Rightarrow \left. \begin{array}{l} x = -\frac{1}{4} + \frac{3}{1} \\ x = \frac{1}{4} + \frac{3}{1} \end{array} \right\} \Rightarrow \left. \begin{array}{l} x = \frac{-1+12}{4} \\ x = \frac{1+12}{4} \end{array} \right\} \Rightarrow \left. \begin{array}{l} x_1 = \frac{11}{4} \\ x_2 = \frac{13}{4} \end{array} \right\}.$$

### Vježba 087

Riješimo jednađbu:  $\frac{1}{2 \cdot |x-3|} + 2 = \frac{1}{|3-x|}$ ,  $x \neq 3$ .

**Rezultat:**  $x_1 = \frac{11}{4}$ ,  $x_2 = \frac{13}{4}$ .

### Zadatak 088 (Ante, srednja škola)

Ako je  $a^2 + b^2 = 1$  onda je  $-\sqrt{2} < a+b < \sqrt{2}$ .

### Rješenje 088

Ponovimo!

Za realni broj  $x$  njegova je apsolutna vrijednost (modul) broj  $|x|$  koji određujemo na ovaj način:

$$|x| = \begin{cases} x, & x \geq 0 \\ -x, & x < 0. \end{cases}$$

Apsolutna vrijednost:

- pozitivnog broja jednaka je tom broju

$$|x| = x \text{ za } x > 0$$

- negativnog broja suprotna je tom broju

$$|x| = -x \text{ za } x < 0$$

- nule jednaka je nuli

$$|x| = 0 \text{ za } x = 0.$$

$$\sqrt{a^2} = |a|, \quad |x| \leq a, a \geq 0 \Rightarrow -a \leq x \leq a.$$

$$a^2 \geq 0, a \in \mathbb{R}, \quad (a-b)^2 = a^2 - 2 \cdot a \cdot b + b^2, \quad a \geq b \Rightarrow a+c \geq b+c, c \in \mathbb{R}.$$

$$a^2 + 2 \cdot a \cdot b + b^2 = (a+b)^2, \quad a \leq b \Rightarrow \sqrt{a} \leq \sqrt{b}.$$

Zakon distribucije množenja prema zbrajanju.

$$a \cdot (b+c) = a \cdot b + a \cdot c, \quad a \cdot b + a \cdot c = a \cdot (b+c).$$

$$(a-b)^2 \geq 0 \Rightarrow a^2 - 2 \cdot a \cdot b + b^2 \geq 0 \Rightarrow a^2 + b^2 \geq 2 \cdot a \cdot b \Rightarrow \left[ \begin{array}{l} \text{pribrojimo} \\ a^2 + b^2 \end{array} \right] \Rightarrow$$

$$\Rightarrow a^2 + b^2 \geq 2 \cdot a \cdot b + a^2 + b^2 \Rightarrow a^2 + b^2 + a^2 + b^2 \geq 2 \cdot a \cdot b + a^2 + b^2 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 2 \cdot a^2 + 2 \cdot b^2 \geq a^2 + 2 \cdot a \cdot b + b^2 \Rightarrow 2 \cdot (a^2 + b^2) \geq (a+b)^2 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow (a+b)^2 \leq 2 \cdot (a^2 + b^2) \Rightarrow \left[ \begin{array}{l} \text{uvjet} \\ a^2 + b^2 = 1 \end{array} \right] \Rightarrow (a+b)^2 \leq 2 \cdot 1 \Rightarrow (a+b)^2 \leq 2 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow (a+b)^2 \leq 2 \quad / \sqrt{\quad} \Rightarrow \sqrt{(a+b)^2} \leq \sqrt{2} \Rightarrow |a+b| \leq \sqrt{2} \Rightarrow -\sqrt{2} \leq a+b \leq \sqrt{2}.$$

### Vježba 088

Ako je  $a^2 + b^2 - 1 = 0$  onda je  $-\sqrt{2} < a+b < \sqrt{2}$ .

**Rezultat:** Dokaz analogan.

### Zadatak 089 (Mislav, srednja škola)

Ako je  $a^2 + b^2 = 1$  i  $c^2 + d^2 = 1$ , onda je  $|a \cdot c - b \cdot d| \leq 1$ .

### Rješenje 089

Ponovimo!

$$a^2 \geq 0, a \in \mathbb{R}, \quad (a+b)^2 = a^2 + 2 \cdot a \cdot b + b^2, \quad (a-b)^2 = a^2 - 2 \cdot a \cdot b + b^2.$$

$$a \geq b, c > 0 \Rightarrow \frac{a}{c} \geq \frac{b}{c}, \quad a \geq b, c < 0 \Rightarrow \frac{a}{c} \leq \frac{b}{c}.$$

Zakon distribucije množenja prema zbrajanju.

$$a \cdot (b+c) = a \cdot b + a \cdot c, \quad a \cdot b + a \cdot c = a \cdot (b+c).$$

Za realni broj  $x$  njegova je apsolutna vrijednost (modul) broj  $|x|$  koji određujemo na ovaj način:

$$|x| = \begin{cases} x, & x \geq 0 \\ -x, & x < 0. \end{cases}$$

Apsolutna vrijednost:

- pozitivnog broja jednaka je tom broju

$$|x| = x \text{ za } x > 0$$

- negativnog broja suprotna je tom broju

$$|x| = -x \text{ za } x < 0$$

- nule jednaka je nuli

$$|x| = 0 \text{ za } x = 0.$$

$$|x| \leq a, a \geq 0 \Rightarrow -a \leq x \leq a.$$

Očigledne nejednakosti

$$\left. \begin{array}{l} (a+c)^2 + (b-d)^2 \geq 0 \\ (a-c)^2 + (b+d)^2 \geq 0 \end{array} \right\}$$

preoblikujemo tako da se dobije:

$$\left. \begin{array}{l} (a+c)^2 + (b-d)^2 \geq 0 \\ (a-c)^2 + (b+d)^2 \geq 0 \end{array} \right\} \Rightarrow \left. \begin{array}{l} a^2 + 2 \cdot a \cdot c + c^2 + b^2 - 2 \cdot b \cdot d + d^2 \geq 0 \\ a^2 - 2 \cdot a \cdot c + c^2 + b^2 + 2 \cdot b \cdot d + d^2 \geq 0 \end{array} \right\} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \left. \begin{array}{l} a^2 + b^2 + c^2 + d^2 + 2 \cdot a \cdot c - 2 \cdot b \cdot d \geq 0 \\ a^2 + b^2 + c^2 + d^2 - 2 \cdot a \cdot c + 2 \cdot b \cdot d \geq 0 \end{array} \right\} \Rightarrow$$

$$\begin{aligned} &\Rightarrow \left. \begin{aligned} (a^2 + b^2) + (c^2 + d^2) + 2 \cdot (a \cdot c - b \cdot d) \geq 0 \\ (a^2 + b^2) + (c^2 + d^2) - 2 \cdot (a \cdot c - b \cdot d) \geq 0 \end{aligned} \right\} \Rightarrow \left[ \begin{array}{c} \text{uvjet} \\ a^2 + b^2 = 1, c^2 + d^2 = 1 \end{array} \right] \Rightarrow \\ &\Rightarrow \left. \begin{aligned} 1 + 1 + 2 \cdot (a \cdot c - b \cdot d) \geq 0 \\ 1 + 1 - 2 \cdot (a \cdot c - b \cdot d) \geq 0 \end{aligned} \right\} \Rightarrow \left. \begin{aligned} 2 + 2 \cdot (a \cdot c - b \cdot d) \geq 0 \\ 2 - 2 \cdot (a \cdot c - b \cdot d) \geq 0 \end{aligned} \right\} \Rightarrow \left. \begin{aligned} 2 \cdot (a \cdot c - b \cdot d) \geq -2 \\ -2 \cdot (a \cdot c - b \cdot d) \geq -2 \end{aligned} \right\} \Rightarrow \\ &\Rightarrow \left. \begin{aligned} 2 \cdot (a \cdot c - b \cdot d) \geq -2 \quad /: 2 \\ -2 \cdot (a \cdot c - b \cdot d) \geq -2 \quad /: (-2) \end{aligned} \right\} \Rightarrow \left. \begin{aligned} a \cdot c - b \cdot d \geq -1 \\ a \cdot c - b \cdot d \leq 1 \end{aligned} \right\} \Rightarrow \\ &\Rightarrow -1 \leq a \cdot c - b \cdot d \leq 1 \Rightarrow |a \cdot c - b \cdot d| \leq 1. \end{aligned}$$

### Vježba 089

Ako je  $a^2 + c^2 = 1$  i  $b^2 + d^2 = 1$ , onda je  $|a \cdot c - b \cdot d| \leq 1$ .

**Rezultat:** Dokaz analogan.

### Zadatak 090 (Help, gimnazija)

Izračunaj  $||x-1|-2|-3|$  za  $x = \pi$ .

### Rješenje 090

Ponovimo!

Zakon distribucije množenja prema zbrajanju.

$$a \cdot (b+c) = a \cdot b + a \cdot c, \quad a \cdot b + a \cdot c = a \cdot (b+c).$$

Za realni broj  $x$  njegova je apsolutna vrijednost (modul) broj  $|x|$  koji određujemo na ovaj način:

$$|x| = \begin{cases} x, & x \geq 0 \\ -x, & x < 0. \end{cases}$$

Apsolutna vrijednost:

- pozitivnog broja jednaka je tom broju

$$|x| = x \text{ za } x > 0$$

- negativnog broja suprotna je tom broju

$$|x| = -x \text{ za } x < 0$$

- nule jednaka je nuli

$$|x| = 0 \text{ za } x = 0.$$

$$|a-b| = a-b, \quad a-b \geq 0, \quad |a-b| = -(a-b) = b-a, \quad a-b < 0.$$

$$\begin{aligned} ||x-1|-2|-3| &= \left[ \begin{array}{c} x = \pi \\ \pi \approx 3.14 \end{array} \right] = ||\pi-1|-2|-3| = \left| \left| \underbrace{\pi-1}_{+} \right| - 2 \right| - 3| = \\ &= ||\pi-1-2|-3| = ||\pi-3|-3| = \left| \left| \underbrace{\pi-3}_{+} \right| - 3 \right| = |\pi-3-3| = |\pi-6| = \\ &= \left| \underbrace{\pi-6}_{-} \right| = -(\pi-6) = -\pi+6 = 6-\pi. \end{aligned}$$

### Vježba 090

Izračunaj  $||x-1|-2|-3|$  za  $x=4$ .

**Rezultat:** 2.

### Zadatak 091 (Help, gimnazija)

Izračunaj  $|x-3|-|x-2|-|x-1|$  za  $x=\sqrt{3}$ .

### Rješenje 091

Ponovimo!

Zakon distribucije množenja prema zbrajanju.

$$a \cdot (b+c) = a \cdot b + a \cdot c \quad , \quad a \cdot b + a \cdot c = a \cdot (b+c).$$

Za realni broj  $x$  njegova je apsolutna vrijednost (modul) broj  $|x|$  koji određujemo na ovaj način:

$$|x| = \begin{cases} x, & x \geq 0 \\ -x, & x < 0. \end{cases}$$

Apsolutna vrijednost:

- pozitivnog broja jednaka je tom broju

$$|x| = x \text{ za } x > 0$$

- negativnog broja suprotna je tom broju

$$|x| = -x \text{ za } x < 0$$

- nule jednaka je nuli

$$|x| = 0 \text{ za } x = 0.$$

$$|a-b| = a-b, \quad a-b \geq 0 \quad , \quad |a-b| = -(a-b) = b-a, \quad a-b < 0.$$

$$\begin{aligned}
 |x-3|-|x-2|-|x-1| &= \left[ \begin{array}{l} x=\sqrt{3} \\ \sqrt{3} \approx 1.73 \end{array} \right] = |\sqrt{3}-3|-|\sqrt{3}-2|-|\sqrt{3}-1| = \\
 &= \left| \underbrace{\sqrt{3}-3}_{-} \right| - \left| \underbrace{\sqrt{3}-2}_{-} \right| - \left| \underbrace{\sqrt{3}-1}_{+} \right| = -(\sqrt{3}-3) - (-(\sqrt{3}-2)) - (\sqrt{3}-1) = \\
 &= -\sqrt{3}+3+(\sqrt{3}-2)-\sqrt{3}+1 = -\sqrt{3}+3+\sqrt{3}-2-\sqrt{3}+1 = \\
 &= -\sqrt{3}+3+\sqrt{3}-2-\sqrt{3}+1 = 3-2-\sqrt{3}+1 = 2-\sqrt{3}.
 \end{aligned}$$

### Vježba 091

Izračunaj  $|x-3|-|x-2|-|x-1|$  za  $x=2$ .

**Rezultat:** 0.

### Zadatak 092 (Matej, gimnazija)

Točka A na brojevnom pravcu ima koordinatu  $-\frac{2}{5}$ . Odredite na tom pravcu skup svih točaka

T za koje vrijedi:  $||OA|-|OT|| \leq 2$ .

### Rješenje 092

Ponovimo!

Za realni broj  $x$  njegova je apsolutna vrijednost (modul) broj  $|x|$  koji određujemo na ovaj način:

$$|x| = \begin{cases} x, & x \geq 0 \\ -x, & x < 0. \end{cases}$$

Apsolutna vrijednost:

- pozitivnog broja jednaka je tom broju

$$|x| = x \text{ za } x > 0$$

- negativnog broja suprotna je tom broju

$$|x| = -x \text{ za } x < 0$$

- nule jednaka je nuli

$$|x| = 0 \text{ za } x = 0.$$

$$|x| \geq 0, x \in \mathbb{R}, \quad |x| \leq a, a > 0 \Rightarrow -a \leq x \leq a, \quad a \leq b, c \in \mathbb{R} \Rightarrow a + c \leq b + c.$$

$$a \leq b, c < 0 \Rightarrow a \cdot c \geq b \cdot c, \quad n = \frac{n}{1}, \quad \frac{a}{b} - \frac{c}{d} = \frac{a \cdot d - b \cdot c}{b \cdot d}.$$

Udaljenost točkaka A(x<sub>1</sub>) i B(x<sub>2</sub>) na brojevnom pravcu:

$$|AB| = |x_2 - x_1|.$$

Točka O je ishodište pa ima koordinatu 0.

$$O(x_1) = O(0).$$

- Točka A na brojevnom pravcu ima koordinatu  $-\frac{2}{5}$  pa vrijedi:

$$\left. \begin{array}{l} O(x_1) = O(0) \\ A(x_2) = A\left(-\frac{2}{5}\right) \end{array} \right\} \Rightarrow \left[ |OA| = |x_2 - x_1| \right] \Rightarrow |OA| = \left| -\frac{2}{5} - 0 \right| \Rightarrow$$

$$\Rightarrow |OA| = \left| -\frac{2}{5} \right| \Rightarrow |OA| = \frac{2}{5}.$$

- Točka T na brojevnom pravcu ima koordinatu x pa vrijedi:

$$\left. \begin{array}{l} O(x_1) = O(0) \\ T(x_2) = T(x) \end{array} \right\} \Rightarrow \left[ |OT| = |x_2 - x_1| \right] \Rightarrow |OT| = |x - 0| \Rightarrow |OT| = |x|.$$

Budući da je uvjet u zadatku

$$||OA| - |OT|| \leq 2,$$

dalje slijedi:

$$||OA| - |OT|| \leq 2 \Rightarrow \left[ \begin{array}{l} |OA| = \frac{2}{5} \\ |OT| = |x| \end{array} \right] \Rightarrow \left| \frac{2}{5} - |x| \right| \leq 2 \Rightarrow -2 \leq \frac{2}{5} - |x| \leq 2 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow -2 \leq \frac{2}{5} - |x| \leq 2 \quad / - \frac{2}{5} \Rightarrow -2 - \frac{2}{5} \leq \frac{2}{5} - |x| - \frac{2}{5} \leq 2 - \frac{2}{5} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow -\frac{2}{1} - \frac{2}{5} \leq \frac{2}{5} - |x| - \frac{2}{5} \leq \frac{2}{1} - \frac{2}{5} \Rightarrow \frac{-10-2}{5} \leq -|x| \leq \frac{10-2}{5} \Rightarrow -\frac{12}{5} \leq -|x| \leq \frac{8}{5} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow -\frac{12}{5} \leq -|x| \leq \frac{8}{5} \quad / \cdot (-1) \Rightarrow \frac{12}{5} \geq |x| \geq -\frac{8}{5} \Rightarrow -\frac{8}{5} \leq |x| \leq \frac{12}{5} \Rightarrow [|x| \geq 0] \Rightarrow$$

$$\Rightarrow |x| \leq \frac{12}{5} \Rightarrow -\frac{12}{5} \leq x \leq \frac{12}{5} \Rightarrow x \in \left[ -\frac{12}{5}, \frac{12}{5} \right].$$

**Vježba 092**

Točka A na brojevnom pravcu ima koordinatu  $-\frac{2}{5}$ . Odredite na tom pravcu skup svih točaka

T za koje vrijedi:  $||OA| - |OT|| = 2$ .

**Rezultat:**  $T_1\left(-\frac{12}{5}\right), T_2\left(\frac{12}{5}\right)$ .

www.halapa.com