Zadatak 081 (Ella, gimnazija)

Riješi jednadžbu $\frac{2}{|3\cdot x-6|}+1=\frac{3}{|2\cdot x-4|}.$

Rješenje 081

Ponovimo!

Za realni broj x njegova je apsolutna vrijednost (modul) broj | x | koji određujemo na ovaj način:

$$|x|=\begin{cases} x, & x\ge 0 \\ -x, & x<0. \end{cases}$$

Ako je broj x pozitivan ili nula, tada je on jednak svojoj apsolutnoj vrijednosti. Za svaki x, x ≥ 0, vrijedi | x | = x.

Ako je x negativan broj, njegova apsolutna vrijednost je suprotan broj – x koji je pozitivan. Za svaki x, x < 0, je | x | = – x.

S nulom se ne može dijeliti. Zato moramo odbaciti vrijednost nepoznanice x za koju je nazivnik jednak nuli.

$$|x|=a\ ,\ a>0\ \Rightarrow\ \left.\begin{array}{l} x_1=-a \\ x_2=a \end{array}\right\}\quad ,\quad n=\frac{n}{1}\quad ,\quad \frac{a}{b}+\frac{c}{d}=\frac{a\cdot d+b\cdot c}{b\cdot d}\quad ,\quad \frac{a}{b}-\frac{c}{d}=\frac{a\cdot d-b\cdot c}{b\cdot d}.$$

$$|a\cdot b|=|a|\cdot|b|\quad ,\quad \frac{a}{b}\cdot\frac{b}{a}=1\quad ,\quad \frac{a}{b}=\frac{c}{d}\ \Rightarrow\ \frac{b}{a}=\frac{d}{c}.$$

Zakon distribucije množenja prema zbrajanju.

$$a\cdot(b+c)=a\cdot b+a\cdot c\quad ,\quad a\cdot b+a\cdot c=a\cdot(b+c).$$

1.inačica

Preoblikujemo zadanu jednadžbu na sljedeći način:

$$\frac{2}{|3\cdot x-6|}+1=\frac{3}{|2\cdot x-4|}\ \Rightarrow\ \frac{2}{|3\cdot(x-2)|}+1=\frac{3}{|2\cdot(x-2)|}\ \Rightarrow$$

$$\Rightarrow\ \frac{2}{|3|\cdot|x-2|}+1=\frac{3}{|2|\cdot|x-2|}\ \Rightarrow\ \frac{2}{3\cdot|x-2|}+1=\frac{3}{2\cdot|x-2|}.$$

Najprije raspravimo za koju vrijednost x nazivnik ne smije biti jednak nuli.

$$x-2\ne 0\ \Rightarrow\ x\ne 2.$$

Sada vrijedi:

$$\frac{2}{3\cdot|x-2|}+1=\frac{3}{2\cdot|x-2|}\ \Rightarrow\ \frac{2}{3\cdot|x-2|}+1=\frac{3}{2\cdot|x-2|}\ /\cdot 6\cdot|x-2|\ \Rightarrow$$

$$\Rightarrow\ 4+6\cdot|x-2|=9\ \Rightarrow\ 6\cdot|x-2|=9-4\ \Rightarrow\ 6\cdot|x-2|=5\ \Rightarrow\ 6\cdot|x-2|=5\ /:6\ \Rightarrow$$

$$\Rightarrow\ |x-2|=\frac{5}{6}\ \Rightarrow\ \left.\begin{array}{l} x-2=-\frac{5}{6} \\ x-2=\frac{5}{6} \end{array}\right\}\ \Rightarrow\ \left.\begin{array}{l} x=-\frac{5}{6}+2 \\ x=\frac{5}{6}+2 \end{array}\right\}\ \Rightarrow\ \left.\begin{array}{l} x=-\frac{5}{6}+\frac{2}{1} \\ x=\frac{5}{6}+\frac{2}{1} \end{array}\right\}\ \Rightarrow\ \left.\begin{array}{l} x=\frac{-5+12}{6} \\ x=\frac{5+12}{6} \end{array}\right\}\ \Rightarrow$$

$$\Rightarrow\ \left.\begin{array}{l} x_1=\frac{7}{6} \\ x_2=\frac{17}{6} \end{array}\right\}.$$

2.inačica

Preoblikujemo zadanu jednadžbu na sljedeći način:

$$\frac{2}{|3\cdot x-6|}+1=\frac{3}{|2\cdot x-4|} \Rightarrow \frac{2}{|3\cdot(x-2)|}+1=\frac{3}{|2\cdot(x-2)|} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \frac{2}{|3|\cdot|x-2|}+1=\frac{3}{|2|\cdot|x-2|} \Rightarrow \frac{2}{3\cdot|x-2|}+1=\frac{3}{2\cdot|x-2|} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 1=\frac{3}{2\cdot|x-2|}-\frac{2}{3\cdot|x-2|} \Rightarrow 1=\frac{9-4}{6\cdot|x-2|} \Rightarrow 1=\frac{5}{6\cdot|x-2|} \Rightarrow \frac{5}{6\cdot|x-2|}=1 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \frac{5}{6\cdot|x-2|}=1 \; /\cdot\frac{6}{5} \Rightarrow \frac{1}{|x-2|}=\frac{6}{5}.$$

Najprije raspravimo za koju vrijednost x nazivnik ne smije biti jednak nuli.

$$x-2\neq 0 \Rightarrow x\neq 2.$$

Sada vrijedi:

$$\frac{1}{|x-2|}=\frac{6}{5} \Rightarrow |x-2|=\frac{5}{6} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \left.\begin{matrix} x-2=-\frac{5}{6} \\ x-2=\frac{5}{6}\end{matrix}\right\} \Rightarrow \left.\begin{matrix} x=-\frac{5}{6}+2 \\ x=\frac{5}{6}+2\end{matrix}\right\} \Rightarrow \left.\begin{matrix} x=-\frac{5}{6}+\frac{2}{1} \\ x=\frac{5}{6}+\frac{2}{1}\end{matrix}\right\} \Rightarrow \left.\begin{matrix} x=\frac{-5+12}{6} \\ x=\frac{5+12}{6}\end{matrix}\right\} \Rightarrow \left.\begin{matrix} x_1=\frac{7}{6} \\ x_2=\frac{17}{6}\end{matrix}\right\}.$$

3.inačica

Preoblikujemo zadanu jednadžbu na sljedeći način:

$$\frac{2}{|3\cdot x-6|}+1=\frac{3}{|2\cdot x-4|} \Rightarrow \frac{2}{|3\cdot(x-2)|}+1=\frac{3}{|2\cdot(x-2)|} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \frac{2}{|3|\cdot|x-2|}+1=\frac{3}{|2|\cdot|x-2|} \Rightarrow \frac{2}{3\cdot|x-2|}+1=\frac{3}{2\cdot|x-2|}.$$

Najprije raspravimo za koju vrijednost x nazivnik ne smije biti jednak nuli.

$$x-2\neq 0 \Rightarrow x\neq 2.$$

Sada promatramo dva slučaja:

1. slučaj

$$x-2>0 \Rightarrow x>2 \Rightarrow |x-2|=x-2.$$

$$\left.\begin{matrix} \frac{2}{3\cdot|x-2|}+1=\frac{3}{2\cdot|x-2|} \\ |x-2|=x-2\end{matrix}\right\} \Rightarrow \frac{2}{3\cdot(x-2)}+1=\frac{3}{2\cdot(x-2)} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \frac{2}{3\cdot(x-2)}+1=\frac{3}{2\cdot(x-2)} \; /\cdot 6\cdot(x-2) \Rightarrow 4+6\cdot(x-2)=9 \Rightarrow 6\cdot(x-2)=9-4 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 6\cdot(x-2)=5 \Rightarrow 6\cdot(x-2)=5 \; /:6 \Rightarrow x-2=\frac{5}{6} \Rightarrow x=\frac{5}{6}+2 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow x=\frac{5}{6}+\frac{2}{1} \Rightarrow x=\frac{5+12}{6} \Rightarrow x_1=\frac{17}{6}$$

jer je uvjet x > 2 zadovoljen.

2. slučaj

$$x-2<0 \Rightarrow x<2 \Rightarrow |x-2|=-(x-2) \Rightarrow |x-2|=-x+2 \Rightarrow |x-2|=2-x.$$

$$\left.\begin{array}{l}\frac{2}{3\cdot|x-2|}+1=\frac{3}{2\cdot|x-2|}\\ |x-2|=2-x\end{array}\right\} \Rightarrow \frac{2}{3\cdot(2-x)}+1=\frac{3}{2\cdot(2-x)} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \frac{2}{3\cdot(2-x)}+1=\frac{3}{2\cdot(2-x)} \;/\cdot 6\cdot(2-x) \Rightarrow 4+6\cdot(2-x)=9 \Rightarrow 6\cdot(2-x)=9-4 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 6\cdot(2-x)=5 \Rightarrow 6\cdot(2-x)=5 \;/:6 \Rightarrow 2-x=\frac{5}{6} \Rightarrow -x=\frac{5}{6}-2 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow -x=\frac{5}{6}-\frac{2}{1} \Rightarrow -x=\frac{5-12}{6} \Rightarrow -x=-\frac{7}{6} \Rightarrow -x=-\frac{7}{6} \;/\cdot(-1) \Rightarrow x_2=\frac{7}{6}$$

jer je uvjet $x < 2$ zadovoljen.

Vježba 081

Riješi jednadžbu $\frac{2}{|x-2|}-1=\frac{1}{2\cdot|x-2|}$.

Rezultat: $x_1=\frac{1}{2},\; x_2=\frac{7}{2}$.

Zadatak 082 (Iva ☺, maturantica TUPŠ - a)

Riješi jednadžbu $|x-2|=2\cdot x-1$.

Rješenje 082

Ponovimo!

Za realni broj x njegova je apsolutna vrijednost (modul) broj $|x|$ koji određujemo na ovaj način:

$$|x|=\begin{cases} x, & x\ge 0\\ -x, & x<0.\end{cases}$$

Apsolutna vrijednost:

- pozitivnog broja jednaka je tom broju

$$|x|=x \text{ za } x>0$$

- negativnog broja suprotna je tom broju

$$|x|=-x \text{ za } x<0$$

- nule jednaka je nuli

$$|x|=0 \text{ za } x=0.$$

Zakon distribucije množenja prema zbrajanju.

$$a\cdot(b+c)=a\cdot b+a\cdot c \quad , \quad a\cdot b+a\cdot c=a\cdot(b+c).$$

Jednadžba

$$|x|=a$$

- ima dva rješenja $x_1 = a$ i $x_2 = -a$ ako je $a > 0$
- ima rješenje $x = 0$ ako je $a = 0$
- nema rješenja ako je $a < 0$.

1.inačica

$\lvert x-2 \rvert = 2 \cdot x - 1$	
Uvjet: $x-2 \geq 0 \Rightarrow x \geq 2$ $\lvert x-2 \rvert = x-2$	Uvjet: $x-2 < 0 \Rightarrow x < 2$ $\lvert x-2 \rvert = -(x-2)$
$x-2 = 2 \cdot x - 1$ $x - 2 \cdot x = -1 + 2$ $-x = 1$ $-x = 1 \ / \cdot (-1)$ $x = -1$	$-(x-2) = 2 \cdot x - 1$ $-x + 2 = 2 \cdot x - 1$ $-x - 2 \cdot x = -1 - 2$ $-3 \cdot x = -3$ $-3 \cdot x = -3 \ / : (-3)$ $x = 1$
Zbog uvjeta $x \geq 2$ slijedi da x = – 1 nije rješenje jednadžbe.	Zbog uvjeta $x < 2$ slijedi da x = 1 je rješenje jednadžbe.

2.inačica
Pretpostavimo li kao pri rješavanju jednadžbe $\lvert x \rvert = a$ dobije se:

$\lvert x-2 \rvert = 2 \cdot x - 1$	
$x-2 = 2 \cdot x - 1$ $x - 2 \cdot x = -1 + 2$ $-x = 1$ $-x = 1 \ / \cdot (-1)$ $x = -1$	$x - 2 = -(2 \cdot x - 1)$ $x - 2 = -2 \cdot x + 1$ $x + 2 \cdot x = 1 + 2$ $3 \cdot x = 3$ $3 \cdot x = 3 \ / : 3$ $x = 1$

Provjeravamo rješenja, tj. izvršimo pokus.

$\lvert x-2 \rvert = 2 \cdot x - 1$	$\lvert x-2 \rvert = 2 \cdot x - 1$
$x = -1$	$x = 1$
$\lvert -1-2 \rvert = 2 \cdot (-1) - 1$ $\lvert -3 \rvert = -2 - 1$ $3 = -3$ nije istinito	$\lvert 1-2 \rvert = 2 \cdot 1 - 1$ $\lvert -1 \rvert = 2 - 1$ $1 = 1$ istinito
$x = -1$ nije rješenje jednadžbe.	$x = 1$ je rješenje jednadžbe.

Vježba 082

Riješi jednadžbu $\lvert 2 - x \rvert = 2 \cdot x - 1.$

Rezultat: x = 1.

Zadatak 083 (Marija, gimnazija)

Riješi nejednadžbu $\lvert x \rvert > x.$

Rješenje 083

Ponovimo!

$$a > b \;\;,\;\; c < 0 \;\Rightarrow\; a \cdot c < b \cdot c.$$

Za realni broj x njegova je apsolutna vrijednost (modul) broj $|\,x\,|$ koji određujemo na ovaj način:

$$|\,x\,| = \begin{cases} x, & x \geq 0 \\ -x, & x < 0. \end{cases}$$

Apsolutna vrijednost:

- pozitivnog broja jednaka je tom broju

$$|\,x\,| = x \text{ za } x > 0$$

- negativnog broja suprotna je tom broju

$$|\,x\,| = -x \text{ za } x < 0$$

- nule jednaka je nuli

$$|\,x\,| = 0 \text{ za } x = 0.$$

U zadanoj nejednadžbi $|\,x\,| > x$ postoje dvije mogućnosti:

- $x < 0$
- $x > 0.$

Dakle, pojavljuju se dva intervala $\langle -\infty,\, 0 \rangle$ i $\langle 0,\, +\infty \rangle$ za koje dana nejednadžba ima dva različita zapisa.

Za x < 0 nejednadžba ima oblik

$$\left.\begin{matrix} |\,x\,| > x \\ x < 0 \end{matrix}\right\} \Rightarrow -x > x \Rightarrow -x - x > 0 \Rightarrow -2 \cdot x > 0 \Rightarrow -2 \cdot x > 0 \;/ : (-2) \Rightarrow x < 0.$$

Zbog uvjeta x < 0 rješenje je:

$$x \in \langle -\infty,\, 0 \rangle.$$

Za x > 0 nejednadžba ima oblik

$$\left.\begin{matrix} |\,x\,| > x \\ x > 0 \end{matrix}\right\} \Rightarrow x > x \;\; \textit{nema smisla}.$$

Prikaz pomoću tablice.

$|\,x\,| > x$	
Uvjet: $x < 0$ $|\,x\,| = -x$	Uvjet: $x > 0$ $|\,x\,| = x$
$-x > x$ $-x - x > 0$ $-2 \cdot x > 0$ $-2 \cdot x > 0 \;/ : (-2)$ $x < 0$	$x > x$ nema smisla
Zbog uvjeta $x < 0$ slijedi $x \in \langle -\infty,\, 0 \rangle$.	Nema rješenja.

Rješenje nejednadžbe je $x \in \langle -\infty,\, 0 \rangle$.

Vježba 083

Riješi nejednadžbu $|x| - x > 0.$

Rezultat: $x \in \langle -\infty, 0 \rangle.$

Zadatak 084 (Vlado, gimnazija)

Koliko rješenja ima jednadžba $\big|2 - |1 - |x||\big| = 1?$

Rješenje 084

Ponovimo!

Za realni broj x njegova je apsolutna vrijednost (modul) broj $|x|$ koji određujemo na ovaj način:

$$|x| = \begin{cases} x, & x \geq 0 \\ -x, & x < 0. \end{cases}$$

Apsolutna vrijednost:

- pozitivnog broja jednaka je tom broju

$$|x| = x \text{ za } x > 0$$

- negativnog broja suprotna je tom broju

$$|x| = -x \text{ za } x < 0$$

- nule jednaka je nuli

$$|x| = 0 \text{ za } x = 0.$$

$$|x| = a \ , \ a > 0 \Rightarrow \left.\begin{matrix} x_1 = a \\ x_2 = -a \end{matrix}\right\}.$$

$$\big|2 - |1 - |x||\big| = 1 \Rightarrow \left.\begin{matrix} 2 - |1 - |x|| = 1 \\ 2 - |1 - |x|| = -1 \end{matrix}\right\} \Rightarrow \left.\begin{matrix} -|1 - |x|| = 1 - 2 \\ -|1 - |x|| = -1 - 2 \end{matrix}\right\} \Rightarrow \left.\begin{matrix} -|1 - |x|| = -1 \\ -|1 - |x|| = -3 \end{matrix}\right\} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \left.\begin{matrix} -|1 - |x|| = -1 \ / \cdot (-1) \\ -|1 - |x|| = -3 \ / \cdot (-2) \end{matrix}\right\} \Rightarrow \left.\begin{matrix} |1 - |x|| = 1 \\ |1 - |x|| = 3 \end{matrix}\right\} \Rightarrow \left.\begin{matrix} 1 - |x| = 1 \\ 1 - |x| = -1 \\ 1 - |x| = 3 \\ 1 - |x| = -3 \end{matrix}\right\} \Rightarrow \left.\begin{matrix} -|x| = 1 - 1 \\ -|x| = -1 - 1 \\ -|x| = 3 - 1 \\ -|x| = -3 - 1 \end{matrix}\right\} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \left.\begin{matrix} -|x| = 0 \\ -|x| = -2 \\ -|x| = 2 \\ -|x| = -4 \end{matrix}\right\} \Rightarrow \left.\begin{matrix} -|x| = 0 \ / \cdot (-1) \\ -|x| = -2 \ / \cdot (-1) \\ -|x| = 2 \ / \cdot (-1) \\ -|x| = -4 \ / \cdot (-1) \end{matrix}\right\} \Rightarrow \left.\begin{matrix} |x| = 0 \\ |x| = 2 \\ |x| = -2 \\ |x| = 4 \end{matrix}\right\} \Rightarrow \left.\begin{matrix} x_1 = 0 \\ x_{2,3} = \pm 2 \\ |x| = -2 \text{ nema smisla} \\ x_{4,5} = \pm 4 \end{matrix}\right\}.$$

Ima pet rješenja.

Vježba 084

Koliki je zbroj svih rješenja jednadžbe $\big|2 - |1 - |x||\big| = 1?$

Rezultat: 0.

Zadatak 085 (Antun, gimnazija)

$$\text{Za } x<0 \text{ razlomak } \frac{\sqrt{x^2-x\cdot\sqrt{8}+2}}{x-\sqrt{2}} \text{ jednak je:}$$

$$A.\ 1 \qquad B.\ x+\sqrt{2} \qquad C.\ -1 \qquad D.\ \sqrt{2}-x$$

Rješenje 085

Ponovimo!

$$\sqrt{a\cdot b}=\sqrt{a}\cdot\sqrt{b} \quad , \quad \left(\sqrt{a}\right)^2=a \quad , \quad a^2-2\cdot a\cdot b+b^2=(a-b)^2 \quad , \quad \sqrt{a^2}=|a|.$$

Za realni broj x njegova je apsolutna vrijednost (modul) broj $|x|$ koji određujemo na ovaj način:

$$|x|=\begin{cases} x, & x\ge 0 \\ -x, & x<0. \end{cases}$$

Apsolutna vrijednost:

- pozitivnog broja jednaka je tom broju

$$|x|=x \text{ za } x>0$$

- negativnog broja suprotna je tom broju

$$|x|=-x \text{ za } x<0$$

- nule jednaka je nuli

$$|x|=0 \text{ za } x=0.$$

Skratiti razlomak znači brojnik i nazivnik tog razlomka podijeliti istim brojem različitim od nule i jedinice

$$\frac{a\cdot n}{b\cdot n}=\frac{a}{b}\ ,\ n\ne 0\ ,\ n\ne 1.$$

$$\frac{\sqrt{x^2-x\cdot\sqrt{8}+2}}{x-\sqrt{2}}=\frac{\sqrt{x^2-\sqrt{8}\cdot x+2}}{x-\sqrt{2}}=\frac{\sqrt{x^2-\sqrt{4\cdot 2}\cdot x+2}}{x-\sqrt{2}}=\frac{\sqrt{x^2-\sqrt{4}\cdot\sqrt{2}\cdot x+2}}{x-\sqrt{2}}=$$

$$=\frac{\sqrt{x^2-2\cdot\sqrt{2}\cdot x+2}}{x-\sqrt{2}}=\frac{\sqrt{x^2-2\cdot\sqrt{2}\cdot x+\left(\sqrt{2}\right)^2}}{x-\sqrt{2}}=\frac{\sqrt{\left(x-\sqrt{2}\right)^2}}{x-\sqrt{2}}=\frac{\left|x-\sqrt{2}\right|}{x-\sqrt{2}}=$$

$$=\left[\ x<0\ \Rightarrow\ x-\sqrt{2}<0\ \right]=\frac{-\left(x-\sqrt{2}\right)}{x-\sqrt{2}}=\frac{-\left(x-\sqrt{2}\right)}{x-\sqrt{2}}=-1.$$

Odgovor je pod C.

Vježba 085

$$\text{Za } x>\sqrt{2} \text{ razlomak } \frac{\sqrt{x^2-x\cdot\sqrt{8}+2}}{x-\sqrt{2}} \text{ jednak je:}$$

$$A.\ 1 \qquad B.\ x+\sqrt{2} \qquad C.\ -1 \qquad D.\ \sqrt{2}-x$$

Rezultat: A.

Zadatak 086 (Paula, srednja škola)

Ako je $x \in \langle 1, 3 \rangle$, koliko je $|2 \cdot x + 3| + |1 - 5 \cdot x|$?

$A.\ -7 \cdot x - 2 \qquad B.\ -3 \cdot x + 4 \qquad C.\ 3 \cdot x - 4 \qquad D.\ 7 \cdot x + 2$

Rješenje 086

Ponovimo!

Za realni broj x njegova je apsolutna vrijednost (modul) broj $|x|$ koji određujemo na ovaj način:

$$|x| = \begin{cases} x, & x \ge 0 \\ -x, & x < 0. \end{cases}$$

Apsolutna vrijednost:

- pozitivnog broja jednaka je tom broju

$$|x| = x \text{ za } x > 0$$

- negativnog broja suprotna je tom broju

$$|x| = -x \text{ za } x < 0$$

- nule jednaka je nuli

$$|x| = 0 \text{ za } x = 0.$$

Zakon distribucije množenja prema zbrajanju.

$$a \cdot (b + c) = a \cdot b + a \cdot c \quad , \quad a \cdot b + a \cdot c = a \cdot (b + c).$$

Budući da je $x \in \langle 1, 3 \rangle$, vrijedi:

- izraz $2 \cdot x + 3$ je pozitivan
- izraz $1 - 5 \cdot x$ je negativan.

$$x \in \langle 1, 3 \rangle \Rightarrow \left.\begin{matrix} 2 \cdot x + 3 > 0 \\ 1 - 5 \cdot x > 0 \end{matrix}\right\}.$$

Sada je

$$|2 \cdot x + 3| + |1 - 5 \cdot x| = \left| \underbrace{2 \cdot x + 3}_{+} \right| + \left| \underbrace{1 - 5 \cdot x}_{-} \right| = 2 \cdot x + 3 - (1 - 5 \cdot x) =$$

$$= 2 \cdot x + 3 - 1 + 5 \cdot x = 7 \cdot x + 2.$$

Odgovor je pod D.

Vježba 086

Ako je $x \in \langle 1, 3 \rangle$, koliko je $|3 \cdot x + 3| + |1 - 4 \cdot x|$?

$A.\ -7 \cdot x - 2 \qquad B.\ -3 \cdot x + 4 \qquad C.\ 3 \cdot x - 4 \qquad D.\ 7 \cdot x + 2$

Rezultat: D.

Zadatak 087 (Paula, gimnazija)

Riješimo jednadžbu: $\dfrac{1}{|x - 3|} + 4 = \dfrac{2}{|3 - x|}, \ x \ne 3.$

Rješenje 087

Ponovimo!

Za realni broj x njegova je apsolutna vrijednost (modul) broj $|x|$ koji određujemo na ovaj način:

$$|x| = \begin{cases} x, & x \ge 0 \\ -x, & x < 0. \end{cases}$$

Apsolutna vrijednost:

- pozitivnog broja jednaka je tom broju

$$|x| = x \text{ za } x > 0$$

- negativnog broja suprotna je tom broju

$$|x| = -x \text{ za } x < 0$$

- nule jednaka je nuli

$$|x| = 0 \text{ za } x = 0.$$

$$|a-b| = |b-a| \quad , \quad |x| = a \,,\, a \ge 0 \Rightarrow \left.\begin{matrix} x_1 = -a \\ x_2 = a \end{matrix}\right\} \quad , \quad n = \frac{n}{1} \quad , \quad \frac{a}{b} = a \cdot \frac{1}{b}.$$

$$\frac{a}{b} = \frac{c}{d} \Rightarrow \frac{b}{a} = \frac{d}{c} \quad , \quad \frac{a}{n} - \frac{b}{n} = \frac{a-b}{n} \quad , \quad \frac{a}{b} + \frac{c}{d} = \frac{a \cdot d + b \cdot c}{b \cdot d}.$$

1.inačica

$$\frac{1}{|x-3|} + 4 = \frac{2}{|3-x|} \Rightarrow \frac{1}{|x-3|} + 4 = \frac{2}{|x-3|} \Rightarrow 4 = \frac{2}{|x-3|} - \frac{1}{|x-3|} \Rightarrow 4 = \frac{1}{|x-3|} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \frac{1}{|x-3|} = 4 \Rightarrow \frac{1}{|x-3|} = \frac{4}{1} \Rightarrow |x-3| = \frac{1}{4} \Rightarrow \left.\begin{matrix} x-3 = -\frac{1}{4} \\ x-3 = \frac{1}{4} \end{matrix}\right\} \Rightarrow \left.\begin{matrix} x = -\frac{1}{4} + 3 \\ x = \frac{1}{4} + 3 \end{matrix}\right\} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \left.\begin{matrix} x = -\frac{1}{4} + \frac{3}{1} \\ x = \frac{1}{4} + \frac{3}{1} \end{matrix}\right\} \Rightarrow \left.\begin{matrix} x = \frac{-1+12}{4} \\ x = \frac{1+12}{4} \end{matrix}\right\} \Rightarrow \left.\begin{matrix} x_1 = \frac{11}{4} \\ x_2 = \frac{13}{4} \end{matrix}\right\}.$$

2.inačica

$$\frac{1}{|x-3|} + 4 = \frac{2}{|3-x|} \Rightarrow \frac{1}{|x-3|} + 4 = \frac{2}{|x-3|} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \frac{1}{|x-3|} + 4 = \frac{2}{|x-3|} \;/ \cdot |x-3| \Rightarrow 1 + 4 \cdot |x-3| = 2 \Rightarrow 4 \cdot |x-3| = 2 - 1 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 4 \cdot |x-3| = 1 \Rightarrow 4 \cdot |x-3| = 1 \;/ \cdot \frac{1}{4} \Rightarrow |x-3| = \frac{1}{4} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \left.\begin{matrix} x-3 = -\frac{1}{4} \\ x-3 = \frac{1}{4} \end{matrix}\right\} \Rightarrow \left.\begin{matrix} x = -\frac{1}{4} + 3 \\ x = \frac{1}{4} + 3 \end{matrix}\right\} \Rightarrow \left.\begin{matrix} x = -\frac{1}{4} + \frac{3}{1} \\ x = \frac{1}{4} + \frac{3}{1} \end{matrix}\right\} \Rightarrow \left.\begin{matrix} x = \frac{-1+12}{4} \\ x = \frac{1+12}{4} \end{matrix}\right\} \Rightarrow \left.\begin{matrix} x_1 = \frac{11}{4} \\ x_2 = \frac{13}{4} \end{matrix}\right\}.$$

3.inačica

$$\frac{1}{|x-3|} + 4 = \frac{2}{|3-x|} \Rightarrow \frac{1}{|x-3|} + 4 = \frac{2}{|x-3|} \Rightarrow \begin{bmatrix} \text{zamjena} \\ t = \frac{1}{|x-3|} \end{bmatrix} \Rightarrow t + 4 = 2 \cdot t \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 2 \cdot t = t + 4 \Rightarrow 2 \cdot t - t = 4 \Rightarrow t = 4.$$

Vraćamo se na zamjenu.

$$\left.\begin{array}{l} t=\dfrac{1}{|x-3|} \\ t=4 \end{array}\right\} \Rightarrow \frac{1}{|x-3|}=4 \Rightarrow \frac{1}{|x-3|}=\frac{4}{1} \Rightarrow |x-3|=\frac{1}{4} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \left.\begin{array}{l} x-3=-\dfrac{1}{4} \\ x-3=\dfrac{1}{4} \end{array}\right\} \Rightarrow \left.\begin{array}{l} x=-\dfrac{1}{4}+3 \\ x=\dfrac{1}{4}+3 \end{array}\right\} \Rightarrow \left.\begin{array}{l} x=-\dfrac{1}{4}+\dfrac{3}{1} \\ x=\dfrac{1}{4}+\dfrac{3}{1} \end{array}\right\} \Rightarrow \left.\begin{array}{l} x=\dfrac{-1+12}{4} \\ x=\dfrac{1+12}{4} \end{array}\right\} \Rightarrow \left.\begin{array}{l} x_1=\dfrac{11}{4} \\ x_2=\dfrac{13}{4} \end{array}\right\}.$$

Vježba 087

Riješimo jednadžbu: $\dfrac{1}{2\cdot|x-3|}+2=\dfrac{1}{|3-x|},\ x\neq 3.$

Rezultat: $x_1=\dfrac{11}{4},\ x_2=\dfrac{13}{4}.$

Zadatak 088 (Ante, srednja škola)

Ako je $a^2+b^2=1$ onda je $-\sqrt{2}<a+b<\sqrt{2}.$

Rješenje 088

Ponovimo!

Za realni broj x njegova je apsolutna vrijednost (modul) broj $|x|$ koji određujemo na ovaj način:

$$|x|=\begin{cases} x, & x\geq 0 \\ -x, & x<0 \end{cases}.$$

Apsolutna vrijednost:

- pozitivnog broja jednaka je tom broju
$$|x|=x \text{ za } x>0$$
- negativnog broja suprotna je tom broju
$$|x|=-x \text{ za } x<0$$
- nule jednaka je nuli
$$|x|=0 \text{ za } x=0.$$

$$\sqrt{a^2}=|a| \quad , \quad |x|\leq a\ ,\ a\geq 0 \Rightarrow -a\leq x\leq a.$$

$$a^2\geq 0\ ,\ a\in R \quad , \quad (a-b)^2=a^2-2\cdot a\cdot b+b^2 \quad , \quad a\geq b \Rightarrow a+c\geq b+c\ ,\ c\in R.$$

$$a^2+2\cdot a\cdot b+b^2=(a+b)^2 \quad , \quad a\leq b \Rightarrow \sqrt{a}\leq\sqrt{b}.$$

Zakon distribucije množenja prema zbrajanju.

$$a\cdot(b+c)=a\cdot b+a\cdot c \quad , \quad a\cdot b+a\cdot c=a\cdot(b+c).$$

$$(a-b)^2\geq 0 \Rightarrow a^2-2\cdot a\cdot b+b^2\geq 0 \Rightarrow a^2+b^2\geq 2\cdot a\cdot b \Rightarrow \left[\begin{array}{c} \text{pribrojimo} \\ a^2+b^2 \end{array}\right] \Rightarrow$$

$$\Rightarrow a^2+b^2\geq 2\cdot a\cdot b \ /+a^2+b^2 \Rightarrow a^2+b^2+a^2+b^2\geq 2\cdot a\cdot b+a^2+b^2 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 2\cdot a^2+2\cdot b^2\geq a^2+2\cdot a\cdot b+b^2 \Rightarrow 2\cdot\left(a^2+b^2\right)\geq(a+b)^2 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow (a+b)^2 \le 2\cdot\left(a^2+b^2\right) \Rightarrow \left[\begin{matrix}\text{uvjet}\\ a^2+b^2=1\end{matrix}\right] \Rightarrow (a+b)^2 \le 2\cdot 1 \Rightarrow (a+b)^2 \le 2 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow (a+b)^2 \le 2 \ /\sqrt{\ } \Rightarrow \sqrt{(a+b)^2} \le \sqrt{2} \Rightarrow |a+b| \le \sqrt{2} \Rightarrow -\sqrt{2} \le a+b \le \sqrt{2}.$$

Vježba 088

Ako je $a^2+b^2-1=0$ onda je $-\sqrt{2} < a+b < \sqrt{2}.$

Rezultat: Dokaz analogan.

Zadatak 089 (Mislav, srednja škola)

Ako je $a^2+b^2=1$ i $c^2+d^2=1$, onda je $|a\cdot c-b\cdot d| \le 1.$

Rješenje 089

Ponovimo!

$$a^2 \ge 0 \ , \ a\in R \quad , \quad (a+b)^2 = a^2+2\cdot a\cdot b+b^2 \quad , \quad (a-b)^2 = a^2-2\cdot a\cdot b+b^2.$$

$$a\ge b \ , \ c>0 \Rightarrow \frac{a}{c} \ge \frac{b}{c} \quad , \quad a\ge b \ , \ c<0 \Rightarrow \frac{a}{c} \le \frac{b}{c}.$$

Zakon distribucije množenja prema zbrajanju.

$$a\cdot(b+c) = a\cdot b+a\cdot c \quad , \quad a\cdot b+a\cdot c = a\cdot(b+c).$$

Za realni broj x njegova je apsolutna vrijednost (modul) broj $|x|$ koji određujemo na ovaj način:

$$|x| = \begin{cases} x, & x\ge 0 \\ -x, & x<0. \end{cases}$$

Apsolutna vrijednost:

- pozitivnog broja jednaka je tom broju

$$|x| = x \text{ za } x>0$$

- negativnog broja suprotna je tom broju

$$|x| = -x \text{ za } x<0$$

- nule jednaka je nuli

$$|x| = 0 \text{ za } x=0.$$

$$|x| \le a \ , \ a\ge 0 \Rightarrow -a \le x \le a.$$

Očigledne nejednakosti

$$\left.\begin{matrix}(a+c)^2+(b-d)^2 \ge 0\\ (a-c)^2+(b+d)^2 \ge 0\end{matrix}\right\}$$

preoblikujemo tako da se dobije:

$$\left.\begin{matrix}(a+c)^2+(b-d)^2 \ge 0\\ (a-c)^2+(b+d)^2 \ge 0\end{matrix}\right\} \Rightarrow \left.\begin{matrix}a^2+2\cdot a\cdot c+c^2+b^2-2\cdot b\cdot d+d^2 \ge 0\\ a^2-2\cdot a\cdot c+c^2+b^2+2\cdot b\cdot d+d^2 \ge 0\end{matrix}\right\} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \left.\begin{matrix}a^2+b^2+c^2+d^2+2\cdot a\cdot c-2\cdot b\cdot d \ge 0\\ a^2+b^2+c^2+d^2-2\cdot a\cdot c+2\cdot b\cdot d \ge 0\end{matrix}\right\} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \left.\begin{array}{l}\left(a^2+b^2\right)+\left(c^2+d^2\right)+2\cdot(a\cdot c-b\cdot d)\geq 0\\ \left(a^2+b^2\right)+\left(c^2+d^2\right)-2\cdot(a\cdot c-b\cdot d)\geq 0\end{array}\right\} \Rightarrow \left[\begin{array}{c}\text{uvjet}\\ a^2+b^2=1\ ,\ c^2+d^2=1\end{array}\right] \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \left.\begin{array}{l}1+1+2\cdot(a\cdot c-b\cdot d)\geq 0\\ 1+1-2\cdot(a\cdot c-b\cdot d)\geq 0\end{array}\right\} \Rightarrow \left.\begin{array}{l}2+2\cdot(a\cdot c-b\cdot d)\geq 0\\ 2-2\cdot(a\cdot c-b\cdot d)\geq 0\end{array}\right\} \Rightarrow \left.\begin{array}{l}2\cdot(a\cdot c-b\cdot d)\geq -2\\ -2\cdot(a\cdot c-b\cdot d)\geq -2\end{array}\right\} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \left.\begin{array}{l}2\cdot(a\cdot c-b\cdot d)\geq -2\ /:2\\ -2\cdot(a\cdot c-b\cdot d)\geq -2\ /:(-2)\end{array}\right\} \Rightarrow \left.\begin{array}{l}a\cdot c-b\cdot d\geq -1\\ a\cdot c-b\cdot d\leq 1\end{array}\right\} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow -1\leq a\cdot c-b\cdot d\leq 1 \Rightarrow |a\cdot c-b\cdot d|\leq 1.$$

Vježba 089

Ako je $a^2+c^2=1$ i $b^2+d^2=1$, onda je $|a\cdot c-b\cdot d|\leq 1$.

Rezultat: Dokaz analogan.

Zadatak 090 (Help, gimnazija)

Izračunaj $\left|\left||x-1|-2\right|-3\right|$ za $x=\pi$.

Rješenje 090

Ponovimo!

Zakon distribucije množenja prema zbrajanju.

$$a\cdot(b+c)=a\cdot b+a\cdot c\quad ,\quad a\cdot b+a\cdot c=a\cdot(b+c).$$

Za realni broj x njegova je apsolutna vrijednost (modul) broj $|x|$ koji određujemo na ovaj način:

$$|x|=\begin{cases}x, & x\geq 0\\ -x, & x<0.\end{cases}$$

Apsolutna vrijednost:

- pozitivnog broja jednaka je tom broju

$$|x|=x \text{ za } x>0$$

- negativnog broja suprotna je tom broju

$$|x|=-x \text{ za } x<0$$

- nule jednaka je nuli

$$|x|=0 \text{ za } x=0.$$

$$|a-b|=a-b\ ,\ a-b\geq 0\quad ,\quad |a-b|=-(a-b)=b-a\ ,\ a-b<0.$$

$$\left|\left||x-1|-2\right|-3\right|=\left[\begin{array}{l}x=\pi\\ \pi\approx 3.14\end{array}\right]=\left|\left||\pi-1|-2\right|-3\right|=\left|\left||\underbrace{\pi-1}_{+}|-2\right|-3\right|=$$

$$=\left||\pi-1-2|-3\right|=\left||\pi-3|-3\right|=\left||\underbrace{\pi-3}_{+}|-3\right|=|\pi-3-3|=|\pi-6|=$$

$$=|\underbrace{\pi-6}_{-}|=-(\pi-6)=-\pi+6=6-\pi.$$

Vježba 090

Izračunaj $\left|\left|\left|x-1\right|-2\right|-3\right|$ za $x=4$.

Rezultat: 2.

Zadatak 091 (Help, gimnazija)

Izračunaj $\left|x-3\right|-\left|x-2\right|-\left|x-1\right|$ za $x=\sqrt{3}$.

Rješenje 091

Ponovimo!

Zakon distribucije množenja prema zbrajanju.

$$a\cdot(b+c)=a\cdot b+a\cdot c \quad , \quad a\cdot b+a\cdot c=a\cdot(b+c).$$

Za realni broj x njegova je apsolutna vrijednost (modul) broj $|x|$ koji određujemo na ovaj način:

$$|x|=\begin{cases} x, & x\ge 0 \\ -x, & x<0. \end{cases}$$

Apsolutna vrijednost:

- pozitivnog broja jednaka je tom broju

$$|x|=x \text{ za } x>0$$

- negativnog broja suprotna je tom broju

$$|x|=-x \text{ za } x<0$$

- nule jednaka je nuli

$$|x|=0 \text{ za } x=0.$$

$$|a-b|=a-b \ , \ a-b\ge 0 \quad , \quad |a-b|=-(a-b)=b-a \ , \ a-b<0.$$

$$\left|x-3\right|-\left|x-2\right|-\left|x-1\right|=\begin{bmatrix} x=\sqrt{3} \\ \sqrt{3}\approx 1.73 \end{bmatrix}=\left|\sqrt{3}-3\right|-\left|\sqrt{3}-2\right|-\left|\sqrt{3}-1\right|=$$

$$=\Bigg|\underbrace{\sqrt{3}-3}_{-}\Bigg|-\Bigg|\underbrace{\sqrt{3}-2}_{-}\Bigg|-\Bigg|\underbrace{\sqrt{3}-1}_{+}\Bigg|=-\left(\sqrt{3}-3\right)-\left(-\left(\sqrt{3}-2\right)\right)-\left(\sqrt{3}-1\right)=$$

$$=-\sqrt{3}+3+\left(\sqrt{3}-2\right)-\sqrt{3}+1=-\sqrt{3}+3+\sqrt{3}-2-\sqrt{3}+1=$$

$$=-\sqrt{3}+3+\sqrt{3}-2-\sqrt{3}+1=3-2-\sqrt{3}+1=2-\sqrt{3}.$$

Vježba 091

Izračunaj $\left|x-3\right|-\left|x-2\right|-\left|x-1\right|$ za $x=2$.

Rezultat: 0.

Zadatak 092 (Matej, gimnazija)

Točka A na brojevnom pravcu ima koordinatu $-\frac{2}{5}$. Odredite na tom pravcu skup svih točaka T za koje vrijedi: $\left|\left|OA\right|-\left|OT\right|\right|\le 2$.

Rješenje 092

Ponovimo!

Za realni broj x njegova je apsolutna vrijednost (modul) broj $|x|$ koji određujemo na ovaj način:

$$|x| = \begin{cases} x, & x \geq 0 \\ -x, & x < 0. \end{cases}$$

Apsolutna vrijednost:

- pozitivnog broja jednaka je tom broju

$$|x| = x \text{ za } x > 0$$

- negativnog broja suprotna je tom broju

$$|x| = -x \text{ za } x < 0$$

- nule jednaka je nuli

$$|x| = 0 \text{ za } x = 0.$$

$$|x| \geq 0 \ , \ x \in R \quad , \quad |x| \leq a \ , \ a > 0 \ \Rightarrow \ -a \leq x \leq a \quad , \quad a \leq b \ , \ c \in R \ \Rightarrow \ a + c \leq b + c.$$

$$a \leq b \ , \ c < 0 \ \Rightarrow \ a \cdot c \geq b \cdot c \quad , \quad n = \frac{n}{1} \quad , \quad \frac{a}{b} - \frac{c}{d} = \frac{a \cdot d - b \cdot c}{b \cdot d}.$$

Udaljenost točaka $A(x_1)$ i $B(x_2)$ na brojevnom pravcu:

$$|AB| = |x_2 - x_1|.$$

Točka O je ishodište pa ima koordinatu 0.

$$O(x_1) = O(0).$$

- Točka A na brojevnom pravcu ima koordinatu $-\frac{2}{5}$ pa vrijedi:

$$\left.\begin{matrix} O(x_1) = O(0) \\ A(x_2) = A\left(-\frac{2}{5}\right) \end{matrix}\right\} \Rightarrow \left[\, |OA| = |x_2 - x_1| \,\right] \Rightarrow |OA| = \left|-\frac{2}{5} - 0\right| \Rightarrow$$

$$\Rightarrow |OA| = \left|-\frac{2}{5}\right| \Rightarrow |OA| = \frac{2}{5}.$$

- Točka T na brojevnom pravcu ima koordinatu x pa vrijedi:

$$\left.\begin{matrix} O(x_1) = O(0) \\ T(x_2) = T(x) \end{matrix}\right\} \Rightarrow \left[\, |OT| = |x_2 - x_1| \,\right] \Rightarrow |OT| = |x - 0| \Rightarrow |OT| = |x|.$$

Budući da je uvjet u zadatku

$$\big||OA| - |OT|\big| \leq 2,$$

dalje slijedi:

$$\big||OA| - |OT|\big| \leq 2 \Rightarrow \begin{bmatrix} |OA| = \frac{2}{5} \\ |OT| = |x| \end{bmatrix} \Rightarrow \left|\frac{2}{5} - |x|\right| \leq 2 \Rightarrow -2 \leq \frac{2}{5} - |x| \leq 2 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow -2 \leq \frac{2}{5} - |x| \leq 2 \ / - \frac{2}{5} \Rightarrow -2 - \frac{2}{5} \leq \frac{2}{5} - |x| - \frac{2}{5} \leq 2 - \frac{2}{5} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow -\frac{2}{1} - \frac{2}{5} \leq \frac{2}{5} - |x| - \frac{2}{5} \leq \frac{2}{1} - \frac{2}{5} \Rightarrow \frac{-10-2}{5} \leq -|x| \leq \frac{10-2}{5} \Rightarrow -\frac{12}{5} \leq -|x| \leq \frac{8}{5} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow -\frac{12}{5} \leq -|x| \leq \frac{8}{5} \ / \cdot (-1) \Rightarrow \frac{12}{5} \geq |x| \geq -\frac{8}{5} \Rightarrow -\frac{8}{5} \leq |x| \leq \frac{12}{5} \Rightarrow \left[\, |x| \geq 0 \,\right] \Rightarrow$$

$$\Rightarrow |x| \le \frac{12}{5} \Rightarrow -\frac{12}{5} \le x \le \frac{12}{5} \Rightarrow x \in \left[-\frac{12}{5}, \frac{12}{5}\right].$$

Vježba 092

Točka A na brojevnom pravcu ima koordinatu $-\frac{2}{5}$. Odredite na tom pravcu skup svih točaka T za koje vrijedi: $\left| |OA| - |OT| \right| = 2.$

Rezultat: $T_1\left(-\frac{12}{5}\right), T_2\left(\frac{12}{5}\right).$

Zadatak 093 (Marino i prijateljica Mirsada ☺, srednja škola)

Broj rješenja jednadžbe $9^{|3 \cdot x - 1|} = 3^{8 \cdot x - 2}$ je:

A. 0 *B.* 1 *C.* 2 *D.* 3

Rješenje 093

Ponovimo!

Za realni broj x njegova je apsolutna vrijednost (modul) broj $|x|$ koji određujemo na ovaj način:

$$|x| = \begin{cases} x, & x \ge 0 \\ -x, & x < 0. \end{cases}$$

Apsolutna vrijednost:

- pozitivnog broja jednaka je tom broju

$$|x| = x \text{ za } x > 0$$

- negativnog broja suprotna je tom broju

$$|x| = -x \text{ za } x < 0$$

- nule jednaka je nuli

$$|x| = 0 \text{ za } x = 0.$$

$$a \ge b \ , \ c > 0 \Rightarrow \frac{a}{c} \ge \frac{b}{c} \quad , \quad a < b \ , \ c > 0 \Rightarrow \frac{a}{c} < \frac{b}{c} \quad , \quad \left(a^n\right)^m = a^{n \cdot m}.$$

$$a^{f(x)} = a^{g(x)} \Rightarrow f(x) = g(x).$$

Zakon distribucije množenja prema zbrajanju.

$$a \cdot (b + c) = a \cdot b + a \cdot c \quad , \quad a \cdot b + a \cdot c = a \cdot (b + c).$$

Svaki se razlomak (racionalan broj) može napisati kao decimalni broj tako da brojnik podijelimo nazivnikom.

$$9^{|3 \cdot x - 1|} = 3^{8 \cdot x - 2} \Rightarrow \left(3^2\right)^{|3 \cdot x - 1|} = 3^{8 \cdot x - 2} \Rightarrow 3^{2 \cdot |3 \cdot x - 1|} = 3^{8 \cdot x - 2} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 2 \cdot |3 \cdot x - 1| = 8 \cdot x - 2 \Rightarrow 2 \cdot |3 \cdot x - 1| = 8 \cdot x - 2 \ /: 2 \Rightarrow |3 \cdot x - 1| = 4 \cdot x - 1.$$

Preoblikujemo jednadžbu u dva slučaja.

1. slučaj

$$3 \cdot x - 1 \ge 0 \Rightarrow 3 \cdot x \ge 1 \Rightarrow 3 \cdot x \ge 1 \ /: 3 \Rightarrow x \ge \frac{1}{3}.$$

Sada je:

$$\left|3\cdot x-1\right|=4\cdot x-1\ \Rightarrow\ \begin{bmatrix}\text{uvjet}\\ 3\cdot x-1\geq 0\end{bmatrix}\ \Rightarrow\ 3\cdot x-1=4\cdot x-1\ \Rightarrow\ 3\cdot x-1=4\cdot x-1\ \Rightarrow$$

$$\Rightarrow\ 3\cdot x=4\cdot x\ \Rightarrow\ 3\cdot x-4\cdot x=0\ \Rightarrow\ -x=0\ \Rightarrow\ x=0\ \Rightarrow\ \begin{bmatrix}\text{uvjet}\\ x\geq \frac{1}{3}\end{bmatrix}\ \Rightarrow\ x=0 \text{ nije rješenje.}$$

2. slučaj

$$3\cdot x-1<0\ \Rightarrow\ 3\cdot x<1\ \Rightarrow\ 3\cdot x<1\ /:3\ \Rightarrow\ x<\frac{1}{3}.$$

Sada je:

$$\left|3\cdot x-1\right|=4\cdot x-1\ \Rightarrow\ \begin{bmatrix}\text{uvjet}\\ 3\cdot x-1<0\end{bmatrix}\ \Rightarrow\ -\left(3\cdot x-1\right)=4\cdot x-1\ \Rightarrow\ -3\cdot x+1=4\cdot x-1\ \Rightarrow$$

$$\Rightarrow\ -3\cdot x-4\cdot x=-1-1\ \Rightarrow\ -7\cdot x=-2\ \Rightarrow\ -7\cdot x=-2\ /:\left(-7\right)\ \Rightarrow\ x=\frac{2}{7}.$$

Uočimo da je

$$\left.\begin{aligned}\frac{2}{7}&=0.2857...\\ \frac{1}{3}&=0.3333...\end{aligned}\right\}\ \Rightarrow\ \frac{2}{7}<\frac{1}{3}\ \Rightarrow\ x=\frac{2}{7} \text{ je rješenje.}$$

Zadana jednadžba ima jedno rješenje.
Odgovor je pod B.

Vježba 093

Broj rješenja jednadžbe $4^{\left|3\cdot x-1\right|}=2^{8\cdot x-2}$ je:

A. 0 *B.* 1 *C.* 2 *D.* 3

Rezultat: B.

Zadatak 094 (Katarina, maturantica)

Koliki je **zbroj** svih rješenja jednadžbe $\left|\left|x-2\right|-4\right|=4$?

A. 6 *B.* 8 *C.* 10 *D.* 12

Rješenje 094

Ponovimo!

Za realni broj x njegova je apsolutna vrijednost (modul) broj $|x|$ koji određujemo na ovaj način:

$$\left|x\right|=\begin{cases}x, & x\geq 0\\ -x, & x<0.\end{cases}$$

Apsolutna vrijednost:

- pozitivnog broja jednaka je tom broju
$$\left|x\right|=x \text{ za } x>0$$
- negativnog broja suprotna je tom broju
$$\left|x\right|=-x \text{ za } x<0$$
- nule jednaka je nuli
$$\left|x\right|=0 \text{ za } x=0.$$

$$|x| = a \ , \ a > 0 \Rightarrow \left.\begin{matrix} a = -a \\ x = a \end{matrix}\right\}.$$

$$\big||x-2|-4\big| = 4 \Rightarrow \left.\begin{matrix} |x-2|-4 = -4 \\ |x-2|-4 = 4 \end{matrix}\right\} \Rightarrow \left.\begin{matrix} |x-2| = -4+4 \\ |x-2| = 4+4 \end{matrix}\right\} \Rightarrow \left.\begin{matrix} |x-2| = 0 \\ |x-2| = 8 \end{matrix}\right\} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \left.\begin{matrix} x-2 = 0 \\ x-2 = -8 \\ x-2 = 8 \end{matrix}\right\} \Rightarrow \left.\begin{matrix} x = 2 \\ x = -8+2 \\ x = 8+2 \end{matrix}\right\} \Rightarrow \left.\begin{matrix} x_1 = 2 \\ x_2 = -6 \\ x_3 = 10 \end{matrix}\right\}.$$

Zbroj svih rješenja iznosi:

$$x_1 + x_2 + x_3 = 2 - 6 + 10 \Rightarrow x_1 + x_2 + x_3 = 6.$$

Odgovor je pod A.

Vježba 094

Koliki je **umnožak** svih rješenja jednadžbe $\big||x-2|-4\big| = 4$?

A. 2 *B.* 1 *C.* 0 *D.* -2

Rezultat: C.

Zadatak 095 (Valentina, ekonomska škola)

Neka su x_1 i x_2 realni brojevi i $f(x) = |x|$. Tada je $f(x_1) = f(x_2)$ onda i samo onda ako je:

A. $x_1 = -x_2$ ili $x_1 = x_2$ *B.* $x_1 = x_2$ *C.* $x_1 = -x_2$ *D.* $x_1 = x_2 = 0$

Rješenje 095

Ponovimo!

Za realni broj x njegova je apsolutna vrijednost (modul) broj $|x|$ koji određujemo na ovaj način:

$$|x| = \begin{cases} x, & x \geq 0 \\ -x, & x < 0. \end{cases}$$

Apsolutna vrijednost:

- pozitivnog broja jednaka je tom broju

$$|x| = x \text{ za } x > 0$$

- negativnog broja suprotna je tom broju

$$|x| = -x \text{ za } x < 0$$

- nule jednaka je nuli

$$|x| = 0 \text{ za } x = 0.$$

$$|x| = |y| \Rightarrow x = -y \text{ ili } x = y.$$

$$f(x_1) = f(x_2) \Rightarrow \left[f(x) = |x| \right] \Rightarrow |x_1| = |x_2| \Rightarrow x_1 = -x_2 \text{ ili } x_1 = x_2.$$

Odgovor je pod A.

Vježba 095

Neka su x_1 i x_2 realni brojevi i $f(x) = |x|$. Tada je $f(x_1) - f(x_2) = 0$ onda i samo onda ako je:

A. $x_1 = -x_2$ ili $x_1 = x_2$ *B.* $x_1 = x_2$ *C.* $x_1 = -x_2$ *D.* $x_1 = x_2 = 0$

Rezultat: A.

Zadatak 096 (Lily, bivša maturantica)

Koliko rješenja ima jednadžba $\left|\left|2\cdot x-3\right|-m\right|=m$ ako je parametar m > 0?

$A.$ točno jedno $\quad B.$ točno dva $\quad C.$ točno tri $\quad D.$ točno četiri

Rješenje 096

Ponovimo!

Za realni broj x njegova je apsolutna vrijednost (modul) broj | x | koji određujemo na ovaj način:

$$\left|x\right|=\begin{cases} x, & x\ge 0 \\ -x, & x<0. \end{cases}$$

Apsolutna vrijednost:

- pozitivnog broja jednaka je tom broju

$$\left|x\right|=x \text{ za } x>0$$

- negativnog broja suprotna je tom broju

$$\left|x\right|=-x \text{ za } x<0$$

- nule jednaka je nuli

$$\left|x\right|=0 \text{ za } x=0.$$

$$\left|x\right|=a\ ,\ a> \ \Rightarrow \left.\begin{array}{l} x=-a \\ x=a \end{array}\right\}\quad ,\quad \left|x\right|=0\ \Rightarrow\ x=0.$$

$$\left|\left|2\cdot x-3\right|-m\right|=m \Rightarrow \left.\begin{array}{l} \left|2\cdot x-3\right|-m=-m \\ \left|2\cdot x-3\right|-m=m \end{array}\right\} \Rightarrow \left.\begin{array}{l} \left|2\cdot x-3\right|-m=-m \\ \left|2\cdot x-3\right|=m+m \end{array}\right\} \Rightarrow \left.\begin{array}{l} \left|2\cdot x-3\right|=0 \\ \left|2\cdot x-3\right|=2\cdot m \end{array}\right\} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \left.\begin{array}{l} 2\cdot x-3=0 \\ 2\cdot x-3=-2\cdot m \\ 2\cdot x-3=2\cdot m \end{array}\right\} \Rightarrow \left.\begin{array}{l} 2\cdot x=3 \\ 2\cdot x=-2\cdot m+3 \\ 2\cdot x=2\cdot m+3 \end{array}\right\} \Rightarrow \left.\begin{array}{l} 2\cdot x=3\ /:2 \\ 2\cdot x=-2\cdot m+3\ /:2 \\ 2\cdot x=2\cdot m+3\ /:2 \end{array}\right\} \Rightarrow \left.\begin{array}{l} x_1=\frac{3}{2} \\ x_2=\frac{-2\cdot m+3}{2} \\ x_3=\frac{2\cdot m+3}{2} \end{array}\right\}.$$

Odgovor je pod C.

Vježba 096

Koliko rješenja ima jednadžba $\left|\left|7\cdot x-5\right|-m\right|=m$ ako je parametar m > 0?

$A.$ točno jedno $\quad B.$ točno dva $\quad C.$ točno tri $\quad D.$ točno četiri

Rezultat: C.

Zadatak 097 (Vlado, tehnička škola)

Koliko rješenja ima jednadžba $(f\circ f)(x)=0$, gdje je $f(x)=\left|x+a\right|$, $a\in R$.

Rješenje 097

Ponovimo!

$$a\ge b\ ,\ c<0\ \Rightarrow\ a\cdot c\le b\cdot c$$

Za realni broj x njegova je apsolutna vrijednost (modul) broj | x | koji određujemo na ovaj način:

$$\left|x\right|=\begin{cases} x, & x\ge 0 \\ -x, & x<0. \end{cases}$$

Apsolutna vrijednost:

- pozitivnog broja jednaka je tom broju

$$|x| = x \text{ za } x > 0$$

- negativnog broja suprotna je tom broju

$$|x| = -x \text{ za } x < 0$$

- nule jednaka je nuli

$$|x| = 0 \text{ za } x = 0.$$

$$|x| = a \ , \ a > \ \Rightarrow \left.\begin{matrix} x = -a \\ x = a \end{matrix}\right\} \quad , \quad |x| = 0 \ \Rightarrow \ x = 0.$$

Kompozicija funkcija f i g

$$(f \circ g)(x) = f(g(x)) \quad , \quad (g \circ f)(x) = g(f(x)).$$

$$(f \circ f)(x) = 0 \ \Rightarrow \ f(f(x)) = 0 \ \Rightarrow \ |f(x) + a| = 0 \ \Rightarrow \ ||x + a| + a| = 0 \ \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \ |x + a| + a = 0 \ \Rightarrow \ |x + a| = -a.$$

Apsolutna vrijednost realnog broja je nenegativan broj pa vrijedi

$$-a \geq 0 \ \Rightarrow \ -a \geq 0 \ / \cdot (-1) \ \Rightarrow \ a \leq 0.$$

Znači da je

$$a \in \langle -\infty, 0].$$

Tada je:

$$|x + a| = -a \ \Rightarrow \left.\begin{matrix} x + a = -a \\ x + a = -(-a) \end{matrix}\right\} \Rightarrow \left.\begin{matrix} x + a = -a \\ x + a = a \end{matrix}\right\} \Rightarrow \left.\begin{matrix} x = -a - a \\ x + a = a \end{matrix}\right\} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \left.\begin{matrix} x = -2 \cdot a \\ x = 0 \end{matrix}\right\} \Rightarrow \ x = -2 \cdot a \ , \ a \in \langle -\infty, 0].$$

Vježba 097

Koliko rješenja ima jednadžba $(f \circ f)(x) = 0$, gdje je $f(x) = |x - 2|$.

Rezultat: 0 i 4.

Zadatak 098 (Marijan, tehnička škola)

Riješi nejednadžbu $|x| > x.$

Rješenje 098

Ponovimo!

$$a > b \ , \ c < 0 \ \Rightarrow \ \frac{a}{c} < \frac{b}{c}.$$

Za realni broj x njegova je apsolutna vrijednost (modul) broj | x | koji određujemo na ovaj način:

$$|x| = \begin{cases} x, \ x \geq 0 \\ -x, \ x < 0. \end{cases}$$

Apsolutna vrijednost:

- pozitivnog broja jednaka je tom broju

$$|x| = x \text{ za } x > 0$$

- negativnog broja suprotna je tom broju

$$|x| = -x \text{ za } x < 0$$

- nule jednaka je nuli

$$|x| = 0 \text{ za } x = 0.$$

Preoblikujemo nejednadžbu.

$$\left|x\right|>x \Rightarrow \left|x\right|-x>0.$$

Prvi slučaj

$$\left|x\right|-x>0 \Rightarrow \left[x \geq 0\right] \Rightarrow x-x>0 \Rightarrow x-x>0 \Rightarrow 0>0.$$

Nema rješenja.
Drugi slučaj

$$\left|x\right|-x>0 \Rightarrow \left[x<0\right] \Rightarrow -x-x>0 \Rightarrow -2 \cdot x>0 \Rightarrow -2 \cdot x>0 \ /:\left(-2\right) \Rightarrow x<0.$$

Rješenje je

$$x \in \left\langle -\infty, 0\right\rangle.$$

Vježba 098

Riješi nejednadžbu $\left|x\right|<x$.

Rezultat: Nema rješenja.