Zadatak 041 (Marina, Željka, Marija, Luka, Vesna, Martina, TUPŠ)

Dokaži da za svako $x \in R$ vrijedi jednakost: $\left(\frac{x+|x|}{2}\right)^2+\left(\frac{x-|x|}{2}\right)^2=x^2.$

Rješenje 041

Ponovimo!

Za realni broj x njegova je apsolutna vrijednost (modul) broj $|x|$ koji određujemo na ovaj način:

$$|x|=\begin{cases} x, & x \ge 0 \\ -x, & x<0. \end{cases}$$

Ako je broj x pozitivan ili nula, tada je on jednak svojoj apsolutnoj vrijednosti. Za svaki x, $x \ge 0$, vrijedi $|x| = x$.

Ako je x negativan broj, njegova apsolutna vrijednost je suprotan broj – x koji je pozitivan. Za svaki x, $x < 0$, je $|x| = -x$.

Za $x \ge 0$ je $|x| = x$ pa vrijedi:

$$\left(\frac{x+|x|}{2}\right)^2+\left(\frac{x-|x|}{2}\right)^2=\left(\frac{x+x}{2}\right)^2+\left(\frac{x-x}{2}\right)^2=\left(\frac{2\cdot x}{2}\right)^2+\left(\frac{x-x}{2}\right)^2=x^2+\left(\frac{0}{2}\right)^2=x^2+0=x^2.$$

Za $x < 0$ je $|x| = -x$ pa vrijedi:

$$\left(\frac{x+|x|}{2}\right)^2+\left(\frac{x-|x|}{2}\right)^2=\left(\frac{x-x}{2}\right)^2+\left(\frac{x-(-x)}{2}\right)^2=\left(\frac{x-x}{2}\right)^2+\left(\frac{x+x}{2}\right)^2=\left(\frac{0}{2}\right)^2+\left(\frac{2\cdot x}{2}\right)=0+x^2=x^2.$$

Vježba 041

Dokaži da za svako $x \in R$ vrijedi jednakost: $\left(\frac{x+|x|}{2}\right)^4+\left(\frac{x-|x|}{2}\right)^4=x^4.$

Rezultat: Dokaz analogan.

Zadatak 042 (Marina, gimnazija)

Pojednostavni: $A=\frac{a^2+1}{a\cdot\sqrt{\left(\frac{a^2-1}{2\cdot a}\right)^2+1}}, \; a \ne 0.$

Rješenje 042

Ponovimo!

$$(a-b)^2=a^2-2\cdot a\cdot b+b^2 \quad , \quad (a+b)^2=a^2+2\cdot a\cdot b+b^2.$$

Za realni broj x njegova je apsolutna vrijednost (modul) broj $|x|$ koji određujemo na ovaj način:

$$|x|=\begin{cases} x, & x \ge 0 \\ -x, & x<0. \end{cases}$$

Ako je broj x pozitivan ili nula, tada je on jednak svojoj apsolutnoj vrijednosti. Za svaki x, $x \ge 0$, vrijedi $|x| = x$.

Ako je x negativan broj, njegova apsolutna vrijednost je suprotan broj – x koji je pozitivan. Za svaki x, $x < 0$, je $|x| = -x$.

$$\left(\frac{a}{b}\right)^n=\frac{a^n}{b^n} \quad , \quad \sqrt{a^2}=|a| \quad , \quad |a\cdot b|=|a|\cdot|b| \quad , \quad \left|\frac{a}{b}\right|=\frac{|a|}{|b|}$$

$$A=\frac{a^2+1}{a\cdot\sqrt{\left(\frac{a^2-1}{2\cdot a}\right)^2+1}}=\frac{a^2+1}{a\cdot\sqrt{\frac{a^4-2\cdot a^2+1}{4\cdot a^2}+1}}=\frac{a^2+1}{a\cdot\sqrt{\frac{a^4-2\cdot a^2+1+4\cdot a^2}{4\cdot a^2}}}=$$

$$=\frac{a^2+1}{a\cdot\sqrt{\frac{a^4+2\cdot a^2+1}{4\cdot a^2}}}=\frac{a^2+1}{a\cdot\sqrt{\frac{\left(a^2+1\right)^2}{4\cdot a^2}}}=\frac{a^2+1}{a\cdot\sqrt{\left(\frac{a^2+1}{2\cdot a}\right)^2}}=\frac{a^2+1}{a\cdot\left|\frac{a^2+1}{2\cdot a}\right|}=\frac{a^2+1}{a\cdot\frac{\left|a^2+1\right|}{\left|2\cdot a\right|}}=\frac{a^2+1}{a\cdot\frac{a^2+1}{2\cdot\left|a\right|}}=$$

$$=\frac{a^2+1}{a\cdot\frac{a^2+1}{2\cdot\left|a\right|}}=\frac{2\cdot\left|a\right|}{a}.$$

Sada je:

- $a>0\ \Rightarrow\ \left|a\right|=a\ \Rightarrow\ A=\frac{2\cdot a}{a}=\frac{2\cdot a}{a}=2$
- $a<0\ \Rightarrow\ \left|a\right|=-a\ \Rightarrow\ A=\frac{2\cdot(-a)}{a}=\frac{-2\cdot a}{a}=-2.$

Rješenje:

$$A=\begin{cases}2 \text{ za } a>0\\ -2 \text{ za } a<0.\end{cases}$$

Vježba 042

Pojednostavni: $A=\frac{a\cdot\sqrt{\left(\frac{a^2-1}{2\cdot a}\right)^2+1}}{a^2+1}.$

Rezultat: $A=\begin{cases}\frac{1}{2} \text{ za } a>0\\ -\frac{1}{2} \text{ za } a<0.\end{cases}$

Zadatak 043 (Megy, maturantica gimnazije)

Nacrtaj graf funkcije: $|x|+|y|=1.$

Rješenje 043

Ponovimo!

Za realni broj x njegova je apsolutna vrijednost (modul) broj $|x|$ koji određujemo na ovaj način:

$$|x|=\begin{cases}x,\ x\geq 0\\ -x,\ x<0.\end{cases}$$

Ako je broj x pozitivan ili nula, tada je on jednak svojoj apsolutnoj vrijednosti. Za svaki x, $x\geq 0$, vrijedi $|x|=x$.

Ako je x negativan broj, njegova apsolutna vrijednost je suprotan broj – x koji je pozitivan. Za svaki x, $x<0$, je $|x|=-x$.

Promotrimo slučaj za $y\geq 0$:

$$y\geq 0\ \Rightarrow\ |y|=y\ \Rightarrow\ \left.\begin{array}{l}|x|+|y|=1\\ |y|=y\end{array}\right\}\ \Rightarrow\ |x|+y=1\ \Rightarrow\ y=-|x|+1.$$

- ako je $x \geq 0 \Rightarrow |x| = x \Rightarrow y = -x + 1$
- ako je $x < 0 \Rightarrow |x| = -x \Rightarrow y = x + 1.$

Promotrimo slučaj za y < 0:

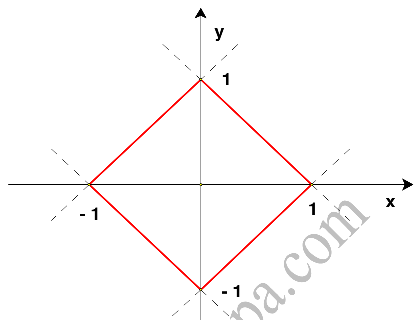
$$y < 0 \Rightarrow |y| = -y \Rightarrow \left.\begin{matrix} |x| + |y| = 1 \\ |y| = -y \end{matrix}\right\} \Rightarrow |x| - y = 1 \Rightarrow -y = -|x| + 1 \,/\cdot(-1) \Rightarrow y = |x| - 1.$$

- ako je $x \geq 0 \Rightarrow |x| = x \Rightarrow y = x - 1$
- ako je $x < 0 \Rightarrow |x| = -x \Rightarrow y = -x - 1.$

Sada je:

$$\left.\begin{matrix} y \geq 0 \\ x \geq 0 \end{matrix}\right\} \Rightarrow I.\text{ kvadrant} \Rightarrow y = -x + 1 \quad , \quad \left.\begin{matrix} y \geq 0 \\ x < 0 \end{matrix}\right\} \Rightarrow II.\text{ kvadrant} \Rightarrow y = x + 1,$$

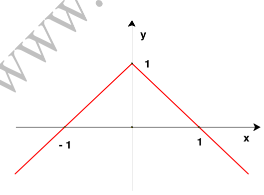
$$\left.\begin{matrix} y < 0 \\ x \geq 0 \end{matrix}\right\} \Rightarrow IV.\text{ kvadrant} \Rightarrow y = x - 1 \quad , \quad \left.\begin{matrix} y < 0 \\ x < 0 \end{matrix}\right\} \Rightarrow III.\text{ kvadrant} \Rightarrow y = -x - 1.$$



Vježba 043

Nacrtaj graf funkcije: $|x| + y = 1.$

Rezultat:



Zadatak 044 (Emy, gimnazija)

Pojednostavni izraz: $\dfrac{\sqrt{a^2 - 4 \cdot a + 4}}{a - 2} - \dfrac{a - 2}{a^2 - 4},\ a \neq \pm 2.$

Rješenje 044

Ponovimo!

$$(x - y)^2 = x^2 - 2 \cdot x \cdot y + y^2 \quad , \quad x^2 - y^2 = (x - y) \cdot (x + y).$$

Za realni broj x njegova je apsolutna vrijednost (modul) broj $|x|$ koji određujemo na ovaj način:

$$|x| = \begin{cases} x, & x \geq 0 \\ -x, & x < 0. \end{cases}$$

Ako je broj x pozitivan ili nula, tada je on jednak svojoj apsolutnoj vrijednosti. Za svaki x, x ≥ 0, vrijedi $|x| = x.$

Ako je x negativan broj, njegova apsolutna vrijednost je suprotan broj – x koji je pozitivan. Za svaki x, x < 0, je $|x| = -x.$

$$\frac{\sqrt{a^2-4\cdot a+4}}{a-2}-\frac{a-2}{a^2-4}=\frac{\sqrt{(a-2)^2}}{a-2}-\frac{a-2}{a^2-4}=\frac{|a-2|}{a-2}-\frac{a-2}{a^2-4}=\frac{|a-2|}{a-2}-\frac{a-2}{(a-2)\cdot(a+2)}=$$

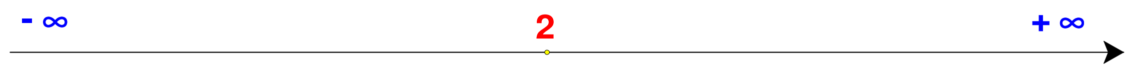
$$=\frac{|a-2|}{a-2}-\frac{a-2}{(a-2)\cdot(a+2)}=\frac{|a-2|}{a-2}-\frac{1}{a+2}.$$

Iz a – 2 = 0 nalazimo karakterističnu točku (KT) modula:

$$a-2=0 \;\Rightarrow\; a=2 \;\; \text{KT}.$$

Karakteristična točka a = 2 dijeli brojevni pravac na dva dijela:

$$a<2 \quad , \quad a>2.$$



Je li izraz pod znakom modula pozitivan ili negativan, provjeravamo uvrštavanjem jednog broja manjeg od KT i jednog većeg od KT, a zatim primijenimo definiciju modula (apsolutne vrijednosti).

Prvi slučaj

Za $a<2$ izraz a – 2 je negativan pa vrijedi:

$$|a-2|=-(a-2)=-a+2.$$

Zato je:

$$\frac{|a-2|}{a-2}-\frac{1}{a+2}=\frac{-a+2}{a-2}-\frac{1}{a+2}=\frac{-(a-2)}{a-2}-\frac{1}{a+2}=\frac{-(a-2)}{a-2}-\frac{1}{a+2}=-1-\frac{1}{a+2}=$$

$$=\frac{-(a+2)-1}{a+2}=\frac{-a-2-1}{a+2}=\frac{-a-3}{a+2}.$$

Drugi slučaj

Za $a>2$ izraz a – 2 je pozitivan pa vrijedi:

$$|a-2|=a-2.$$

Zato je:

$$\frac{|a-2|}{a-2}-\frac{1}{a+2}=\frac{a-2}{a-2}-\frac{1}{a+2}=\frac{a-2}{a-2}-\frac{1}{a+2}=1-\frac{1}{a+2}=\frac{a+2-1}{a+2}=\frac{a+1}{a+2}.$$

Vježba 044

Pojednostavni izraz: $\dfrac{\sqrt{a^2-4\cdot a+4}}{a-2}$, $a\neq 2$.

Rezultat: $\begin{cases} 1, & a>2 \\ -1, & a<2. \end{cases}$

Zadatak 045 (Valentina, maturantica)

Koliko rješenja u skupu Z ima nejednadžba $|x+2|<\dfrac{3}{4}$?

A. 0 *B.* 1 *C.* 2 *D.* 3 *E.* beskonačno mnogo

Rješenje 045

Ponovimo!

Za realni broj x njegova je apsolutna vrijednost (modul) broj $|x|$ koji određujemo na ovaj način:

$$|x|=\begin{cases} x, & x\geq 0 \\ -x, & x<0. \end{cases}$$

Ako je broj x pozitivan ili nula, tada je on jednak svojoj apsolutnoj vrijednosti. Za svaki x, $x \geq 0$, vrijedi $|x| = x$.

Ako je x negativan broj, njegova apsolutna vrijednost je suprotan broj – x koji je pozitivan. Za svaki x, x < 0, je $|x| = -x$.

$$|x| < a \ , \ a > 0 \Rightarrow -a < x < a.$$

$$|x+2| < \frac{3}{4} \Rightarrow -\frac{3}{4} < x+2 < \frac{3}{4} \Rightarrow -\frac{3}{4} < x+2 < \frac{3}{4} \ /-2 \Rightarrow -\frac{3}{4}-2 < x+2-2 < \frac{3}{4}-2 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow -\frac{3}{4}-2 < x+2-2 < \frac{3}{4}-2 \Rightarrow -\frac{11}{4} < x < -\frac{5}{4} \Rightarrow -2\frac{3}{4} < x < -1\frac{1}{4} \Rightarrow x \in \{-2\}.$$

Odgovor je pod B.

Vježba 045

Koliko rješenja u skupu Z ima nejednadžba $|x+2| < 1$?

A. 0 *B.* 1 *C.* 2 *D.* 3 *E.* beskonačno mnogo

Rezultat: Odgovor je pod B.

Zadatak 046 (Vlado, maturant)

Riješi jednadžbu: $|x+2| = |5 \cdot x - 14|$.

Rješenje 046

Ponovimo!

Za dani realni broj x njegova je apsolutna vrijednost (modul) broj $|x|$ koji određujemo na ovaj način:

$$|x| = \begin{cases} x, \text{ ako je } x \geq 0 \\ -x, \text{ ako je } x < 0. \end{cases}$$

Ako je broj x pozitivan ili nula, tada je on jednak svojoj apsolutnoj vrijednosti. Za svaki x, x ≥ 0, vrijedi $|x| = x$.

Ako je x negativan broj, njegova apsolutna vrijednost je suprotan broj – x koji je pozitivan. Za svaki x, x < 0, je $|x| = -x$.

Ako je

$$|a| = |b|,$$

onda je

$$a = b \quad \text{ili} \quad a = -b.$$

Postoje dvije mogućnosti zbog definicije apsolutne vrijednosti:

$$|x+2| = |5 \cdot x - 14| \Rightarrow \left.\begin{matrix} x+2 = 5 \cdot x - 14 & 1. \text{ mogućnost} \\ x+2 = -(5 \cdot x - 14) & 2. \text{ mogućnost} \end{matrix}\right\} \Rightarrow \left.\begin{matrix} x+2 = 5 \cdot x - 14 \\ x+2 = -(5 \cdot x - 14) \end{matrix}\right\} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \left.\begin{matrix} x+2 = 5 \cdot x - 14 \\ x+2 = -5 \cdot x + 14 \end{matrix}\right\} \Rightarrow \left.\begin{matrix} x - 5 \cdot x = -14 - 2 \\ x + 5 \cdot x = 14 - 2 \end{matrix}\right\} \Rightarrow \left.\begin{matrix} -4 \cdot x = -16 \ /:(-4) \\ 6 \cdot x = 12 \ /:6 \end{matrix}\right\} \Rightarrow \left.\begin{matrix} x_1 = 4 \\ x_2 = 2 \end{matrix}\right\}.$$

Vježba 046

Riješi jednadžbu: $|x+1| = |3 \cdot x - 1|$.

Rezultat: $x_1 = 1$, $x_2 = 0$.

Zadatak 047 (Nikolina, gimnazija)

Koliko ima uređenih parova brojeva (i, j) takvih da je $i, \ j \in \{1, 2, 3, 4, ..., 20\}$ i $|i-j| \leq 2$?

Rješenje 047

Ponovimo!

Za realni broj x njegova je apsolutna vrijednost (modul) broj $|x|$ koji određujemo na ovaj način:

$$|x| = \begin{cases} x, & x \geq 0 \\ -x, & x < 0. \end{cases}$$

Ako je broj x pozitivan ili nula, tada je on jednak svojoj apsolutnoj vrijednosti. Za svaki x, $x \geq 0$, vrijedi $|x| = x$.
Ako je x negativan broj, njegova apsolutna vrijednost je suprotan broj $-x$ koji je pozitivan. Za svaki x, $x < 0$, je $|x| = -x$.

$$|x| \leq a \;\; , \;\; a > 0 \;\; \Rightarrow \;\; -a \leq x \leq a.$$

Riješimo se znaka apsolutne vrijednosti:

$$|i - j| \leq 2 \;\; \Rightarrow \;\; -2 \leq i - j \leq 2.$$

Budući da su i, j prirodni brojevi iz skupa $\{1,\ 2,\ 3,\ 4,\ ...\ ,\ 20\}$, a razlika $i - j$ mora biti između -2 i 2 uključujući -2 i 2, dobije se sustav jednadžbi:

$$i - j = -2 \quad , \quad i - j = -1 \quad , \quad i - j = 0 \quad , \quad i - j = 1 \quad , \quad i - j = 2.$$

Tražimo broj rješenja svake jednadžbe:

$i - j = -2$		$i - j = -1$		$i - j = 0$		$i - j = 1$		$i - j = 2$	
i	**j**	**i**	**j**	**i**	**j**	**i**	**j**	**i**	**j**
1	3	1	2	1	1	2	1	3	1
2	4	2	3	2	2	3	2	4	2
3	5	3	4	3	3	4	3	5	3
4	6	4	5	4	4	5	4	6	4
5	7	5	6	5	5	6	5	7	5
6	8	6	7	6	6	7	6	8	6
7	9	7	8	7	7	8	7	9	7
8	10	8	9	8	8	9	8	10	8
9	11	9	10	9	9	10	9	11	9
10	12	10	11	10	10	11	10	12	10
11	13	11	12	11	11	12	11	13	11
12	14	12	13	12	12	13	12	14	12
13	15	13	14	13	13	14	13	15	13
14	16	14	15	14	14	15	14	16	14
15	17	15	16	15	15	16	15	17	15
16	18	16	17	16	16	17	16	18	16
17	19	17	18	17	17	18	17	19	17
18	20	18	19	18	18	19	18	20	18
		19	20	19	19	20	19		
				20	20				
Ukupno 18 rješenja		**Ukupno 19 rješenja**		**Ukupno 20 rješenja**		**Ukupno 19 rješenja**		**Ukupno 18 rješenja**	

Ukupno parova ima:

$$18 + 19 + 20 + 19 + 18 = 94.$$

Vježba 047

Koliko ima uređenih parova brojeva (i, j) takvih da je $i,\ j \in \{1,\ 2,\ 3,\ 4,\ ...\ ,\ 20\}$ i $|i - j| < 1$?

Rezultat: 20.

Zadatak 048 (Valentina, gimnazija)

$$\text{Izračunaj}: 5 \cdot \left|\sqrt{3} - 4\right| + 4 \cdot \left|\sqrt{3} - 1\right|.$$

Rješenje 048

Ponovimo!

Za realni broj x njegova je apsolutna vrijednost (modul) broj $|x|$ koji određujemo na ovaj način:

$$|x| = \begin{cases} x, & x \geq 0 \\ -x, & x < 0. \end{cases}$$

Ako je broj x pozitivan ili nula, tada je on jednak svojoj apsolutnoj vrijednosti. Za svaki x, $x \geq 0$, vrijedi $|x| = x$.
Ako je x negativan broj, njegova apsolutna vrijednost je suprotan broj $-x$ koji je pozitivan. Za svaki x, $x < 0$, je $|x| = -x$.
Ili ovako:
Apsolutna vrijednost realnog broja x definira se

$$|x| = \begin{cases} x, & x > 0 \\ 0, & x = 0 \\ -x, & x < 0 \end{cases}.$$

Ako je broj x pozitivan broj, onda ga prepišemo: $|x| = x$, $|7| = 7$.

Ako je broj x negativan broj, onda ga pišemo s minusom: $|x| = -x$, $|-4| = -(-4) = 4$.

Budući da je $\sqrt{3}$ približno jednako 1.73,

$$\sqrt{3} \approx 1.73$$

uoči da je

- izraz $\sqrt{3} - 4 = 1.73 - 4 = -2.27 < 0$, negativan
- izraz $\sqrt{3} - 1 = 1.73 - 1 = 0.73 > 0$, pozitivan.

Zato je

$$5 \cdot \left|\sqrt{3} - 4\right| + 4 \cdot \left|\sqrt{3} - 1\right| = 5 \cdot \left|\underbrace{\sqrt{3} - 4}_{-}\right| + 4 \cdot \left|\underbrace{\sqrt{3} - 1}_{+}\right| = 5 \cdot \left(-\left(\sqrt{3} - 4\right)\right) + 4 \cdot \left(\sqrt{3} - 1\right) =$$

$$= 5 \cdot \left(-\sqrt{3} + 4\right) + 4 \cdot \left(\sqrt{3} - 1\right) = -5 \cdot \sqrt{3} + 20 + 4 \cdot \sqrt{3} - 4 = -\sqrt{3} + 16 = 16 - \sqrt{3}.$$

Vježba 048

Izračunaj: $3 \cdot \left|\sqrt{3} - 4\right| + 2 \cdot \left|\sqrt{3} - 1\right|$.

Rezultat: $10 - \sqrt{3}$.

Zadatak 049 (Marija, gimnazija)

Dokažite da je $\sqrt{3}$ iracionalni broj.

Rješenje 049

Ponovimo!

$$\left(\sqrt{a}\right)^2 = a \quad , \quad \left(\frac{x}{y}\right)^2 = \frac{x^2}{y^2}.$$

Za cijeli broj a kažemo da je djeljiv s cijelim brojem b ($b \neq 0$) ako postoji cijeli broj k tako da vrijedi

$$a = k \cdot b.$$

Primjer

Broj 45 je djeljiv brojem 9 jer postoji broj 5 tako da vrijedi

$$45 = 5 \cdot 9.$$

Najvećom zajedničkom mjerom prirodnih brojeva nazivamo najveći zajednički djelitelj tih brojeva. Za najveću zajedničku mjeru brojeva a i b uvodi se oznaka M(a, b).

Primjer

$$M(24,\ 32) = 8.$$

Ako brojevi a i b osim broja 1 nemaju drugih zajedničkih djelitelja kažemo da su relativno prosti brojevi i pišemo

$$M(a,\ b) = 1.$$

Primjer

$$M(12,\ 31)=1.$$

Iracionalni brojevi jesu brojevi koji se ne mogu prikazati u obliku

$$\frac{a}{b}\ ,\ b\neq 0\ ,\ a\ ,\ b\in Z.$$

Oni, dakle, nisu racionalni brojevi, a možemo ih prikazati u obliku neperiodskih decimalnih brojeva.
Primjer

$$\sqrt{2}\approx 1.41421356...\quad ,\quad \sqrt{3}\approx 1.73205080...\quad ,\quad \sqrt{5}\approx 2.23606797...\quad ,\quad \pi\approx 3.14159265...$$

Svi racionalni i iracionalni brojevi zajedno čine skup realnih brojeva R.

Treba dokazati da je $\sqrt{3}$ iracinalni broj.

Pretpostavit ćemo da to nije istina, da je $\sqrt{3}$ racionalni broj. Pretpostavimo, dakle, da je $\sqrt{3}$ racionalni broj, da se može napisati

$$\sqrt{3}=\frac{a}{b}$$

uz pretpostavku da je razlomak $\frac{a}{b}$ skraćen do kraja (ako nije skratimo ga), tj. da prirodni brojevi a i b nemaju zajedničkih faktora osim broja 1. Brojevi a i b su, dakle, relativno prosti brojevi,

$$M(a,\ b)=1.$$

Kvadriranjem i sređivanjem slijedi

$$\sqrt{3}=\frac{a}{b}\ \Rightarrow\ \sqrt{3}=\frac{a}{b}\ /^2\ \Rightarrow\ \left(\sqrt{3}\right)^2=\left(\frac{a}{b}\right)^2\ \Rightarrow\ 3=\frac{a^2}{b^2}\ \Rightarrow\ \frac{a^2}{b^2}=3\ /\cdot b^2\ \Rightarrow\ a^2=3\cdot b^2.$$

Gledaj jednakost

$$a^2=3\cdot b^2.$$

Na desnoj strani pojavljuje se faktor 3 što znači da bi i izraz na lijevoj strani a^2 morao, također, biti djeljiv sa 3.

Da bi a^2 bio djeljiv sa 3 mora a biti djeljiv sa 3 pa se piše u obliku

$$a=3\cdot m\ \text{ za svaki }\ m\in N.$$

Uvrstimo li

$$a=3\cdot m$$

u jednakost

$$a^2=3\cdot b^2$$

i skratimo, dobije se

$$\left.\begin{array}{l} a=3\cdot m \\ a^2=3\cdot b^2 \end{array}\right\}\ \Rightarrow\ \left[\begin{array}{l}\text{metoda}\\ \text{supstitucije}\end{array}\right]\ \Rightarrow\ (3\cdot m)^2=3\cdot b^2\ \Rightarrow\ 9\cdot m^2=3\cdot b^2\ /:3\ \Rightarrow$$

$$\Rightarrow\ 3\cdot m^2=b^2\ \Rightarrow\ b^2=3\cdot m^2.$$

Ponovno se na desnoj strani pojavljuje faktor 3 što znači da bi i izraz na lijevoj strani b^2 morao, također, biti djeljiv sa 3.

Da bi b^2 bio djeljiv sa 3 mora b biti djeljiv sa 3 pa se piše u obliku

$$b=3\cdot n\ \text{ za svaki }\ n\in N.$$

Stoga a i b imaju zajednički faktor 3

$$a=3\cdot m\quad ,\quad b=3\cdot n$$

što je u suprotnosti (kontradikciji) s pretpostavkom da je $\frac{a}{b}$ do kraja skraćen razlomak, tj. da su a i b relativno prosti brojevi. Znači naša početna pretpostavka da je $\sqrt{3}$ racionalni broj bila je pogrešna. Dakle,

$$\sqrt{3} \notin Q.$$

Broj $\sqrt{3}$ nije racionalni broj, on je iracionalni.

Vježba 049

Dokažite da je $\sqrt{5}$ iracionalni broj.

Rezultat: Dokaz analogan.

Zadatak 050 (Mirza, elektrotehnička škola)

Nacrtaj graf: $y = -2^{-|x|}$.

Rješenje 050

Ponovimo!

$$a^{-n} = \frac{1}{a^{n}} \quad , \quad a^{0} = 1 \quad , \quad a^{1} = a.$$

Za realni broj x njegova je apsolutna vrijednost (modul) broj $|x|$ koji određujemo na ovaj način:

$$|x| = \begin{cases} x, & x \geq 0 \\ -x, & x < 0. \end{cases}$$

Ako je broj x pozitivan ili nula, tada je on jednak svojoj apsolutnoj vrijednosti. Za svaki x, x ≥ 0, vrijedi $|x| = x$.

Ako je x negativan broj, njegova apsolutna vrijednost je suprotan broj – x koji je pozitivan. Za svaki x, x < 0, je $|x| = -x$.

Ili ovako:

Apsolutna vrijednost realnog broja x definira se

$$|x| = \begin{cases} x, & x > 0 \\ 0, & x = 0 \\ -x, & x < 0 \end{cases}.$$

Ako je broj x pozitivan broj, onda ga prepišemo: $|x| = x$, $|7| = 7$.

Ako je broj x negativan broj, onda ga pišemo s minusom: $|x| = -x$, $|-4| = -(-4) = 4$.

Izračunamo vrijednosti funkcije

$$f(x) = -2^{-|x|} \Rightarrow f(x) = -\frac{1}{2^{|x|}}$$

za, na primjer,

$$x = -3 , x = -2 , x = -1 , x = 0 , x = 1 , x = 2 , x = 3.$$

$$x = -3 \Rightarrow y = -\frac{1}{2^{|-3|}} \Rightarrow y = -\frac{1}{2^{3}} \Rightarrow y = -\frac{1}{8}.$$

$$x = -2 \Rightarrow y = -\frac{1}{2^{|-2|}} \Rightarrow y = -\frac{1}{2^{2}} \Rightarrow y = -\frac{1}{4}.$$

$$x = -1 \Rightarrow y = -\frac{1}{2^{|-1|}} \Rightarrow y = -\frac{1}{2^{1}} \Rightarrow y = -\frac{1}{2}.$$

$$x = 0 \Rightarrow y = -\frac{1}{2^{|0|}} \Rightarrow y = -\frac{1}{2^{0}} \Rightarrow y = -\frac{1}{1} \Rightarrow y = -1.$$

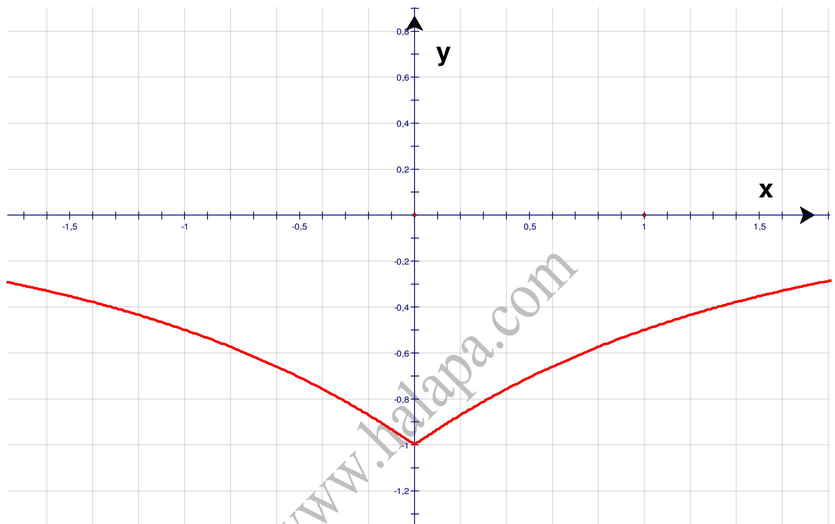
$$x=1 \;\Rightarrow\; y=-\frac{1}{2^{|1|}} \;\Rightarrow\; y=-\frac{1}{2^{1}} \;\Rightarrow\; y=-\frac{1}{2}.$$

$$x=2 \;\Rightarrow\; y=-\frac{1}{2^{|2|}} \;\Rightarrow\; y=-\frac{1}{2^{2}} \;\Rightarrow\; y=-\frac{1}{4}.$$

$$x=3 \;\Rightarrow\; y=-\frac{1}{2^{|3|}} \;\Rightarrow\; y=-\frac{1}{2^{3}} \;\Rightarrow\; y=-\frac{1}{8}.$$

Tablica zadanih argumenata x i njima pripadnih vrijednosti izgleda ovako:

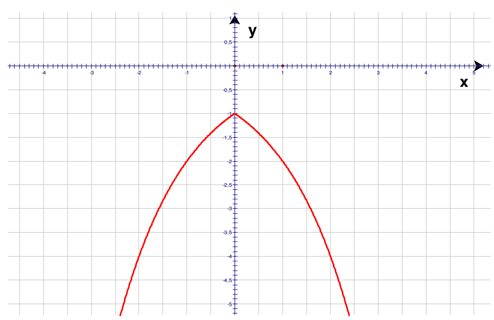
x	-3	-2	-1	0	1	2	3
y	$-\frac{1}{8}$	$-\frac{1}{4}$	$-\frac{1}{2}$	-1	$-\frac{1}{2}$	$-\frac{1}{4}$	$-\frac{1}{8}$



Vježba 050

Nacrtaj graf: $y=-2^{|x|}.$

Rezultat:



Zadatak 051 (Goran, srednja škola)

Izračunaj $\dfrac{a\cdot|a-b|-b\cdot|a+b|}{|a-b|-|a+b|}$, ako je $a=\sqrt{2},\ b=-\sqrt{3}.$

Rješenje 051

Ponovimo!

Za realni broj x njegova je apsolutna vrijednost (modul) broj $|x|$ koji određujemo na ovaj način:

$$|x| = \begin{cases} x, & x \geq 0 \\ -x, & x < 0. \end{cases}$$

Ako je broj x pozitivan ili nula, tada je on jednak svojoj apsolutnoj vrijednosti. Za svaki x, x ≥ 0, vrijedi $|x| = x$.

Ako je x negativan broj, njegova apsolutna vrijednost je suprotan broj – x koji je pozitivan. Za svaki x, x < 0, je $|x| = -x$.

Ili ovako:

Apsolutna vrijednost realnog broja x definira se

$$|x| = \begin{cases} x, & x > 0 \\ 0, & x = 0 \\ -x, & x < 0 \end{cases}.$$

Ako je broj x pozitivan broj, onda ga prepišemo: | x | = x, | 7 | = 7.

Ako je broj x negativan broj, onda ga pišemo s minusom: | x | = – x, | – 4 | = – (– 4) = 4.

$$a^n \cdot a^m = a^{n+m} \quad , \quad \left(\sqrt{a}\right)^2 = a \quad , \quad \sqrt{a} \cdot \sqrt{b} = \sqrt{a \cdot b}.$$

U zadani izraz uvrstimo vrijednosti od a i b.

$$\left.\begin{array}{l} \dfrac{a \cdot |a-b| - b \cdot |a+b|}{|a-b| - |a+b|} \\ a = \sqrt{2} \ , \ b = -\sqrt{3} \end{array}\right\} \Rightarrow \frac{\sqrt{2} \cdot \left|\sqrt{2} - \left(-\sqrt{3}\right)\right| - \left(-\sqrt{3}\right) \cdot \left|\sqrt{2} - \sqrt{3}\right|}{\left|\sqrt{2} - \left(-\sqrt{3}\right)\right| - \left|\sqrt{2} - \sqrt{3}\right|} =$$

$$= \frac{\sqrt{2} \cdot \left|\sqrt{2} + \sqrt{3}\right| + \sqrt{3} \cdot \left|\sqrt{2} - \sqrt{3}\right|}{\left|\sqrt{2} + \sqrt{3}\right| - \left|\sqrt{2} - \sqrt{3}\right|} = \frac{\sqrt{2} \cdot \left|\underbrace{\sqrt{2} + \sqrt{3}}_{\text{pozitivno}}\right| + \sqrt{3} \cdot \left|\underbrace{\sqrt{2} - \sqrt{3}}_{\text{negativno}}\right|}{\left|\underbrace{\sqrt{2} + \sqrt{3}}_{\text{pozitivno}}\right| - \left|\underbrace{\sqrt{2} - \sqrt{3}}_{\text{negativno}}\right|} =$$

$$= \frac{\sqrt{2} \cdot \left(\sqrt{2} + \sqrt{3}\right) + \sqrt{3} \cdot \left(-\left(\sqrt{2} - \sqrt{3}\right)\right)}{\left(\sqrt{2} + \sqrt{3}\right) - \left(-\left(\sqrt{2} - \sqrt{3}\right)\right)} = \frac{\sqrt{2} \cdot \left(\sqrt{2} + \sqrt{3}\right) + \sqrt{3} \cdot \left(-\sqrt{2} + \sqrt{3}\right)}{\left(\sqrt{2} + \sqrt{3}\right) + \left(\sqrt{2} - \sqrt{3}\right)} =$$

$$= \frac{\left(\sqrt{2}\right)^2 + \sqrt{6} - \sqrt{6} + \left(\sqrt{3}\right)^2}{\sqrt{2} + \sqrt{3} + \sqrt{2} - \sqrt{3}} = \frac{2 + \sqrt{6} - \sqrt{6} + 3}{\sqrt{2} + \sqrt{3} + \sqrt{2} - \sqrt{3}} =$$

$$= \frac{5}{2 \cdot \sqrt{2}} = \begin{bmatrix} \text{racionalizacija} \\ \text{nazivnika} \end{bmatrix} = \frac{5}{2 \cdot \sqrt{2}} \cdot \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{2}} = \frac{5 \cdot \sqrt{2}}{2 \cdot \left(\sqrt{2}\right)^2} = \frac{5 \cdot \sqrt{2}}{2 \cdot 2} = \frac{5 \cdot \sqrt{2}}{4}.$$

Vježba 051

Izračunaj $\dfrac{|a-b| - |a+b|}{a \cdot |a-b| - b \cdot |a+b|}$, ako je $a = \sqrt{2}$, $b = -\sqrt{3}$.

Rezultat: $\dfrac{2 \cdot \sqrt{2}}{5}$.

Zadatak 052 (Goran, srednja škola)

Koliko je: $\sqrt{9 \cdot x^2 + 6 \cdot x + 1}$ za $x > -\frac{1}{3}$?

Rješenje 052

Ponovimo!

Za realni broj x njegova je apsolutna vrijednost (modul) broj $|x|$ koji određujemo na ovaj način:

$$|x| = \begin{cases} x, & x \ge 0 \\ -x, & x < 0. \end{cases}$$

Ako je broj x pozitivan ili nula, tada je on jednak svojoj apsolutnoj vrijednosti. Za svaki x, $x \ge 0$, vrijedi $|x| = x$.

Ako je x negativan broj, njegova apsolutna vrijednost je suprotan broj – x koji je pozitivan. Za svaki x, $x < 0$, je $|x| = -x$.

Ili ovako:

Apsolutna vrijednost realnog broja x definira se

$$|x| = \begin{cases} x, & x > 0 \\ 0, & x = 0 \\ -x, & x < 0 \end{cases}.$$

Ako je broj x pozitivan broj, onda ga prepišemo: $|x| = x$, $|7| = 7$.

Ako je broj x negativan broj, onda ga pišemo s minusom: $|x| = -x$, $|-4| = -(-4) = 4$.

$$(a+b)^2 = a^2 + 2 \cdot a \cdot b + b^2 \quad , \quad \sqrt{a^2} = |a|.$$

Računamo drugi korijen.

$$\sqrt{9 \cdot x^2 + 6 \cdot x + 1} = \sqrt{(3 \cdot x + 1)^2} = |3 \cdot x + 1|.$$

Uočimo da je izraz $3 \cdot x + 1$ pozitivan za $x > -\frac{1}{3}$ pa slijedi:

$$\left. \begin{array}{l} |3 \cdot x + 1| \\ x > -\frac{1}{3} \end{array} \right\} \Rightarrow \left| \underbrace{3 \cdot x + 1}_{\text{pozitivno}} \right| = 3 \cdot x + 1.$$

Vježba 052

Koliko je: $\sqrt{9 \cdot x^2 + 6 \cdot x + 1}$ za $x < -\frac{1}{3}$?

Rezultat: $-3 \cdot x - 1.$

Zadatak 053 (Goran, srednja škola)

Skrati razlomak: $\dfrac{x^2 - 1}{x^2 + 2 \cdot |x| + 1}$.

Rješenje 053

Ponovimo!

Za realni broj x njegova je apsolutna vrijednost (modul) broj $|x|$ koji određujemo na ovaj način:

$$|x| = \begin{cases} x, & x \ge 0 \\ -x, & x < 0. \end{cases}$$

Ako je broj x pozitivan ili nula, tada je on jednak svojoj apsolutnoj vrijednosti. Za svaki x, $x \ge 0$, vrijedi $|x| = x$.

Ako je x negativan broj, njegova apsolutna vrijednost je suprotan broj – x koji je pozitivan. Za svaki x, $x < 0$, je $|x| = -x$.

Ili ovako:

Apsolutna vrijednost realnog broja x definira se

$$|x| = \begin{cases} x, & x > 0 \\ 0, & x = 0 \\ -x, & x < 0 \end{cases}.$$

Ako je broj x pozitivan broj, onda ga prepišemo: | x | = x, | 5 | = 5.
Ako je broj x negativan broj, onda ga pišemo s minusom: | x | = – x, | – 5 | = – (– 5) = 5.

$$a^2 - b^2 = (a-b)\cdot(a+b) \quad , \quad (a+b)^2 = a^2 + 2\cdot a\cdot b + b^2 \quad , \quad (a-b)^2 = a^2 - 2\cdot a\cdot b + b^2.$$

Promatramo dva slučaja.
1. slučaj

$x \ge 0 \;\Rightarrow\; |x| = x$

$$\frac{x^2-1}{x^2+2\cdot|x|+1} = \frac{x^2-1}{x^2+2\cdot x+1} = \frac{(x-1)\cdot(x+1)}{(x+1)^2} = \frac{(x-1)\cdot(x+1)}{(x+1)^2} = \frac{x-1}{x+1}.$$

2. slučaj

$x < 0 \;\Rightarrow\; |x| = -x$

$$\frac{x^2-1}{x^2+2\cdot|x|+1} = \frac{x^2-1}{x^2+2\cdot(-x)+1} = \frac{x^2-1}{x^2-2\cdot x+1} = \frac{(x-1)\cdot(x+1)}{(x-1)^2} = \frac{(x-1)\cdot(x+1)}{(x-1)^2} = \frac{x+1}{x-1}.$$

Vježba 053

Skrati razlomak: $\dfrac{x^2+2\cdot|x|+1}{x^2-1}$.

Rezultat: 1. slučaj $\dfrac{x+1}{x-1}$, 2. slučaj $\dfrac{x-1}{x+1}$.

Zadatak 054 (Goran, srednja škola)

Odredi koordinatu x točke T(x) i tu točku prikaži na brojevnom pravcu ako je $|3\cdot x+2| = \dfrac{1}{3}$.

Rješenje 054

Ponovimo!

Za realni broj x njegova je apsolutna vrijednost (modul) broj $|x|$ koji određujemo na ovaj način:

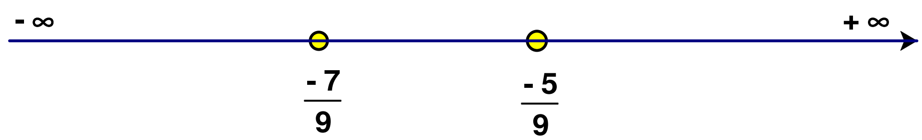
$$|x| = \begin{cases} x, & x \ge 0 \\ -x, & x < 0. \end{cases}$$

Ako je broj x pozitivan ili nula, tada je on jednak svojoj apsolutnoj vrijednosti. Za svaki x, x ≥ 0, vrijedi $|x| = x$.
Ako je x negativan broj, njegova apsolutna vrijednost je suprotan broj – x koji je pozitivan. Za svaki x, x < 0, je $|x| = -x$.
Ili ovako:
Apsolutna vrijednost realnog broja x definira se

$$|x| = \begin{cases} x, & x > 0 \\ 0, & x = 0 \\ -x, & x < 0 \end{cases}.$$

Ako je broj x pozitivan broj, onda ga prepišemo: | x | = x, | 3 | = 3.
Ako je broj x negativan broj, onda ga pišemo s minusom: | x | = – x, | – 3 | = – (– 3) = 3.
Promatramo dva slučaja, dvije jednadžbe.

$\left\|3\cdot x+2\right\|=\frac{1}{3}$	
$3\cdot x+2=-\frac{1}{3}$	$3\cdot x+2=\frac{1}{3}$
$3\cdot x+2=-\frac{1}{3}\ /\cdot 3$	$3\cdot x+2=\frac{1}{3}\ /\cdot 3$
$9\cdot x+6=-1$	$9\cdot x+6=1$
$9\cdot x=-1-6$	$9\cdot x=1-6$
$9\cdot x=-7$	$9\cdot x=-5$
$9\cdot x=-7\ /:9$	$9\cdot x=-5\ /:9$
$x_1=-\frac{7}{9}$	$x_2=-\frac{5}{9}$



Vježba 054

Odredi koordinatu x točke T(x) ako je $\left|x+2\right|=4.$

Rezultat: 2, – 6.

Zadatak 055 (Goran, srednja škola)

Prikaži na brojevnom pravcu skup svih točaka T(x) za čije koordinate x vrijedi: $\left|x\right|>\frac{5}{4}.$

Rješenje 055

Ponovimo!

Za realni broj x njegova je apsolutna vrijednost (modul) broj $\left|x\right|$ koji određujemo na ovaj način:

$$\left|x\right|=\begin{cases} x, & x\ge 0 \\ -x, & x<0. \end{cases}$$

Ako je broj x pozitivan ili nula, tada je on jednak svojoj apsolutnoj vrijednosti. Za svaki x, x ≥ 0, vrijedi $\left|x\right|=x$.

Ako je x negativan broj, njegova apsolutna vrijednost je suprotan broj – x koji je pozitivan. Za svaki x, x < 0, je $\left|x\right|=-x$.

Ili ovako:

Apsolutna vrijednost realnog broja x definira se

$$\left|x\right|=\begin{cases} x, & x>0 \\ 0, & x=0 \\ -x, & x<0 \end{cases}.$$

Ako je broj x pozitivan broj, onda ga prepišemo: $|x|=x$, $|9|=9$.

Ako je broj x negativan broj, onda ga pišemo s minusom: $|x|=-x$, $|-9|=-(-9)=9$.

Promatramo dva slučaja.

1. slučaj

$x\ge 0\ \Rightarrow\ \left|x\right|=x$

$$\left.\begin{array}{l} \left|x\right|=x \\ \left|x\right|>\frac{5}{4} \end{array}\right\}\ \Rightarrow\ x>\frac{5}{4}\ \Rightarrow\ x\in\left\langle \frac{5}{4},+\infty\right\rangle.$$

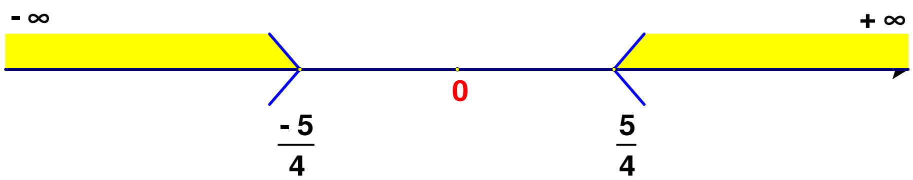
2. slučaj

$x<0 \Rightarrow |x|=-x$

$$\left.\begin{array}{l} |x|=-x \\ |x|>\dfrac{5}{4} \end{array}\right\} \Rightarrow -x>\frac{5}{4} \Rightarrow -x>\frac{5}{4} \;/\cdot(-1) \Rightarrow x<-\frac{5}{4} \Rightarrow x\in\left\langle -\infty, -\frac{5}{4}\right\rangle.$$

Skup svih traženih točaka je unija dva intervala:

$$x\in\left\langle -\infty, -\frac{5}{4}\right\rangle \cup \left\langle \frac{5}{4}, +\infty\right\rangle.$$



Vježba 055

Prikaži na brojevnom pravcu skup svih točaka T(x) za čije koordinate x vrijedi: $|x|<\frac{5}{4}$.

Rezultat: