

**Zadatak 041 (Marina, Željka, Marija, Luka, Vesna, Martina, TUPŠ)**

Dokaži da za svako  $x \in \mathbb{R}$  vrijedi jednakost:  $\left(\frac{x+|x|}{2}\right)^2 + \left(\frac{x-|x|}{2}\right)^2 = x^2$ .

**Rješenje 041**

Ponovimo!

Za realni broj  $x$  njegova je apsolutna vrijednost (modul) broj  $|x|$  koji određujemo na ovaj način:

$$|x| = \begin{cases} x, & x \geq 0 \\ -x, & x < 0. \end{cases}$$

Ako je broj  $x$  pozitivan ili nula, tada je on jednak svojoj apsolutnoj vrijednosti. Za svaki  $x$ ,  $x \geq 0$ , vrijedi  $|x| = x$ .

Ako je  $x$  negativan broj, njegova apsolutna vrijednost je suprotan broj  $-x$  koji je pozitivan. Za svaki  $x$ ,  $x < 0$ , je  $|x| = -x$ .

Za  $x \geq 0$  je  $|x| = x$  pa vrijedi:

$$\left(\frac{x+|x|}{2}\right)^2 + \left(\frac{x-|x|}{2}\right)^2 = \left(\frac{x+x}{2}\right)^2 + \left(\frac{x-x}{2}\right)^2 = \left(\frac{2 \cdot x}{2}\right)^2 + \left(\frac{x-x}{2}\right)^2 = x^2 + \left(\frac{0}{2}\right)^2 = x^2 + 0 = x^2.$$

Za  $x < 0$  je  $|x| = -x$  pa vrijedi:

$$\left(\frac{x+|x|}{2}\right)^2 + \left(\frac{x-|x|}{2}\right)^2 = \left(\frac{x-x}{2}\right)^2 + \left(\frac{x-(-x)}{2}\right)^2 = \left(\frac{x-x}{2}\right)^2 + \left(\frac{x+x}{2}\right)^2 = \left(\frac{0}{2}\right)^2 + \left(\frac{2 \cdot x}{2}\right)^2 = 0 + x^2 = x^2.$$

**Vježba 041**

Dokaži da za svako  $x \in \mathbb{R}$  vrijedi jednakost:  $\left(\frac{x+|x|}{2}\right)^4 + \left(\frac{x-|x|}{2}\right)^4 = x^4$ .

**Rezultat:** Dokaz analogan.

**Zadatak 042 (Marina, gimnazija)**

Pojednostavni:  $A = \frac{a^2+1}{a \cdot \sqrt{\left(\frac{a^2-1}{2 \cdot a}\right)^2 + 1}}$ ,  $a \neq 0$ .

**Rješenje 042**

Ponovimo!

$$(a-b)^2 = a^2 - 2 \cdot a \cdot b + b^2, \quad (a+b)^2 = a^2 + 2 \cdot a \cdot b + b^2.$$

Za realni broj  $x$  njegova je apsolutna vrijednost (modul) broj  $|x|$  koji određujemo na ovaj način:

$$|x| = \begin{cases} x, & x \geq 0 \\ -x, & x < 0. \end{cases}$$

Ako je broj  $x$  pozitivan ili nula, tada je on jednak svojoj apsolutnoj vrijednosti. Za svaki  $x$ ,  $x \geq 0$ , vrijedi  $|x| = x$ .

Ako je  $x$  negativan broj, njegova apsolutna vrijednost je suprotan broj  $-x$  koji je pozitivan. Za svaki  $x$ ,  $x < 0$ , je  $|x| = -x$ .

$$\left(\frac{a}{b}\right)^n = \frac{a^n}{b^n}, \quad \sqrt{a^2} = |a|, \quad |a \cdot b| = |a| \cdot |b|, \quad \left|\frac{a}{b}\right| = \frac{|a|}{|b|}$$

$$\begin{aligned}
 A &= \frac{a^2+1}{a \cdot \sqrt{\left(\frac{a^2-1}{2 \cdot a}\right)^2+1}} = \frac{a^2+1}{a \cdot \sqrt{\frac{a^4-2 \cdot a^2+1}{4 \cdot a^2}+1}} = \frac{a^2+1}{a \cdot \sqrt{\frac{a^4-2 \cdot a^2+1+4 \cdot a^2}{4 \cdot a^2}}} = \\
 &= \frac{a^2+1}{a \cdot \sqrt{\frac{a^4+2 \cdot a^2+1}{4 \cdot a^2}}} = \frac{a^2+1}{a \cdot \sqrt{\frac{(a^2+1)^2}{4 \cdot a^2}}} = \frac{a^2+1}{a \cdot \sqrt{\left(\frac{a^2+1}{2 \cdot a}\right)^2}} = \frac{a^2+1}{a \cdot \left|\frac{a^2+1}{2 \cdot a}\right|} = \frac{a^2+1}{a \cdot \frac{|a^2+1|}{2 \cdot |a|}} = \\
 &= \frac{a^2+1}{a \cdot \frac{|a^2+1|}{2 \cdot |a|}} = \frac{2 \cdot |a|}{a}.
 \end{aligned}$$

Sada je:

- $a > 0 \Rightarrow |a| = a \Rightarrow A = \frac{2 \cdot a}{a} = \frac{2 \cdot a}{a} = 2$
- $a < 0 \Rightarrow |a| = -a \Rightarrow A = \frac{2 \cdot (-a)}{a} = \frac{-2 \cdot a}{a} = -2$ .

Rješenje:

$$A = \begin{cases} 2 & \text{za } a > 0 \\ -2 & \text{za } a < 0. \end{cases}$$

### Vježba 042

Pojednostavni:  $A = \frac{a \cdot \sqrt{\left(\frac{a^2-1}{2 \cdot a}\right)^2+1}}{a^2+1}$ .

**Rezultat:**  $A = \begin{cases} \frac{1}{2} & \text{za } a > 0 \\ -\frac{1}{2} & \text{za } a < 0. \end{cases}$

### Zadatak 043 (Megy, maturantica gimnazije)

Nacrtaj graf funkcije:  $|x| + |y| = 1$ .

#### Rješenje 043

Ponovimo!

Za realni broj  $x$  njegova je apsolutna vrijednost (modul) broj  $|x|$  koji određujemo na ovaj način:

$$|x| = \begin{cases} x, & x \geq 0 \\ -x, & x < 0. \end{cases}$$

Ako je broj  $x$  pozitivan ili nula, tada je on jednak svojoj apsolutnoj vrijednosti. Za svaki  $x$ ,  $x \geq 0$ , vrijedi  $|x| = x$ .

Ako je  $x$  negativan broj, njegova apsolutna vrijednost je suprotan broj  $-x$  koji je pozitivan. Za svaki  $x$ ,  $x < 0$ , je  $|x| = -x$ .

Promotrimo slučaj za  $y \geq 0$ :

$$y \geq 0 \Rightarrow |y| = y \Rightarrow \left. \begin{cases} |x| + |y| = 1 \\ |y| = y \end{cases} \right\} \Rightarrow |x| + y = 1 \Rightarrow y = -|x| + 1.$$

- ako je  $x \geq 0 \Rightarrow |x| = x \Rightarrow y = -x + 1$
- ako je  $x < 0 \Rightarrow |x| = -x \Rightarrow y = x + 1$ .

Promotrimo slučaj za  $y < 0$ :

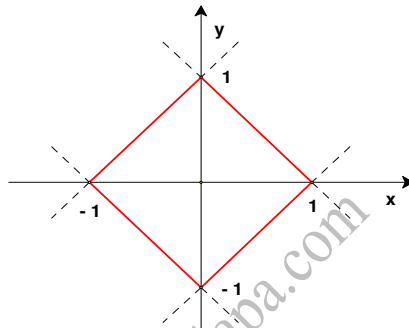
$$y < 0 \Rightarrow |y| = -y \Rightarrow \left. \begin{array}{l} |x| + |y| = 1 \\ |y| = -y \end{array} \right\} \Rightarrow |x| - y = 1 \Rightarrow -y = -|x| + 1 \cdot (-1) \Rightarrow y = |x| - 1.$$

- ako je  $x \geq 0 \Rightarrow |x| = x \Rightarrow y = x - 1$
- ako je  $x < 0 \Rightarrow |x| = -x \Rightarrow y = -x - 1$ .

Sada je:

$$\left. \begin{array}{l} y \geq 0 \\ x \geq 0 \end{array} \right\} \Rightarrow \text{I. kvadrant} \Rightarrow y = -x + 1, \quad \left. \begin{array}{l} y \geq 0 \\ x < 0 \end{array} \right\} \Rightarrow \text{II. kvadrant} \Rightarrow y = x + 1,$$

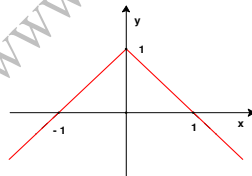
$$\left. \begin{array}{l} y < 0 \\ x \geq 0 \end{array} \right\} \Rightarrow \text{IV. kvadrant} \Rightarrow y = x - 1, \quad \left. \begin{array}{l} y < 0 \\ x < 0 \end{array} \right\} \Rightarrow \text{III. kvadrant} \Rightarrow y = -x - 1.$$



### Vježba 043

Nacrtaj graf funkcije:  $|x| + y = 1$ .

### Rezultat:



### Zadatak 044 (Emy, gimnazija)

Pojednostavni izraz:  $\frac{\sqrt{a^2 - 4 \cdot a + 4}}{a - 2} - \frac{a - 2}{a^2 - 4}, a \neq \pm 2$ .

### Rješenje 044

Ponovimo!

$$(x - y)^2 = x^2 - 2 \cdot x \cdot y + y^2, \quad x^2 - y^2 = (x - y) \cdot (x + y).$$

Za realni broj  $x$  njegova je apsolutna vrijednost (modul) broj  $|x|$  koji određujemo na ovaj način:

$$|x| = \begin{cases} x, & x \geq 0 \\ -x, & x < 0. \end{cases}$$

Ako je broj  $x$  pozitivan ili nula, tada je on jednak svojoj apsolutnoj vrijednosti. Za svaki  $x, x \geq 0$ , vrijedi  $|x| = x$ .

Ako je  $x$  negativan broj, njegova apsolutna vrijednost je suprotan broj  $-x$  koji je pozitivan. Za svaki  $x, x < 0$ , je  $|x| = -x$ .

$$\begin{aligned} \frac{\sqrt{a^2 - 4 \cdot a + 4}}{a-2} - \frac{a-2}{a^2-4} &= \frac{\sqrt{(a-2)^2}}{a-2} - \frac{a-2}{a^2-4} = \frac{|a-2|}{a-2} - \frac{a-2}{a^2-4} = \frac{|a-2|}{a-2} - \frac{a-2}{(a-2) \cdot (a+2)} = \\ &= \frac{|a-2|}{a-2} - \frac{a-2}{(a-2) \cdot (a+2)} = \frac{|a-2|}{a-2} - \frac{1}{a+2}. \end{aligned}$$

Iz  $a - 2 = 0$  nalazimo karakterističnu točku (KT) modula:

$$a - 2 = 0 \Rightarrow a = 2 \text{ KT.}$$

Karakteristična točka  $a = 2$  dijeli brojevni pravac na dva dijela:

$$a < 2, \quad a > 2.$$



Je li izraz pod znakom modula pozitivan ili negativan, provjeravamo uvrštavanjem jednog broja manjeg od KT i jednog većeg od KT, a zatim primijenimo definiciju modula (apsolutne vrijednosti).

**Prvi slučaj**

Za  $a < 2$  izraz  $a - 2$  je negativan pa vrijedi:

$$|a - 2| = -(a - 2) = -a + 2.$$

Zato je:

$$\begin{aligned} \frac{|a-2|}{a-2} - \frac{1}{a+2} &= \frac{-a+2}{a-2} - \frac{1}{a+2} = \frac{-(a-2)}{a-2} - \frac{1}{a+2} = \frac{-(a-2)}{a-2} - \frac{1}{a+2} = -1 - \frac{1}{a+2} = \\ &= \frac{-(a+2)-1}{a+2} = \frac{-a-2-1}{a+2} = \frac{-a-3}{a+2}. \end{aligned}$$

**Drugi slučaj**

Za  $a > 2$  izraz  $a - 2$  je pozitivan pa vrijedi:

$$|a - 2| = a - 2.$$

Zato je:

$$\frac{|a-2|}{a-2} - \frac{1}{a+2} = \frac{a-2}{a-2} - \frac{1}{a+2} = \frac{a-2}{a-2} - \frac{1}{a+2} = 1 - \frac{1}{a+2} = \frac{a+2-1}{a+2} = \frac{a+1}{a+2}.$$

**Vježba 044**

Pojednostavni izraz:  $\frac{\sqrt{a^2 - 4 \cdot a + 4}}{a-2}, a \neq 2.$

**Rezultat:**  $\begin{cases} 1, a > 2 \\ -1, a < 2. \end{cases}$

**Zadatak 045 (Valentina, maturantica)**

Koliko rješenja u skupu  $Z$  ima nejednadžba  $|x + 2| < \frac{3}{4}$ ?

- A. 0      B. 1      C. 2      D. 3      E. beskonačno mnogo

**Rješenje 045**

Ponovimo!

Za realni broj  $x$  njegova je apsolutna vrijednost (modul) broj  $|x|$  koji određujemo na ovaj način:

$$|x| = \begin{cases} x, & x \geq 0 \\ -x, & x < 0. \end{cases}$$

Ako je broj  $x$  pozitivan ili nula, tada je on jednak svojoj apsolutnoj vrijednosti. Za svaki  $x, x \geq 0$ , vrijedi  $|x| = x$ .

Ako je  $x$  negativan broj, njegova apsolutna vrijednost je suprotan broj  $-x$  koji je pozitivan. Za svaki  $x$ ,  $x < 0$ , je  $|x| = -x$ .

$$|x| < a, a > 0 \Rightarrow -a < x < a.$$

$$\begin{aligned} |x+2| < \frac{3}{4} &\Rightarrow -\frac{3}{4} < x+2 < \frac{3}{4} \Rightarrow -\frac{3}{4} < x+2 < \frac{3}{4} \quad /-2 \Rightarrow -\frac{3}{4}-2 < x+2-2 < \frac{3}{4}-2 \Rightarrow \\ &\Rightarrow -\frac{3}{4}-2 < x+2-2 < \frac{3}{4}-2 \Rightarrow -\frac{11}{4} < x < -\frac{5}{4} \Rightarrow -2\frac{3}{4} < x < -1\frac{1}{4} \Rightarrow x \in \{-2\}. \end{aligned}$$

Odgovor je pod B.

### Vježba 045

Koliko rješenja u skupu  $Z$  ima nejednadžba  $|x+2| < 1$ ?

- A. 0      B. 1      C. 2      D. 3      E. beskonačno mnogo

**Rezultat:**      Odgovor je pod B.

### Zadatak 046 (Vlado, maturant)

Riješi jednadžbu:  $|x+2| = |5 \cdot x - 14|$ .

### Rješenje 046

Ponovimo!

Za dani realni broj  $x$  njegova je apsolutna vrijednost (modul) broj  $|x|$  koji određujemo na ovaj način:

$$|x| = \begin{cases} x, & \text{ako je } x \geq 0 \\ -x, & \text{ako je } x < 0. \end{cases}$$

Ako je broj  $x$  pozitivan ili nula, tada je on jednak svojoj apsolutnoj vrijednosti. Za svaki  $x$ ,  $x \geq 0$ , vrijedi  $|x| = x$ .

Ako je  $x$  negativan broj, njegova apsolutna vrijednost je suprotan broj  $-x$  koji je pozitivan. Za svaki  $x$ ,  $x < 0$ , je  $|x| = -x$ .

Ako je

$$|a| = |b|,$$

onda je

$$a = b \quad \text{ili} \quad a = -b.$$

Postoje dvije mogućnosti zbog definicije apsolutne vrijednosti:

$$\begin{aligned} |x+2| = |5 \cdot x - 14| &\Rightarrow \left. \begin{array}{l} x+2 = 5 \cdot x - 14 \quad \text{1. mogućnost} \\ x+2 = -(5 \cdot x - 14) \quad \text{2. mogućnost} \end{array} \right\} \Rightarrow \left. \begin{array}{l} x+2 = 5 \cdot x - 14 \\ x+2 = -(5 \cdot x - 14) \end{array} \right\} \Rightarrow \\ \Rightarrow \left. \begin{array}{l} x+2 = 5 \cdot x - 14 \\ x+2 = -5 \cdot x + 14 \end{array} \right\} \Rightarrow \left. \begin{array}{l} x - 5 \cdot x = -14 - 2 \\ x + 5 \cdot x = 14 - 2 \end{array} \right\} \Rightarrow \left. \begin{array}{l} -4 \cdot x = -16 \quad /: (-4) \\ 6 \cdot x = 12 \quad /: 6 \end{array} \right\} \Rightarrow \left. \begin{array}{l} x_1 = 4 \\ x_2 = 2 \end{array} \right\}. \end{aligned}$$

### Vježba 046

Riješi jednadžbu:  $|x+1| = |3 \cdot x - 1|$ .

**Rezultat:**       $x_1 = 1$  ,  $x_2 = 0$ .

### Zadatak 047 (Nikolina, gimnazija)

Koliko ima uređenih parova brojeva  $(i, j)$  takvih da je  $i, j \in \{1, 2, 3, 4, \dots, 20\}$  i  $|i - j| \leq 2$ ?

### Rješenje 047

Ponovimo!

Za realni broj  $x$  njegova je apsolutna vrijednost (modul) broj  $|x|$  koji određujemo na ovaj način:

$$|x| = \begin{cases} x, & x \geq 0 \\ -x, & x < 0. \end{cases}$$

Ako je broj  $x$  pozitivan ili nula, tada je on jednak svojoj apsolutnoj vrijednosti. Za svaki  $x$ ,  $x \geq 0$ , vrijedi  $|x| = x$ .

Ako je  $x$  negativan broj, njegova apsolutna vrijednost je suprotan broj  $-x$  koji je pozitivan. Za svaki  $x$ ,  $x < 0$ , je  $|x| = -x$ .

$$|x| \leq a, a > 0 \Rightarrow -a \leq x \leq a.$$

Riješimo se znaka apsolutne vrijednosti:

$$|i - j| \leq 2 \Rightarrow -2 \leq i - j \leq 2.$$

Budući da su  $i, j$  prirodni brojevi iz skupa  $\{1, 2, 3, 4, \dots, 20\}$ , a razlika  $i - j$  mora biti između  $-2$  i  $2$  uključujući  $-2$  i  $2$ , dobije se sustav jednažbi:

$$i - j = -2, \quad i - j = -1, \quad i - j = 0, \quad i - j = 1, \quad i - j = 2.$$

Tražimo broj rješenja svake jednažbe:

$i - j = -2$		$i - j = -1$		$i - j = 0$		$i - j = 1$		$i - j = 2$	
$i$	$j$	$i$	$j$	$i$	$j$	$i$	$j$	$i$	$j$
1	3	1	2	1	1	2	1	3	1
2	4	2	3	2	2	3	2	4	2
3	5	3	4	3	3	4	3	5	3
4	6	4	5	4	4	5	4	6	4
5	7	5	6	5	5	6	5	7	5
6	8	6	7	6	6	7	6	8	6
7	9	7	8	7	7	8	7	9	7
8	10	8	9	8	8	9	8	10	8
9	11	9	10	9	9	10	9	11	9
10	12	10	11	10	10	11	10	12	10
11	13	11	12	11	11	12	11	13	11
12	14	12	13	12	12	13	12	14	12
13	15	13	14	13	13	14	13	15	13
14	16	14	15	14	14	15	14	16	14
15	17	15	16	15	15	16	15	17	15
16	18	16	17	16	16	17	16	18	16
17	19	17	18	17	17	18	17	19	17
18	20	18	19	18	18	19	18	20	18
		19	20	19	20	19	19		
				20	20		20		
Ukupno 18 rješenja		Ukupno 19 rješenja		Ukupno 20 rješenja		Ukupno 19 rješenja		Ukupno 18 rješenja	

Ukupno parova ima:

$$18 + 19 + 20 + 19 + 18 = 94.$$

### Vježba 047

Koliko ima uređenih parova brojeva  $(i, j)$  takvih da je  $i, j \in \{1, 2, 3, 4, \dots, 20\}$  i  $|i - j| < 1$ ?

**Rezultat:** 20.

### Zadatak 048 (Valentina, gimnazija)

Izračunaj:  $5 \cdot \left| \sqrt{3} - 4 \right| + 4 \cdot \left| \sqrt{3} - 1 \right|$ .

### Rješenje 048

Ponovimo!

Za realni broj  $x$  njegova je apsolutna vrijednost (modul) broj  $|x|$  koji određujemo na ovaj način:

$$|x| = \begin{cases} x, & x \geq 0 \\ -x, & x < 0. \end{cases}$$

Ako je broj  $x$  pozitivan ili nula, tada je on jednak svojoj apsolutnoj vrijednosti. Za svaki  $x$ ,  $x \geq 0$ , vrijedi  $|x| = x$ .

Ako je  $x$  negativan broj, njegova apsolutna vrijednost je suprotan broj  $-x$  koji je pozitivan. Za svaki  $x$ ,  $x < 0$ , je  $|x| = -x$ .

Ili ovako:

Apsolutna vrijednost realnog broja  $x$  definira se

$$|x| = \begin{cases} x, & x > 0 \\ 0, & x = 0 \\ -x, & x < 0 \end{cases}$$

Ako je broj  $x$  pozitivan broj, onda ga prepisemo:  $|x| = x$ ,  $|7| = 7$ .

Ako je broj  $x$  negativan broj, onda ga pišemo s minusom:  $|x| = -x$ ,  $|-4| = -(-4) = 4$ .

Budući da je  $\sqrt{3}$  približno jednako 1.73,

$$\sqrt{3} \approx 1.73$$

uoči da je

- izraz  $\sqrt{3} - 4 = 1.73 - 4 = -2.27 < 0$ , **negativan**
- izraz  $\sqrt{3} - 1 = 1.73 - 1 = 0.73 > 0$ , **pozitivan**.

Zato je

$$\begin{aligned} 5 \cdot |\sqrt{3} - 4| + 4 \cdot |\sqrt{3} - 1| &= 5 \cdot \underbrace{|\sqrt{3} - 4|}_{-} + 4 \cdot \underbrace{|\sqrt{3} - 1|}_{+} = 5 \cdot (-(\sqrt{3} - 4)) + 4 \cdot (\sqrt{3} - 1) = \\ &= 5 \cdot (-\sqrt{3} + 4) + 4 \cdot (\sqrt{3} - 1) = -5 \cdot \sqrt{3} + 20 + 4 \cdot \sqrt{3} - 4 = -\sqrt{3} + 16 = 16 - \sqrt{3}. \end{aligned}$$

#### Vježba 048

Izračunaj:  $3 \cdot |\sqrt{3} - 4| + 2 \cdot |\sqrt{3} - 1|$ .

**Rezultat:**  $10 - \sqrt{3}$ .

#### Zadatak 049 (Marija, gimnazija)

Dokažite da je  $\sqrt{3}$  iracionalni broj.

#### Rješenje 049

Ponovimo!

$$(\sqrt{a})^2 = a \quad , \quad \left(\frac{x}{y}\right)^2 = \frac{x^2}{y^2}$$

Za cijeli broj  $a$  kažemo da je djeljiv s cijelim brojem  $b$  ( $b \neq 0$ ) ako postoji cijeli broj  $k$  tako da vrijedi

$$a = k \cdot b.$$

Primjer

Broj 45 je djeljiv brojem 9 jer postoji broj 5 tako da vrijedi

$$45 = 5 \cdot 9.$$

Najvećom zajedničkom mjerom prirodnih brojeva nazivamo najveći zajednički djelitelj tih brojeva. Za najveću zajedničku mjeru brojeva  $a$  i  $b$  uvodi se oznaka  $M(a, b)$ .

Primjer

$$M(24, 32) = 8.$$

Ako brojevi  $a$  i  $b$  osim broja 1 nemaju drugih zajedničkih djelitelja kažemo da su relativno prosti brojevi i pišemo

$$M(a, b) = 1.$$

Primjer

$$M(12, 31) = 1.$$

Iracionalni brojevi jesu brojevi koji se ne mogu prikazati u obliku

$$\frac{a}{b}, b \neq 0, a, b \in \mathbb{Z}.$$

Oni, dakle, nisu racionalni brojevi, a možemo ih prikazati u obliku neperiodskih decimalnih brojeva.

Primjer

$$\sqrt{2} \approx 1.41421356\dots, \quad \sqrt{3} \approx 1.73205080\dots, \quad \sqrt{5} \approx 2.23606797\dots, \quad \pi \approx 3.14159265\dots$$

Svi racionalni i iracionalni brojevi zajedno čine skup realnih brojeva  $\mathbb{R}$ .

Treba dokazati da je  $\sqrt{3}$  iracionalni broj.

Pretpostavit ćemo da to nije istina, da je  $\sqrt{3}$  racionalni broj. Pretpostavimo, dakle, da je  $\sqrt{3}$  racionalni broj, da se može napisati

$$\sqrt{3} = \frac{a}{b}$$

uz pretpostavku da je razlomak  $\frac{a}{b}$  skraććen do kraja (ako nije skratimo ga), tj. da prirodni brojevi  $a$  i  $b$  nemaju zajedničkih faktora osim broja 1. Brojevi  $a$  i  $b$  su, dakle, relativno prosti brojevi,

$$M(a, b) = 1.$$

Kvadriranjem i sređivanjem slijedi

$$\sqrt{3} = \frac{a}{b} \Rightarrow \sqrt{3} = \frac{a}{b} \quad / \cdot 2 \Rightarrow (\sqrt{3})^2 = \left(\frac{a}{b}\right)^2 \Rightarrow 3 = \frac{a^2}{b^2} \Rightarrow \frac{a^2}{b^2} = 3 \quad / \cdot b^2 \Rightarrow a^2 = 3 \cdot b^2.$$

Gledaj jednakost

$$a^2 = 3 \cdot b^2.$$

Na desnoj strani pojavljuje se faktor 3 što znači da bi i izraz na lijevoj strani  $a^2$  morao, također, biti djeljiv sa 3.

Da bi  $a^2$  bio djeljiv sa 3 mora  $a$  biti djeljiv sa 3 pa se piše u obliku

$$a = 3 \cdot m \text{ za svaki } m \in \mathbb{N}.$$

Uvrstimo li

$$a = 3 \cdot m$$

u jednakost

$$a^2 = 3 \cdot b^2$$

i skratimo, dobije se

$$\left. \begin{array}{l} a = 3 \cdot m \\ a^2 = 3 \cdot b^2 \end{array} \right\} \Rightarrow \left[ \begin{array}{l} \text{metoda} \\ \text{supstitucije} \end{array} \right] \Rightarrow (3 \cdot m)^2 = 3 \cdot b^2 \Rightarrow 9 \cdot m^2 = 3 \cdot b^2 \quad / : 3 \Rightarrow \\ \Rightarrow 3 \cdot m^2 = b^2 \Rightarrow b^2 = 3 \cdot m^2.$$

Ponovno se na desnoj strani pojavljuje faktor 3 što znači da bi i izraz na lijevoj strani  $b^2$  morao, također, biti djeljiv sa 3.

Da bi  $b^2$  bio djeljiv sa 3 mora  $b$  biti djeljiv sa 3 pa se piše u obliku

$$b = 3 \cdot n \text{ za svaki } n \in \mathbb{N}.$$

Stoga  $a$  i  $b$  imaju zajednički faktor 3

$$a = 3 \cdot m, \quad b = 3 \cdot n$$

što je u suprotnosti (kontradikciji) s pretpostavkom da je  $\frac{a}{b}$  do kraja skraććen razlomak, tj. da su  $a$  i  $b$

relativno prosti brojevi. Znači naša početna pretpostavka da je  $\sqrt{3}$  racionalni broj bila je pogrešna. Dakle,

$$\sqrt{3} \notin \mathcal{Q}.$$

Broj  $\sqrt{3}$  nije racionalni broj, on je iracionalni.

### Vježba 049

Dokažite da je  $\sqrt{5}$  iracionalni broj.

**Rezultat:** Dokaz analogan.

### Zadatak 050 (Mirza, elektrotehnička škola)

Nacrtaj graf:  $y = -2^{-|x|}$ .

### Rješenje 050

Ponovimo!

$$a^{-n} = \frac{1}{a^n}, \quad a^0 = 1, \quad a^1 = a.$$

Za realni broj  $x$  njegova je apsolutna vrijednost (modul) broj  $|x|$  koji određujemo na ovaj način:

$$|x| = \begin{cases} x, & x \geq 0 \\ -x, & x < 0. \end{cases}$$

Ako je broj  $x$  pozitivan ili nula, tada je on jednak svojoj apsolutnoj vrijednosti. Za svaki  $x, x \geq 0$ , vrijedi  $|x| = x$ .

Ako je  $x$  negativan broj, njegova apsolutna vrijednost je suprotan broj  $-x$  koji je pozitivan. Za svaki  $x, x < 0$ , je  $|x| = -x$ .

Ili ovako:

Apsolutna vrijednost realnog broja  $x$  definira se

$$|x| = \begin{cases} x, & x > 0 \\ 0, & x = 0 \\ -x, & x < 0 \end{cases}$$

Ako je broj  $x$  pozitivan broj, onda ga prepisemo:  $|x| = x, |7| = 7$ .

Ako je broj  $x$  negativan broj, onda ga pišemo s minusom:  $|x| = -x, |-4| = -(-4) = 4$ .

Izračunamo vrijednosti funkcije

$$f(x) = -2^{-|x|} \Rightarrow f(x) = -\frac{1}{2^{|x|}}$$

za, na primjer,

$$x = -3, x = -2, x = -1, x = 0, x = 1, x = 2, x = 3.$$

$$x = -3 \Rightarrow y = -\frac{1}{2^{|-3|}} \Rightarrow y = -\frac{1}{2^3} \Rightarrow y = -\frac{1}{8}.$$

$$x = -2 \Rightarrow y = -\frac{1}{2^{|-2|}} \Rightarrow y = -\frac{1}{2^2} \Rightarrow y = -\frac{1}{4}.$$

$$x = -1 \Rightarrow y = -\frac{1}{2^{|-1|}} \Rightarrow y = -\frac{1}{2^1} \Rightarrow y = -\frac{1}{2}.$$

$$x = 0 \Rightarrow y = -\frac{1}{2^{|0|}} \Rightarrow y = -\frac{1}{2^0} \Rightarrow y = -\frac{1}{1} \Rightarrow y = -1.$$

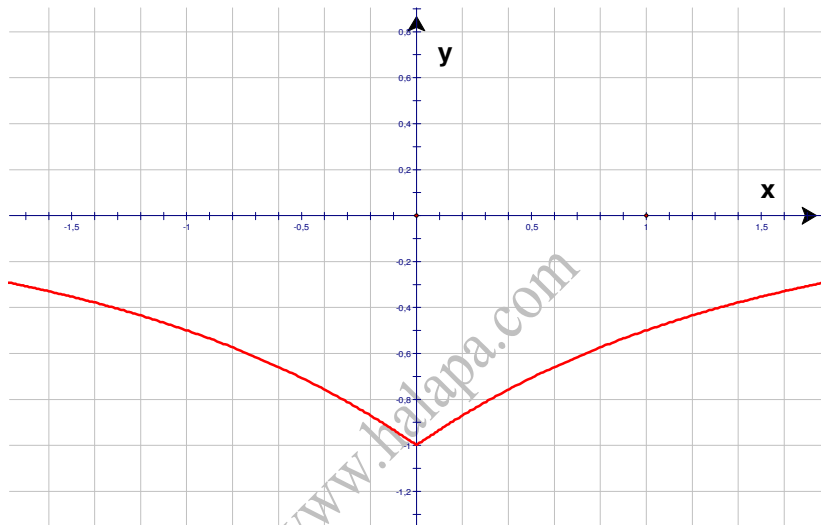
$$x=1 \Rightarrow y = -\frac{1}{2^{|1|}} \Rightarrow y = -\frac{1}{2^1} \Rightarrow y = -\frac{1}{2}.$$

$$x=2 \Rightarrow y = -\frac{1}{2^{|2|}} \Rightarrow y = -\frac{1}{2^2} \Rightarrow y = -\frac{1}{4}.$$

$$x=3 \Rightarrow y = -\frac{1}{2^{|3|}} \Rightarrow y = -\frac{1}{2^3} \Rightarrow y = -\frac{1}{8}.$$

Tablica zadanih argumenata  $x$  i njima pripadnih vrijednosti izgleda ovako:

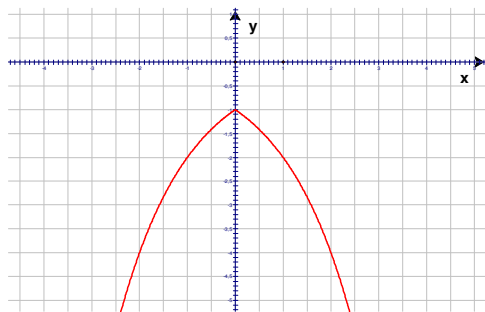
$x$	-3	-2	-1	0	1	2	3
$y$	$-\frac{1}{8}$	$-\frac{1}{4}$	$-\frac{1}{2}$	-1	$-\frac{1}{2}$	$-\frac{1}{4}$	$-\frac{1}{8}$



### Vježba 050

Nacrtaj graf:  $y = -2^{|x|}$ .

### Rezultat:



### Zadatak 051 (Goran, srednja škola)

Izračunaj  $\frac{a \cdot |a-b| \cdot |-b \cdot |a+b|}{|a-b| \cdot |-a+b|}$ , ako je  $a = \sqrt{2}$ ,  $b = -\sqrt{3}$ .

### Rješenje 051

Ponovimo!

Za realni broj  $x$  njegova je apsolutna vrijednost (modul) broj  $|x|$  koji određujemo na ovaj način:

$$|x| = \begin{cases} x, & x \geq 0 \\ -x, & x < 0. \end{cases}$$

Ako je broj  $x$  pozitivan ili nula, tada je on jednak svojoj apsolutnoj vrijednosti. Za svaki  $x$ ,  $x \geq 0$ , vrijedi  $|x| = x$ .

Ako je  $x$  negativan broj, njegova apsolutna vrijednost je suprotan broj  $-x$  koji je pozitivan. Za svaki  $x$ ,  $x < 0$ , je  $|x| = -x$ .

Ili ovako:

Apsolutna vrijednost realnog broja  $x$  definira se

$$|x| = \begin{cases} x, & x > 0 \\ 0, & x = 0. \\ -x, & x < 0 \end{cases}$$

Ako je broj  $x$  pozitivan broj, onda ga prepisemo:  $|x| = x$ ,  $|7| = 7$ .

Ako je broj  $x$  negativan broj, onda ga pišemo s minusom:  $|x| = -x$ ,  $|-4| = -(-4) = 4$ .

$$a^n \cdot a^m = a^{n+m}, \quad (\sqrt{a})^2 = a, \quad \sqrt{a} \cdot \sqrt{b} = \sqrt{a \cdot b}.$$

U zadani izraz uvrstimo vrijednosti od  $a$  i  $b$ .

$$\begin{aligned} & \left. \frac{a \cdot |a-b| - b \cdot |a+b|}{|a-b| - |a+b|} \right\} \Rightarrow \frac{\sqrt{2} \cdot |\sqrt{2} - (-\sqrt{3})| - (-\sqrt{3}) \cdot |\sqrt{2} - \sqrt{3}|}{|\sqrt{2} - (-\sqrt{3})| - |\sqrt{2} - \sqrt{3}|} = \\ & a = \sqrt{2}, \quad b = -\sqrt{3} \\ & = \frac{\sqrt{2} \cdot |\sqrt{2} + \sqrt{3}| + \sqrt{3} \cdot |\sqrt{2} - \sqrt{3}|}{|\sqrt{2} + \sqrt{3}| - |\sqrt{2} - \sqrt{3}|} = \frac{\sqrt{2} \cdot \underbrace{|\sqrt{2} + \sqrt{3}|}_{\text{pozitivno}} + \sqrt{3} \cdot \underbrace{|\sqrt{2} - \sqrt{3}|}_{\text{negativno}}}{\underbrace{|\sqrt{2} + \sqrt{3}|}_{\text{pozitivno}} - \underbrace{|\sqrt{2} - \sqrt{3}|}_{\text{negativno}}} = \\ & = \frac{\sqrt{2} \cdot (\sqrt{2} + \sqrt{3}) + \sqrt{3} \cdot (-\sqrt{2} + \sqrt{3})}{(\sqrt{2} + \sqrt{3}) - (-\sqrt{2} + \sqrt{3})} = \frac{\sqrt{2} \cdot (\sqrt{2} + \sqrt{3}) + \sqrt{3} \cdot (-\sqrt{2} + \sqrt{3})}{(\sqrt{2} + \sqrt{3}) + (\sqrt{2} - \sqrt{3})} = \\ & = \frac{(\sqrt{2})^2 + \sqrt{6} - \sqrt{6} + (\sqrt{3})^2}{\sqrt{2} + \sqrt{3} + \sqrt{2} - \sqrt{3}} = \frac{2 + \sqrt{6} - \sqrt{6} + 3}{\sqrt{2} + \sqrt{3} + \sqrt{2} - \sqrt{3}} = \\ & = \frac{5}{2 \cdot \sqrt{2}} = \left[ \begin{array}{l} \text{racionalizacija} \\ \text{nazivnika} \end{array} \right] = \frac{5}{2 \cdot \sqrt{2}} \cdot \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{2}} = \frac{5 \cdot \sqrt{2}}{2 \cdot (\sqrt{2})^2} = \frac{5 \cdot \sqrt{2}}{2 \cdot 2} = \frac{5 \cdot \sqrt{2}}{4}. \end{aligned}$$

### Vježba 051

Izračunaj  $\frac{|a-b| - |a+b|}{a \cdot |a-b| - b \cdot |a+b|}$ , ako je  $a = \sqrt{2}$ ,  $b = -\sqrt{3}$ .

**Rezultat:**  $\frac{2 \cdot \sqrt{2}}{5}$ .

### Zadatak 052 (Goran, srednja škola)

Koliko je:  $\sqrt{9 \cdot x^2 + 6 \cdot x + 1}$  za  $x > -\frac{1}{3}$ ?

#### Rješenje 052

Ponovimo!

Za realni broj  $x$  njegova je apsolutna vrijednost (modul) broj  $|x|$  koji određujemo na ovaj način:

$$|x| = \begin{cases} x, & x \geq 0 \\ -x, & x < 0. \end{cases}$$

Ako je broj  $x$  pozitivan ili nula, tada je on jednak svojoj apsolutnoj vrijednosti. Za svaki  $x$ ,  $x \geq 0$ , vrijedi  $|x| = x$ .

Ako je  $x$  negativan broj, njegova apsolutna vrijednost je suprotan broj  $-x$  koji je pozitivan. Za svaki  $x$ ,  $x < 0$ , je  $|x| = -x$ .

Ili ovako:

Apsolutna vrijednost realnog broja  $x$  definira se

$$|x| = \begin{cases} x, & x > 0 \\ 0, & x = 0. \\ -x, & x < 0 \end{cases}$$

Ako je broj  $x$  pozitivan broj, onda ga prepíšemo:  $|x| = x$ ,  $|7| = 7$ .

Ako je broj  $x$  negativan broj, onda ga pišemo s minusom:  $|x| = -x$ ,  $|-4| = -(-4) = 4$ .

$$(a+b)^2 = a^2 + 2 \cdot a \cdot b + b^2, \quad \sqrt{a^2} = |a|.$$

Računamo drugi korijen.

$$\sqrt{9 \cdot x^2 + 6 \cdot x + 1} = \sqrt{(3 \cdot x + 1)^2} = |3 \cdot x + 1|.$$

Uočimo da je izraz  $3 \cdot x + 1$  pozitivan za  $x > -\frac{1}{3}$  pa slijedi:

$$\left. \begin{array}{l} |3 \cdot x + 1| \\ x > -\frac{1}{3} \end{array} \right\} \Rightarrow \left| \underbrace{3 \cdot x + 1}_{\text{pozitivno}} \right| = 3 \cdot x + 1.$$

#### Vježba 052

Koliko je:  $\sqrt{9 \cdot x^2 + 6 \cdot x + 1}$  za  $x < -\frac{1}{3}$ ?

**Rezultat:**  $-3 \cdot x - 1$ .

### Zadatak 053 (Goran, srednja škola)

Skrati razlomak:  $\frac{x^2 - 1}{x^2 + 2 \cdot |x| + 1}$ .

#### Rješenje 053

Ponovimo!

Za realni broj  $x$  njegova je apsolutna vrijednost (modul) broj  $|x|$  koji određujemo na ovaj način:

$$|x| = \begin{cases} x, & x \geq 0 \\ -x, & x < 0. \end{cases}$$

Ako je broj  $x$  pozitivan ili nula, tada je on jednak svojoj apsolutnoj vrijednosti. Za svaki  $x$ ,  $x \geq 0$ , vrijedi  $|x| = x$ .

Ako je  $x$  negativan broj, njegova apsolutna vrijednost je suprotan broj  $-x$  koji je pozitivan. Za svaki  $x$ ,  $x < 0$ , je  $|x| = -x$ .

Ili ovako:

Apsolutna vrijednost realnog broja  $x$  definira se

$$|x| = \begin{cases} x, & x > 0 \\ 0, & x = 0 \\ -x, & x < 0 \end{cases}$$

Ako je broj  $x$  pozitivan broj, onda ga prepisemo:  $|x| = x$ ,  $|5| = 5$ .

Ako je broj  $x$  negativan broj, onda ga pišemo s minusom:  $|x| = -x$ ,  $|-5| = -(-5) = 5$ .

$$a^2 - b^2 = (a-b) \cdot (a+b) \quad , \quad (a+b)^2 = a^2 + 2 \cdot a \cdot b + b^2 \quad , \quad (a-b)^2 = a^2 - 2 \cdot a \cdot b + b^2$$

Promatramo dva slučaja.

1. slučaj

$$x \geq 0 \Rightarrow |x| = x$$

$$\frac{x^2 - 1}{x^2 + 2 \cdot |x| + 1} = \frac{x^2 - 1}{x^2 + 2 \cdot x + 1} = \frac{(x-1) \cdot (x+1)}{(x+1)^2} = \frac{(x-1) \cdot (x+1)}{(x+1)^2} = \frac{x-1}{x+1}$$

2. slučaj

$$x < 0 \Rightarrow |x| = -x$$

$$\frac{x^2 - 1}{x^2 + 2 \cdot |x| + 1} = \frac{x^2 - 1}{x^2 + 2 \cdot (-x) + 1} = \frac{x^2 - 1}{x^2 - 2 \cdot x + 1} = \frac{(x-1) \cdot (x+1)}{(x-1)^2} = \frac{(x-1) \cdot (x+1)}{(x-1)^2} = \frac{x+1}{x-1}$$

### Vježba 053

Skrati razlomak:  $\frac{x^2 + 2 \cdot |x| + 1}{x^2 - 1}$ .

**Rezultat:** 1. slučaj  $\frac{x+1}{x-1}$ , 2. slučaj  $\frac{x-1}{x+1}$ .

### Zadatak 054 (Goran, srednja škola)

Odredi koordinatu  $x$  točke  $T(x)$  i tu točku prikaži na brojevnom pravcu ako je  $|3 \cdot x + 2| = \frac{1}{3}$ .

### Rješenje 054

Ponovimo!

Za realni broj  $x$  njegova je apsolutna vrijednost (modul) broj  $|x|$  koji određujemo na ovaj način:

$$|x| = \begin{cases} x, & x \geq 0 \\ -x, & x < 0 \end{cases}$$

Ako je broj  $x$  pozitivan ili nula, tada je on jednak svojoj apsolutnoj vrijednosti. Za svaki  $x$ ,  $x \geq 0$ , vrijedi  $|x| = x$ .

Ako je  $x$  negativan broj, njegova apsolutna vrijednost je suprotan broj  $-x$  koji je pozitivan. Za svaki  $x$ ,  $x < 0$ , je  $|x| = -x$ .

Ili ovako:

Apsolutna vrijednost realnog broja  $x$  definira se

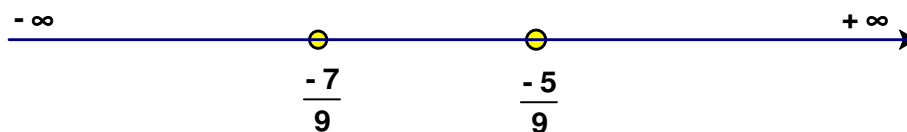
$$|x| = \begin{cases} x, & x > 0 \\ 0, & x = 0 \\ -x, & x < 0 \end{cases}$$

Ako je broj  $x$  pozitivan broj, onda ga prepisemo:  $|x| = x$ ,  $|3| = 3$ .

Ako je broj  $x$  negativan broj, onda ga pišemo s minusom:  $|x| = -x$ ,  $|-3| = -(-3) = 3$ .

Promatramo dva slučaja, dvije jednačbe.

$ 3 \cdot x + 2  = \frac{1}{3}$	
$3 \cdot x + 2 = -\frac{1}{3}$	$3 \cdot x + 2 = \frac{1}{3}$
$3 \cdot x + 2 = -\frac{1}{3} \quad / : 3$	$3 \cdot x + 2 = \frac{1}{3} \quad / : 3$
$9 \cdot x + 6 = -1$	$9 \cdot x + 6 = 1$
$9 \cdot x = -1 - 6$	$9 \cdot x = 1 - 6$
$9 \cdot x = -7$	$9 \cdot x = -5$
$9 \cdot x = -7 \quad / : 9$	$9 \cdot x = -5 \quad / : 9$
$x_1 = -\frac{7}{9}$	$x_2 = -\frac{5}{9}$



### Vježba 054

Odredi koordinatu  $x$  točke  $T(x)$  ako je  $|x + 2| = 4$ .

**Rezultat:**  $2, -6$ .

### Zadatak 055 (Goran, srednja škola)

Prikaži na brojevnom pravcu skup svih točaka  $T(x)$  za čije koordinate  $x$  vrijedi:  $|x| > \frac{5}{4}$ .

### Rješenje 055

Ponovimo!

Za realni broj  $x$  njegova je apsolutna vrijednost (modul) broj  $|x|$  koji određujemo na ovaj način:

$$|x| = \begin{cases} x, & x \geq 0 \\ -x, & x < 0. \end{cases}$$

Ako je broj  $x$  pozitivan ili nula, tada je on jednak svojoj apsolutnoj vrijednosti. Za svaki  $x$ ,  $x \geq 0$ , vrijedi  $|x| = x$ .

Ako je  $x$  negativan broj, njegova apsolutna vrijednost je suprotan broj  $-x$  koji je pozitivan. Za svaki  $x$ ,  $x < 0$ , je  $|x| = -x$ .

Ili ovako:

Apsolutna vrijednost realnog broja  $x$  definira se

$$|x| = \begin{cases} x, & x > 0 \\ 0, & x = 0. \\ -x, & x < 0 \end{cases}$$

Ako je broj  $x$  pozitivan broj, onda ga prepíšemo:  $|x| = x$ ,  $|9| = 9$ .

Ako je broj  $x$  negativan broj, onda ga pišemo s minusom:  $|x| = -x$ ,  $|-9| = -(-9) = 9$ .

Promatramo dva slučaja.

1. slučaj

$$x \geq 0 \Rightarrow |x| = x$$

$$\left. \begin{array}{l} |x| = x \\ |x| > \frac{5}{4} \end{array} \right\} \Rightarrow x > \frac{5}{4} \Rightarrow x \in \left\langle \frac{5}{4}, +\infty \right\rangle.$$

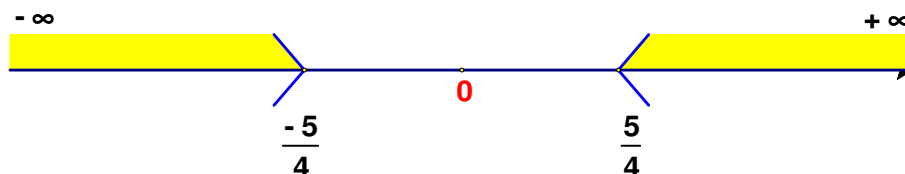
2. slučaj

$$x < 0 \Rightarrow |x| = -x$$

$$\left. \begin{array}{l} |x| = -x \\ |x| > \frac{5}{4} \end{array} \right\} \Rightarrow -x > \frac{5}{4} \Rightarrow -x > \frac{5}{4} \cdot (-1) \Rightarrow x < -\frac{5}{4} \Rightarrow x \in \left\langle -\infty, -\frac{5}{4} \right\rangle.$$

Skup svih traženih točaka je unija dva intervala:

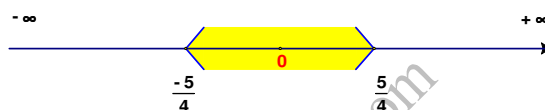
$$x \in \left\langle -\infty, -\frac{5}{4} \right\rangle \cup \left\langle \frac{5}{4}, +\infty \right\rangle.$$



### Vježba 055

Prikaži na brojevnom pravcu skup svih točaka  $T(x)$  za čije koordinate  $x$  vrijedi:  $|x| < \frac{5}{4}$ .

**Rezultat:**



### Zadatak 056 (Vedran, gimnazija)

Ako je  $(x, y)$  rješenje jednadžbe  $|2 \cdot x + 3 \cdot y + 1| + |x - y + 1| = 0$ , onda je:

$$A) |x - y| = 1 \quad B) |x - y| = 2 \quad C) |x - y| = 3 \quad D) |x - y| = 4$$

### Rješenje 056

Ponovimo!

Za realni broj  $x$  njegova je apsolutna vrijednost (modul) broj  $|x|$  koji određujemo na ovaj način:

$$|x| = \begin{cases} x, & x \geq 0 \\ -x, & x < 0. \end{cases}$$

Ako je broj  $x$  pozitivan ili nula, tada je on jednak svojoj apsolutnoj vrijednosti. Za svaki  $x$ ,  $x \geq 0$ , vrijedi  $|x| = x$ .

Ako je  $x$  negativan broj, njegova apsolutna vrijednost je suprotan broj  $-x$  koji je pozitivan. Za svaki  $x$ ,  $x < 0$ , je  $|x| = -x$ .

Ili ovako:

Apsolutna vrijednost realnog broja  $x$  definira se

$$|x| = \begin{cases} x, & x > 0 \\ 0, & x = 0. \\ -x, & x < 0 \end{cases}$$

Ako je broj  $x$  pozitivan broj, onda ga prepisemo:  $|x| = x$ ,  $|9| = 9$ .

Ako je broj  $x$  negativan broj, onda ga pišemo s minusom:  $|x| = -x$ ,  $|-9| = -(-9) = 9$ .

$$|a| = 0 \Leftrightarrow a = 0 \quad , \quad \frac{a}{1} = a \quad , \quad \frac{a}{b} - \frac{c}{d} = \frac{a \cdot d - b \cdot c}{b \cdot d} \quad , \quad \frac{a}{n} - \frac{b}{n} = \frac{a - b}{n}.$$

$$|a| + |b| = 0 \Leftrightarrow a = b = 0.$$

Transformiramo jednadžbu s apsolutnim vrijednostima u sustav dvije jednadžbe sa dvije nepoznanice.

$$\left. \begin{aligned} |2 \cdot x + 3 \cdot y + 1| + |x - y + 1| = 0 &\Rightarrow \begin{cases} 2 \cdot x + 3 \cdot y + 1 = 0 \\ x - y + 1 = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 2 \cdot x + 3 \cdot y = -1 \\ x - y = -1 \end{cases} \Rightarrow \\ \Rightarrow \left[ \begin{array}{l} \text{metoda suprotnih} \\ \text{koeficijenta} \end{array} \right] \Rightarrow \begin{cases} 2 \cdot x + 3 \cdot y = -1 \\ x - y = -1 / \cdot 3 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 2 \cdot x + 3 \cdot y = -1 \\ 3 \cdot x - 3 \cdot y = -3 \end{cases} \Rightarrow 5 \cdot x = -4 \Rightarrow \\ \Rightarrow 5 \cdot x = -4 / : 5 \Rightarrow x = -\frac{4}{5}. \end{aligned}$$

Računamo y.

$$\left. \begin{aligned} x = -\frac{4}{5} \\ x - y = -1 \end{aligned} \right\} \Rightarrow -\frac{4}{5} - y = -1 \Rightarrow -\frac{4}{5} - y = -1 / \cdot (-1) \Rightarrow \frac{4}{5} + y = 1 \Rightarrow y = 1 - \frac{4}{5} \Rightarrow \\ \Rightarrow y = \frac{1}{5} - \frac{4}{5} \Rightarrow y = \frac{5-4}{5} \Rightarrow y = \frac{1}{5}.$$

Tada je:

$$|x - y| = \left| -\frac{4}{5} - \frac{1}{5} \right| = \left| -\frac{5}{5} \right| = |-1| = 1.$$

Odgovor je pod A.

### Vježba 056

Ako je  $(x, y)$  rješenje jednačbe  $|2 \cdot x + 3 \cdot y + 1| + |x - y + 1| = 0$ , onda je:

$$A) |x + y| = \frac{3}{5} \quad B) |x + y| = 1 \quad C) |x + y| = \frac{2}{5} \quad D) |x + y| = \frac{1}{5}$$

**Rezultat:** A.

### Zadatak 057 (Martina, gimnazija)

Koliko je  $|1 - \sqrt{2}| + |\sqrt{2} - \sqrt{3}| + |\sqrt{3} - \sqrt{4}| + \dots + |\sqrt{99} - \sqrt{100}|$ ?

### Rješenje 057

Ponovimo!

$$-x + x = 0, \quad \sqrt{x^2} = x, \quad x \geq 0.$$

Za realni broj  $x$  njegova je apsolutna vrijednost (modul) broj  $|x|$  koji određujemo na ovaj način:

$$|x| = \begin{cases} x, & x \geq 0 \\ -x, & x < 0. \end{cases}$$

Ako je broj  $x$  pozitivan ili nula, tada je on jednak svojoj apsolutnoj vrijednosti. Za svaki  $x, x \geq 0$ , vrijedi  $|x| = x$ .

Ako je  $x$  negativan broj, njegova apsolutna vrijednost je suprotan broj  $-x$  koji je pozitivan. Za svaki  $x, x < 0$ , je  $|x| = -x$ .

Ili ovako:

Apsolutna vrijednost realnog broja  $x$  definira se

$$|x| = \begin{cases} x, & x > 0 \\ 0, & x = 0. \\ -x, & x < 0 \end{cases}$$

Ako je broj  $x$  pozitivan broj, onda ga prepisemo:  $|x| = x, |9| = 9$ .

Ako je broj  $x$  negativan broj, onda ga pišemo s minusom:  $|x| = -x, |-9| = -(-9) = 9$ .

Uočimo da je u svakoj zagradi negativan broj jer je

$$\sqrt{n} < \sqrt{n+1}$$

pa je njegova apsolutna vrijednost njemu negativan broj. Zato je dani izraz jednak

$$\begin{aligned} & |1-\sqrt{2}| + |\sqrt{2}-\sqrt{3}| + |\sqrt{3}-\sqrt{4}| + \dots + |\sqrt{99}-\sqrt{100}| = \\ & = -(1-\sqrt{2}) - (\sqrt{2}-\sqrt{3}) - (\sqrt{3}-\sqrt{4}) - \dots - (\sqrt{99}-\sqrt{100}) = \\ & = -1 + \sqrt{2} - \sqrt{2} + \sqrt{3} - \sqrt{3} + \sqrt{4} - \dots - \sqrt{99} + \sqrt{100} = \\ & = -1 + \sqrt{2} - \sqrt{2} + \sqrt{3} - \sqrt{3} + \sqrt{4} - \dots - \sqrt{99} + \sqrt{100} = -1 + \sqrt{100} = -1 + \sqrt{10^2} = -1 + 10 = 9. \end{aligned}$$

### Vježba 057

Koliko je  $|1-\sqrt{2}| + |\sqrt{2}-\sqrt{3}| + |\sqrt{3}-\sqrt{4}| + \dots + |\sqrt{9999}-\sqrt{10000}|$ ?

**Rezultat:** 99.

### Zadatak 058 (Matija, gimnazija)

Riješi jednadžbu :  $x \cdot |x-3| - 2 = 0$ .

### Rješenje 058

Ponovimo!

Za realni broj  $x$  njegova je apsolutna vrijednost (modul) broj  $|x|$  koji određujemo na ovaj način:

$$|x| = \begin{cases} x, & x \geq 0 \\ -x, & x < 0. \end{cases}$$

Ako je broj  $x$  pozitivan ili nula, tada je on jednak svojoj apsolutnoj vrijednosti. Za svaki  $x, x \geq 0$ , vrijedi  $|x| = x$ .

Ako je  $x$  negativan broj, njegova apsolutna vrijednost je suprotan broj  $-x$  koji je pozitivan. Za svaki  $x, x < 0$ , je  $|x| = -x$ .

Ili ovako:

Apsolutna vrijednost realnog broja  $x$  definira se

$$|x| = \begin{cases} x, & x > 0 \\ 0, & x = 0 \\ -x, & x < 0 \end{cases}$$

Ako je broj  $x$  pozitivan broj, onda ga prepisemo:  $|x| = x, |9| = 9$ .

Ako je broj  $x$  negativan broj, onda ga pišemo s minusom:  $|x| = -x, |-9| = -(-9) = 9$ .

#### 1. slučaj

Ako je  $x - 3 \geq 0$ , tj. ako je  $x \geq 3$ , tada je

$$|x-3| = x-3$$

pa jednadžba glasi

$$x \cdot |x-3| - 2 = 0 \Rightarrow x \cdot (x-3) - 2 = 0.$$

Tada je:

$$\begin{aligned} & \left. \begin{aligned} x \cdot (x-3) - 2 = 0 &\Rightarrow x^2 - 3 \cdot x - 2 = 0 \Rightarrow x^2 - 3 \cdot x - 2 = 0 \\ &a = 1, b = -3, c = -2 \end{aligned} \right\} \Rightarrow \\ & \Rightarrow \left. \begin{aligned} a = 1, b = -3, c = -2 \\ x_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4 \cdot a \cdot c}}{2 \cdot a} \end{aligned} \right\} \Rightarrow x_{1,2} = \frac{-(-3) \pm \sqrt{(-3)^2 - 4 \cdot 1 \cdot (-2)}}{2 \cdot 1} \Rightarrow x_{1,2} = \frac{3 \pm \sqrt{9+8}}{2} \Rightarrow \end{aligned}$$

$$\Rightarrow x_{1,2} = \frac{3 \pm \sqrt{17}}{2} \Rightarrow \left. \begin{array}{l} x_1 = \frac{3 + \sqrt{17}}{2} \\ x_2 = \frac{3 - \sqrt{17}}{2} \end{array} \right\} \Rightarrow [\sqrt{17} \approx 4.12] \Rightarrow \left. \begin{array}{l} x_1 = \frac{3 + 4.12}{2} \\ x_2 = \frac{3 - 4.12}{2} \end{array} \right\} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \left. \begin{array}{l} x_1 = \frac{7.12}{2} \\ x_2 = \frac{-1.12}{2} \end{array} \right\} \Rightarrow \left. \begin{array}{l} x_1 = 3.56 \\ x_2 = -0.56 \end{array} \right\}.$$

Zbog  $x \geq 3$  rješenje je:

$$x_1 = \frac{3 + \sqrt{17}}{2}.$$

### 2. slučaj

Ako je  $x - 3 < 0$ , tj. ako je  $x < 3$ , tada je

$$|x - 3| = -(x - 3) = -x + 3$$

pa jednačba glasi

$$x \cdot |x - 3| - 2 = 0 \Rightarrow x \cdot (-x + 3) - 2 = 0.$$

Tada je:

$$x \cdot (-x + 3) - 2 = 0 \Rightarrow -x^2 + 3 \cdot x - 2 = 0 \Rightarrow -x^2 + 3 \cdot x - 2 = 0 \quad / \cdot (-1) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow x^2 - 3 \cdot x + 2 = 0 \Rightarrow \left. \begin{array}{l} x^2 - 3 \cdot x + 2 = 0 \\ a = 1, b = -3, c = 2 \end{array} \right\} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \left. \begin{array}{l} a = 1, b = -3, c = 2 \\ x_{3,4} = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4 \cdot a \cdot c}}{2 \cdot a} \end{array} \right\} \Rightarrow x_{3,4} = \frac{-(-3) \pm \sqrt{(-3)^2 - 4 \cdot 1 \cdot 2}}{2 \cdot 1} \Rightarrow x_{3,4} = \frac{3 \pm \sqrt{9 - 8}}{2} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow x_{3,4} = \frac{3 \pm \sqrt{1}}{2} \Rightarrow x_{3,4} = \frac{3 \pm 1}{2} \Rightarrow \left. \begin{array}{l} x_3 = \frac{3 + 1}{2} \\ x_4 = \frac{3 - 1}{2} \end{array} \right\} \Rightarrow \left. \begin{array}{l} x_3 = \frac{4}{2} \\ x_4 = \frac{2}{2} \end{array} \right\} \Rightarrow \left. \begin{array}{l} x_3 = 2 \\ x_4 = 1 \end{array} \right\}.$$

Zbog  $x < 3$  rješenja su:

$$x_3 = 2, x_4 = 1.$$

Zadana jednačba ima tri rješenja:

$$\frac{3 + \sqrt{17}}{2}, 2, 1.$$

### Vježba 058

Riješi jednačbu:  $x \cdot |4 - x| = 3$ .

**Rezultat:** 1, 3,  $2 + \sqrt{7}$ .

### Zadatak 059 (Antonio, srednja škola)

Riješi jednačbu:  $|x| - 2 = \frac{3}{|x|}$ .

### Rješenje 059

Ponovimo!

Za realni broj  $x$  njegova je apsolutna vrijednost (modul) broj  $|x|$  koji određujemo na ovaj način:

$$|x| = \begin{cases} x, & x \geq 0 \\ -x, & x < 0. \end{cases}$$

Ako je broj  $x$  pozitivan ili nula, tada je on jednak svojoj apsolutnoj vrijednosti. Za svaki  $x, x \geq 0$ , vrijedi  $|x| = x$ .

Ako je  $x$  negativan broj, njegova apsolutna vrijednost je suprotan broj  $-x$  koji je pozitivan. Za svaki  $x, x < 0$ , je  $|x| = -x$ .

Ili ovako:

Apsolutna vrijednost realnog broja  $x$  definira se

$$|x| = \begin{cases} x, & x > 0 \\ 0, & x = 0. \\ -x, & x < 0 \end{cases}$$

Ako je broj  $x$  pozitivan broj, onda ga prepisemo:  $|x| = x, |9| = 9$ .

Ako je broj  $x$  negativan broj, onda ga pišemo s minusom:  $|x| = -x, |-9| = -(-9) = 9$ .

Jednadžbu ćemo riješiti metodom supstitucije. Uvedemo zamjenu (supstituciju)

$$t = |x|$$

pa jednadžba glasi

$$\left. \begin{array}{l} |x| - 2 = \frac{3}{|x|} \\ t = |x| \end{array} \right\} \Rightarrow t - 2 = \frac{3}{t} \Rightarrow t - 2 = \frac{3}{t} \cdot t \Rightarrow t^2 - 2 \cdot t = 3 \Rightarrow t^2 - 2 \cdot t - 3 = 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \left. \begin{array}{l} t^2 - 2 \cdot t - 3 = 0 \\ a = 1, b = -2, c = -3 \end{array} \right\} \Rightarrow \left. \begin{array}{l} a = 1, b = -2, c = -3 \\ t_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4 \cdot a \cdot c}}{2 \cdot a} \end{array} \right\} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow t_{1,2} = \frac{-(-2) \pm \sqrt{(-2)^2 - 4 \cdot 1 \cdot (-3)}}{2 \cdot 1} \Rightarrow t_{1,2} = \frac{2 \pm \sqrt{4 + 12}}{2} \Rightarrow t_{1,2} = \frac{2 \pm \sqrt{16}}{2} \Rightarrow$$

$$\left. \begin{array}{l} t_{1,2} = \frac{2 \pm 4}{2} \\ t_1 = \frac{2+4}{2} \\ t_2 = \frac{2-4}{2} \end{array} \right\} \Rightarrow \left. \begin{array}{l} t_1 = \frac{6}{2} \\ t_2 = -\frac{2}{2} \end{array} \right\} \Rightarrow \left. \begin{array}{l} t_1 = 3 \\ t_2 = -1 \end{array} \right\}.$$

Vraćamo se supstituciji.

- $\left. \begin{array}{l} t = |x| \\ t = 3 \end{array} \right\} \Rightarrow |x| = 3 \Rightarrow x_{1,2} = \pm 3.$
- $\left. \begin{array}{l} t = |x| \\ t = -1 \end{array} \right\} \Rightarrow |x| = -1$  nema smisla jer je  $|x| \geq 0$  za svaki  $x \in R$ .

### Vježba 059

Riješi jednadžbu:  $|x| - 3 = \frac{4}{|x|}$ .

**Rezultat:**  $x_{1,2} = \pm 4.$