Zadatak 001 (Iva, gimnazija)

Zadan je univerzalni skup U = {1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9}, a skupovi A = {1, 2, 3, 5, 7} i B = {1, 3, 6, 8} njegovi su podskupovi. Nađite:

1. A^C
2. $A \cup B$
3. $A \cap B$
4. $A \setminus B$
5. $B \setminus A$
6. $A^C \cup B^C$
7. $A^C \cap B^C$
8. $A \Delta B$

Rješenje 001

Ponovimo!

Neka su A i B dva skupa. Ako je svaki element skupa A ujedno i element skupa B, onda kažemo da je A podskup skupa B i pišemo $A \subseteq B$. Dva skupa A i B bit će jednaki onda i samo onda, ako je $A \subseteq B$ i $B \subseteq A$.

Neka je U univerzalni skup, te A i B proizvoljni skupovi koji su podskupovi skupa U. Tada je:

$A \cup B = \{ x \in U : x \in A \text{ ili } x \in B \}$ unija skupova A i B,

$A \cap B = \{ x \in U : x \in A \text{ i } x \in B \}$ presjek skupova A i B,

$A \setminus B = \{ x \in U : x \in A,\ x \notin B \}$ razlika skupova A i B,

$A \Delta B = (A \setminus B) \cup (B \setminus A)$ simetrična razlika skupova A i B,

$A^C = \{ x \in U : x \notin A \}$ komplement skupa A.

1. $A^C = \{4, 6, 8, 9\}$
2. $A \cup B = \{1, 2, 3, 5, 6, 7, 8\}$
3. $A \cap B = \{1, 3\}$
4. $A \setminus B = \{2, 5, 7\}$
5. $B \setminus A = \{6, 8\}$
6. $A^C \cup B^C = \{2, 4, 5, 6, 7, 8, 9\}$
7. $A^C \cap B^C = \{4, 9\}$
8. $A \Delta B = \{2, 5, 6, 7, 8\}$

Vježba 001

Zadan je univerzalni skup U = {1, 2, 3, 4, 5, 6, 7}, a skupovi A = {1, 2, 4} i B = {3, 5, 6, 7} njegovi su podskupovi. Nađite:

1. $A \cup B$
2. $A \cap B$
3. $A \setminus B$

Rezultat: 1. $A \cup B = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7\}$ 2. $A \cap B = \emptyset$ 3. $A \setminus B = \{1, 2, 4\}$

Zadatak 002 (Sanja, gimnazija)

Zadani su skupovi A = {1, 2, 3, 4, 5, 6, 7}, B = {3, 5, 6, 8, 9} i univerzalni skup U = {1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9}. Odredi:

a) $A \cup B$ b) $A \cap B$ c) $A \setminus B$ d) A^C

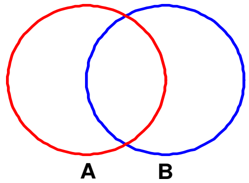
Rješenje 002

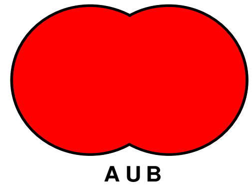
Ponovimo!

Neka je U univerzalni skup, te A i B proizvoljni skupovi koji su podskupovi skupa U. Tada je:

- $A \cup B$ unija skupova A i B,

$A \cup B = \{ x \in U : x \in A \text{ ili } x \in B \}$ unija skupova A i B,

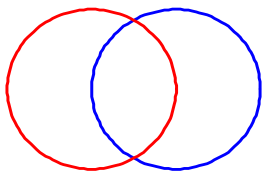




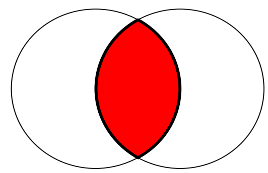
Unija dva ili više skupa je skup koji se sastoji od **svih elemenata** zadanih skupova.

- $A \bigcap B$ presjek skupova A i B,

  A$\bigcap$B = $\{x \in U : x \in A \ i \ x \in B\}$ presjek skupova A i B,



A B

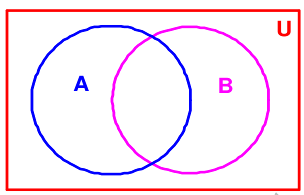


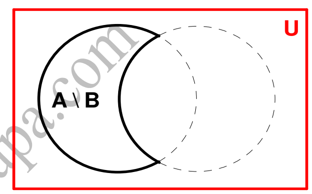
A$\bigcap$B

Presjek dva ili više skupa je skup koji se sastoji od **zajedničkih elemenata** zadanih skupova.

- $A \setminus B$ razlika skupova A i B,

  A \ B = $\{x \in U : x \in A \ i \ x \notin B\}$ razlika skupova A i B,

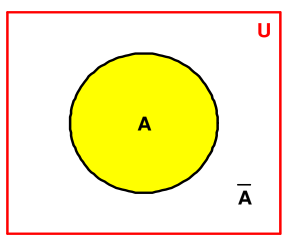




Razlika dva skupa A i B je skup koji sadrži sve elemente skupa A koji ne pripadaju skupu B.

- A^C ili $\overline{A}$ komplement skupa A,

  $\overline{A} = \{x \in U : x \in U \ i \ x \notin A\}$ komplement skupa A,



Komplement skupa A je skup koji sadrži sve elemente univerzalnog skupa U koji ne pripadaju skupu A.

Rješenja zadatka su:

a) $A \bigcup B = \{ \ 1, \ 2, \ 3, \ 4, \ 5, \ 6, \ 7 \ \} \bigcup \{ \ 3, \ 5, \ 6, \ 8, \ 9 \ \} = \{ \ 1, \ 2, \ 3, \ 4, \ 5, \ 6, \ 7, \ 8, \ 9 \ \} = U.$

b) $A \bigcap B = \{ \ 1, \ 2, \ 3, \ 4, \ 5, \ 6, \ 7 \ \} \bigcap \{ \ 3, \ 5, \ 6, \ 8, \ 9 \ \} = \{ \ 3, \ 5, \ 6 \ \}.$

c) $A \setminus B = \{ \ 1, \ 2, \ 3, \ 4, \ 5, \ 6, \ 7 \ \} \setminus \{ \ 3, \ 5, \ 6, \ 8, \ 9 \ \} = \{ \ 1, \ 2, \ 4, \ 7 \ \}.$

d) $\overline{A} = U \setminus A = \{ \ 1, \ 2, \ 3, \ 4, \ 5, \ 6, \ 7, \ 8, \ 9 \ \} \setminus \{ \ 1, \ 2, \ 3, \ 4, \ 5, \ 6, \ 7 \ \} = \{ \ 8, \ 9 \ \}.$

Vježba 002

Zadan je univerzalni skup U = {1, 2, 3, 4, 5, 6, 7}, a skupovi A = {1, 2} i B = {2, 3, 5} njegovi su podskupovi. Nađite: 1) A ∪ B 2) A ∩ B 3) A \ B

Rezultat: 1. A ∪ B = {1, 2, 3, 5} 2. A ∩ B = {2} 3. A \ B = {1}

Zadatak 003 (Ivana, PMF, Marinko, FER)

Dokaži de Morganov zakon: $(A \cup B)^C = A^C \cap B^C$.

Rješenje 003

Ponovimo!

Ponovimo jednakost skupova! Kada su skupovi A i B jednaki?

Dva su skupa A i B jednaka, ako i samo ako vrijedi: $A \subseteq B$ i $B \subseteq A$, tj. ako je svaki element skupa A istodobno element skupa B i obrnuto, ako je svaki element skupa B istodobno element skupa A:

$$\forall x \in A \Rightarrow x \in B \ \text{i} \ \forall x \in B \Rightarrow x \in A.$$

Zapamti!

$$\begin{array}{lcl}
x \in A \Rightarrow x \notin A^C & , & x \in A^C \Rightarrow x \notin A \\
x \in A \cap B \Rightarrow x \in A \ \text{i} \ x \in B & , & x \notin A \cup B \Rightarrow x \notin A \ \text{i} \ x \notin B, \\
x \notin A \cap B \Rightarrow x \notin A \ \text{ili} \ x \notin B & , & x \in A \ \text{i} \ x \in B \Rightarrow x \in A \cap B, \\
x \in A \ \text{ili} \ x \in B \Rightarrow x \in A \cup B & , & x \notin A \ \text{i} \ x \notin B \Rightarrow x \notin A \cup B, \\
x \notin A \ \text{ili} \ x \notin B \Rightarrow x \notin A \cap B & , & x \in A \cup B \Rightarrow x \in A \ \text{ili} \ x \in B,
\end{array}$$

Dokažimo tvrdnju: $(A \cup B)^C \subseteq A^C \cap B^C$.

Vrijedi:

$$\begin{aligned}
& x \in (A \cup B)^C \Rightarrow x \notin A \cup B \Rightarrow \\
& \Rightarrow [\text{ako x nije element unije, onda nije element ni jednog skupa}] \Rightarrow \\
& \Rightarrow x \notin A \ \text{i} \ x \notin B \Rightarrow x \in A^C \ \text{i} \ x \in B^C \Rightarrow \\
& \Rightarrow [\text{ako je x element oba skupa, onda je element njihovog presjeka}] \Rightarrow \\
& \Rightarrow x \in A^C \cap B^C.
\end{aligned}$$

Dakle, $(A \cup B)^C \subseteq A^C \cap B^C$.

Dokažimo tvrdnju: $A^C \cap B^C \subseteq (A \cup B)^C$.

Vrijedi:

$$x \in A^C \cap B^C \Rightarrow x \in A^C \ \text{i} \ x \in B^C \Rightarrow x \notin A \ \text{i} \ x \notin B \Rightarrow x \notin A \cup B \Rightarrow x \in (A \cup B)^C.$$

Dakle, $A^C \cap B^C \subseteq (A \cup B)^C$.

Zaključak:

$$\left.\begin{array}{l} (A \cup B)^C \subseteq A^C \cap B^C \\ A^C \cap B^C \subseteq (A \cup B)^C \end{array}\right\} \Rightarrow (A \cup B)^C = A^C \cap B^C.$$

Uporabom znaka ekvivalencije dokaz se može kraće ovako zapisati:

$$x \in (A \cup B)^C \Leftrightarrow x \notin A \cup B \Leftrightarrow x \notin A \ \text{i} \ x \notin B \Leftrightarrow x \in A^C \ \text{i} \ x \in B^C \Leftrightarrow x \in A^C \cap B^C.$$

Vježba 003

Dokaži de Morganov zakon: $(A \cap B)^C = A^C \cup B^C$.

Rezultat: $x \in (A \cap B)^C \Leftrightarrow x \notin A \cap B \Leftrightarrow x \notin A \ \text{ili} \ x \notin B \Leftrightarrow x \in A^C \ \text{ili} \ x \in B^C \Leftrightarrow x \in A^C \cup B^C.$

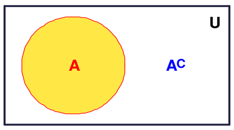
Zadatak 004 (Ivana, PMF, Marinko, FER)

Za svaki skup $A \subseteq U$ vrijedi $\left(A^C\right)^C = A,$ (involutivnost). Dokaži!

Rješenje 004

Ponovimo!

Napomena! Oznaka "c" znači uzimanje komplementa u odnosu na univerzalni skup U:



$A^C = U \setminus A$

$A^C = U \setminus A$ ili

$A^C = \{x \in U : x \notin A\}$

Ponovimo jednakost skupova! Kada su skupovi A i B jednaki?
Dva su skupa A i B jednaka, ako i samo ako vrijedi: $A \subseteq B$ i $B \subseteq A,$ tj. ako je svaki element skupa A istodobno element skupa B i obrnuto, ako je svaki element skupa B istodobno element skupa A:

$$\forall x \in A \Rightarrow x \in B \text{ i } \forall x \in B \Rightarrow x \in A.$$

Dokažimo tvrdnju: $\left(A^C\right)^C \subseteq A.$

Vrijedi:

$$x \in \left(A^C\right)^C \Rightarrow x \notin A^C \Rightarrow x \in A.$$

Dakle, $\left(A^C\right)^C \subseteq A.$

Dokažimo tvrdnju: $A \subseteq \left(A^C\right)^C.$

Vrijedi:

$$x \in A \Rightarrow x \notin A^C \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \left[\text{x nije element } A^C\text{, a budući da mora biti element univerzalnog skupa U}\right] \Rightarrow$$

$$\Rightarrow x \in \left(A^C\right)^C.$$

Dakle, $A \subseteq \left(A^C\right)^C.$

Zaključak:

$$\left.\begin{array}{l} \left(A^C\right)^C \subseteq A \\ A \subseteq \left(A^C\right)^C \end{array}\right\} \Rightarrow \left(A^C\right)^C = A.$$

Uporabom znaka ekvivalencije dokaz se može kraće ovako zapisati:

$$x \in \left(A^C\right)^C \Leftrightarrow x \notin A^C \Leftrightarrow x \in A.$$

Vježba 004

Dokaži: $A \cap (B \setminus C) = (A \cap B) \setminus C.$

Rezultat:

$$x \in A \cap (B \setminus C) \Leftrightarrow x \in A \text{ i } x \in B \setminus C \Leftrightarrow x \in A \text{ i } (x \in B \text{ i } x \notin C) \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow (x \in A \text{ i } x \in B) \text{ i } x \notin C \Leftrightarrow x \in (A \cap B) \text{ i } x \notin C \Leftrightarrow x \in (A \cap B) \setminus C.$$

Zadatak 005 (Ivana, PMF, Marinko, FER)

Dokažite zakon asocijacije za simetričnu razliku: (AΔB)ΔC = AΔ(BΔC).

Rješenje 005

Ponovimo!

$A \Delta B = \{x \in U : x \in A \text{ i } x \notin B \text{ ili } x \notin A \text{ i } x \in B\}$ naziva se simetrična razlika skupova A i B.

Dokažimo najprije da je

$$(A\Delta B)\Delta C \subseteq A\Delta(B\Delta C).$$

Neka je neki proizvoljni $x\in(A\Delta B)\Delta C.$ Prema definiciji simetrične razlike slijedi:

1. ako je $x\in A\Delta B$ i $x\notin C$ to je

$$\left.\begin{array}{c} x\in A \text{ i } x\notin B \text{ i } x\notin C \\ \text{ili} \\ x\notin A \text{ i } x\in B \text{ i } x\notin C \end{array}\right\} \Rightarrow \left.\begin{array}{c} x\in A \text{ i } x\notin (B\Delta C) \\ \text{ili} \\ x\notin A \text{ i } x\in (B\Delta C) \end{array}\right\} \Rightarrow x\in A\Delta(B\Delta C).$$

2. ako je $x\notin A\Delta B$ i $x\in C$ to je

$$\left.\begin{array}{c} x\in A \text{ i } x\in B \text{ i } x\in C \\ \text{ili} \\ x\notin A \text{ i } x\notin B \text{ i } x\in C \end{array}\right\} \Rightarrow \left.\begin{array}{c} x\in A \text{ i } x\notin (B\Delta C) \\ \text{ili} \\ x\notin A \text{ i } x\in (B\Delta C) \end{array}\right\} \Rightarrow x\in A\Delta(B\Delta C).$$

Dokazali smo inkluziju:

$$(A\Delta B)\Delta C \subseteq A\Delta(B\Delta C).$$

Dokažimo dalje da je:

$$A\Delta(B\Delta C) \subseteq (A\Delta B)\Delta C.$$

Neka je neki proizvoljni $x\in A\Delta(B\Delta C).$ Prema definiciji simetrične razlike slijedi:

1. ako je $x\in A$ i $x\notin B\Delta C$ to je

$$\left.\begin{array}{c} x\in A \text{ i } x\in B \text{ i } x\in C \\ \text{ili} \\ x\in A \text{ i } x\notin B \text{ i } x\notin C \end{array}\right\} \Rightarrow \left.\begin{array}{c} x\notin (A\Delta B) \text{ i } x\in C \\ \text{ili} \\ x\in (A\Delta B) \text{ i } x\notin C \end{array}\right\} \Rightarrow x\in (A\Delta B)\Delta C.$$

2. ako je $x\notin A$ i $x\in B\Delta C$ to je

$$\left.\begin{array}{c} x\notin A \text{ i } x\in B \text{ i } x\notin C \\ \text{ili} \\ x\notin A \text{ i } x\notin B \text{ i } x\in C \end{array}\right\} \Rightarrow \left.\begin{array}{c} x\in (A\Delta B) \text{ i } x\notin C \\ \text{ili} \\ x\notin (A\Delta B) \text{ i } x\in C \end{array}\right\} \Rightarrow x\in (A\Delta B)\Delta C.$$

Dokazali smo inkluziju:

$$A\Delta(B\Delta C) \subseteq (A\Delta B)\Delta C.$$

Budući da je istodobno ispunjeno

$$\left.\begin{array}{c} (A\Delta B)\Delta C \subseteq A\Delta(B\Delta C) \\ A\Delta(B\Delta C) \subseteq (A\Delta B)\Delta C \end{array}\right\} \Rightarrow (A\Delta B)\Delta C = A\Delta(B\Delta C).$$

Vježba 005

Dokažite zakon komutacije za simetričnu razliku: AΔB = BΔA.

Rezultat: Slijedi iz definicije.

Zadatak 006 (Seve, PMF)

Za proizvoljna tri skupa A, B, C vrijedi $(A\cap B)\times C = (A\times C)\cap(B\times C).$ Dokažite!

Rješenje 006

Ponovimo!

Da bi ta dva skupa bila jednaka mora biti istodobno ispunjeno:

$$(A\cap B)\times C \subseteq (A\times C)\cap(B\times C) \quad \text{i} \quad (A\times C)\cap(B\times C) \subseteq (A\cap B)\times C.$$

Dokažimo najprije prvu relaciju:

$$(A\cap B)\times C \subseteq (A\times C)\cap(B\times C).$$

Neka je:

$$(x,y)\in(A\cap B)\times C \Rightarrow x\in(A\cap B) \text{ i } y\in C \Rightarrow [x\in A \text{ i } x\in B] \text{ i } y\in C \Rightarrow$$

$$\Rightarrow [x \in A \text{ i } y \in C] \text{ i } [x \in B \text{ i } y \in C] \Rightarrow (x, y) \in A \times C \text{ i } (x, y) \in B \times C \Rightarrow (x, y) \in (A \times C) \cap (B \times C).$$

Dokazali smo inkluziju:

$$(A \cap B) \times C \subseteq (A \times C) \cap (B \times C).$$

Dokažimo dalje da je:

$$(A \times C) \cap (B \times C) \subseteq (A \cap B) \times C.$$

Neka je:

$$(x, y) \in (A \times C) \cap (B \times C) \Rightarrow (x, y) \in A \times C \text{ i } (x, y) \in B \times C \Rightarrow [x \in A \text{ i } y \in C] \text{ i } [x \in B \text{ i } y \in C] \Rightarrow$$

$$\Rightarrow [x \in A \text{ i } x \in B] \text{ i } y \in C \Rightarrow x \in A \cap B \text{ i } y \in C \Rightarrow (x, y) \in (A \cap B) \times C.$$

Dokazali smo inkluziju:

$$(A \times C) \cap (B \times C) \subseteq (A \cap B) \times C.$$

Budući da je istodobno ispunjeno

$$\left.\begin{array}{l} (A \cap B) \times C \subseteq (A \times C) \cap (B \times C) \\ (A \times C) \cap (B \times C) \subseteq (A \cap B) \times C \end{array}\right\} \Rightarrow (A \cap B) \times C = (A \times C) \cap (B \times C).$$

Vježba 006

Za proizvoljna tri skupa A, B, C vrijedi $A \times (B \cap C) = (A \times B) \cap (A \times C)$. Dokažite!

Rezultat: Točno je.

Zadatak 007 (Natalija, hotelijerska škola)

Zadani su skupovi:

$$A = \{x \in Z \mid -3 \leq x < 5\} \quad , \quad B = \{x \in R \mid (2x+1) \cdot (x-1) \neq 0\} \quad , \quad C = \{1, 2, 4, 15, 20\}$$

Odredite skupove: $a)\ (A \setminus B) \cap C$, $b)\ C \,\Delta\, (A \setminus B)$

Rješenje 007

$$A = \{x \in Z \mid -3 \leq x < 5\} = \{-3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, 4\} \quad , \quad B = \{x \in R \mid (2x+1) \cdot (x-1) \neq 0\} = R \setminus \left\{-\frac{1}{2}, 1\right\},$$

$$C = \{1, 2, 4, 15, 20\}.$$

$a)\ (A \setminus B) \cap C = \{1\} \cap \{1, 2, 4, 15, 20\} = \{1\}.$

$b)\ C \,\Delta\, (A \setminus B) = \{1, 2, 4, 15, 20\} \,\Delta\, \{1\} = \{2, 4, 15, 20\}.$

Vježba 007

Zadani su skupovi:

$$A = \{x \in Z \mid -3 \leq x < 5\} \quad , \quad B = \{x \in R \mid (2x+1) \cdot (x-1) \neq 0\} \quad , \quad C = \{1, 2, 4, 15, 20\}$$

Odredite skup: $(A \setminus B) \cup C.$

Rezultat: $(A \setminus B) \cup C = C.$

Zadatak 008 (Ivana, gimnazija)

Ako su A i B skupovi za koje vrijedi $(A \cup B) \setminus (A \cap B) \subseteq A,$ onda nužno vrijedi:

$A.\ B = \emptyset$ $B.\ A \subseteq B$ $C.\ B \subseteq A$ $D.\ A = \emptyset$ $E.\ A \cap B = \emptyset$

Rješenje 008

Ponovimo!

Neka su A i B dva skupa. Ako je svaki element skupa A ujedno i element skupa B, onda kažemo da je A podskup skupa B i pišemo $A \subseteq B$.

Neka je U univerzalni skup, te A i B proizvoljni skupovi koji su podskupovi skupa U. Tada je:

$$A \cup B = \{x \in U : x \in A \text{ ili } x \in B\}$$ unija skupova A i B,

$$A \cap B = \{x \in U : x \in A \ i \ x \in B\}$$ presjek skupova A i B,

$$A \setminus B = \{x \in U : x \in A, \ x \notin B\}$$ razlika skupova A i B.

Prazan skup je podskup svakog skupa S:

$$\emptyset \subseteq S.$$

Provjerimo redom svaki ponuđeni odgovor i metodom eliminacije dobit ćemo točno rješenje:

A.

$$\left. \begin{array}{l} B = \emptyset \\ (A \cup B) \setminus (A \cap B) \subseteq A \end{array} \right\} \Rightarrow (A \cup \emptyset) \setminus (A \cap \emptyset) \subseteq A \Rightarrow A \setminus \emptyset \subseteq A \Rightarrow A \subseteq A \text{ točno je}$$

B.

$$\left. \begin{array}{l} A \subseteq B \Rightarrow A \cup B = B \text{ i } A \cap B = A \\ (A \cup B) \setminus (A \cap B) \subseteq A \end{array} \right\} \Rightarrow B \setminus A \subseteq A \text{ netočno je}$$

C.

$$\left. \begin{array}{l} B \subseteq A \Rightarrow A \cup B = A \text{ i } A \cap B = B \\ (A \cup B) \setminus (A \cap B) \subseteq A \end{array} \right\} \Rightarrow A \setminus B \subseteq A \text{ točno je}$$

D.

$$\left. \begin{array}{l} A = \emptyset \\ (A \cup B) \setminus (A \cap B) \subseteq A \end{array} \right\} \Rightarrow (\emptyset \cup B) \setminus (\emptyset \cap B) \subseteq A \Rightarrow B \setminus \emptyset \subseteq A \Rightarrow B \subseteq A \text{ netočno je}$$

E.

$$\left. \begin{array}{l} A \cap B = \emptyset \\ (A \cup B) \setminus (A \cap B) \subseteq A \end{array} \right\} \Rightarrow (A \cup B) \setminus \emptyset \subseteq A \Rightarrow A \cup B \subseteq A \text{ netočno je}$$

Odgovor je pod C.

Vježba 008

Ako su A i B skupovi za koje vrijedi $(A \cup B) \setminus (A \cap B) \subseteq B,$ onda nužno vrijedi:

$A.\ B = \emptyset \qquad B.\ A \subseteq B \qquad C.\ B \subseteq A \qquad D.\ A = \emptyset \qquad E.\ A \cap B = \emptyset$

Rezultat: Odgovor je pod B.

Zadatak 009 (Marija, studentica)

Dokaži da rješenja jednadžbe $x^3 - 1 = 0$ obzirom na množenje čine grupu.

Rješenje 009

Ponovimo!

$$a^3 - b^3 = (a - b) \cdot \left(a^2 + a \cdot b + b^2\right) \quad , \quad a^2 - b^2 = (a - b) \cdot (a + b) \quad , \quad (a + b)^2 = a^2 + 2 \cdot a \cdot b + b^2$$

$$(a - b)^2 = a^2 - 2 \cdot a \cdot b + b^2 \quad , \quad (-a - b)^2 = (a + b)^2 \quad , \quad a \cdot b = 0 \Leftrightarrow a = 0 \text{ ili } b = 0 \text{ ili } a = b = 0.$$

$$(a + b \cdot i) \cdot (a - b \cdot i) = a^2 + b^2 \quad , \quad i^2 = -1.$$

Ako je u nekom nepraznom skupu $G = \{a, b, c, ...\}$ definirana binarna operacija $\circ$ $(\circ : G \times G \to G)$ za koju vrijede aksiomi:

- $(\forall\, a, b, c \in G)$ $\quad (a \circ b) \circ c = a \circ (b \circ c)$ $\quad$ asocijativnost operacije $\circ$
- $(\exists\, e \in G)\ (\forall\, a \in G)$ $\quad e \circ a = a \circ e = a$ $\quad$ egzistencija neutralnog elementa
- $(\forall\, a \in G)\ \left(\exists\, a^{-1} \in G\right)$ $\quad a \circ a^{-1} = a^{-1} \circ a = e$ $\quad$ egzistencija inverznog elementa

onda kažemo da je $(G, \circ)$ grupa.

Grupa je komutativna ili Abelova ako u njoj vrijedi

- $(\forall\, a, b \in G)$ $\quad a \circ b = b \circ a$ $\quad$ komutacija za operaciju $\circ$.

Ako je operacija ○ množenje brojeva (puta, ·), onda je $(G, \cdot)$ komutativna multiplikativna grupa.
Njezin neutralni element je e = 1.
Ako je skup G konačan i ima mali broj elemenata, onda se algebarska struktura $(G, \circ)$ može zadati Caylejevom tablicom. Na primjer, ako je $G = \{a, b, c\}$, tada je $(G, \circ)$:

○	a	b	c
a	a ○ a	a ○ b	a ○ c
b	b ○ a	b ○ b	b ○ c
c	c ○ a	c ○ b	c ○ c

Ako je Caylejeva tablica simetrična u odnosu na glavnu dijagonalu (od lijevog gornjeg kuta prema desnom donjem kutu), vrijedi zakon komutacije za operaciju ○.
Najprije riješimo kubnu jednadžbu.

$$x^3 - 1 = 0 \Rightarrow (x-1)\cdot\left(x^2+x+1\right) = 0 \Rightarrow \left.\begin{matrix} x-1=0 \\ x^2+x+1=0 \end{matrix}\right\} \Rightarrow \left.\begin{matrix} x_1 = 1 \text{ rješenje} \\ x^2+x+1=0 \end{matrix}\right\} \Rightarrow \left.\begin{matrix} x^2+x+1=0 \\ a=1 \ , \ b=1 \ , \ c=1 \end{matrix}\right\} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \left.\begin{matrix} a=1 \ , \ b=1 \ , \ c=1 \\ x_{2,3} = \dfrac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4\cdot a\cdot c}}{2\cdot a} \end{matrix}\right\} \Rightarrow x_{2,3} = \frac{-1 \pm \sqrt{1-4\cdot 1\cdot 1}}{2\cdot 1} \Rightarrow x_{2,3} = \frac{-1\pm\sqrt{1-4}}{2} \Rightarrow x_{2,3} = \frac{-1\pm\sqrt{-3}}{2} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow x_{2,3} = \frac{-1\pm\sqrt{3}\cdot i}{2} \Rightarrow \left.\begin{matrix} x_2 = \dfrac{-1+\sqrt{3}\cdot i}{2} \text{ rješenje} \\ x_3 = \dfrac{-1-\sqrt{3}\cdot i}{2} \text{ rješenje} \end{matrix}\right\}.$$

Neka je G skup rješenja jednadžbe $x^3 - 1$:

$$G = \left\{ 1, \frac{-1+\sqrt{3}\cdot i}{2}, \frac{-1-\sqrt{3}\cdot i}{2} \right\}.$$

Pokažimo da je (G, ·) grupa.
Popunimo Caylejevu tablicu.

$$\frac{-1+\sqrt{3}\cdot i}{2}\cdot\frac{-1+\sqrt{3}\cdot i}{2} = \left(\frac{-1+\sqrt{3}\cdot i}{2}\right)^2 = \frac{1-2\cdot\sqrt{3}\cdot i-3}{4} = \frac{-2-2\cdot\sqrt{3}\cdot i}{4} = \frac{2\cdot\left(-1-\sqrt{3}\cdot i\right)}{4} = \frac{-1-\sqrt{3}\cdot i}{2}$$

$$\frac{-1+\sqrt{3}\cdot i}{2}\cdot\frac{-1-\sqrt{3}\cdot i}{2} = \frac{\left(-1+\sqrt{3}\cdot i\right)\cdot\left(-1-\sqrt{3}\cdot i\right)}{4} = \begin{bmatrix} \text{iz obje zagrade} \\ \text{izlučimo minus} - \end{bmatrix} = \frac{\left(1-\sqrt{3}\cdot i\right)\cdot\left(1+\sqrt{3}\cdot i\right)}{4} = \frac{1+3}{4} = \frac{4}{4} = 1.$$

$$\frac{-1-\sqrt{3}\cdot i}{2}\cdot\frac{-1-\sqrt{3}\cdot i}{2} = \frac{\left(-1-\sqrt{3}\cdot i\right)^2}{4} = \frac{\left(1+\sqrt{3}\cdot i\right)^2}{4} = \frac{1+2\cdot\sqrt{3}\cdot i-3}{4} = \frac{-2+2\cdot\sqrt{3}\cdot i}{4} = \frac{2\cdot\left(-1+\sqrt{3}\cdot i\right)}{4} = \frac{-1+\sqrt{3}\cdot i}{2}$$

○	1	$\frac{-1+\sqrt{3}\cdot i}{2}$	$\frac{-1-\sqrt{3}\cdot i}{2}$
1	1	$\frac{-1+\sqrt{3}\cdot i}{2}$	$\frac{-1-\sqrt{3}\cdot i}{2}$
$\frac{-1+\sqrt{3}\cdot i}{2}$	$\frac{-1+\sqrt{3}\cdot i}{2}$	$\frac{-1-\sqrt{3}\cdot i}{2}$	1

$\frac{-1-\sqrt{3}\cdot i}{2}$	$\frac{-1-\sqrt{3}\cdot i}{2}$	1	$\frac{-1+\sqrt{3}\cdot i}{2}$

Uvjerimo se da vrijedi asocijativnost:

$$\left.\begin{array}{l}\left(1\cdot\frac{-1+\sqrt{3}\cdot i}{2}\right)\cdot\frac{-1-\sqrt{3}\cdot i}{2}=\frac{-1+\sqrt{3}\cdot i}{2}\cdot\frac{-1-\sqrt{3}\cdot i}{2}=1\\ 1\cdot\left(\frac{-1+\sqrt{3}\cdot i}{2}\cdot\frac{-1-\sqrt{3}\cdot i}{2}\right)=1\cdot 1=1\end{array}\right\}\Rightarrow$$

$$\Rightarrow\left(1\cdot\frac{-1+\sqrt{3}\cdot i}{2}\right)\cdot\frac{-1-\sqrt{3}\cdot i}{2}=1\cdot\left(\frac{-1+\sqrt{3}\cdot i}{2}\cdot\frac{-1-\sqrt{3}\cdot i}{2}\right).$$

Neutralni element je 1.

Broj 1 je sam sebi inverzan. Brojevi $\frac{-1+\sqrt{3}\cdot i}{2}$ i $\frac{-1-\sqrt{3}\cdot i}{2}$ su međusobno inverzni.

Zbog simetričnosti Caylejeve tablice slijedi da je (G, ·) komutativna ili Abelova grupa.

Vježba 009

Skup G čine brojevi 1, i, – 1, – i ($i=\sqrt{-1}$), a operacija · je obično množenje. Pokaži da je (G, ·) grupa.

Rezultat: Dokaz analogan.

Zadatak 010 (Antun, gimnazija)

Neka su A i B podskupovi od N takvi da je $A\cap B=\{1, 2, 3\}$, $(A\cup B)\setminus A=\{4, 5\}$ i $\{6, 7\}\subseteq A\cup B$. Odredite skup B.

Rješenje 010

Neka su A i B dva skupa. Ako je svaki element skupa A ujedno i element skupa B, onda kažemo da je A podskup skupa B i pišemo A ⊆ B.

Neka je U univerzalni skup, te A i B proizvoljni skupovi koji su podskupovi skupa U. Tada je:

A ∪ B = $\{x\in U : x\in A \text{ ili } x\in B\}$ unija skupova A i B,

A ∩ B = $\{x\in U : x\in A \text{ i } x\in B\}$ presjek skupova A i B,

A \ B = $\{x\in U : x\in A,\ x\notin B\}$ razlika skupova A i B.

Budući da je

$$A\cap B=\{1, 2, 3\},$$

oba skupa sadrže te elemente:

$$\{1, 2, 3\}\subseteq A \quad , \quad \{1, 2, 3\}\subseteq B.$$

Iz jednakosti

$$(A\cup B)\setminus A=\{4, 5\}$$

proizlazi da skup A ne može sadržavati elemente 4 i 5. Dakle, brojevi 4 i 5 elementi su skupa B:

$$\{4, 5\}\subseteq B.$$

Iz relacije

$$\{6, 7\}\subseteq A\cup B$$

zbog

$$(A\cup B)\setminus A=\{4, 5\}$$

slijedi da su brojevi 6 i 7 elemnti skupa A.

Skup B ima elemente:

$$B=\{1, 2, 3, 4, 5\}.$$

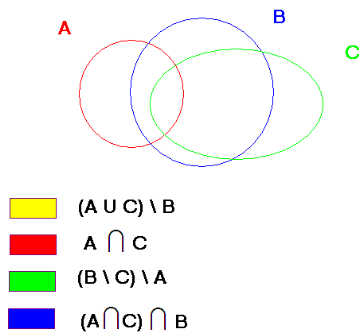
Vježba 010

Neka su A i B podskupovi od N takvi da je $A \cap B = \{1, 2, 3\}$, $(A \cup B) \setminus A = \{6, 7\}$ i $\{4, 5\} \subseteq A \cup B$. Odredite skup B.

Rezultat: $B = \{1, 2, 3, 6, 7\}$.

Zadatak 011 (Kinder Bueno, student)

Zadana su tri skupa A, B, i C. Označite odgovarajućim uzorkom sljedeća svojstva:



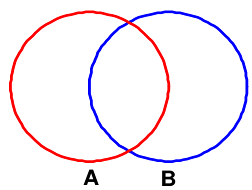
Rješenje 011

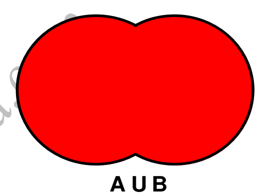
Ponovimo!

Neka je U univerzalni skup, te A i B proizvoljni skupovi koji su podskupovi skupa U. Tada je:

- $A \cup B$ unija skupova A i B,

  $A \cup B = \{x \in U : x \in A \text{ ili } x \in B\}$ unija skupova A i B,

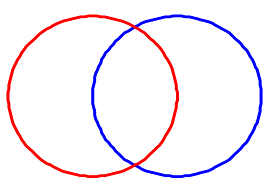




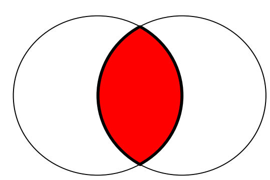
Unija dva ili više skupa je skup koji se sastoji od **svih elemenata** zadanih skupova.

- $A \cap B$ presjek skupova A i B,

  $A \cap B = \{x \in U : x \in A \text{ i } x \in B\}$ presjek skupova A i B,



A B

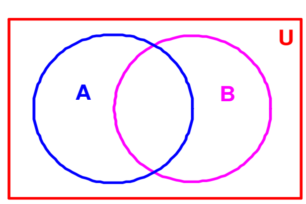


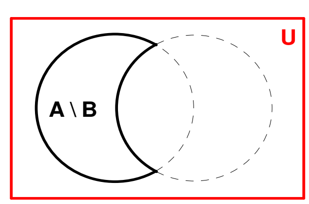
$A \cap B$

Presjek dva ili više skupa je skup koji se sastoji od **zajedničkih elemenata** zadanih skupova.

- $A \setminus B$ razlika skupova A i B,

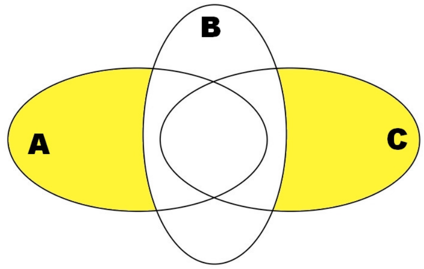
  $A \setminus B = \{x \in U : x \in A \text{ i } x \notin B\}$ razlika skupova A i B,



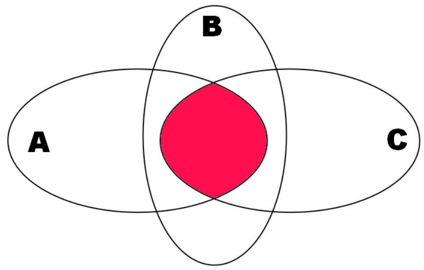


Razlika dva skupa A i B je skup koji sadrži sve elemente skupa A koji ne pripadaju skupu B.

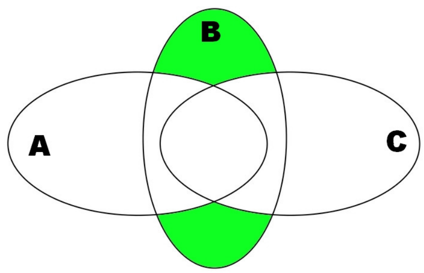
Žuta boja označava $(A \cup C) \setminus B$



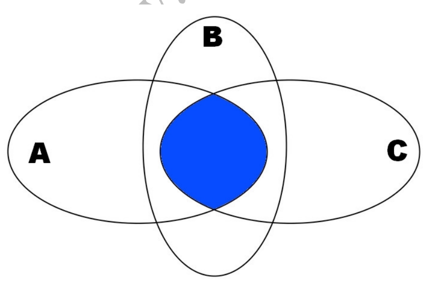
Crvena boja označava $(A \cap C)$



Zelena boja označava $(B \setminus C) \setminus A$

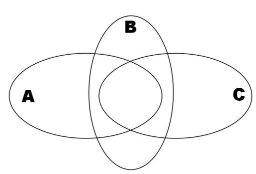


Plava boja označava $(A \cap C) \cap B$

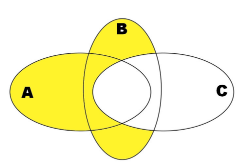


Vježba 011

Zadana su tri skupa A, B, i C. Označite žutom bojom $(A \setminus C) \cup (B \setminus C)$:



Rezultat:



Zadatak 012 (Ana, gimnazija)

Zadani su skupovi $A = \{a, b, c, d, e\}$ i $B = \{o, trokut, četverokut, a, c, e\}$. Nađite:

$a)\ A \cup B \qquad b)\ A \cap B \qquad c)\ A \setminus B \qquad d)\ B \setminus A.$

Rješenje 012

Ponovimo!

Neka je U univerzalni skup, te A i B proizvoljni skupovi koji su podskupovi skupa U. Tada je:

- $A \cup B$ unija skupova A i B,

  $A \cup B = \{x \in U : x \in A \ ili \ x \in B\}$ unija skupova A i B

  Unija dva ili više skupa je skup koji se sastoji od **svih elemenata** zadanih skupova.

- $A \cap B$ presjek skupova A i B,

  $A \cap B = \{x \in U : x \in A \ i \ x \in B\}$ presjek skupova A i B

  Presjek dva ili više skupa je skup koji se sastoji od **zajedničkih elemenata** zadanih skupova.

- $A \setminus B$ razlika skupova A i B,

  $A \setminus B = \{x \in U : x \in A \ i \ x \notin B\}$ razlika skupova A i B

  Razlika dva skupa A i B je skup koji sadrži **sve elemente skupa A koji ne pripadaju skupu B**.

a)

$$A \cup B = \{a, b, c, d, e\} \cup \{o, trokut, četverokut, a, c, e\} = \{a, b, c, d, e, o, trokut, četverokut\}.$$

b)

$$A \cap B = \{a, b, c, d, e\} \cap \{o, trokut, četverokut, a, c, e\} = \{a, c, e\}.$$

c)

$$A \setminus B = \{a, b, c, d, e\} \setminus \{o, trokut, četverokut, a, c, e\} = \{b, d\}.$$

d)

$$B \setminus A = \{o, trokut, četverokut, a, c, e\} \setminus \{a, b, c, d, e\} = \{o, trokut, četverokut\}.$$

Vježba 012

Zadani su skupovi $A = \{a, b, c, d, e, o, pravac\}$ i $B = \{o, trokut, četverokut, a, c, e\}$.

Nađite $A \cap B$.

Rezultat: $A \cap B = \{a, c, e, o\}$.

Zadatak 013 (Ana, studentica)

Zadani su skupovi $A = \left\{x \in Q : 0 < x \le \frac{1}{2}\right\}$ i $B = \left\{x \in Q : -\frac{1}{2} \le x \le \frac{1}{4}\right\}$. Nađite:

$a)\ A \cup B \qquad b)\ A \cap B$

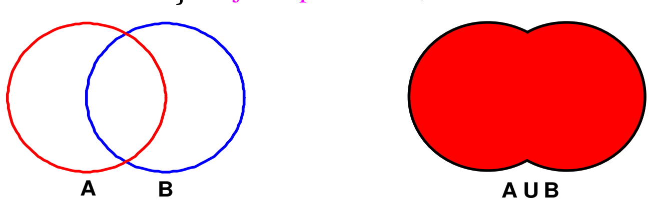
Rješenje 013

Ponovimo!

Neka je U univerzalni skup, te A i B proizvoljni skupovi koji su podskupovi skupa U. Tada je:

- $A \cup B$ unija skupova A i B,

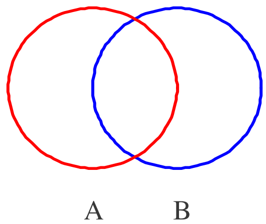
  $A \cup B = \{x \in U : x \in A \text{ ili } x \in B\}$ unija skupova A i B,

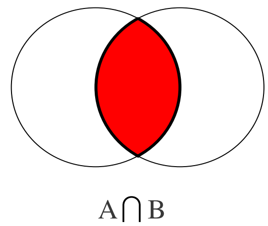


  Unija dva ili više skupa je skup koji se sastoji od **svih elemenata** zadanih skupova.

- $A \cap B$ presjek skupova A i B,

  $A \cap B = A \cap B = \{x \in U : x \in A \text{ i } x \in B\}$ presjek skupova A i B,





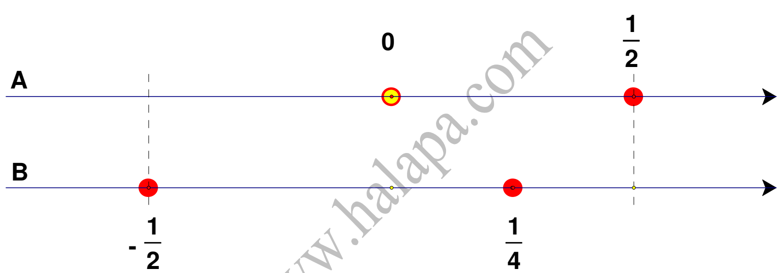
Presjek dva ili više skupa je skup koji se sastoji od **zajedničkih elemenata** zadanih skupova.

Zadani su skupovi $A=\left\{x\in Q: 0<x\leq\frac{1}{2}\right\}$ i $B=\left\{x\in Q: -\frac{1}{2}\leq x\leq\frac{1}{4}\right\}$.

Uočimo da skup A sadrži sve racionalne brojeve između broja 0 i broja $\frac{1}{2}$. Važno je znati da broj 0 nije element skupa A (ne pripada skupu A), a broj $\frac{1}{2}$ je element skupa A (pripada skupu A).

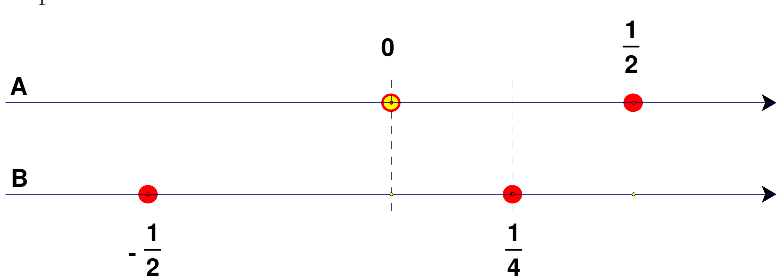
Uočimo da skup B sadrži sve racionalne brojeve između broja $-\frac{1}{2}$ i broja $\frac{1}{4}$. Važno je znati da je broj $-\frac{1}{2}$ element skupa B (pripada skupu B) i broj $\frac{1}{4}$ je element skupa B (pripada skupu B).

a)
Računamo uniju skupova A i B.



$$A\cup B=\left\{x\in Q: -\frac{1}{2}\leq x\leq\frac{1}{2}\right\}.$$

b)
Računamo presjek skupova A i B.



$$A\cap B=\left\{x\in Q: 0<x\leq\frac{1}{4}\right\}.$$

Vježba 013

Zadani su skupovi $A=\left\{x\in Q: 0<x\leq\frac{1}{2}\right\}$ i $B=\left\{x\in Q: -\frac{1}{2}\leq x\leq\frac{5}{4}\right\}$.Nađite $A\cup B$.

Rezultat: $A\cup B=\left\{x\in Q: -\frac{1}{2}\leq x\leq\frac{5}{4}\right\}$.

Zadatak 014 (Andrea, veleučilište)

Napišite partitivni skup skupa $A = \{ \varnothing, 1, a \}$.

Rješenje 014

Ponovimo!

Jedan od vrlo važnih matematičkih pojmova je pojam skupa ili množine (cjeline). Ubrajamo ga među osnovne pojmove pa se, kao takav, ne može definirati. Dakle, skup je pojam koji se ne definira, a zadaje se svojim elementima. Prazan skup je skup bez elemenata i označavamo ga s Ø.

Neka su A i B dva skupa. Ako je svaki element skupa A ujedno i element skupa B, onda kažemo da je A podskup skupa B i pišemo $A \subseteq B$.

Partitivni skup

Neka je S proizvoljni skup. Skup svih podskupova skupa S nazivamo partitivni skup skupa S. Ako je skup S konačan i ima n elemenata tada njegov partitivni skup P(S) ima 2^n elemenata.

Partitivni skup skupa S obično se simbolično piše na dva načina:

$$P(S) \text{ ili } 2^S.$$

Na primjer,

ako je

$$S = \{ a, b \},$$

tada je

$$P(S) = \{ \varnothing, \{ a \}, \{ b \}, \{ a, b \} \} \quad , \quad 2^S = \{ \varnothing, \{ a \}, \{ b \}, S \}.$$

Zato vrijedi:

$$A = \{ \varnothing, 1, a \} \Rightarrow P(A) = \{ \varnothing, \{ \varnothing \}, \{ 1 \}, \{ a \}, \{ \varnothing, 1 \}, \{ \varnothing, a \}, \{ 1, a \}, \{ \varnothing, 1, a \} \}.$$

Vježba 014

Napišite partitivni skup skupa $A = \{ \varnothing, b \}$.

Rezultat: $P(A) = \{ \varnothing, \{ \varnothing \}, \{ b \}, \{ \varnothing, b \} \}$.

Zadatak 015 (Tessa, pedagoški fakultet)

Neka je $A = \{ 2, 3, 4 \}$ i $B = \{ 2, 3 \}$. Nađite $A \times B$.

Rješenje 015

Ponovimo!

Jedan od vrlo važnih matematičkih pojmova je pojam skupa ili množine (cjeline). Ubrajamo ga među osnovne pojmove pa se, kao takav, ne može definirati. Dakle, skup je pojam koji se ne definira, a zadaje se svojim elementima.

Par realnih brojeva a i b je uređen, ako je određeno koji je od tih brojeva prvi, a koji drugi i označava se (a, b).

Neka su zadani skupovi A i B. Kartezijev ili direktni produkt skupova A i B definira se:

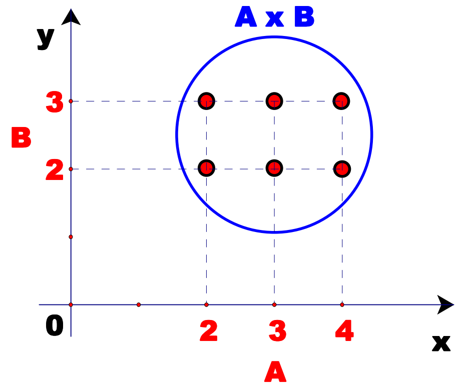
$$A \times B = \{ (a, b) : a \in A \text{ i } b \in B \}.$$

Prema definiciji Kartezijevog produkta dobije se:

$$\left. \begin{array}{l} A = \{ 2, 3, 4 \} \\ B = \{ 2, 3 \} \end{array} \right\} \Rightarrow A \times B = \{ (2, 2), (2, 3), (3, 2), (3, 3), (4, 2), (4, 3) \}.$$

Uočimo da u skupu uređenih parova $A \times B$ na prvom mjestu mora biti element iz prvog skupa (skupa A), a na drugom mjestu element iz drugog skupa (skupa B). Skup A ima 3 elementa, a skup B ima 2 elementa. Skup $A \times B$ ima 3 · 2 = 6 elemenata (uređenih parova).

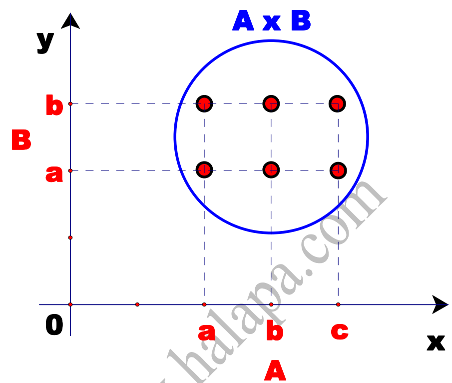
Općenito, ako skupa A ima m elemenata, a skup B n elemenata tada skup $A \times B$ ima m · n elemenata (uređenih parova).



Vježba 015

Neka je $A = \{a, b, c\}$ i $B = \{a, b\}$. Nađite $A \times B$.

Rezultat: $A \times B = \{(a, a), (a, b), (b, a), (b, b), (c, a), (c, b)\}$.



Zadatak 016 (Tessa, pedagoški fakultet)

Neka je:

$a)$ $A = [a, b]$ i $B = [c, d]$, $a < b$ i $c < d$

$b)$ $A = \langle a, b \rangle$ i $B = \langle c, d \rangle$, $a < b$ i $c < d$

$c)$ $A = \{a\}$ i $B = [c, d]$, $c < d$

$d)$ $A = [a, b]$ i $B = \{c\}$, $a < b.$

Prikažite $A \times B$ u Kartezijevom koordinatnom sustavu.

Rješenje 016

Ponovimo!

Jedan od vrlo važnih matematičkih pojmova je pojam skupa ili množine (cjeline). Ubrajamo ga među osnovne pojmove pa se, kao takav, ne može definirati. Dakle, skup je pojam koji se ne definira, a zadaje se svojim elementima.

Par realnih brojeva a i b je uređen, ako je određeno koji je od tih brojeva prvi, a koji drugi i označava se (a, b).

Neka su zadani skupovi A i B. Kartezijev ili direktni produkt skupova A i B definira se:

$$A \times B = \{(a, b) : a \in A \text{ i } b \in B\}.$$

Neka su a i b realni brojevi i a < b. Skup svih realnih brojeva koji su manji ili jednaki b, a veći ili jednaki a nazivamo zatvorenim intervalom ili segmentom i označavamo $[a, b]$.

$$[a, b] = \{x \in R : a \le x \le b\}.$$

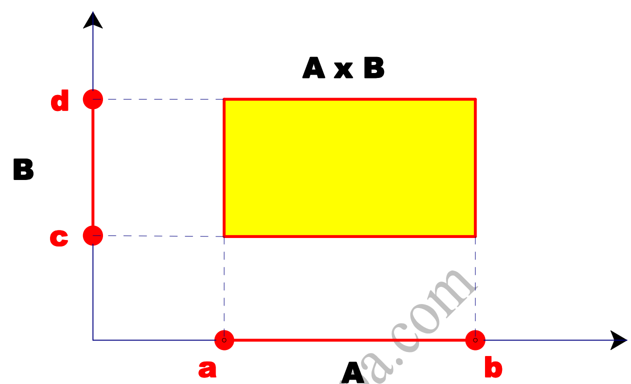
Neka su a i b realni brojevi i a < b. Skup svih realnih brojeva manjih od b, a većih od a nazivamo otvorenim intervalom i označavamo $\langle a, b \rangle$.

$$\langle a, b \rangle = \{ x \in R : a < x < b \}.$$

Prema definiciji Kartezijevog produkta dobije se:

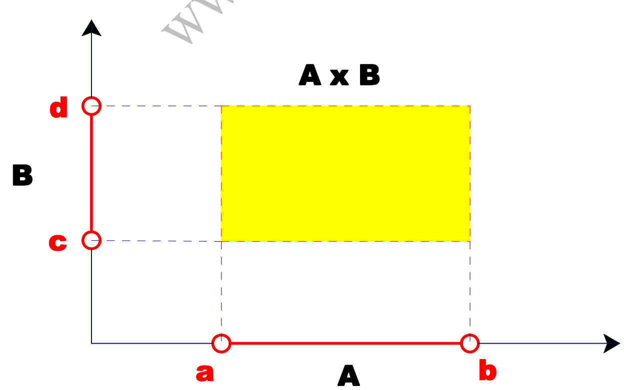
a)

$$\left.\begin{array}{l} A = [\, a, b \,] \\ B = [\, c, d \,] \end{array}\right\} \Rightarrow A \times B = [\, a, b \,] \times [\, c, d \,] \Rightarrow A \times B = \{ (x, y) : x \in [\, a, b \,] \text{ i } y \in [\, c, d \,] \}.$$



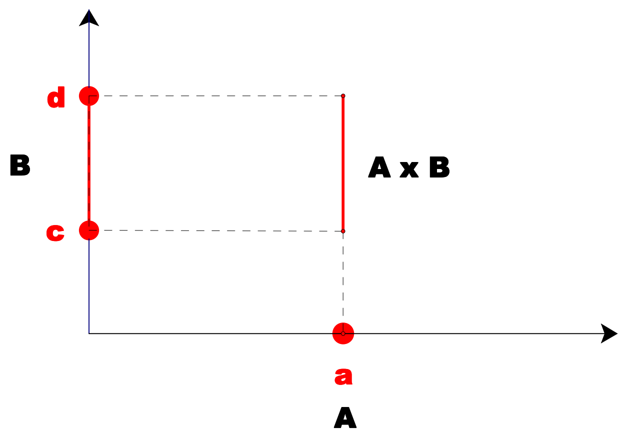
b)

$$\left.\begin{array}{l} A = \langle a, b \rangle \\ B = \langle c, d \rangle \end{array}\right\} \Rightarrow A \times B = \langle a, b \rangle \times \langle c, d \rangle \Rightarrow A \times B = \{ (x, y) : x \in \langle a, b \rangle \text{ i } y \in \langle c, d \rangle \}.$$



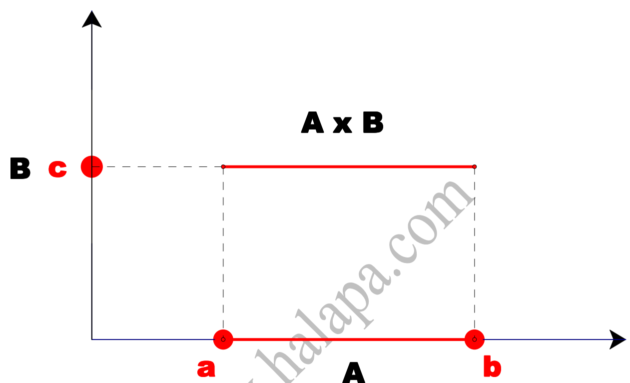
c)

$$\left.\begin{array}{l} A = \{ a \} \\ B = [\, c, d \,] \end{array}\right\} \Rightarrow A \times B = \{ a \} \times [\, c, d \,] \Rightarrow A \times B = \{ (x, y) : x \in \{ a \} \text{ i } y \in [\, c, d \,] \}.$$



d)

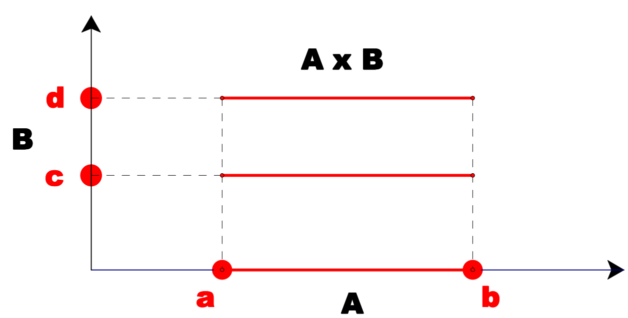
$$\left.\begin{matrix} A=\left[\, a,\ b \,\right] \\ B=\left\{\, c \,\right\} \end{matrix}\right\} \Rightarrow\ A\times B=\left[\, a,\ b \,\right]\times\left\{\, c \,\right\}\ \Rightarrow\ A\times B=\left\{\left(x,\ y\right):x\in\left[\, a,\ b \,\right]\text{ i }\ y\in\left\{\, c \,\right\}\right\}.$$



Vježba 016

Neka je $A=\left[\, a,\ b \,\right]$ i $B=\left\{\, c,\ d \,\right\}$, $a<b$ i $c<d$. Prikažite $A\times B$ u Kartezijevom koordinatnom sustavu.

Rezultat:



Zadatak 017 (Ivan, Katarina, Antiša, ekonomska škola)

Zadani su skupovi $A=\left\{-1,\ -2\right\}$ i $B=\left\{1,\ 2,\ 3\right\}$. Nađite Kartezijev produkt $A\times B$ i $B\times A$. Jesu li ti skupovi jednaki? Prikažite ih u Kartezijevom koordinatnom sustavu. Odredite kardinalni broj skupa $A,\ B,\ A\times B$ i $B\times A$.

Rješenje 017

Ponovimo!

Jedan od vrlo važnih matematičkih pojmova je pojam skupa ili množine (cjeline). Ubrajamo ga među osnovne pojmove pa se, kao takav, ne može definirati. Dakle, skup je pojam koji se ne definira, a zadaje se svojim elementima.

Broj članova (elemenata) skupa A zove se kardinalni broj skupa A i označava $|A|$.
Par realnih brojeva a i b je uređen, ako je određeno koji je od tih brojeva prvi, a koji drugi i označava se (a, b).
Neka su zadani skupovi A i B. Kartezijev ili direktni produkt skupova A i B definira se:

$$A \times B = \{ (a, b) : a \in A \text{ i } b \in B \}.$$

Uočimo da u skupu uređenih parova $A \times B$ na prvom mjestu mora biti element iz prvog skupa (skupa A), a na drugom mjestu element iz drugog skupa (skupa B).
Za Kartezijev produkt skupova ne vrijedi zakon komutacije.

$$A \times B \neq B \times A.$$

Prema definiciji Kartezijevog produkta dobije se:

$$\left. \begin{array}{l} A = \{ -1, -2 \} \\ B = \{ 1, 2, 3 \} \end{array} \right\} \Rightarrow \left. \begin{array}{l} A \times B = \{ (-1, 1), (-1, 2), (-1, 3), (-2, 1), (-2, 2), (-2, 3) \} \\ B \times A = \{ (1, -1), (1, -2), (2, -1), (2, -2), (3, -1), (3, -2) \} \end{array} \right\}.$$

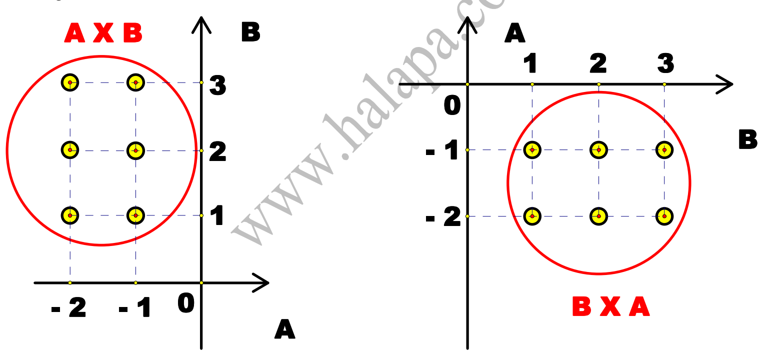
Ti skupovi nisu jednaki jer ne vrijedi zakon komutacije:

$$A \times B \neq B \times A.$$

Kardinalni broj skupa:

- $A = \{ -1, -2 \}$ je $|A| = 2$
- $B = \{ 1, 2, 3 \}$ je $|B| = 3$
- $A \times B = \{ (-1, 1), (-1, 2), (-1, 3), (-2, 1), (-2, 2), (-2, 3) \}$ je $|A \times B| = 6$
- $B \times A = \{ (1, -1), (1, -2), (2, -1), (2, -2), (3, -1), (3, -2) \}$ je $|B \times A| = 6.$

Prikaz skupova u Kartezijevom koordinatnom sustavu.



Vježba 017

Zadani su skupovi $A = \{ 1, 2 \}$ i $B = \{ 1, 2, 3 \}$. Nađite Kartezijev produkt $A \times B$ i $B \times A$.

Rezultat:
$$\left. \begin{array}{l} A \times B = \{ (1, 1), (1, 2), (1, 3), (2, 1), (2, 2), (2, 3) \} \\ B \times A = \{ (1, 1), (1, 2), (2, 1), (2, 2), (3, 1), (3, 2) \} \end{array} \right\}.$$

Zadatak 018 (Ivan, Katarina, Antiša, ekonomska škola)

Za skupove $A = \{ x : x = 2 \cdot n , n \in N , n \leq 3 \}$ i $B = \{ x : x \in Z , |x| < 3 \}$ odredite $B \setminus A$ i $P(A)$.

Rješenje 018

Ponovimo!
Jedan od vrlo važnih matematičkih pojmova je pojam skupa ili množine (cjeline). Ubrajamo ga među osnovne pojmove pa se, kao takav, ne može definirati. Dakle, skup je pojam koji se ne definira, a zadaje se svojim elementima.
Skup prirodnih brojeva označavamo slovom N, a zapisujemo:

$$N = \{ 1, 2, 3, 4, 5, \ldots , n, n+1, \ldots \}.$$

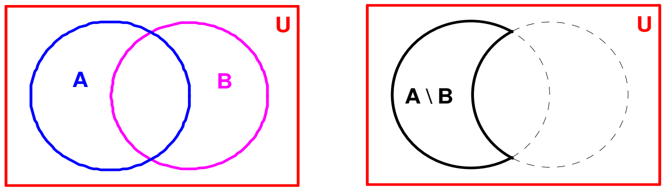
Skup cijelih brojeva označavamo slovom Z, a zapisujemo:

$$Z = \{ \ldots , -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, \ldots \}.$$

Razlika skupova A i B

$A \setminus B$ razlika skupova A i B,

$$\mathrm{A} \setminus \mathrm{B} = \left\{ x \in U : x \in A \ i \ x \notin B \right\}$$ razlika skupova A i B,



Razlika dva skupa A i B je skup koji sadrži sve elemente skupa A koji ne pripadaju skupu B.

Partitivni skup

Neka je S proizvoljni skup. Skup svih podskupova skupa S nazivamo partitivni skup skupa S. Ako je skup S konačan i ima n elemenata tada njegov partitivni skup P(S) ima 2^n elemenata.

Partitivni skup skupa S obično se simbolično piše na dva načina:

$$P(S) \text{ ili } 2^S.$$

Na primjer, ako je

$$S = \{ a, b \},$$

tada je

$$P(S) = \{ \varnothing, \{ a \}, \{ b \}, \{ a, b \} \} \quad , \quad 2^S = \{ \varnothing, \{ a \}, \{ b \}, S \}.$$

Za realni broj x njegova je apsolutna vrijednost (modul) broj $|x|$ koji određujemo na ovaj način:

$$|x| = \begin{cases} x, & x \ge 0 \\ -x, & x < 0. \end{cases}$$

Ako je broj x pozitivan ili nula, tada je on jednak svojoj apsolutnoj vrijednosti. Za svaki x, $x \ge 0$, vrijedi $|x| = x$.

Ako je x negativan broj, njegova apsolutna vrijednost je suprotan broj – x koji je pozitivan. Za svaki x, $x < 0$, je $|x| = -x$.

Odredimo elemente skupova A i B.

$$A = \{ x : x = 2 \cdot n \ , n \in N \ , n \le 3 \} \Rightarrow \begin{bmatrix} n \in N \ , \ n \le 3 \text{ slijedi } n = 1, 2, 3 \\ x = 2 \cdot n \\ n = 1 \Rightarrow x = 2 \cdot 1 \Rightarrow x = 2 \\ n = 2 \Rightarrow x = 2 \cdot 2 \Rightarrow x = 4 \\ n = 3 \Rightarrow x = 2 \cdot 3 \Rightarrow x = 6 \end{bmatrix} \Rightarrow A = \{ 2, 4, 6 \}.$$

$$B = \{ x : x \in Z \ , |x| < 3 \} \Rightarrow \begin{bmatrix} x \in Z \ , \ |x| < 3 \\ \text{slijedi} \\ x = -2, -1, 0, 1, 2 \end{bmatrix} \Rightarrow B = \{ -2, -1, 0, 1, 2 \}.$$

Računamo:

$$B \setminus A = \{ -2, -1, 0, 1, 2 \} \setminus \{ 2, 4, 6 \} = \{ -2, -1, 0, 1 \}.$$

$$A = \{ 2, 4, 6 \} \Rightarrow P(A) = \{ \varnothing, \{ 2 \}, \{ 4 \}, \{ 6 \}, \{ 2, 4 \}, \{ 2, 6 \}, \{ 4, 6 \}, \{ 2, 4, 6 \} \}.$$

Vježba 018

Za skupove $A = \{ x : x = 2 \cdot n \ , n \in N \ , n \le 3 \}$ i $B = \{ x : x \in Z \ , |x| \le 3 \}$ odredite $B \setminus A$.

Rezultat: $B \setminus A = \{ -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3 \} \setminus \{ 2, 4, 6 \} = \{ -3, -2, -1, 0, 1, 3 \}.$

Zadatak 019 (Tony, srednja škola)

Za skupove $A = \{ x : x \in Z \,, |x| \le 3 \}$ i $B = \{ x : x \in N \,, x < 3 \}$ odredite $A \cap B$.

Rješenje 019

Ponovimo!

Jedan od vrlo važnih matematičkih pojmova je pojam skupa ili množine (cjeline). Ubrajamo ga među osnovne pojmove pa se, kao takav, ne može definirati. Dakle, skup je pojam koji se ne definira, a zadaje se svojim elementima.

Skup prirodnih brojeva označavamo slovom N, a zapisujemo:

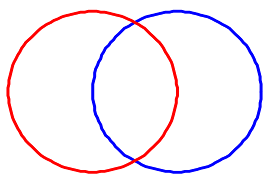
$$N = \{ 1, 2, 3, 4, 5, \dots, n, n+1, \dots \}.$$

Skup cijelih brojeva označavamo slovom Z, a zapisujemo:

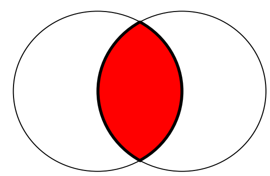
$$Z = \{ \dots, -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, \dots \}.$$

$A \cap B$ presjek skupova A i B,

$\mathrm{A} \cap \mathrm{B} = \{ x \in U : x \in A \ i \ x \in B \}$ presjek skupova A i B,



A B



A ∩ B

Presjek dva ili više skupa je skup koji se sastoji od **zajedničkih elemenata** zadanih skupova.

Za realni broj x njegova je apsolutna vrijednost (modul) broj $|x|$ koji određujemo na ovaj način:

$$|x| = \begin{cases} x, & x \ge 0 \\ -x, & x < 0. \end{cases}$$

Ako je broj x pozitivan ili nula, tada je on jednak svojoj apsolutnoj vrijednosti. Za svaki x, $x \ge 0$, vrijedi $|x| = x$.

Ako je x negativan broj, njegova apsolutna vrijednost je suprotan broj – x koji je pozitivan. Za svaki x, $x < 0$, je $|x| = -x$.

Odredimo elemente skupova A i B.

$$A = \{ x : x \in Z \,, |x| \le 3 \} \Rightarrow \begin{bmatrix} x \in Z \,, |x| \le 3 \\ \text{slijedi} \\ x = -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3 \end{bmatrix} \Rightarrow A = \{ -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3 \}.$$

$$B = \{ x : x \in N \,, x < 3 \} \Rightarrow \begin{bmatrix} x \in N \,, x < 3 \\ \text{slijedi} \\ x = 1, 2 \end{bmatrix} \Rightarrow B = \{ 1, 2 \}.$$

Računamo presjek skupova A i B.

$$A \cap B = \{ -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3 \} \cap \{ 1, 2 \} = \{ 1, 2 \}.$$

Vježba 019

Za skupove $A = \{ x : x \in Z \,, |x| \le 4 \}$ i $B = \{ x : x \in N \,, x < 4 \}$ odredite $A \cap B$.

Rezultat: $A \cap B = \{ 1, 2, 3 \}$.

Zadatak 020 (Mona, pedagoški fakultet)

Autoškola nudi mogućnost polaganja ispita za osobni automobil, kamion i autobus. Ove godine bilo je 10 polaznika koji su polagali ispit za sve tri kategorije. Za automobil i kamion, ali ne i za autobus polagalo je 20 osoba, 40 osoba za kamion i autobus, 50 za automobil i autobus. Kategoriju za automobil polagalo je 350, 200 osoba polagalo je samo za kamion i 150 samo za autobus. Koliko polaznika je polagalo ispit za pojedinu kategoriju?

Rješenje 020

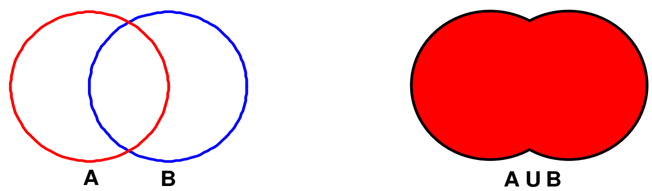
Ponovimo!

Jedan od vrlo važnih matematičkih pojmova je pojam skupa ili množine (cjeline). Ubrajamo ga među osnovne pojmove pa se, kao takav, ne može definirati. Dakle, skup je pojam koji se ne definira, a zadaje se svojim elementima.

Neka je U univerzalni skup, te A i B proizvoljni skupovi koji su podskupovi skupa U. Tada je:

- $A \cup B$ unija skupova A i B,

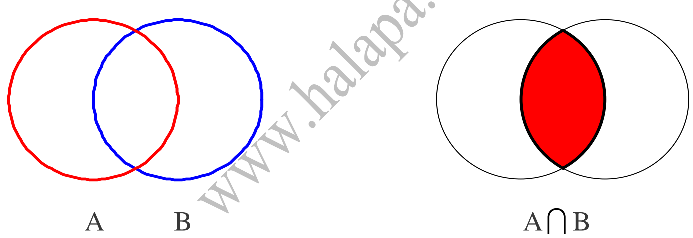
  $A \cup B = \{x \in U : x \in A \ ili \ x \in B\}$ unija skupova A i B,



Unija dva ili više skupa je skup koji se sastoji od **svih elemenata** zadanih skupova.

- $A \cap B$ presjek skupova A i B,

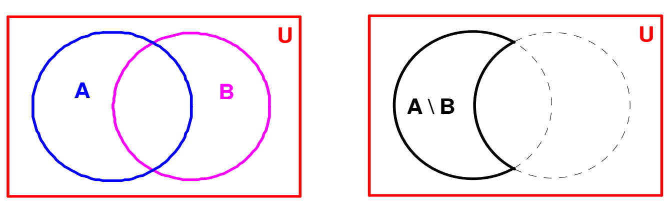
  $A \cap B = \{x \in U : x \in A \ i \ x \in B\}$ presjek skupova A i B,



Presjek dva ili više skupa je skup koji se sastoji od **zajedničkih elemenata** zadanih skupova.

- $A \setminus B$ razlika skupova A i B,

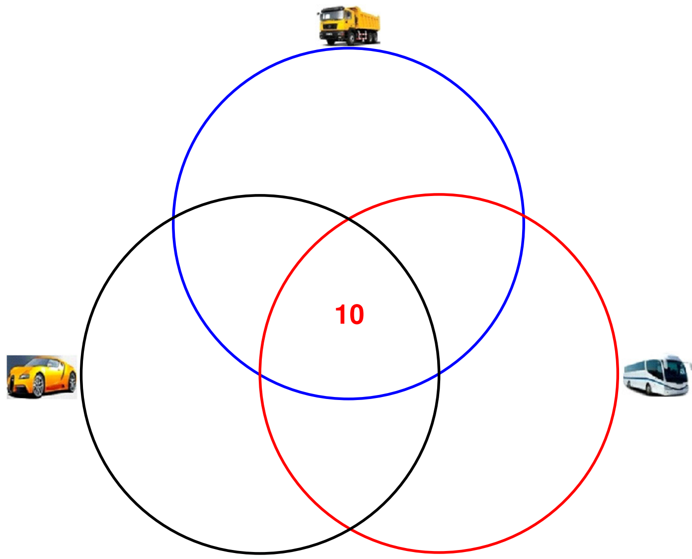
  $A \setminus B = \{x \in U : x \in A \ i \ x \notin B\}$ razlika skupova A i B,



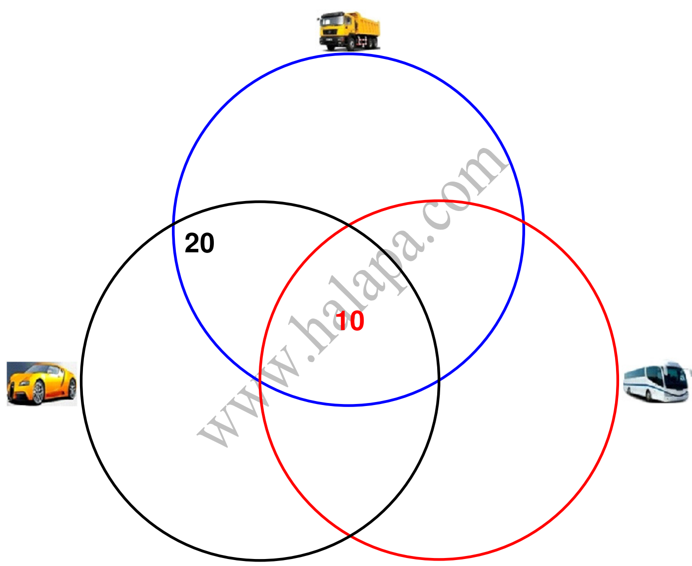
Razlika dva skupa A i B je skup koji sadrži sve elemente skupa A koji ne pripadaju skupu B.

Autoškola nudi mogućnost polaganja ispita za osobni automobil, kamion i autobus.

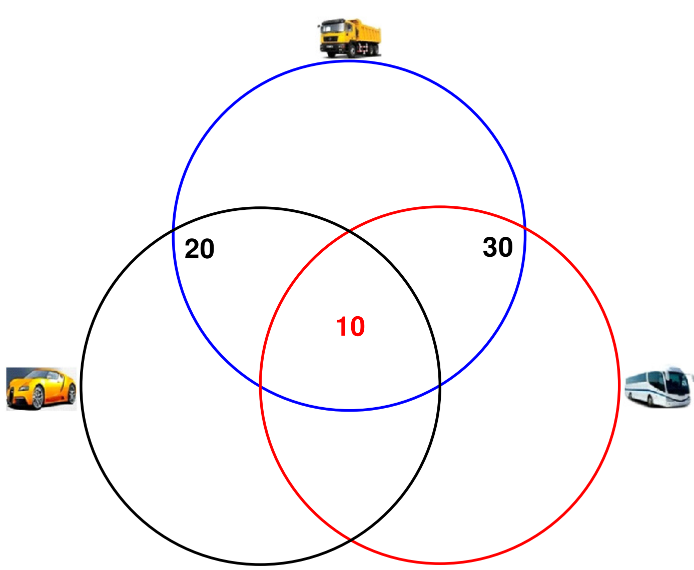




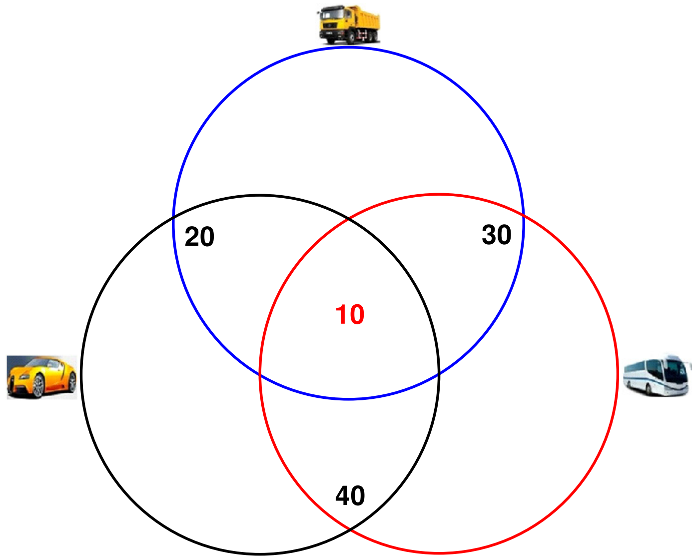
Budući da je ove godine bilo 10 polaznika koji su polagali ispit za sve tri kategorije, presjek sva tri skupa ima 10 elemenata.



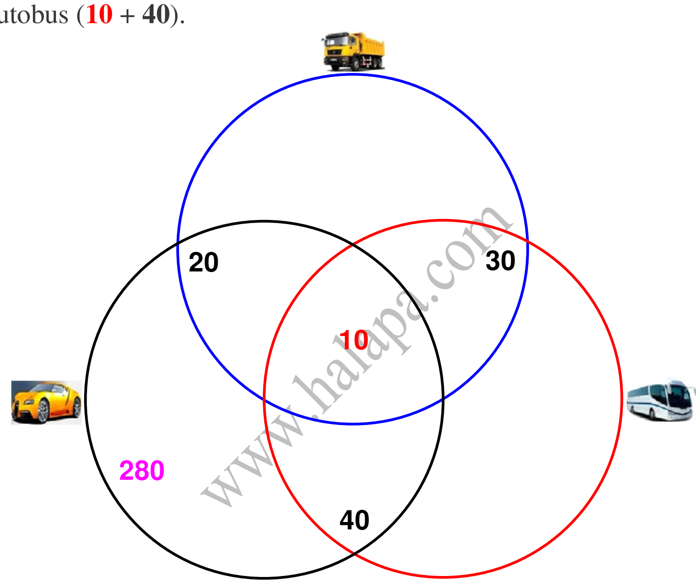
Za automobil i kamion, ali ne i za autobus polagalo je 20 osoba…



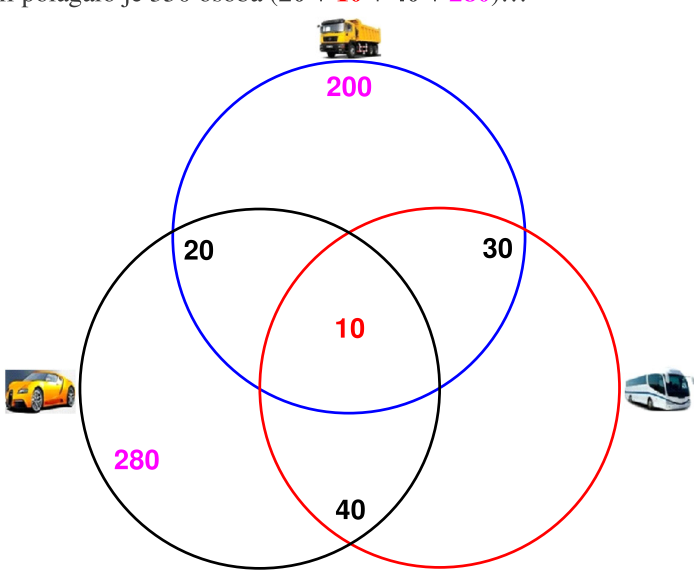
… 40 osoba za kamion i autobus (**10** + **30**)…



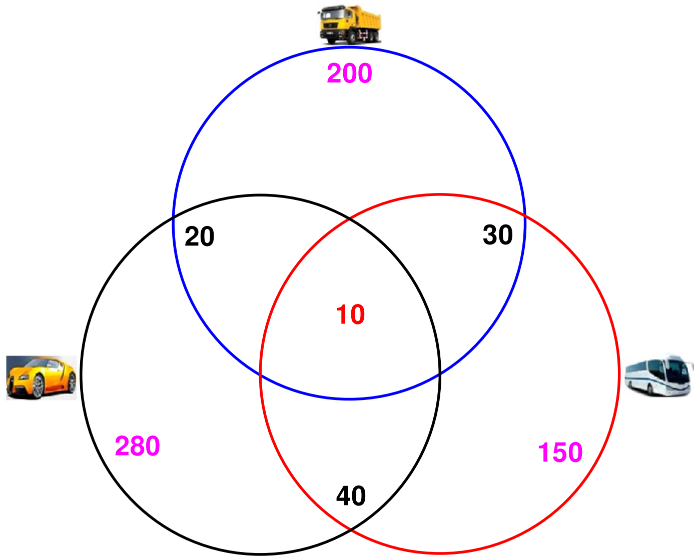
… 50 za automobil i autobus (**10** + **40**).



Kategoriju za automobil polagalo je 350 osoba (**20** + **10** + **40** + **280**)…



… 200 osoba polagalo je samo za kamion…



… i 150 samo za autobus.
Koliko polaznika je polagalo ispit za pojedinu kategoriju?
Za automobil polagalo je 350 osoba:

$$280+20+10+40=350.$$

Za kamion polagalo je 260 osoba:

$$200+20+10+30=260.$$

Za autobus polagalo je 230 osoba:

$$150+40+10+30=230.$$

Vježba 020

Autoškola nudi mogućnost polaganja ispita za osobni automobil, kamion i autobus. Ove godine bilo je 10 polaznika koji su polagali ispit za sve tri kategorije. Za automobil i kamion, ali ne i za autobus polagalo je 20 osoba, 40 osoba za kamion i autobus, 50 za automobil i autobus. Kategoriju za automobil polagalo je 350, 210 osoba polagalo je samo za kamion i 160 samo za autobus. Koliko polaznika je polagalo ispit za pojedinu kategoriju?

Rezultat: 350 za automobil, 270 za kamion, 240 za autobus.