Zadatak 021 (XY, veleučilište)

Riješite sustav linearnih jednadžbi Gaussovom metodom eliminacije: $\begin{cases} x+2\cdot y+4\cdot z=1 \\ x+3\cdot y-z=-2 \\ 2\cdot x+7\cdot y-4\cdot z=-1 \end{cases}$.

Rješenje 021

Linearni sustav od m jednadžbi s n nepoznanica zapisujemo u obliku:

$$\begin{aligned} &a_{11}\cdot x_1+a_{12}\cdot x_2+a_{13}\cdot x_3+\ \dots\ +a_{1n}\cdot x_n=b_1, \\ &a_{21}\cdot x_1+a_{22}\cdot x_2+a_{23}\cdot x_3+\ \dots\ +a_{2n}\cdot x_n=b_2, \\ &\dots \\ &a_{m1}\cdot x_1+a_{m2}\cdot x_2+a_{m3}\cdot x_3+\ \dots\ +a_{mn}\cdot x_n=b_m. \end{aligned}$$

Koeficijenti a_{ij} i slobodni članovi b_i su zadani realni brojevi, a $x_1, x_2, \dots, x_n$ nepoznanice sustava. Rješenje ovog sustava je svaka n – torka $(x_1, x_2, \dots, x_n)$ koja uvrštena u zadani sustav identički zadovoljava sve jednadžbe. Linearni sustav možemo predočiti u obliku proširene matrice sustava:

$$\left[\begin{array}{ccccc|c} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \dots & a_{1n} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & \dots & a_{2n} & b_2 \\ \dots & & & & & \\ a_{m1} & a_{m2} & a_{m3} & \dots & a_{mn} & b_m \end{array}\right].$$

Pomoću elementarnih transformacija sustav se svede na ekvivalentan u kojemu matrica ima reducirani oblik. **Elementarne transformacije** nad retcima matrice su:

- zamjena dvaju redaka

  Primjer

$$\begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \sim \left(\begin{array}{l} \text{zamjenjujemo} \\ \text{prvi i treći redak} \end{array}\right) \sim \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

- množenje ili dijeljenje retka skalarom (brojem) različitim od nule

  Primjer

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 6 & 2 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix} \sim \left(\begin{array}{l} \text{drugi redak} \\ \text{dijelimo brojem } 2 \end{array}\right) \sim \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}.$$

- množenje jednog retka odabranim skalarom (brojem) i dodavanje nekom drugom retku

  Primjer

$$\begin{bmatrix} 1 & 3 & 1 \\ 2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \sim \left(\begin{array}{l} \text{prvi redak pomnožimo s} \\ -2 \text{ i dodajemo drugom} \end{array}\right) \sim \begin{bmatrix} 1 & 3 & 1 \\ -2\cdot 1+2 & -2\cdot 3+1 & -2\cdot 1+0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & 3 & 1 \\ 0 & -5 & -2 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

Primjenom elementarnih transformacija moguće je matricu svesti na **reducirani oblik** koji je jedinstven. Tu podrazumijevamo sljedeći oblik matrice:

- Prvi ne-nul (koji nije nula) element (stožer) svakog retka iznosi 1. Svi elementi u stupcu tog stožernog elementa jednaki su nuli.
- Svi retci koji sadrže samo nulelemente (ako takvih ima) nalaze se iza onih redaka koji sadrže bar jedan ne-nul element.
- Svaki naredni stožer (gledajući po retcima) nalazi se desno (u retku s većim indeksom) od prethodnog stožera: ako stožer u retku r_1 leži u stupcu s_1, a stožer u retku $r_2 > r_1$, leži u stupcu s_2, tada je $s_2 > s_1$.

Evo nekoliko primjera reduciranih formi:

$$\begin{bmatrix}1&0&3\\0&1&2\\0&0&0\end{bmatrix},\quad \begin{bmatrix}1&2&0&1\\0&0&1&2\\0&0&0&0\end{bmatrix},\quad \begin{bmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&1\end{bmatrix},\quad \begin{bmatrix}0&1&0&5&0\\0&0&1&4&0\\0&0&0&0&1\\0&0&0&0&0\end{bmatrix}.$$

Transformacije se primjenjuju na proširenoj matrici sustava. Rješenje sustava postojat će ako matrica i proširena matrica sustava imaju isti rang. **Rang matrice je broj ne-nul redaka u reduciranom obliku matrice.**
Najprije napišemo proširenu matricu sustava i pomoću elementarnih transformacija svedemo na reducirani oblik:

$$\left[\begin{array}{ccc|c}1&2&4&1\\1&3&-1&-2\\2&7&-4&-1\end{array}\right] \sim \left[\begin{array}{ccc|c}1&2&4&1\\0&1&-5&-3\\0&3&-12&-3\end{array}\right] \sim$$

$$\left[\begin{array}{ccc|c}1&2&4&1\\0&1&-5&-3\\0&0&3&6\end{array}\right] \begin{array}{c}\\ \\ |:3\end{array} \sim \left[\begin{array}{ccc|c}1&2&4&1\\0&1&-5&-3\\0&0&1&2\end{array}\right] \sim$$

$$\left[\begin{array}{ccc|c}1&2&0&-7\\0&1&0&7\\0&0&1&2\end{array}\right] \sim \left[\begin{array}{ccc|c}1&0&0&-21\\0&1&0&7\\0&0&1&2\end{array}\right]$$

$$\begin{bmatrix}x\\y\\z\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}-21\\7\\2\end{bmatrix}$$

HVALA!
Kolega Tibor Pejić, profesor matematike i informatike, riješio je zadatak, napisao ga u LaTeXu i dopustio da ga objavim na svojim stranicama.

Vježba 021

Riješite sustav linearnih jednadžbi Gaussovom metodom eliminacije: $\begin{cases}4\cdot x-y+z=5\\2\cdot x+3\cdot y-z=5.\\x+y+2\cdot z=9\end{cases}$

Rezultat: $x=1,\ y=2,\ z=3.$