Zadatak 021 (XY, veleučilište)

Riješite sustav linearnih jednadžbi Gaussovom metodom eliminacije: $\begin{cases} x+2\cdot y+4\cdot z=1 \\ x+3\cdot y-z=-2 \\ 2\cdot x+7\cdot y-4\cdot z=-1 \end{cases}$.

Rješenje 021

Linearni sustav od m jednadžbi s n nepoznanica zapisujemo u obliku:

$$\begin{aligned} &a_{11}\cdot x_1+a_{12}\cdot x_2+a_{13}\cdot x_3+\ \dots\ +a_{1n}\cdot x_n=b_1, \\ &a_{21}\cdot x_1+a_{22}\cdot x_2+a_{23}\cdot x_3+\ \dots\ +a_{2n}\cdot x_n=b_2, \\ &\dots \\ &a_{m1}\cdot x_1+a_{m2}\cdot x_2+a_{m3}\cdot x_3+\ \dots\ +a_{mn}\cdot x_n=b_m. \end{aligned}$$

Koeficijenti a_{ij} i slobodni članovi b_i su zadani realni brojevi, a $x_1, x_2, \dots, x_n$ nepoznanice sustava. Rješenje ovog sustava je svaka n – torka $(x_1, x_2, \dots, x_n)$ koja uvrštena u zadani sustav identički zadovoljava sve jednadžbe. Linearni sustav možemo predočiti u obliku proširene matrice sustava:

$$\left[\begin{array}{ccccc|c} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \dots & a_{1n} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & \dots & a_{2n} & b_2 \\ \dots & & & & & \\ a_{m1} & a_{m2} & a_{m3} & \dots & a_{mn} & b_m \end{array}\right].$$

Pomoću elementarnih transformacija sustav se svede na ekvivalentan u kojemu matrica ima reducirani oblik. **Elementarne transformacije** nad retcima matrice su:

- zamjena dvaju redaka

  Primjer

$$\begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \sim \left(\begin{matrix} \text{zamjenjujemo} \\ \text{prvi i treći redak} \end{matrix}\right) \sim \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

- množenje ili dijeljenje retka skalarom (brojem) različitim od nule

  Primjer

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 6 & 2 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix} \sim \left(\begin{matrix} \text{drugi redak} \\ \text{dijelimo brojem } 2 \end{matrix}\right) \sim \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}.$$

- množenje jednog retka odabranim skalarom (brojem) i dodavanje nekom drugom retku

  Primjer

$$\begin{bmatrix} 1 & 3 & 1 \\ 2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \sim \left(\begin{matrix} \text{prvi redak pomnožimo s} \\ -2 \text{ i dodajemo drugom} \end{matrix}\right) \sim \begin{bmatrix} 1 & 3 & 1 \\ -2\cdot 1+2 & -2\cdot 3+1 & -2\cdot 1+0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & 3 & 1 \\ 0 & -5 & -2 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

Primjenom elementarnih transformacija moguće je matricu svesti na **reducirani oblik** koji je jedinstven. Tu podrazumijevamo sljedeći oblik matrice:

- Prvi ne-nul (koji nije nula) element (stožer) svakog retka iznosi 1. Svi elementi u stupcu tog stožernog elementa jednaki su nuli.
- Svi retci koji sadrže samo nulelemente (ako takvih ima) nalaze se iza onih redaka koji sadrže bar jedan ne-nul element.
- Svaki naredni stožer (gledajući po retcima) nalazi se desno (u retku s većim indeksom) od prethodnog stožera: ako stožer u retku r_1 leži u stupcu s_1, a stožer u retku $r_2 > r_1$, leži u stupcu s_2, tada je $s_2 > s_1$.

Evo nekoliko primjera reduciranih formi:

$$\begin{bmatrix}1 & 0 & 3\\ 0 & 1 & 2\\ 0 & 0 & 0\end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix}1 & 2 & 0 & 1\\ 0 & 0 & 1 & 2\\ 0 & 0 & 0 & 0\end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix}1 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 1\end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix}0 & 1 & 0 & 5 & 0\\ 0 & 0 & 1 & 4 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1\\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0\end{bmatrix}.$$

Transformacije se primjenjuju na proširenoj matrici sustava. Rješenje sustava postojat će ako matrica i proširena matrica sustava imaju isti rang. Rang matrice je broj ne-nul redaka u reduciranom obliku matrice. Najprije napišemo proširenu matricu sustava i pomoću elementarnih transformacija svedemo na reducirani oblik:

$$\left[\begin{array}{ccc|c}1 & 2 & 4 & 1\\ 1 & 3 & -1 & -2\\ 2 & 7 & -4 & -1\end{array}\right] \begin{array}{l}\cdot(-1)\ \cdot(-2)\\ +\\ +\end{array} \sim \left[\begin{array}{ccc|c}1 & 2 & 4 & 1\\ 0 & 1 & -5 & -3\\ 0 & 3 & -12 & -3\end{array}\right] \begin{array}{l}\\ \cdot(-3)\\ +\end{array} \sim$$

$$\left[\begin{array}{ccc|c}1 & 2 & 4 & 1\\ 0 & 1 & -5 & -3\\ 0 & 0 & 3 & 6\end{array}\right] \begin{array}{l}\\ \\ \mid :3\end{array} \sim \left[\begin{array}{ccc|c}1 & 2 & 4 & 1\\ 0 & 1 & -5 & -3\\ 0 & 0 & 1 & 2\end{array}\right] \begin{array}{l}+\\ +\\ \cdot 5\ \ (-4)\end{array} \sim$$

$$\left[\begin{array}{ccc|c}1 & 2 & 0 & -7\\ 0 & 1 & 0 & 7\\ 0 & 0 & 1 & 2\end{array}\right] \begin{array}{l}+\\ (-2)\\ \end{array} \sim \left[\begin{array}{ccc|c}1 & 0 & 0 & -21\\ 0 & 1 & 0 & 7\\ 0 & 0 & 1 & 2\end{array}\right]$$

$$\begin{bmatrix}x\\ y\\ z\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}-21\\ 7\\ 2\end{bmatrix}$$

HVALA!

Kolega Tibor Pejić, profesor matematike i informatike, riješio je zadatak, napisao ga u LaTeXu i dopustio da ga objavim na svojim stranicama.

Vježba 021

Riješite sustav linearnih jednadžbi Gaussovom metodom eliminacije: $\begin{cases} 4\cdot x - y + z = 5\\ 2\cdot x + 3\cdot y - z = 5.\\ x + y + 2\cdot z = 9\end{cases}$

Rezultat: $x = 1,\ y = 2,\ z = 3.$

Zadatak 022 (Jelena, studentica)

Riješi sustav jednadžba Cramerovom metodom:

$$\left.\begin{array}{l} x \qquad\quad - z = -3\\ x + 2\cdot y + a\cdot z = 1\\ 2\cdot x + a\cdot y - z = -2\end{array}\right\} \ (a \in R).$$

Rješenje 022

Ponovimo!

$$a^1 = a \quad , \quad a^n \cdot a^m = a^{n+m} \quad , \quad a^2 - b^2 = (a-b)\cdot(a+b).$$

Zakon distribucije množenja prema zbrajanju.

$$a\cdot(b+c) = a\cdot b + a\cdot c \quad , \quad a\cdot b + a\cdot c = a\cdot(b+c).$$

Sustav od tri linearne jednadžbe s tri nepoznanice, obično se nepoznanice označavaju s x, y i z, (ali može x_1, x_2, x_3) elegantno se rješava pomoću Cramerova pravila. Neka sustav ima oblik

$$\left.\begin{array}{l} a_{11}\cdot x+a_{12}\cdot y+a_{13}\cdot z=b_1 \\ a_{21}\cdot x+a_{22}\cdot y+a_{23}\cdot z=b_2 \\ a_{31}\cdot x+a_{32}\cdot y+a_{33}\cdot z=b_3 \end{array}\right\}. \qquad (1)$$

Najprije napišemo determinantu sustava (nju čine koeficijenti uz nepoznanice x, y i z):

$$D=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}.$$

Sada računamo tri determinante trećeg reda:

$$D_x=\begin{vmatrix} b_1 & a_{12} & a_{13} \\ b_2 & a_{22} & a_{23} \\ b_3 & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}=\begin{vmatrix} b_1 & a_{12} & a_{13} \\ b_2 & a_{22} & a_{23} \\ b_3 & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}.$$

- D_x je determinanta dobivena iz determinante D tako da se prvi stupac a_{11}, a_{21}, a_{31} zamijeni stupcem b_1, b_2, b_3.

$$D_y=\begin{vmatrix} a_{11} & b_1 & a_{13} \\ a_{21} & b_2 & a_{23} \\ a_{31} & b_3 & a_{33} \end{vmatrix}=\begin{vmatrix} a_{11} & b_1 & a_{13} \\ a_{21} & b_2 & a_{23} \\ a_{31} & b_3 & a_{33} \end{vmatrix}.$$

- D_y je determinanta dobivena iz determinante D tako da se drugi stupac a_{12}, a_{22}, a_{32} zamijeni stupcem b_1, b_2, b_3.

$$D_z=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & b_2 \\ a_{31} & a_{32} & b_3 \end{vmatrix}=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & b_2 \\ a_{31} & a_{32} & b_3 \end{vmatrix}.$$

- D_z je determinanta dobivena iz determinante D tako da se treći stupac a_{13}, a_{23}, a_{33} zamijeni stupcem b_1, b_2, b_3.

Rješenje sustava (1) je dano sa

$$x=\frac{D_x}{D} \quad , \quad y=\frac{D_y}{D} \quad , \quad z=\frac{D_z}{D}. \qquad (2)$$

Formule (2) zovu se Cramerovo pravilo za rješavanje sustava.

Mogu se dogoditi sljedeća tri slučaja:

♥ ako je $D \neq 0$ sustav ima jedinstveno rješenje: $x=\frac{D_x}{D} \quad , \quad y=\frac{D_y}{D} \quad , \quad z=\frac{D_z}{D}.$

♥ ako je $D_x = D_y = D_z = 0$, imamo beskonačno mnogo rješenja.

♥ ako je barem jedan D_x, D_y, D_z različit od 0, sustav nema rješenja.

Determinanta trećeg reda ima oblik:

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}.$$

Specijalno se za računanje determinante trećeg reda rabi Sarrusovo pravilo:

♥ prva dva stupca prepišu se iza trećeg stupca

$$\left|\begin{array}{ccc|cc} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{31} & a_{32} \end{array}\right.$$

♥ množe se po tri broja koja se nalaze na istovrsnim dijagonalama, ali pri tome padajuće dijagonale nose pozitivan predznak, a rastuće negativan predznak

$$\begin{array}{|ccc|cc} + & + & + & & \\ a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{31} & a_{32} \\ - & - & - & & \end{array},$$

$$=\left(a_{11}\cdot a_{22}\cdot a_{33}+a_{12}\cdot a_{23}\cdot a_{31}+a_{13}\cdot a_{21}\cdot a_{32}\right)-\left(a_{31}\cdot a_{22}\cdot a_{13}+a_{32}\cdot a_{23}\cdot a_{11}+a_{33}\cdot a_{21}\cdot a_{12}\right).$$

Rješavamo zadani sustav. Računamo determinantu sustava D.

$$\left.\begin{array}{l} x \qquad\quad -z=-3 \\ x+2\cdot y+a\cdot z=1 \\ 2\cdot x+a\cdot y-z=-2 \end{array}\right\} \Rightarrow \left[\begin{array}{l}\text{uočimo koeficijente} \\ \text{uz nepoznanice } x,\ y \text{ i } z\end{array}\right] \Rightarrow \left.\begin{array}{l} 1\cdot x \quad 0 \quad -1\ z=-3 \\ 1\cdot x+2\cdot y+a\cdot z=1 \\ 2\cdot x+a\cdot y-1\cdot z=-2 \end{array}\right\} \Rightarrow \left[\begin{array}{l}\text{računamo} \\ \text{determinantu} \\ \text{sustava, } D\end{array}\right] \Rightarrow$$

$$\Rightarrow D=\begin{vmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 1 & 2 & a \\ 2 & a & -1 \end{vmatrix}=\left[\begin{array}{l}\text{Sarrusovo pravilo!} \\ \text{Pogledati Zadatak 012}\end{array}\right]=\begin{array}{|ccc|cc} 1 & 0 & -1 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & a & 1 & 2 \\ 2 & a & -1 & 2 & a \end{array}=$$

$$=\left(1\cdot 2\cdot(-1)+0\cdot a\cdot 2+(-1)\cdot 1\cdot a\right)-\left(2\cdot 2\cdot(-1)+a\cdot a\cdot 1+(-1)\cdot 1\cdot 0\right)=(-2-a)-\left(-4+a^2\right)=$$

$$=-2-a+4-a^2=2-a-a^2=1-a+1-a^2=(1-a)+(1-a)\cdot(1+a)=(1-a)\cdot(1+1+a)=(1-a)\cdot(2+a).$$

Sada računamo tri determinante D_x, D_y, D_z:

♥ $$D_x=\begin{vmatrix} -3 & 0 & -1 \\ 1 & 2 & a \\ -2 & a & -1 \end{vmatrix} \Rightarrow D_x=\begin{vmatrix} -3 & 0 & -1 \\ 1 & 2 & a \\ -2 & a & -1 \end{vmatrix}=\left[\begin{array}{l}\text{Sarrusovo pravilo!} \\ \text{Pogledati Zadatak 012}\end{array}\right]=\begin{array}{|ccc|cc} -3 & 0 & -1 & -3 & 0 \\ 1 & 2 & a & 1 & 2 \\ -2 & a & -1 & -2 & a \end{array}=$$

$$=\left(-3\cdot 2\cdot(-1)+0\cdot a\cdot(-2)+(-1)\cdot 1\cdot a\right)-\left((-2)\cdot 2\cdot(-1)+a\cdot a\cdot(-3)+(-1)\cdot 1\cdot 0\right)=$$

$$=(6-a)-\left(4-3\cdot a^2\right)=6-a-4+3\cdot a^2=2-a+3\cdot a^2.$$

♥ $$D_y=\begin{vmatrix} 1 & -3 & -1 \\ 1 & 1 & a \\ 2 & -2 & -1 \end{vmatrix} \Rightarrow D_y=\begin{vmatrix} 1 & -3 & -1 \\ 1 & 1 & a \\ 2 & -2 & -1 \end{vmatrix}=\left[\begin{array}{l}\text{Sarrusovo pravilo!} \\ \text{Pogledati Zadatak 012}\end{array}\right]=\begin{array}{|ccc|cc} 1 & -3 & -1 & 1 & -3 \\ 1 & 1 & a & 1 & 1 \\ 2 & -2 & -1 & 2 & -2 \end{array}=$$

$$=\left(1\cdot 1\cdot(-1)+(-3)\cdot a\cdot 2+(-1)\cdot 1\cdot(-2)\right)-\left(2\cdot 1\cdot(-1)+(-2)\cdot a\cdot 1+(-1)\cdot 1\cdot(-3)\right)=$$

$$=(-1-6\cdot a+2)-(-2-2\cdot a+3)=-1-6\cdot a+2+2+2\cdot a-3=-1-6\cdot a+2+2+2\cdot a-3=-4\cdot a.$$

♥ $$D_z=\begin{vmatrix} 1 & 0 & -3 \\ 1 & 2 & 1 \\ 2 & a & -2 \end{vmatrix} \Rightarrow D_z=\begin{vmatrix} 1 & 0 & -3 \\ 1 & 2 & 1 \\ 2 & a & -2 \end{vmatrix}=\left[\begin{array}{l}\text{Sarrusovo pravilo!} \\ \text{Pogledati Zadatak 012}\end{array}\right]=\begin{array}{|ccc|cc} 1 & 0 & -3 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 1 & 1 & 2 \\ 2 & a & -2 & 2 & a \end{array}=$$

$$=\left(1\cdot 2\cdot(-2)+0\cdot 1\cdot 2+(-3)\cdot 1\cdot a\right)-\left(2\cdot 2\cdot(-3)+a\cdot 1\cdot 1+(-2)\cdot 1\cdot 0\right)=(-4-3\cdot a)-(-12+a)=$$

$$=-4-3\cdot a+12-a=8-4\cdot a=4\cdot(2-a).$$

Uz uvjet

$$\left.\begin{array}{r} 1-a\neq 0 \\ 2+a\neq 0 \end{array}\right\} \Rightarrow \left.\begin{array}{l} a\neq 1 \\ a\neq -2 \end{array}\right\}$$

rješenja sustava glase:

- $$\left.\begin{array}{l} D=(1-a)\cdot(2+a) \\ D_x=2-a+3\cdot a^2 \end{array}\right\} \Rightarrow x=\frac{D_x}{D} \Rightarrow x=\frac{2-a+3\cdot a^2}{(1-a)\cdot(2+a)},$$
- $$\left.\begin{array}{l} D=(1-a)\cdot(2+a) \\ D_y=-4\cdot a \end{array}\right\} \Rightarrow y=\frac{D_y}{D} \Rightarrow y=\frac{-4\cdot a}{(1-a)\cdot(2+a)},$$
- $$\left.\begin{array}{l} D=(1-a)\cdot(2+a) \\ D_z=4\cdot(2-a) \end{array}\right\} \Rightarrow z=\frac{D_z}{D} \Rightarrow z=\frac{4\cdot(2-a)}{(1-a)\cdot(2+a)}.$$

Vježba 022

Riješi sustav jednadžba Cramerovom metodom:

$$\left.\begin{array}{r} x+y+z=5 \\ x+2\cdot y-z=2 \\ 2\cdot x+y+2\cdot z=9 \end{array}\right\}.$$

Rezultat: $(x,\ y,\ z)=(2,\ 1,\ 2).$