Zadatak 021 (Ivana, hotelijerska škola)

Riješi jednadžbu: $\frac{1}{x^2+2x+1}+\frac{4}{x+2x^2+x^3}=\frac{5}{2x+2x^2}.$

Rješenje 021

Koristeći se izlučivanjem i kvadratom zbroja: $a^2 + 2ab + b^2 = (a + b)^2$ najprije nazivnike rastavimo na faktore:

$$\left\{\begin{array}{l} x^2+2x+1=(x+1)^2 \\ x+2x^2+x^3=x\cdot\left(1+2x+x^2\right)=x\cdot(x+1)^2 \\ 2x+2x^2=2x\cdot(1+x)=2x\cdot(x+1) \end{array}\right\}$$

Dalje slijedi:

$$\frac{1}{x^2+2x+1}+\frac{4}{x+2x^2+x^3}=\frac{5}{2x+2x^2} \Rightarrow \frac{1}{(x+1)^2}+\frac{4}{x\cdot(x+1)^2}=\frac{5}{2x\cdot(x+1)} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \left[\text{Diskusija! } x\neq 0 \;,\; x+1\neq 1 \Rightarrow x\neq -1\right] \Rightarrow \frac{1}{(x+1)^2}+\frac{4}{x\cdot(x+1)^2}=\frac{5}{2x\cdot(x+1)} \;/\cdot 2x\cdot(x+1)^2 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 2x+8=5\cdot(x+1) \Rightarrow 2x+8=5x+5 \Rightarrow 2x-5x=5-8 \Rightarrow -3x=-3 \;/:(-3) \Rightarrow x=1.$$

Vježba 021

Riješi jednadžbu: $\frac{1}{x^2+2x+1}+\frac{4}{x+2x^2+x^3}=\frac{4}{2x+2x^2}.$

Rezultat: x = 2.

Zadatak 022 (1A, hotelijerska škola)

Za koje vrijednosti realnih parametara a i b jednadžba $\frac{x+a}{a-b}=\frac{a-x}{a+b}$ ima beskonačno mnogo rješenja?

A. $a\neq 0 \;,\; b=0$ *B.* $a=0 \;,\; b\neq 0$ *C.* $a=0 \;,\; b=0$ *D.* $a\neq 0 \;,\; b\neq 0$

Rješenje 022

Diskusija!

Budući da nazivnici ne smiju biti jednaki nuli, vrijedi:

$$\left.\begin{array}{l} a-b\neq 0 \\ a+b\neq 0 \end{array}\right\} \Rightarrow \left.\begin{array}{l} a\neq b \\ a\neq -b \end{array}\right\}.$$

Dalje slijedi:

$$\frac{x+a}{a-b}=\frac{a-x}{a+b} \Rightarrow \frac{x+a}{a-b}=\frac{a-x}{a+b} \;/\cdot(a-b)\cdot(a+b) \Rightarrow (x+a)\cdot(a+b)=(a-x)\cdot(a-b) \Rightarrow$$

$$xa+xb+a^2+ab=a^2-ab-xa+xb \Rightarrow xa+xa=-ab-ab \Rightarrow 2xa=-2ab \;/:2 \Rightarrow a\cdot x=-a\cdot b.$$

Da bi jednadžba imala beskonačno mnogo rješenja mora biti a = 0. Tada je:

$$\left.\begin{array}{l} a=0 \\ a\cdot x=-a\cdot b \end{array}\right\} \Rightarrow 0\cdot x=0 \Rightarrow x\in R.$$

Ako je $a \neq 0$ slijedi:

$$\left.\begin{array}{l} a\neq 0 \\ a\cdot x=-a\cdot b \end{array}\right\} \Rightarrow a\cdot x=-a\cdot b \;/:a \Rightarrow x=-b.$$

Odgovor je pod B.

Vježba 022

U ovisnosti o parametru a, diskutiraj rješenje jednadžbe: ax – a = 3x – 3.

Rezultat:

$(a-3)\cdot x=a-3$, ako je $a\neq 3$ slijedi $(a-3)\cdot x=a-3\ /:(a-3)\ \Rightarrow\ x=1$

$(a-3)\cdot x=a-3$, ako je $a=3$ slijedi $(3-3)\cdot x=3-3\ \Rightarrow\ 0\cdot x=0\ \Rightarrow$ svi realni brojevi su rješenje.

Zadatak 023 (Kiki, ekonomska škola)

Izračunaj x:

$$x\sqrt{2}+\sqrt{2}=4-x.$$

Rješenje 023

$$x\sqrt{2}+\sqrt{2}=4-x\ \Rightarrow\ x\sqrt{2}+x=4-\sqrt{2}\ \Rightarrow\ x\cdot\left(\sqrt{2}+1\right)=4-\sqrt{2}\ /:\left(\sqrt{2}+1\right)\ \Rightarrow$$

$$\Rightarrow\ x=\frac{4-\sqrt{2}}{\sqrt{2}+1}\cdot\frac{\sqrt{2}-1}{\sqrt{2}-1}=\frac{\left(4-\sqrt{2}\right)\cdot\left(\sqrt{2}-1\right)}{2-1}=\frac{\left(4-\sqrt{2}\right)\cdot\left(\sqrt{2}-1\right)}{1}=\left(4-\sqrt{2}\right)\cdot\left(\sqrt{2}-1\right)=$$

$$=4\sqrt{2}-4-\left(\sqrt{2}\right)^2+\sqrt{2}=4\sqrt{2}-4-2+\sqrt{2}=5\sqrt{2}-6.$$

Vježba 023

Izračunaj x:

$$x\sqrt{2}+\sqrt{2}=4+x.$$

Rezultat: $3\sqrt{2}+2.$

Zadatak 024 (Ivana, hotelijerska škola)

Riješite jednadžbu: $\frac{2\cdot(x-2)}{5}+\frac{7\cdot x+16}{20}-\frac{3\cdot x}{4}=0.$

Rješenje 024

Najmanji zajednički višekratnik nazivnika 5, 20 i 4 je broj 20. Množenjem zadane jednadžbe tim brojem te reduciranjem dobije se:

$$\frac{2\cdot(x-2)}{5}+\frac{7\cdot x+16}{20}-\frac{3\cdot x}{4}=0\ \Rightarrow\ \frac{2\cdot(x-2)}{5}+\frac{7\cdot x+16}{20}-\frac{3\cdot x}{4}=0\ /\cdot 20\ \Rightarrow$$

$$\Rightarrow\ 8\cdot(x-2)+7\cdot x+16-15\cdot x=0\ \Rightarrow\ 8\cdot x-16+7\cdot x+16-15\cdot x=0\ \Rightarrow$$

$$\Rightarrow\ 8\cdot x+7\cdot x-15\cdot x=16-16\ \Rightarrow\ 0=0\ \Rightarrow\ 0\cdot x=0.$$

Dobili smo jednadžbu iz koje vidimo da joj je rješenje svaki realni broj x pa zaključujemo da je i rješenje zadane jednadžbe svaki realni broj.

Vježba 024

Riješite jednadžbu: $\frac{2\cdot(x-2)}{5}+\frac{7\cdot x+16}{20}-\frac{x}{4}=0.$

Rezultat: x = 0.

Zadatak 025 (Ivana, hotelijerska škola)

Riješite jednadžbu: $\frac{3\cdot a\cdot x}{a^2-b^2}+2\cdot b=\frac{2\cdot b\cdot x}{a+b}+\frac{3\cdot a}{a-b}.$

Rješenje 025

U zadanoj jednadžbi nepoznanica je x, a slova a i b su takozvani parametri koji se smatraju poznatima (zamjenjuju određene realne brojeve). Razlomaka se možemo riješiti tako da jednadžbu pomnožimo najmanjim zajedničkim višekratnikom nazivnika. U navedenom primjeru to je:

$$\left.\begin{array}{l} a^2-b^2=(a-b)\cdot(a+b) \\ a+b=a+b \\ a-b=a-b \end{array}\right\}\ \Rightarrow\ nzv\left(a^2-b^2,\ a+b,\ a-b\right)=(a-b)\cdot(a+b).$$

Nakon množenja zadane jednadžbe s (a – b) · (a + b) dobije se jadnadžba:

$$\frac{3\cdot a\cdot x}{a^2-b^2}+2\cdot b=\frac{2\cdot b\cdot x}{a+b}+\frac{3\cdot a}{a-b}\ /\cdot(a-b)\cdot(a+b)\ \Rightarrow$$

$$\Rightarrow\ 3\cdot a\cdot x+2\cdot b\cdot(a-b)\cdot(a+b)=2\cdot b\cdot x\cdot(a-b)+3\cdot a\cdot(a+b).$$

Prebacivanjem članova s nepoznanicom x na lijevu stranu jednadžbe, a članova bez nepoznanice na desnu stranu jednadžbe dobije se jednadžba:

$$3\cdot a\cdot x-2\cdot b\cdot x\cdot(a-b)=3\cdot a\cdot(a+b)-2\cdot b\cdot(a-b)\cdot(a+b).$$

Na lijevoj strani dobivene jednadžbe može se izlučiti x, a na desnoj a + b:

$$x\cdot[3\cdot a-2\cdot b\cdot(a-b)]=(a+b)\cdot[3\cdot a-2\cdot b\cdot(a-b)].$$

Uz pretpostavku da je izraz 3 · a – 2 · b · (a – b) različit od nule s njime podijelimo cijelu jednadžbu:

$$\left.\begin{array}{l}3\cdot a\cdot x-2\cdot b\cdot x\cdot(a-b)=3\cdot a\cdot(a+b)-2\cdot b\cdot(a-b)\cdot(a+b)\\ 3\cdot a-2\cdot b\cdot(a-b)\neq 0\end{array}\right\}\Rightarrow$$

$$\Rightarrow\ x\cdot[3\cdot a-2\cdot b\cdot(a-b)]=(a+b)\cdot[3\cdot a-2\cdot b\cdot(a-b)]\ /:[3\cdot a-2\cdot b\cdot(a-b)]\ \Rightarrow$$

$$\Rightarrow\ x=\frac{(a+b)\cdot[3\cdot a-2\cdot b\cdot(a-b)]}{3\cdot a-2\cdot b\cdot(a-b)}\ \Rightarrow\ x=a+b.$$

Vježba 025

Riješite jednadžbu : $12\cdot a\cdot x-24\cdot a\cdot b+6\cdot b^2=3\cdot b\cdot x+8\cdot b\cdot c-4\cdot c\cdot x.$

Rezultat: $x=2\cdot b\ ,\ 12\cdot a-3\cdot b+4\cdot c\neq 0.$

Zadatak 026 (Iva, HTK, Kesten 15, HTT)

Riješi jednadžbu: $\frac{1}{x+1}+\frac{2}{x+2}=\frac{1}{x^2+3\cdot x+2}$

Rješenje 026

Nazivnik $x^2 + 3 \cdot x + 2$ rastavit ćemo na faktore. Koeficijent 3 napišemo kao zbroj dva broja kojima je umnožak jednak trećem članu, broju 2:

$$1 + 2 = 3 \quad \text{i} \quad 1 \cdot 2 = 2.$$

To su brojevi 1 i 2. Sada je

$$x^2 + 3 \cdot x + 2 = x^2 + 1 \cdot x + 2 \cdot x + 2 =$$

= [iz prva dva člana izlučimo x, a iz ostala dva izlučimo broj 2] = x · (x + 1) + 2 · (x + 1) =

= [iznovice izlučimo x + 1] = (x + 1) · (x + 2).

$$\frac{1}{x+1}+\frac{2}{x+2}=\frac{1}{(x+1)\cdot(x+2)}$$

Diskusija!

S nulom se ne može dijeliti. Zato moramo odbaciti vrijednosti nepoznanice x za koje su nazivnici jednaki nuli.

$$\left.\begin{array}{l}x+1=0\\ x+2=0\end{array}\right\}\Rightarrow\left.\begin{array}{l}x=-1\\ x=-2\end{array}\right\}.$$

Rješenja zadane jednadžbe ne mogu biti ni x = – 1, ni x = – 2:

$$x \neq -1,\ x \neq -2.$$

Ako se u jednadžbi pojavljuju razlomci prvi je korak pomnožiti je zajedničkim nazivnikom da se riješimo razlomaka:

$$\frac{1}{x+1}+\frac{2}{x+2}=\frac{1}{(x+1)\cdot(x+2)} \ / \cdot (x+1)\cdot(x+2) \Rightarrow x+2+2\cdot(x+1)=1 \Rightarrow x+2+2\cdot x+2=1 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow x+2\cdot x=1-2-2 \Rightarrow 3\cdot x=-3 \ /:3 \Rightarrow x=-1.$$

To ne može biti rješenje jednadžbe zbog prethodne diskusije, $x \neq -1$. Jednadžba nema rješenja. Skup rješenja je prazan skup, oznaka je Ø.

Vježba 026

Riješi jednadžbu: $\frac{2}{x+3}-\frac{3}{x-2}=\frac{1}{x^2+x-6}$

Rezultat: – 14.

Zadatak 027 (Vesna, srednja škola)

Uz pretpostavku $a \notin \{1, -1\}$ riješite jednadžbu: $\frac{a+\frac{x}{1-a}}{a-\frac{x}{1+a}}=\frac{1+a}{1-a}$.

Rješenje 027

1.inačica

$$\frac{a+\frac{x}{1-a}}{a-\frac{x}{1+a}}=\frac{1+a}{1-a} \Rightarrow \frac{\frac{a\cdot(1-a)+x}{1-a}}{\frac{a\cdot(1+a)-x}{1+a}}=\frac{1+a}{1-a} \Rightarrow \frac{\frac{a-a^2+x}{1-a}}{\frac{a+a^2-x}{1+a}}=\frac{1+a}{1-a} \Rightarrow \frac{(1+a)\cdot\left(a-a^2+x\right)}{(1-a)\cdot\left(a+a^2-x\right)}=\frac{1+a}{1-a} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \frac{(1+a)\cdot\left(a-a^2+x\right)}{(1-a)\cdot\left(a+a^2-x\right)}=\frac{1+a}{1-a} \ / \cdot \frac{1-a}{1+a} \Rightarrow \frac{a-a^2+x}{a+a^2-x}=1 \Rightarrow a-a^2+x=a+a^2-x \Rightarrow$$

$$\Rightarrow x+x=a+a^2-a+a^2+-x \Rightarrow 2\cdot x=2\cdot a^2 \ /:2 \Rightarrow x=a^2.$$

2.inačica

$$\frac{a+\frac{x}{1-a}}{a-\frac{x}{1+a}}=\frac{1+a}{1-a} \Rightarrow \frac{a+\frac{x}{1-a}}{a-\frac{x}{1+a}}=\frac{1+a}{1-a} \ / \cdot \frac{1-a}{1+a} \Rightarrow \frac{a+\frac{x}{1-a}}{a-\frac{x}{1+a}}\cdot\frac{1-a}{1+a}=1 \Rightarrow \frac{a\cdot(1-a)+x}{a\cdot(1+a)-x}=1 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \frac{a-a^2+x}{a+a^2-x}=1 \Rightarrow a-a^2+x=a+a^2-x \Rightarrow x+x=a+a^2-a+a^2+-x \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 2\cdot x=2\cdot a^2 \ /:2 \Rightarrow x=a^2.$$

Vježba 027

Uz pretpostavku $a \notin \{1, -1\}$ riješite jednadžbu: $\frac{a+\frac{x}{1-a}}{a+\frac{2\cdot x}{1+a}}=\frac{1+a}{1-a}$.

Rezultat: $x = -2 \cdot a^2$.

Zadatak 028 (Vesna, srednja škola)

Zbroj dvaju brojeva jednak je 30, a razlika njihovih kvadrata 120. Nađite razliku tih brojeva.

Rješenje 028

Ponovimo!

$$a^2-b^2=(a+b)\cdot(a-b).$$

$$\left.\begin{array}{l} x+y=30\ ,\ x^2-y^2=120 \\ x^2-y^2=(x+y)\cdot(x-y) \end{array}\right\} \Rightarrow x-y=\frac{x^2-y^2}{x+y} \Rightarrow x-y=\frac{120}{30} \Rightarrow x-y=4.$$

Vježba 028

Razlika dvaju brojeva jednaka je 20, a razlika njihovih kvadrata 120. Nađite zbroj tih brojeva.

Rezultat: 6.

Zadatak 029 (Ivan, gimnazija)

Riješite jednadžbu:

$$\frac{x-10}{90}+\frac{x-11}{89}+\frac{x-12}{88}=\frac{x-90}{10}+\frac{x-89}{11}+\frac{x-88}{12}.$$

Rješenje 029

Ponovimo!

$$a\cdot b=0 \ \Leftrightarrow \ a=0 \ \text{ ili } \ b=0 \ \text{ ili } \ a=b=0.$$

$$\frac{x-10}{90}+\frac{x-11}{89}+\frac{x-12}{88}=\frac{x-90}{10}+\frac{x-89}{11}+\frac{x-88}{12} \Rightarrow \left[\begin{array}{l}\text{od svakog razlomka zadane} \\ \text{jednadžbe oduzmemo 1}\end{array}\right] \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \frac{x-10}{90}-1+\frac{x-11}{89}-1+\frac{x-12}{88}-1=\frac{x-90}{10}-1+\frac{x-89}{11}-1+\frac{x-88}{12}-1 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \frac{x-10-90}{90}+\frac{x-11-89}{89}+\frac{x-12-88}{88}=\frac{x-90-10}{10}+\frac{x-89-11}{11}+\frac{x-88-12}{12} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \frac{x-100}{90}+\frac{x-100}{89}+\frac{x-100}{88}=\frac{x-100}{10}+\frac{x-100}{11}+\frac{x-100}{12} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \frac{x-100}{90}+\frac{x-100}{89}+\frac{x-100}{88}-\frac{x-100}{10}-\frac{x-100}{11}-\frac{x-100}{12}=0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow (x-100)\cdot\left(\frac{1}{90}+\frac{1}{89}+\frac{1}{88}-\frac{1}{10}-\frac{1}{11}-\frac{1}{12}\right)=0 \Rightarrow \left[\begin{array}{l}\text{druga zagrada je} \\ \text{negativan broj}\end{array}\right] \Rightarrow x-100=0 \Rightarrow x=100.$$

Vježba 029

Riješite jednadžbu:

$$\frac{x-10}{40}+\frac{x-11}{39}+\frac{x-12}{38}=\frac{x-40}{10}+\frac{x-39}{11}+\frac{x-38}{12}.$$

Rezultat: x = 50.

Zadatak 030 (Maturant, gimnazija)

Riješi linearnu diofantsku jednadžbu: $3 \cdot x + 5 \cdot y = 10$.

Rješenje 030

Ponovimo!

Neka je zadana linearna jednadžba oblika

$$a \cdot x + b \cdot y = c,\ a \neq 0,\ b \neq 0,$$

gdje su a, b, c cijeli brojevi. Jasno je da takve jednadžbe imaju beskonačno mnogo rješenja. Dovoljno je za vrijednost y uvrstiti u tu jednadžbu bilo koju konkretnu vrijednost i onda izračunati pripadni x. Ako se traže samo cjelobrojna rješenja (x, y su cijeli brojevi), onda problem nalaženja takvih rješenja zovemo diofantskim problemom ili kraće kažemo da je jednadžba diofantska.

Diofantska jednadžba

$$a \cdot x + b \cdot y = c,\ a \neq 0,\ b \neq 0,$$

gdje su a, b, c, cijeli brojevi ima cjelobrojna rješenja ako i samo ako

$$M(a, b) \mid c$$

(najveća zajednička mjera koeficijenata a i b je djelitelj broja c).

Ako su x_0, y_0 rješenja te jednadžbe (partikularna rješenja, konkretna rješenja), onda su sva rješenja oblika

$$x = x_0 + t \cdot \frac{b}{d} \quad , \quad y = y_0 - t \cdot \frac{a}{d} \ , \ t \in Z, \text{ gdje je } d = M(a, b).$$

1.inačica

Uvjerimo se da zadana linearna diofantska jednadžba ima cjelobrojna rješenja.

$$\left.\begin{array}{l} 3 \cdot x + 5 \cdot y = 10 \\ M(3, 5) = 1 \end{array}\right\} \Rightarrow 1 \mid 10.$$

Najveća zajednička mjera od 3 i 5 jednaka je 1, a 10 je djeljivo s 1. Dakle, jednadžba ima cjelobrojna rješenja. Nađimo bilo koje cjelobrojno rješenje te jednadžbe. Lako se vidi da je $x_0 = 5$, $y_0 = -1$ jedno rješenje jednadžbe:

$$\left.\begin{array}{l} 3 \cdot x + 5 \cdot y = 10 \\ x_0 = 5 \ , \ y_0 = -1 \end{array}\right\} \Rightarrow 3 \cdot 5 + 5 \cdot (-1) = 10 \Rightarrow 15 - 5 = 10 \Rightarrow 10 = 10.$$

Svako konkretno rješenje zovemo partikularno rješenje. Dakle, $x_0 = 5$, $y_0 = -1$ je partikularno rješenje zadane jednadžbe pa vrijedi

$$3 \cdot x_0 + 5 \cdot y_0 = 10.$$

Dalje računamo:

$$\left.\begin{array}{l} 3 \cdot x + 5 \cdot y = 10 \\ 3 \cdot x_0 + 5 \cdot y_0 = 10 \end{array}\right\} \Rightarrow \left[\begin{array}{c} \text{oduzmemo} \\ \text{jednadžbe} \end{array}\right] \Rightarrow 3 \cdot (x - x_0) + 5 \cdot (y - y_0) = 0.$$

Dobili smo homogenu jednadžbu čije rješenje je oblika:

$$3 \cdot (x - x_0) + 5 \cdot (y - y_0) = 0 \Rightarrow 3 \cdot (x - x_0) = -5 \cdot (y - y_0) \Rightarrow \left.\begin{array}{l} x - x_0 = 5 \cdot t \\ y - y_0 = -3 \cdot t \ , \ t \in Z \end{array}\right\}.$$

Dakle vrijedi:

$$\left.\begin{array}{l} x - x_0 = 5 \cdot t \\ y - y_0 = -3 \cdot t \ , \ t \in Z \end{array}\right\} \Rightarrow \left.\begin{array}{l} x = x_0 + 5 \cdot t \\ y = y_0 - 3 \cdot t \ , \ t \in Z \end{array}\right\}.$$

Ako se uvrste vrijednosti za $x_0 = 5$, $y_0 = -1$, dobije se:

$$\left.\begin{array}{l} x = 5 + 5 \cdot t \\ y = -1 - 3 \cdot t \ , \ t \in Z \end{array}\right\}.$$

2.inačica

Rješavajući zadanu jednadžbu po x, dobije se:

$$3 \cdot x + 5 \cdot y = 10 \Rightarrow 3 \cdot x = 10 - 5 \cdot y \ /:3 \Rightarrow x = \frac{10 - 5 \cdot y}{3} \Rightarrow x = \frac{9 - 3 \cdot y + 1 - 2 \cdot y}{3} \Rightarrow x = \frac{9}{3} - \frac{3 \cdot y}{3} + \frac{1 - 2 \cdot y}{3} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow x = 3 - y + \frac{1 - 2 \cdot y}{3}.$$

Neka je

$$u = \frac{1 - 2 \cdot y}{3}. \qquad x = 3 - y + u.$$

Tada je

$$u = \frac{1 - 2 \cdot y}{3} \ /\cdot 3 \Rightarrow 3 \cdot u = 1 - 2 \cdot y \Rightarrow 2 \cdot y = 1 - 3 \cdot u \ /:2 \Rightarrow y = \frac{1 - 3 \cdot u}{2} \Rightarrow y = \frac{-2 \cdot u + 1 - u}{2} \Rightarrow$$

$$y = \frac{-2 \cdot u}{2} + \frac{1 - u}{2} \Rightarrow y = -u + \frac{1 - u}{2}.$$

Na kraju, neka je

$$t = \frac{1 - u}{2}. \qquad y = -u + t.$$

Tada je

$$t = \frac{1 - u}{2} \ /\cdot 2 \Rightarrow 2 \cdot t = 1 - u \Rightarrow u = 1 - 2 \cdot t.$$

Prema uvjetu zadatka u, t moraju biti cijeli brojevi. Sada računamo x i y u ovisnosti o parametru t.

$$\left.\begin{array}{l} x=3-y+u \\ y=-u+t \\ u=1-2\cdot t \end{array}\right\} \Rightarrow \left.\begin{array}{l} x=3-y+1-2\cdot t \\ y=-(1-2\cdot t)+t \end{array}\right\} \Rightarrow \left.\begin{array}{l} x=3-y+1-2\cdot t \\ y=-1+2\cdot t+t \end{array}\right\} \Rightarrow \left.\begin{array}{l} x=3-y+1-2\cdot t \\ y=-1+3\cdot t \end{array}\right\} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \left.\begin{array}{l} x=3-(-1+3\cdot t)+1-2\cdot t \\ y=-1+3\cdot t \end{array}\right\} \Rightarrow \left.\begin{array}{l} x=3+1-3\cdot t+1-2\cdot t \\ y=-1+3\cdot t \end{array}\right\} \Rightarrow \left.\begin{array}{l} x=5-5\cdot t \\ y=-1+3\cdot t \ , t\in Z \end{array}\right\}.$$

Vježba 030

Riješi linearnu diofantsku jednadžbu: $7\cdot x-9\cdot y=3$.

Rezultat: $x=3+9\cdot t \ , \ y=2+7\cdot t \ , \ t\in Z.$

Zadatak 031 (Grigorij, student)

Riješi kongruenciju:

$$5\cdot x\equiv 6 \pmod 9.$$

Rješenje 031

Ponovimo!

Ako su $a, b\in Z$ i $m\in N$ i ako $m \mid a-b$ (m je djelitelj razlike $a-b$), onda kažemo da su a i b kongruentni modulo m. To zapisujemo ovako:

$$a\equiv b \pmod m.$$

Neka svojstva kongruencije:

Ako je $a\equiv b \pmod m$ i $c\equiv d \pmod m$, onda je:

- $a+c\equiv b+d \pmod m$
- $a\cdot c\equiv b\cdot d \pmod m$
- $k\cdot a\equiv k\cdot b \pmod m \ , \ \forall k\in Z.$

Ako je

$$k\cdot a\equiv k\cdot b \pmod m \text{ i } M(k, m)=d,$$

onda vrijedi:

$$a\equiv b \left(\operatorname{mod} \frac{m}{d}\right).$$

Linearna kongruencija s jednom nepoznanicom

$$a\cdot x\equiv b \pmod m$$

ima rješenje ako i samo ako

$$M(a, m) \text{ dijeli } b.$$

Ako je $M(a, m) = d$, onda kongruencija ima d rješenja.

1.inačica

Zadanu jednadžbu svodimo na disjunktnu jednadžbu.

$$5\cdot x\equiv 6 \pmod 9 \Rightarrow \frac{5\cdot x-6}{9}=y \Rightarrow \frac{5\cdot x-6}{9}=y \ /\cdot 9 \Rightarrow 5\cdot x-6=9\cdot y \Rightarrow 5\cdot x-9\cdot y=6.$$

Nađimo bilo koje cjelobrojno rješenje te jednadžbe. Lako se vidi da je $x_0 = 3$, $y_0 = 1$ jedno rješenje jednadžbe:

$$\left.\begin{array}{l} 5\cdot x-9\cdot y=6 \\ x_0=3 \ , \ y_0=1 \end{array}\right\} \Rightarrow 5\cdot 3-9\cdot 1=6 \Rightarrow 15-9=6 \Rightarrow 6=6.$$

Svako konkretno rješenje zovemo partikularno rješenje. Dakle, $x_0 = 3$, $y_0 = 1$ je partikularno rješenje zadane jednadžbe pa vrijedi

$$5\cdot x_0-9\cdot y_0=6.$$

Dalje računamo:

$$\left.\begin{array}{l} 5\cdot x-9\cdot y=6 \\ 5\cdot x_0-9\cdot y_0=6 \end{array}\right\} \Rightarrow \left[\begin{array}{l} \text{oduzmemo} \\ \text{jednadžbe} \end{array}\right] \Rightarrow 5\cdot x-9\cdot y-5\cdot x_0+9\cdot y_0=6-6 \Rightarrow 5\cdot\left(x-x_0\right)-9\cdot\left(y-y_0\right)=0.$$

Dobili smo homogenu jednadžbu čije rješenje je oblika:

$$5\cdot\left(x-x_0\right)-9\cdot\left(y-y_0\right)=0 \Rightarrow 5\cdot\left(x-x_0\right)=9\cdot\left(y-y_0\right) \Rightarrow \left.\begin{array}{l} x-x_0=9\cdot t \\ y-y_0=5\cdot t \ , \ t\in Z \end{array}\right\}.$$

Slijedi da je:

$$x-x_0=9\cdot t \ , \ t\in Z \Rightarrow x-3=9\cdot t \ , \ t\in Z \Rightarrow x\equiv 3\,(\text{mod } 9).$$

2.inačica

Transformiramo koeficijente rabeći svojstva kongruencije.

$$5\cdot x\equiv 6\,(\text{mod } 9) \Rightarrow \left.\begin{array}{l} 5\cdot x\equiv 6\,(\text{mod } 9) \\ 0\equiv 9\,(\text{mod } 9) \end{array}\right\} \Rightarrow \left[\begin{array}{c}\text{zbrojimo} \\ \text{jednadžbe}\end{array}\right] \Rightarrow 5\cdot x\equiv 15\,(\text{mod } 9) \Rightarrow 5\cdot x\equiv 5\cdot 3\,(\text{mod } 9) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \left[\text{M}(5, 9)=1\right] \Rightarrow x\equiv 3\left(\text{mod } \frac{9}{1}\right) \Rightarrow x\equiv 3\,(\text{mod } 9).$$

Vježba 031

Riješi kongruenciju: $5 \cdot x \equiv 8$ (mod 7).

Rezultat: $x \equiv 3$ (mod 7).

Zadatak 032 (Harry, gimnazija)

Broj 750 podijeli na dva dijela tako da 8% jednoga dijela zajedno sa 24% drugoga čini 11.2% od danog broja.

Rješenje 032

Označimo slovom x prvi dio broja 750. Tada je 750 – x drugi dio tog broja. Budući da 8% prvoga dijela zajedno sa 24% drugog dijela čini 11.2% od danog broja, slijedi:

$$\frac{8}{100}\cdot x+\frac{24}{100}\cdot(750-x)=\frac{11.2}{100}\cdot 750 \Rightarrow \frac{8}{100}\cdot x+\frac{24}{100}\cdot(750-x)=\frac{11.2}{100}\cdot 750 \ /\cdot 100 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 8\cdot x+24\cdot(750-x)=11.2\cdot 750 \Rightarrow 8\cdot x+24\cdot(750-x)=8400 \Rightarrow 8\cdot x+18000-24\cdot x=8400 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 8\cdot x-24\cdot x=8400-18000 \Rightarrow -16\cdot x=-9600 \ /:(-16) \Rightarrow x=600.$$

Prvi dio je 600, a drugi dio 150.

Vježba 032

Broj 750 podijeli na dva dijela tako da 16% jednoga dijela zajedno sa 48% drugoga čini 22.4% od danog broja.

Rezultat: Prvi dio je 600, a drugi dio 150.

Zadatak 033 (Ivan, gimnazija)

U jednadžbi $(m - 1) \cdot x + 2 \cdot y = 0$ odredi m tako da x i y zadovoljavaju relaciju $2 \cdot x + 3 \cdot y = 0$.

Rješenje 033

$$2\cdot x+3\cdot y=0 \Rightarrow 3\cdot y=-2\cdot x \ /:3 \Rightarrow y=-\frac{2}{3}\cdot x.$$

Uvrštavanjem $y=-\frac{2}{3}\cdot x$ u zadanu jednadžbu dobije se:

$$\left.\begin{array}{l} y=-\frac{2}{3}\cdot x \\ (m-1)\cdot x+2\cdot y=0 \end{array}\right\} \Rightarrow (m-1)\cdot x+2\cdot\left(-\frac{2}{3}\cdot x\right)=0 \Rightarrow (m-1)\cdot x-\frac{4}{3}\cdot x=0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow x\cdot\left(m-1-\frac{4}{3}\right)=0 \Rightarrow x\cdot\left(m-\frac{7}{3}\right)=0.$$

Budući da x može biti bilo koji realan broj, da bi umnožak bio nula, mora biti

$$m-\frac{7}{3}=0 \Rightarrow m=\frac{7}{3}.$$

Vježba 033

U jednadžbi $(m - 1) \cdot x + 2 \cdot y = 0$ odredi m tako da x i y zadovoljavaju relaciju $x + y = 0$.

Rezultat: $m = 3.$

Zadatak 034 (Nena, gimnazija)

Jednadžba $2 \cdot k + 5 \cdot x + 3 = 0$ ima negativno rješenje za realne brojeve k za koje vrijedi:

$$A.\ \ k > \frac{3}{2} \qquad B.\ k < \frac{3}{2} \qquad C.\ k < -\frac{3}{2} \qquad D.\ k > -\frac{3}{2}$$

Rješenje 034

Izračunamo nepoznanicu x:

$$2 \cdot k + 5 \cdot x + 3 = 0 \Rightarrow 5 \cdot x = -2 \cdot k - 3 \ /:5 \Rightarrow x = \frac{-2 \cdot k - 3}{5}.$$

Budući da rješenje x mora biti negativno, slijedi:

$$\left.\begin{array}{l} x < 0 \\ x = \dfrac{-2 \cdot k - 3}{5} \end{array}\right\} \Rightarrow \frac{-2 \cdot k - 3}{5} < 0 \ /\cdot 5 \Rightarrow -2 \cdot k - 3 < 0 \Rightarrow -2 \cdot k < 3 \ /:(-2) \Rightarrow k > -\frac{3}{2}.$$

Odgovor je pod D.

Vježba 034

Jednadžba $2 \cdot k + 5 \cdot x + 3 = 0$ ima pozitivno rješenje za realne brojeve k za koje vrijedi:

$$A.\ \ k > \frac{3}{2} \qquad B.\ k < \frac{3}{2} \qquad C.\ k < -\frac{3}{2} \qquad D.\ k > -\frac{3}{2}$$

Rezultat: Odgovor je pod C.

Zadatak 035 (Gogi, gimnazija)

U zavisnosti od realnih parametara a i b diskutiraj rješenje jednadžbe: $\dfrac{x}{b^2} + \dfrac{x}{a^2} + \dfrac{x}{a \cdot b} = a^3 - b^3.$

Rješenje 035

Ponovimo!

$$a^3 - b^3 = (a - b) \cdot \left(a^2 + a \cdot b + b^2\right).$$

Diskusija

S nulom se ne može dijeliti. Zato moramo odbaciti vrijednosti iz nazivnika za koje je on jednak nuli.

Linearna jednadžba s jednom nepoznanicom:

$$a \cdot x = b \ , \ a \neq 0 \ , \ a, b \in R.$$

- $\left.\begin{array}{l} a \cdot x = b \\ a \neq 0 \end{array}\right\} \Rightarrow x = \dfrac{b}{a}$, jedno rješenje
- $\left.\begin{array}{l} a \cdot x = b \\ a = 0 \ , \ b \neq 0 \end{array}\right\} \Rightarrow$ nemoguća jednadžba, nema rješenja
- $\left.\begin{array}{l} a \cdot x = b \\ a = 0 \ , \ b = 0 \end{array}\right\} \Rightarrow$ neodređena jednadžba, beskonačno mnogo rješenja.

Sada tražimo rješenje jednadžbe:

$$\frac{x}{b^2} + \frac{x}{a^2} + \frac{x}{a \cdot b} = a^3 - b^3 \Rightarrow \left[\begin{array}{c} \text{Diskusija!} \\ a \neq 0 \ , \ b \neq 0 \end{array}\right] \Rightarrow x \cdot \left(\frac{1}{b^2} + \frac{1}{a^2} + \frac{1}{a \cdot b}\right) = a^3 - b^3 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow x \cdot \frac{a^2 + b^2 + a \cdot b}{a^2 \cdot b^2} = a^3 - b^3 \Rightarrow x \cdot \frac{a^2 + b^2 + a \cdot b}{a^2 \cdot b^2} = a^3 - b^3 \ /\cdot \frac{a^2 \cdot b^2}{a^2 + b^2 + a \cdot b} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \left[\begin{array}{c} \text{Diskusija!} \\ a^2 + b^2 + a \cdot b \neq 0 \end{array}\right] \Rightarrow x = \left(a^3 - b^3\right) \cdot \frac{a^2 \cdot b^2}{a^2 + b^2 + a \cdot b} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \ x = (a-b)\cdot\left(a^2 + a\cdot b + b^2\right)\cdot\frac{a^2\cdot b^2}{a^2 + a\cdot b + b^2} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \ x = (a-b)\cdot\left(a^2 + a\cdot b + b^2\right)\cdot\frac{a^2\cdot b^2}{a^2 + a\cdot b + b^2} \Rightarrow \ x = a^2\cdot b^2\cdot(a-b).$$

Vježba 035

U zavisnosti od realnih parametara a i b diskutiraj rješenje jednadžbe: $\frac{x}{b} + \frac{x}{a} = a^2 - b^2$.

Rezultat: $x = a\cdot b\cdot(a-b)$, $a \neq 0$, $b \neq 0$, $a + b \neq 0$.

Zadatak 036 (Mira, gimnazija)

Za koje je cijele brojeve x, y i z ispunjena jednakost (x – 2) · (y + 1) · (z – 3) = 1?

Rješenje 036

Ponovimo!

Skup cijelih brojeva $Z = \{\dots -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, \dots\}$.

Budući da se radi o umnošku cijelih brojeva, jednakost će biti ispunjena ako su sva tri faktora 1 ili ako su dva od triju faktora u umnošku jednaka – 1, a treći 1. Imamo ova rješenja:

- $\left.\begin{array}{l} 1\cdot 1\cdot 1 = 1 \\ x-2=1 \\ y+1=1 \\ z-3=1 \end{array}\right\} \Rightarrow \left.\begin{array}{l} x=1+2 \\ y=1-1 \\ z=1+3 \end{array}\right\} \Rightarrow \left.\begin{array}{l} x=3 \\ y=0 \\ z=4 \end{array}\right\} \Rightarrow (x,\ y,\ z) = (3,\ 0,\ 4).$
- $\left.\begin{array}{l} -1\cdot(-1)\cdot 1 = 1 \\ x-2=-1 \\ y+1=-1 \\ z-3=1 \end{array}\right\} \Rightarrow \left.\begin{array}{l} x=-1+2 \\ y=-1-1 \\ z=1+3 \end{array}\right\} \Rightarrow \left.\begin{array}{l} x=1 \\ y=-2 \\ z=4 \end{array}\right\} \Rightarrow (x,\ y,\ z) = (1,\ -2,\ 4).$
- $\left.\begin{array}{l} -1\cdot 1\cdot(-1) = 1 \\ x-2=-1 \\ y+1=1 \\ z-3=-1 \end{array}\right\} \Rightarrow \left.\begin{array}{l} x=-1+2 \\ y=1-1 \\ z=-1+3 \end{array}\right\} \Rightarrow \left.\begin{array}{l} x=1 \\ y=0 \\ z=2 \end{array}\right\} \Rightarrow (x,\ y,\ z) = (1,\ 0,\ 2).$
- $\left.\begin{array}{l} 1\cdot(-1)\cdot(-1) = 1 \\ x-2=1 \\ y+1=-1 \\ z-3=-1 \end{array}\right\} \Rightarrow \left.\begin{array}{l} x=1+2 \\ y=-1-1 \\ z=-1+3 \end{array}\right\} \Rightarrow \left.\begin{array}{l} x=3 \\ y=-2 \\ z=2 \end{array}\right\} \Rightarrow (x,\ y,\ z) = (3,\ -2,\ 2).$

Vježba 036

Za koje je cijele brojeve x i y ispunjena jednakost (x – 2) · (y + 1) = 1?

Rezultat: (x , y) = (3, 0) , (x, y) = (1, – 2).

Zadatak 037 (Doris, matematička gimnazija)

Izrazi x iz sljedeće formule: $y = \frac{a+x}{1-a\cdot x}$.

Rješenje 037

$$y = \frac{a+x}{1-a\cdot x} \Rightarrow \left[\begin{array}{l}\text{jednadžbu pomnožimo} \\ \text{zajedničkim nazivnikom}\end{array}\right] \Rightarrow y = \frac{a+x}{1-a\cdot x} \ /\cdot(1-a\cdot x) \Rightarrow y\cdot(1-a\cdot x) = a + x \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \left[\begin{array}{l}\text{riješimo se zagrade tako da } y \\ \text{množi sve članove u zagradi}\end{array}\right] \Rightarrow y - y\cdot a\cdot x = a + x \Rightarrow \left[\begin{array}{l}\text{nepoznanicu } x \text{ prebacimo na} \\ \text{lijevu stranu znaka jednakosti}\end{array}\right] \Rightarrow$$

$$\Rightarrow -y\cdot a\cdot x-x=a-y \;/\cdot(-1) \Rightarrow y\cdot a\cdot x+x=-a+y \Rightarrow y\cdot a\cdot x+x=y-a \Rightarrow \begin{bmatrix}\text{na lijevoj strani}\\ \text{jednadžbe izlučimo } x\end{bmatrix} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow x\cdot(y\cdot a+1)=y-a \Rightarrow x\cdot(y\cdot a+1)=y-a \;/:(y\cdot a+1) \Rightarrow x=\frac{y-a}{y\cdot a+1} \Rightarrow x=\frac{y-a}{1+a\cdot y}.$$

Vježba 037

Izrazi x iz sljedeće formule: $y=\frac{2+x}{1-2\cdot x}$.

Rezultat: $x=\frac{y-2}{1+2\cdot y}$.

Zadatak 038 (Doris, matematička gimnazija)

Izrazi x iz sljedeće formule: $y=\frac{3-2\cdot x}{x+3}$.

Rješenje 038

$$y=\frac{3-2\cdot x}{x+3} \Rightarrow \begin{bmatrix}\text{jednadžbu pomnožimo}\\ \text{zajedničkim nazivnikom}\end{bmatrix} \Rightarrow y=\frac{3-2\cdot x}{x+3} \;/\cdot(x+3) \Rightarrow y\cdot(x+3)=3-2\cdot x \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{bmatrix}\text{riješimo se zagrade tako da } y\\ \text{množi sve članove u zagradi}\end{bmatrix} \Rightarrow y\cdot x+3\cdot y=3-2\cdot x \Rightarrow \begin{bmatrix}\text{nepoznanicu } x \text{ prebacimo na}\\ \text{lijevu stranu znaka jednakosti}\end{bmatrix} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow y\cdot x+2\cdot x=3-3\cdot y \Rightarrow \begin{bmatrix}\text{na lijevoj strani}\\ \text{jednadžbe izlučimo } x\end{bmatrix} \Rightarrow x\cdot(y+2)=3-3\cdot y \;/:(y+2) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow x=\frac{3-3\cdot y}{y+2} \Rightarrow x=\frac{3\cdot(1-y)}{y+2}.$$

Vježba 038

Izrazi x iz sljedeće formule: $y=\frac{1-x}{x+3}$.

Rezultat: $x=\frac{1-3\cdot y}{y+1}$.

Zadatak 039 (Doris, matematička gimnazija)

Izrazi x iz sljedeće formule: $y=\frac{b-x}{a+b\cdot x}$.

Rješenje 039

$$y=\frac{b-x}{a+b\cdot x} \Rightarrow \begin{bmatrix}\text{jednadžbu pomnožimo}\\ \text{zajedničkim nazivnikom}\end{bmatrix} \Rightarrow y=\frac{b-x}{a+b\cdot x} \;/\cdot(a+b\cdot x) \Rightarrow y\cdot(a+b\cdot x)=b-x \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{bmatrix}\text{riješimo se zagrade tako da } y\\ \text{množi sve članove u zagradi}\end{bmatrix} \Rightarrow y\cdot a+a\cdot b\cdot x=b-x \Rightarrow \begin{bmatrix}\text{nepoznanicu } x \text{ prebacimo na}\\ \text{lijevu stranu znaka jednakosti}\end{bmatrix} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow y\cdot b\cdot x+x=b-y\cdot a \Rightarrow \begin{bmatrix}\text{na lijevoj strani}\\ \text{jednadžbe izlučimo } x\end{bmatrix} \Rightarrow x\cdot(y\cdot b+1)=b-y\cdot a \;/:(y\cdot b+1) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow x=\frac{b-y\cdot a}{y\cdot b+1}.$$

Vježba 039

Izrazi x iz sljedeće formule: $y=\frac{1-x}{1+x}$.

Rezultat: $x=\frac{1-y}{1+y}$.

Zadatak 040 (Ivo, tehnička škola)

Koji izraz treba pribrojiti razlomku $\frac{a}{b}$ da se dobije recipročan razlomak?

Rješenje 040

Ponovimo!

$$\frac{x}{y} - \text{razlomak} \quad , \quad \frac{y}{x} - \text{recipročan razlomak} \quad , \quad \frac{x}{y} \cdot \frac{y}{x} = 1.$$

Označimo li traženi izraz slovom x, dobije se:

$$\frac{a}{b} + x = \frac{b}{a} \Rightarrow x = \frac{b}{a} - \frac{a}{b} \Rightarrow x = \frac{b^2 - a^2}{a \cdot b}.$$

Vježba 040

Koji izraz treba pribrojiti razlomku $\frac{1}{b}$ da se dobije recipročan razlomak?

Rezultat: $\frac{b^2 - 1}{b}.$