Zadatak 041 (Tanja, ekonomska škola)

Za koje će vrijeme glavnica od 16800 kn uložena uz 8.5% donijeti isto toliko kamata kao i glavnica od 9520 kn uložena na 5 mjeseci uz 12%?

Rješenje 041

Ponovimo!

Kod jednostavnog kamatnog računa susrećemo sljedeće veličine:
C – kapital ili glavnica
p – kamatna stopa ili kamatnjak
K – jednostavne kamate ili interes
n – vrijeme (na primjer u godinama).

Glavnica C je iznos od kojeg se računaju kamate. Jednostavne kamate K su one kamate koje se računaju uvijek samo od početne glavnice za cijelo vrijeme ugovora. Uobičajeno je jednostavni kamatni račun pisati u obliku razmjera:

$$C : 100 = K : (p \cdot n).$$

Jednostavne kamate K od glavnice C uz godišnji kamatnjak p za n godina su:

$$K = \frac{C \cdot p \cdot n}{100}.$$

$C_1 = 16800\ kn$	$C_2 = 9520\ kn$
$p_1 = 8.5$	$p_2 = 12$
$n_1 = ?$	$n_2 = 5\ mj = \frac{5}{12}\ g$

Budući da su kamate iste, slijedi:

$$K_1 = K_2 \Rightarrow \frac{C_1 \cdot p_1 \cdot n_1}{100} = \frac{C_2 \cdot p_2 \cdot n_2}{100} \ / \cdot 100 \Rightarrow C_1 \cdot p_1 \cdot n_1 = C_2 \cdot p_2 \cdot n_2 \Rightarrow n_1 = \frac{C_2 \cdot p_2 \cdot n_2}{C_1 \cdot p_1} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow n_1 = \frac{9520\ kn \cdot 12 \cdot \frac{5}{12}\ g}{16800\ kn \cdot 8.5} \Rightarrow n_1 = \frac{9520 \cdot 5\ g}{16800 \cdot 8.5} \Rightarrow n_1 = \frac{952 \cdot 5\ g}{1680 \cdot 8.5} \Rightarrow n_1 = \frac{4760\ g}{14280} \Rightarrow n_1 = \frac{476\ g}{1428} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow n_1 = \frac{1}{3}\ g \Rightarrow n_1 = \frac{1}{3} \cdot 12\ mj \Rightarrow n_1 = 4\ mj.$$

Vježba 041

Za koje će vrijeme glavnica od 8400 kn uložena uz 8.5% donijeti isto toliko kamata kao i glavnica od 4760 kn uložena na 5 mjeseci uz 12%?

Rezultat: 4 mj.

Zadatak 042 (Ivona, studentica)

Koliko iznose ukupne složene kamate na iznos od 2000 kn za razdoblje od 5 godina ako je godišnji kamatnjak u prve 2 godine $p_1 = 10$, a u preostale 3 godine smanjen je za 15%?

Rješenje 042

Ponovimo!

Vrijednost (jednog) iznosa C_0 na kraju n – tog jediničnog razdoblja uz pretpostavku da se kamata obračunava po složenom kamatnom računu uz varijabilnu kamatnu stopu p_i , i = 1, 2, 3, …, n, u i – tom jediničnom razdoblju i da je način obračuna kamata dekurzivan iznosi:

$$C_n = C_0 \cdot r_1 \cdot r_2 \cdot r_3 \cdot \ ... \ \cdot r_n \Rightarrow C_n = C_0 \cdot \prod_{i=1}^{n} r_i,$$ pri čemu je $r_i = 1 + \frac{p_i}{100}, i \in \{1, 2, 3, ..., n\}$ dekurzivni kamatni faktor za i – to razdoblje. Ukupne kamate u slučaju da se kamata obračunava po složenom kamatnom računu uz varijabilnu kamatnu stopu iznose:

$$K = C_n - C_0 \;\Rightarrow\; K = C_0 \cdot \left(\prod_{i=1}^{n} r_i - 1 \right).$$

1.inačica

Uočimo da su 2 razdoblja u kojima je kamatnjak fiksan:

- dvogodišnje razdoblje, kamatna stopa $p_1 = 10$ godišnje
- trogodišnje razdoblje, kamatna stopa smanjena za 15%:

$$p_2 = p_1 - \frac{15}{100} \cdot p_1 \;\Rightarrow\; p_2 = 10 - \frac{15}{100} \cdot 10 \;\Rightarrow\; p_2 = 10 - 1.5 \;\Rightarrow\; p_2 = 8.5 \text{ godišnje.}$$

U prvom, dvogodišnjem razdoblju, početni iznos je $C_0 = 2000$ kn, $p_1 = 10$ godišnje pa je

$$\left. \begin{array}{l} C_2 = C_0 \cdot r_1^{\,2} \\ r_1 = 1 + \dfrac{p_1}{100} \end{array} \right\} \Rightarrow C_2 = C_0 \cdot \left(1 + \frac{p_1}{100}\right)^2 \Rightarrow C_2 = 2000\ kn \cdot \left(1 + \frac{10}{100}\right)^2 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow C_2 = 2000\ kn \cdot 1.1^2 \Rightarrow C_2 = 2420\ kn.$$

U drugom, trogodišnjem razdoblju, početni iznos je $C_2 = 2420$ kn, $p_2 = 8.5$ godišnje pa je

$$\left. \begin{array}{l} C_5 = C_2 \cdot r_2^{\,3} \\ r_2 = 1 + \dfrac{p_2}{100} \end{array} \right\} \Rightarrow C_5 = C_2 \cdot \left(1 + \frac{p_2}{100}\right)^3 \Rightarrow C_5 = 2420\ kn \cdot \left(1 + \frac{8.5}{100}\right)^3 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow C_5 = 2420\ kn \cdot 1.085^3 \Rightarrow C_2 = 3091.04\ kn.$$

Ukupne složene kamate iznose:

$$K = C_5 - C_0 \Rightarrow K = 3091.04\ kn - 2000\ kn \Rightarrow K = 1091.04\ kn.$$

2.inačica

Uporabom formule za ukupne kamate u slučaju da se kamata obračunava po složenom kamatnom računu uz varijabilnu kamatnu stopu dobije se:

$$K = C_0 \cdot \left(\prod_{i=1}^{2} r_i - 1 \right) \Rightarrow K = C_0 \cdot \left(r_1^{\,2} \cdot r_2^{\,3} - 1 \right) \Rightarrow K = C_0 \cdot \left(\left(1 + \frac{p_1}{100}\right)^2 \cdot \left(1 + \frac{p_2}{100}\right)^3 - 1 \right) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow K = 2000\ kn \cdot \left(\left(1 + \frac{10}{100}\right)^2 \cdot \left(1 + \frac{8.5}{100}\right)^3 - 1 \right) \Rightarrow K = 2000\ kn \cdot \left(1.1^2 \cdot 1.085^3 - 1\right) \Rightarrow K = 1091.04\ kn.$$

Iz eksponenta odgovarajućeg dekurzivnog faktora r_1, r_2 vidljivo je u koliko razdoblja (godina) je pojedini kamatnjak fiksan:

$$r_1^{\,2} - \text{fiksan je 2 godine} \quad , \quad r_2^{\,3} - \text{fiksan je 3 godine.}$$

Vježba 042

Koliko iznose ukupne složene kamate na iznos od 1000 kn za razdoblje od 5 godina ako je godišnji kamatnjak u prve 2 godine $p_1 = 10$, a u preostale 3 godine smanjen je za 15%?

Rezultat: 545.52 kn.

Zadatak 043 (Martin, student)

Izračunaj vrijednost glavnice od 4000.00 kn na kraju osme godine, ako su godišnje kamate 4%. Obračun kamata je godišnji, složen i dekurzivan.

Rješenje 043

Ponovimo!

Konačna (buduća) vrijednost glavnice

Neka je:

C_0 – početna (sadašnja) vrijednost glavnice,
n – broj godina trajanja kapitalizacije,
p – fiksni godišnji kamatnjak, dekurzivni obračun kamata,
C_n – konačna (buduća) vrijednost glavnice.
Ako je glavnica C_0 uložena danas u banku na n godina uz fiksni godišnji kamatnjak p, onda je konačna (buduća) vrijednost glavnice C_n na kraju n – te godine dana izrazom:

$$C_n = C_0 \cdot \left(1 + \frac{p}{100}\right)^n.$$

Neka je:
C_0 – početna (sadašnja) vrijednost glavnice,
n – broj godina trajanja kapitalizacije,
q – fiksni godišnji kamatnjak, anticipativni obračun kamata,
C_n – konačna (buduća) vrijednost glavnice.
Ako je glavnica C_0 uložena danas u banku na n godina uz fiksni godišnji kamatnjak q, onda je konačna (buduća) vrijednost glavnice C_n na kraju n – te godine dana izrazom:

$$C_n = C_0 \cdot \left(\frac{100}{100 - q}\right)^n.$$

Ako je zadan anticipativni kamatnjak q, postoji mogućnost da se odredi ekvivalentni dekurzivni kamatnjak p i primijenjuje se odgovarajuća formula za dekurzivni obračun kamata:

$$p = \frac{100 \cdot q}{100 - q}.$$

Ako je zadan dekurzivni kamatnjak p, postoji mogućnost da se odredi ekvivalentni anticipativni kamatnjak q i primijenjuje se odgovarajuća formula za anticipativni obračun kamata:

$$q = \frac{100 \cdot p}{100 + p}.$$

1.inačica

C_0 = 4000.00 kn , n = 8 , p = 4 , C_8 = ?

$$C_n = C_0 \cdot \left(1 + \frac{p}{100}\right)^n \Rightarrow C_8 = 4000.00 \cdot \left(1 + \frac{4}{100}\right)^8 \Rightarrow C_8 = 4000.00 \cdot 1.04^8 = 5474.28\ kn.$$

2.inačica

Najprije odredimo ekvivalentni anticipativni kamatnjak q:

$$\left.\begin{array}{l} p = 4 \\ q = \dfrac{100 \cdot p}{100 + p} \end{array}\right\} \Rightarrow q = \frac{100 \cdot 4}{100 + 4} \Rightarrow q = \frac{400}{104} \Rightarrow q = 3.846153846.$$

Sada računamo konačnu vrijednost glavnice formulom za anticipativni obračun kamata:

$$C_n = C_0 \cdot \left(\frac{100}{100 - q}\right)^n \Rightarrow C_8 = 4000.00 \cdot \left(\frac{100}{100 - 3.846153846}\right)^8 \Rightarrow C_8 = 4000.00 \cdot 1.04^8 = 5474.28\ kn.$$

Vježba 043

Izračunaj vrijednost glavnice od 4000.00 kn na kraju šeste godine, ako su godišnje kamate 4%. Obračun kamata je godišnji, složen i dekurzivan.

Rezultat: 5061.28 kn.

Zadatak 044 (Martin, student)

Izračunaj vrijednost glavnice od 4000.00 kn na kraju osme godine, ako su godišnje kamate 4%. Obračun kamata je godišnji, složen i anticipativni.

Rješenje 044

Ponovimo!

Konačna (buduća) vrijednost glavnice

Neka je:
C_0 – početna (sadašnja) vrijednost glavnice,
n – broj godina trajanja kapitalizacije,
p – fiksni godišnji kamatnjak, dekurzivni obračun kamata,
C_n – konačna (buduća) vrijednost glavnice.

Ako je glavnica C_0 uložena danas u banku na n godina uz fiksni godišnji kamatnjak p, onda je konačna (buduća) vrijednost glavnice C_n na kraju n – te godine dana izrazom:

$$C_n = C_0 \cdot \left(1 + \frac{p}{100}\right)^n .$$

Neka je:
C_0 – početna (sadašnja) vrijednost glavnice,
n – broj godina trajanja kapitalizacije,
q – fiksni godišnji kamatnjak, anticipativni obračun kamata,
C_n – konačna (buduća) vrijednost glavnice.

Ako je glavnica C_0 uložena danas u banku na n godina uz fiksni godišnji kamatnjak q, onda je konačna (buduća) vrijednost glavnice C_n na kraju n – te godine dana izrazom:

$$C_n = C_0 \cdot \left(\frac{100}{100 - q}\right)^n .$$

Ako je zadan anticipativni kamatnjak q, postoji mogućnost da se odredi ekvivalentni dekurzivni kamatnjak p i primijenjuje se odgovarajuća formula za dekurzivni obračun kamata:

$$p = \frac{100 \cdot q}{100 - q}.$$

Ako je zadan dekurzivni kamatnjak p, postoji mogućnost da se odredi ekvivalentni anticipativni kamatnjak q i primijenjuje se odgovarajuća formula za anticipativni obračun kamata:

$$q = \frac{100 \cdot p}{100 + p}.$$

1.inačica

$C_0 = 4000.00$ kn , n = 8 , q = 4 , C_8 = ?

$$C_n = C_0 \cdot \left(\frac{100}{100 - q}\right)^n \Rightarrow C_8 = 4000.00 \cdot \left(\frac{100}{100 - 4}\right)^8 \Rightarrow C_8 = 5544.85\ kn.$$

2.inačica

Najprije odredimo ekvivalentni dekurzivni kamatnjak p:

$$\left.\begin{array}{l} q = 4 \\ p = \dfrac{100 \cdot q}{100 - q} \end{array}\right\} \Rightarrow p = \frac{100 \cdot 4}{100 - 4} \Rightarrow p = \frac{400}{96} \Rightarrow p = 4.166666667.$$

Sada računamo konačnu vrijednost glavnice formulom za dekurzivni obračun kamata:

$$C_n = C_0 \cdot \left(1 + \frac{p}{100}\right)^n \Rightarrow C_8 = 4000.00 \cdot \left(1 + \frac{4.166666667}{100}\right)^8 \Rightarrow C_8 = 4000.00 \cdot 1.041666667^8 = 5544.85\ kn.$$

Vježba 044

Izračunaj vrijednost glavnice od 4000.00 kn na kraju šeste godine, ako su godišnje kamate 4%. Obračun kamata je godišnji, složen i anticipativni.

Rezultat: 5110.14 kn.

Zadatak 045 (Lidija, studentica)

Tvrtka traži zajam 400000 kn uz 50% godišnjih dekurzivnih kamata i može plaćati jednak anuitet 250000 kn krajem godine. Obračun kamata je složen, godišnji i dekurzivan. Za koliko će se godina amortizirati zajam?

Rješenje 045

Ponovimo!

$$\log a^n = n \cdot \log a \quad , \quad \log \frac{a}{b} = \log a - \log b.$$

Neka je:
C_0 – visina zajma,
a – jednaki anuitet,
n – broj razdoblja otplate zajma,
p – konstantni kamatnjak za zadano razdoblje,
r – dekurzivni kamatni faktor.

$$r = 1 + \frac{p}{100} \quad , \quad C_0 = a \cdot \frac{r^n - 1}{r^n \cdot (r-1)}.$$

Računamo broj godina n.
C_0 = 400000 kn , p = 50 , a = 250000 kn , n = ?

$$\left.\begin{array}{l} p = 50 \\ r = 1 + \frac{p}{100} \end{array}\right\} \Rightarrow r = 1 + \frac{50}{100} \Rightarrow r = 1 + 0.50 \Rightarrow r = 1.5.$$

$$C_0 = a \cdot \frac{r^n - 1}{r^n \cdot (r-1)} \;/ \cdot r^n \cdot (r-1) \Rightarrow r^n \cdot (r-1) \cdot C_0 = a \cdot \left(r^n - 1\right) \Rightarrow r^n \cdot (r-1) \cdot C_0 = a \cdot r^n - a \Rightarrow$$

$$\Rightarrow r^n \cdot (r-1) \cdot C_0 - a \cdot r^n = -a \Rightarrow r^n \cdot \left[(r-1) \cdot C_0 - a\right] = -a \;/ \cdot (-1) \Rightarrow r^n \cdot \left[a - (r-1) \cdot C_0\right] = a \Rightarrow$$

$$\Rightarrow r^n = \frac{a}{a - (r-1) \cdot C_0} \Rightarrow \left[\begin{array}{l} \text{logaritmiramo} \\ \text{jednadžbu} \end{array}\right] \Rightarrow r^n = \frac{a}{a - (r-1) \cdot C_0} \;/ \log \Rightarrow \log r^n = \log \frac{a}{a - (r-1) \cdot C_0} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow n \cdot \log r = \log a - \log\left(a - (r-1) \cdot C_0\right) \Rightarrow n = \frac{\log a - \log\left(a - (r-1) \cdot C_0\right)}{\log r} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow n = \frac{\log 250000 - \log(250000 - (1.5 - 1) \cdot 400000)}{\log 1.5} \Rightarrow n = \frac{\log 250000 - \log(250000 - 0.5 \cdot 400000)}{\log 1.5} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow n = \frac{\log 250000 - \log(250000 - 200000)}{\log 1.5} \Rightarrow n = \frac{\log 250000 - \log 50000}{\log 1.5} \Rightarrow n \approx 3.96936 \; godina.$$

Komentar: zajam od 400000 kn amortizira se punim anuitetima 250000 kn krajem svake godine kroz tri godine i krnjim ili nepotpunim anuitetom krajem četvrte godine.

Vježba 045

Tvrtka traži zajam 1000000 kn uz 20% godišnjih dekurzivnih kamata i može plaćati jednak anuitet 800000 kn krajem godine. Obračun kamata je složen, godišnji i dekurzivan. Za koliko će se godina amortizirati zajam?

Rezultat: n ≈ 1.57788 godina.

Zadatak 046 (Katarina, maturantica)

Glavnica C_0 se uloži u banku na n godina uz godišnji kamatnjak p. Obračun kamata je godišnji, jednostavan i dekurzivan. Iz formule za konačnu vrijednost glavnice nakon n godina (C_n), izrazite kamatnjak p u ovisnosti o ostalim varijablama.

Rješenje 046

Ponovimo!

Kod jednostavnog kamatnog računa susrećemo sljedeće veličine:
C_0 – kapital ili glavnica
p – kamatna stopa ili kamatnjak
K – jednostavne kamate ili interes
n – vrijeme (na primjer u godinama).
C_n – konačna vrijednost glavnice nakon n godina
Glavnica C_0 je iznos od kojeg se računaju kamate. Jednostavne kamate K su one kamate koje se računaju uvijek samo od početne glavnice za cijelo vrijeme ugovora. Uobičajeno je jednostavni kamatni račun pisati u obliku razmjera:

$$C_0 : 100 = K : (p \cdot n) \Rightarrow 100 \cdot K = C_0 \cdot p \cdot n.$$

Jednostavne kamate K od glavnice C_0 uz godišnji kamatnjak p za n godina su:

$$C_n = C_0 + K \Rightarrow K = C_n - C_0.$$

Iz formule za konačnu vrijednost glavnice nakon n godina (C_n), kamatnjak p u ovisnosti o ostalim varijablama iznosi:

$$\left.\begin{array}{l} 100 \cdot K = C_0 \cdot p \cdot n \\ K = C_n - C_0 \end{array}\right\} \Rightarrow 100 \cdot (C_n - C_0) = C_0 \cdot p \cdot n \Rightarrow 100 \cdot (C_n - C_0) = C_0 \cdot p \cdot n \,/ \cdot \frac{1}{n \cdot C_0} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow p = \frac{100 \cdot (C_n - C_0)}{n \cdot C_0}.$$

Vježba 046

Glavnica C_0 se uloži u banku na n godina uz godišnji kamatnjak p. Obračun kamata je godišnji, jednostavan i dekurzivan. Iz formule za konačnu vrijednost glavnice nakon n godina (C_n), izrazite vrijeme n u ovisnosti o ostalim varijablama.

Rezultat: $n = \frac{100 \cdot (C_n - C_0)}{p \cdot C_0}.$

Zadatak 047 (Katarina, maturantica)

Glavnica C_0 se uloži u banku na n godina uz godišnji kamatnjak p. Obračun kamata je godišnji, jednostavan i dekurzivan. Iz formule za konačnu vrijednost glavnice nakon n godina (C_n), izrazite glavnicu C_0 u ovisnosti o ostalim varijablama.

Rješenje 047

Ponovimo!

Kod jednostavnog kamatnog računa susrećemo sljedeće veličine:
C_0 – kapital ili glavnica
p – kamatna stopa ili kamatnjak
K – jednostavne kamate ili interes
n – vrijeme (na primjer u godinama).
C_n – konačna vrijednost glavnice nakon n godina
Glavnica C_0 je iznos od kojeg se računaju kamate. Jednostavne kamate K su one kamate koje se računaju uvijek samo od početne glavnice za cijelo vrijeme ugovora. Uobičajeno je jednostavni kamatni račun pisati u obliku razmjera:

$$C_0 : 100 = K : (p \cdot n) \Rightarrow 100 \cdot K = C_0 \cdot p \cdot n.$$

Jednostavne kamate K od glavnice C_0 uz godišnji kamatnjak p za n godina su:

$$C_n = C_0 + K \Rightarrow K = C_n - C_0.$$

Iz formule za konačnu vrijednost glavnice nakon n godina (C_n), glavnica C_0 u ovisnosti o ostalim varijablama iznosi:

$$\left.\begin{array}{l}100\cdot K=C_0\cdot p\cdot n\\K=C_n-C_0\end{array}\right\}\Rightarrow 100\cdot\left(C_n-C_0\right)=C_0\cdot p\cdot n\Rightarrow 100\cdot C_n-100\cdot C_0=C_0\cdot p\cdot n\Rightarrow$$

$$\Rightarrow 100\cdot C_n=100\cdot C_0+C_0\cdot p\cdot n\Rightarrow 100\cdot C_n=C_0\cdot\left(100+p\cdot n\right)\Rightarrow$$

$$\Rightarrow 100\cdot C_n=C_0\cdot\left(100+p\cdot n\right)\;/\cdot\frac{1}{100+p\cdot n}\Rightarrow C_0=\frac{100\cdot C_n}{100+p\cdot n}.$$

Vježba 047

Glavnica C_0 se uloži u banku na n godina uz godišnji kamatnjak p. Obračun kamata je godišnji, jednostavan i dekurzivan. Iz formule za konačnu vrijednost glavnice nakon n godina (C_n), izrazite jednostavne kamate ili interes K u ovisnosti o ostalim varijablama.

Rezultat: $K=C_n-C_0$ ili $K=\frac{C_0\cdot p\cdot n}{100}$.

Zadatak 048 (Ivana, maturantica)

Marko je oročio 5000 kn po godišnjoj kamatnoj stopi od 1.7%. Nakon koliko će se godina Markov novac na računu uvećati za 2000 kn? Napomena: Kamate se na kraju svake godine dodaju iznosu na računu.

Rješenje 048

Ponovimo!

$$\log a^n=n\cdot\log a.$$

Zakon distribucije množenja prema zbrajanju.

$$a\cdot\left(b+c\right)=a\cdot b+a\cdot c\quad,\quad a\cdot b+a\cdot c=a\cdot\left(b+c\right).$$

Složene kamate su kamate koje se izračunavaju za svako razdoblje ukamaćivanja od promjenljive glavnice, tj. uz kamate glavnice obračunavaju se i kamate na kamate.

Dekurzivni obračun kamata je obračun kamata na kraju razdoblja ukamaćivanja od glavnice s početka tog razdoblja.

Neka je:

C_0 – početna (sadašnja) vrijednost glavnice
n – broj godina trajanja kapitalizacije
p – fiksni godišnji kamatnjak
C_n – konačna (buduća) vrijednost glavnice.

Konačna vrijednost uloga je:

$$C_n=C_0\cdot\left(1+\frac{p}{100}\right)^n.$$

Ukupne složene kamate za to razdoblje iznose:

$$K=C_n-C_0.$$

Budući da se kamate na kraju svake godine dodaju iznosu na računu, riječ je o složenom kamatnom računu pa vrijedi:

$$K=C_n-C_0\Rightarrow K=C_0\cdot\left(1+\frac{p}{100}\right)^n-C_0\Rightarrow K=C_0\cdot\left(\left(1+\frac{p}{100}\right)^n-1\right)\Rightarrow$$

$$\Rightarrow K=C_0\cdot\left(\left(1+\frac{p}{100}\right)^n-1\right)\;/\cdot\frac{1}{C_0}\Rightarrow\left(1+\frac{p}{100}\right)^n-1=\frac{K}{C_0}\Rightarrow\left(1+\frac{p}{100}\right)^n=\frac{K}{C_0}+1\Rightarrow$$

$$\Rightarrow\left[\begin{array}{l}\text{logaritmiramo}\\\text{jednadžbu}\end{array}\right]\Rightarrow\left(1+\frac{p}{100}\right)^n=\frac{K}{C_0}+1\;/\log\Rightarrow\log\left(1+\frac{p}{100}\right)^n=\log\left(\frac{K}{C_0}+1\right)\Rightarrow$$

$$\Rightarrow n\cdot\log\left(1+\frac{p}{100}\right)=\log\left(\frac{K}{C_0}+1\right) \Rightarrow n\cdot\log\left(1+\frac{p}{100}\right)=\log\left(\frac{K}{C_0}+1\right) /\cdot \frac{1}{\log\left(1+\frac{p}{100}\right)} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow n=\frac{\log\left(\frac{K}{C_0}+1\right)}{\log\left(1+\frac{p}{100}\right)} \Rightarrow n=\frac{\log\left(\frac{2000}{5000}+1\right)}{\log\left(1+\frac{1.7}{100}\right)} \Rightarrow n=\frac{\log(0.4+1)}{\log(1+0.017)} \Rightarrow n=\frac{\log 1.4}{\log 1.017} \Rightarrow n\approx 20\ god.$$

Vježba 048

Marko je oročio 10000 kn po godišnjoj kamatnoj stopi od 1.7%. Nakon koliko će se godina Markov novac na računu uvećati za 4000 kn? Napomena: Kamate se na kraju svake godine dodaju iznosu na računu.

Rezultat: 20 god.

Zadatak 049 (111, ekonomska škola)

Ulaganjem 1000 kn u banku nakon n godina dobiva se $1000\cdot\left(1+\frac{5.2}{100}\right)^n$. Koliki je iznos na računu nakon 5 godina?

Rješenje 049

Ponovimo!

$$n=\frac{n}{1}\quad,\quad \frac{a}{b}+\frac{c}{d}=\frac{a\cdot d+b\cdot c}{b\cdot d}.$$

$$\left.\begin{array}{l} f(n)=1000\cdot\left(1+\frac{5.2}{100}\right)^n \\ n=5 \end{array}\right\} \Rightarrow f(5)=1000\cdot\left(1+\frac{5.2}{100}\right)^5 \Rightarrow f(5)=1000\cdot\left(\frac{1}{1}+\frac{5.2}{100}\right)^5 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow f(5)=1000\cdot\left(\frac{100+5.2}{100}\right)^5 \Rightarrow f(5)=1000\cdot\left(\frac{105.2}{100}\right)^5 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow f(5)=1000\cdot 1.052^5 \Rightarrow f(5)=1288.48\ kn.$$

Vježba 049

Ulaganjem 1000 kn u banku nakon n godina dobiva se $1000\cdot\left(1+\frac{5.2}{100}\right)^n$. Koliki je iznos na računu nakon 6 godina?.

Rezultat: 1355.48 kn.

Zadatak 050 (111, ekonomska škola)

Ulaganjem 1000 kn u banku nakon n godina dobiva se $1000\cdot\left(1+\frac{5.2}{100}\right)^n$. Za koliko bi godina iznos od 1000 kn narastao na 10000 kn?

Rješenje 050

Ponovimo!

$$n=\frac{n}{1}\quad,\quad \frac{a}{b}+\frac{c}{d}=\frac{a\cdot d+b\cdot c}{b\cdot d}.$$

Logaritam broja a po bazi b je broj c kojim treba potencirati bazu b da se dobije broj a.
Mnemotehničko pravilo za pamćenje osnovne veze eksponencijalne i logaritamske funkcije:

$$\log_b a = c \qquad \log_b a = b^c \quad \rightarrow \qquad a = b^c$$

Dekadski logaritam

Logaritamska funkcija $\log_{10}$ označava se simbolom log. Broj log x zovemo dekadski, Briggsov ili obični logaritam.

$$\log a^n = n \cdot \log a \quad , \quad \log 10 = 1.$$

$$\left.\begin{array}{l} f(n) = 1000 \cdot \left(1 + \frac{5.2}{100}\right)^n \\ f(n) = 10\,000 \end{array}\right\} \Rightarrow \left[\begin{array}{l} \text{metoda} \\ \text{komparacije} \end{array}\right] \Rightarrow 1000 \cdot \left(1 + \frac{5.2}{100}\right)^n = 10\,000 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 1000 \cdot \left(1 + \frac{5.2}{100}\right)^n = 10\,000 \;/ : 1000 \Rightarrow \left(1 + \frac{5.2}{100}\right)^n = 10 \Rightarrow \left(\frac{1}{1} + \frac{5.2}{100}\right)^n = 10 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \left(\frac{100 + 5.2}{100}\right)^n = 10 \Rightarrow \left(\frac{105.2}{100}\right)^n = 10 \Rightarrow 1.052^n = 10 \Rightarrow 1.052^n = 10 \;/ \log \Rightarrow$$

$$\Rightarrow n \cdot \log 1.052 = \log 10 \Rightarrow n \cdot \log 1.052 = \log 10 \;/ : \log 1.052 \Rightarrow n = \frac{\log 10}{\log 1.052} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow n = \frac{1}{\log 1.052} \Rightarrow n = 45.42 \Rightarrow n \approx 46.$$

Vježba 050

Ulaganjem 1000 kn u banku nakon n godina dobiva se $1000 \cdot \left(1 + \frac{5.2}{100}\right)^n$. Za koliko bi godina iznos od 1000 kn narastao na 100000 kn?

Rezultat: $n \approx 91.$

Zadatak 051 (Tyny, strukovna škola)

Planirate put za 3 godine za koji vam treba 10000 kn. Nude vam da uložite novac s 3.5% kamata uz mjesečni obračun kamate. Koliko novca morate uložiti? Kamatu računate po formuli

$$C = C_0 \cdot \left(1 + \frac{p}{12}\right)^{t \cdot 12},$$

gdje je t vrijeme izraženo u godinama, a p postotak izražen u decimalnom obliku.

Rješenje 051

t = 3 god, C = 10000 kn, $p = 3.5\% = \frac{3.5}{100} = 0.035,$ C_0 = ?

Računamo koliko novca moramo uložiti, C_0.

$$C = C_0 \cdot \left(1 + \frac{p}{12}\right)^{t \cdot 12} \Rightarrow C = C_0 \cdot \left(1 + \frac{p}{12}\right)^{t \cdot 12} \;/ \cdot \frac{1}{\left(1 + \frac{p}{12}\right)^{t \cdot 12}} \Rightarrow C_0 = \frac{C}{\left(1 + \frac{p}{12}\right)^{t \cdot 12}} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow C_0 = \frac{10\,000}{\left(1 + \frac{0.035}{12}\right)^{3 \cdot 12}} \Rightarrow C_0 = \frac{10\,000}{\left(1 + \frac{0.035}{12}\right)^{36}} \Rightarrow C_0 = 9\,004.62 \; kn.$$

Vježba 051

Planirate put za 4 godine za koji vam treba 10000 kn. Nude vam da uložite novac s 3% kamata uz mjesečni obračun kamate. Koliko novca morate uložiti? Kamatu računate po formuli

$$C = C_0 \cdot \left(1 + \frac{p}{12}\right)^{t \cdot 12},$$

gdje je t vrijeme izraženo u godinama, a p postotak izražen u decimalnom obliku.

Rezultat: 8870.53 kn.