Zadatak 021 (Ivana, komercijalna škola)

Neki se iznos uloži na tekući račun uz godišnji kamatnjak 5. Ako je konačna vrijednost tog iznosa za 15.76% veća od početne, za koliko su godina obračunate kamate? Obračun je kamata godišnji, složen i dekurzivan.

Rješenje 021

p = 5, n = ?

Konačna vrijednost uloga na kraju n – te godine iznosi:

$$C_n = C_0 + \frac{15.76}{100} \cdot C_0 = 1.1576 \cdot C_0.$$

Računamo broj godina n:

$$C_n = C_0 \cdot \left(1 + \frac{p}{100}\right)^n \quad /:C_0 \;\Rightarrow\; \left(1 + \frac{p}{100}\right)^n = \frac{C_n}{C_0} \quad /\log \;\Rightarrow\; \log\left(1 + \frac{p}{100}\right)^n = \log\frac{C_n}{C_0} \;\Rightarrow$$

$$\Rightarrow\; n \cdot \log\left(1 + \frac{p}{100}\right) = \log\frac{C_n}{C_0} \;\Rightarrow\; n = \frac{\log\frac{C_n}{C_0}}{\log\left(1 + \frac{p}{100}\right)} = \frac{\log\frac{1.1576 \cdot C_0}{C_0}}{\log\left(1 + \frac{5}{100}\right)} = \frac{\log 1.1578}{\log 1.05} = 3 \text{ godine.}$$

Vježba 021

Neki se iznos uloži na tekući račun uz godišnji kamatnjak 3. Ako je konačna vrijednost tog iznosa za 15.76% veća od početne, za koliko su godina obračunate kamate? Obračun je kamata godišnji, složen i dekurzivan.

Rezultat: $n \approx 5$ godina.

www.halapa.com

Zadatak 022 (Ivana, komercijalna škola)

Netko sklopi ugovor o oročenju iznosa od 10 000 kn na pet godina. Ako je banka prve dvije godine primjenjivala godišnji kamatnjaka 3, a u preostalom razdoblju 2, izračunaj konačnu vrijednost uloženog iznosa. Obračun je kamata godišnji, složen i dekurzivan.

Rješenje 022

$C_0 = 10\,000$, $n = 5$, $C_5 = ?$

$$\left.\begin{array}{l} n_1 = 2 \\ p_1 = 3 \end{array}\right\} \Rightarrow r_1 = 1 + \frac{p_1}{100} = 1 + \frac{3}{100} = 1.03 \quad , \quad \left.\begin{array}{l} n_2 = n - n_1 = 5 - 2 = 3 \\ p_2 = 2 \end{array}\right\} \Rightarrow r_2 = 1 + \frac{p_2}{100} = 1 + \frac{2}{100} = 1.02$$

Prve dvije godine kamate obračunavamo po godišnjoj kamatnoj stopi $p_1 = 3$ pa je konačna vrijednost na kraju druge godine jednaka:

$$C_2 = C_0 \cdot r_1^2.$$

To je sada početna glavnica na koju se za iduće tri godine obračunavaju kamate po godišnjoj kamatnoj stopi $p_2 = 2$. Na kraju pete godine je:

$$C_5 = C_2 \cdot r_2^3 = \left(C_0 \cdot r_1^2\right) \cdot r_2^3 = C_0 \cdot r_1^2 \cdot r_2^3 = 10000 \cdot 1.03^2 \cdot 1.02^3 = 11258.36 \; kn.$$

Vježba 022

Netko sklopi ugovor o oročenju iznosa od 10 000 kn na pet godina. Ako je banka prve tri godine primjenjivala godišnji kamatnjaka 3, a u preostalom razdoblju 2, izračunaj konačnu vrijednost uloženog iznosa. Obračun je kamata godišnji, složen i dekurzivan.

Rezultat: 11368.73 kn.

Zadatak 023 (Anamarijina sestra, ekonomska škola)

Kolika je vrijednost glavnice 50000 kn na kraju desete godine, ako je obračun kamata složen, godišnji i anticipativni? Godišnji kamatnjak je 20.

Rješenje 023

Ponovimo!

Anticipativni obračun kamata je obračun kamata na početku razdoblja ukamaćivanja od glavnice s kraja tog razdoblja.

C_0 – početna vrijednost glavnice , n – broj godina ukamaćivanja , q – godišnji kamatnjak

C_n – konačna (buduća) vrijednost glavnice , $\rho = \frac{100}{100-q}$ – anticipativni kamatni faktor

$$C_n = C_0 \cdot \rho^n \quad \text{ili} \quad C_n = C_0 \cdot \left(\frac{100}{100-q}\right)^n.$$

Računamo konačnu (buduću) vrijednost glavnice:

$C_0 = 50000$, $n = 10$, $q = 20$, $C_n = ?$

$$C_{10} = C_0 \cdot \left(\frac{100}{100-q}\right)^{10} \Rightarrow C_{10} = 50000 \cdot \left(\frac{100}{100-20}\right)^{10} \Rightarrow C_{10} = 50000 \cdot \left(\frac{100}{80}\right)^{10} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow C_{10} = 50000 \cdot \left(\frac{5}{4}\right)^{10} \Rightarrow C_{10} = 50000 \cdot 1.25^{10} \Rightarrow C_{10} = 465661.29 \; kn.$$

Vježba 023

Kolika je vrijednost glavnice 125000 kn na kraju desete godine, ako je obračun kamata složen, godišnji i anticipativni? Godišnji kamatnjak je 20.

Rezultat: 1164153.22 kn.

Zadatak 024 (Anamarijina sestra, ekonomska škola)

Kolika je sadašnja vrijednost glavnice do 5000 kn koja dospijeva za 8 godina uz 5% godišnjih anticipativnih kamata? Obračun kamata je godišnji i složen.

Rješenje 024

Ponovimo!

Anticipativni obračun kamata je obračun kamata na početku razdoblja ukamaćivanja od glavnice s kraja tog razdoblja.

www.halapa.com

C_0 – početna vrijednost glavnice , n – broj godina ukamaćivanja , q – godišnji kamatnjak

C_n – konačna (buduća) vrijednost glavnice , $\rho = \frac{100}{100-q}$ – anticipativni kamatni faktor

$$C_n = C_0 \cdot \rho^n \quad \text{ili} \quad C_n = C_0 \cdot \left(\frac{100}{100-q}\right)^n.$$

Računamo sadašnju (početnu) vrijednost glavnice:

$C_8 = 5000$, $n = 8$, $q = 5$, $C_0 = ?$

$$C_8 = C_0 \cdot \left(\frac{100}{100-q}\right)^8 \Rightarrow C_0 = \frac{C_8}{\left(\frac{100}{100-q}\right)^8} \Rightarrow C_0 = \frac{5000}{\left(\frac{100}{100-5}\right)^8} \Rightarrow C_0 = 3317.10 \; kn.$$

Vježba 024

Kolika je sadašnja vrijednost glavnice do 10000 kn koja dospijeva za 8 godina uz 5% godišnjih anticipativnih kamata? Obračun kamata je godišnji i složen.

Rezultat: 6634.20 kn.

Zadatak 025 (Anamarijina sestra, ekonomska škola)

Za koliko godina naraste glavnica od 2000 kn uz 6% anticipativnih godišnjih kamata na 8000 kn? Obračun kamata je složen i godišnji.

Rješenje 025

Ponovimo!

Anticipativni obračun kamata je obračun kamata na početku razdoblja ukamaćivanja od glavnice s kraja tog razdoblja.

C_0 – početna vrijednost glavnice , n – broj godina ukamaćivanja , q – godišnji kamatnjak

$$C_n - \text{konačna (buduća) vrijednost glavnice} \quad , \quad \rho = \frac{100}{100-q} - \text{anticipativni kamatni faktor}$$

$$C_n = C_0 \cdot \rho^n \quad \text{ili} \quad C_n = C_0 \cdot \left(\frac{100}{100-q}\right)^n .$$

$$\log a^n = n \cdot \log a.$$

Računamo vrijeme u godinama:

$$C_0 = 2000 \quad , \quad q = 6 \quad , \quad C_n = 8000 \quad , \quad n = ?$$

$$C_n = C_0 \cdot \left(\frac{100}{100-q}\right)^n \Rightarrow C_n = C_0 \cdot \left(\frac{100}{100-6}\right)^n \Rightarrow C_n = C_0 \cdot \left(\frac{100}{94}\right)^n \; / \cdot \frac{1}{C_0} \Rightarrow \frac{C_n}{C_0} = \left(\frac{100}{94}\right)^n \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \frac{C_n}{C_0} = \left(\frac{100}{94}\right)^n \; / \log \Rightarrow \log \frac{C_n}{C_0} = \log \left(\frac{100}{94}\right)^n \Rightarrow \log \frac{C_n}{C_0} = n \cdot \log \frac{100}{94} \Rightarrow n = \frac{\log \frac{C_n}{C_0}}{\log \frac{100}{94}} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow n = \frac{\log C_n - \log C_0}{\log 100 - \log 94} \Rightarrow n = \frac{\log 8000 - \log 2000}{\log 100 - \log 94} \Rightarrow n = 22.4 \text{ godine.}$$

Vježba 025

Za koliko godina naraste glavnica od 2000 kn uz 5% anticipativnih godišnjih kamata na 8000 kn? Obračun kamata je složen i godišnji.

Rezultat: 27.03 godina.

Zadatak 026 (Anamarijina sestra, ekonomska škola)

Netko uloži danas u banku 10000 kn. Na kraju pete godine može raspolagati iznosom 15000 kn. Uz koliku su godišnju kamatnu stopu računate kamate? Obračun kamata je složen, godišnji i anticipativni.

Rješenje 026

Ponovimo!

Anticipativni obračun kamata je obračun kamata na početku razdoblja ukamaćivanja od glavnice s kraja tog razdoblja.

$$C_0 - \text{početna vrijednost glavnice} \quad , \quad n - \text{broj godina ukamaćivanja} \quad , \quad q - \text{godišnji kamatnjak}$$

$$C_n - \text{konačna (buduća) vrijednost glavnice} \quad , \quad \rho = \frac{100}{100-q} - \text{anticipativni kamatni faktor}$$

$$C_n = C_0 \cdot \rho^n \quad \text{ili} \quad C_n = C_0 \cdot \left(\frac{100}{100-q}\right)^n .$$

$$\sqrt[n]{\frac{a}{b}} \cdot \sqrt[n]{\frac{b}{a}} = \sqrt[n]{\frac{a}{b} \cdot \frac{b}{a}} = 1.$$

Računamo godišnju kamatnu stopu:

$$C_0 = 10000 \quad , \quad n = 5 \quad , \quad C_5 = 15000 \quad , \quad q = ?$$

$$C_n = C_0 \cdot \left(\frac{100}{100-q}\right)^n \Rightarrow C_n = C_0 \cdot \left(\frac{100}{100-q}\right)^n \; / \cdot \frac{1}{C_0} \Rightarrow \frac{C_n}{C_0} = \left(\frac{100}{100-q}\right)^n \Rightarrow \frac{C_n}{C_0} = \left(\frac{100}{100-q}\right)^n \; / \sqrt[n]{\;} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \sqrt[n]{\frac{C_n}{C_0}} = \frac{100}{100-q} \Rightarrow (100-q) \cdot \sqrt[n]{\frac{C_n}{C_0}} = 100 \Rightarrow (100-q) \cdot \sqrt[n]{\frac{C_n}{C_0}} = 100 \; / \cdot \sqrt[n]{\frac{C_0}{C_n}} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 100 - q = 100 \cdot \sqrt[n]{\frac{C_0}{C_n}} \Rightarrow -q = 100 \cdot \sqrt[n]{\frac{C_0}{C_n}} - 100 \; / \cdot (-1) \Rightarrow q = 100 - 100 \cdot \sqrt[n]{\frac{C_0}{C_n}} \Rightarrow q = 100 \cdot \left(1 - \sqrt[n]{\frac{C_0}{C_n}}\right) \Rightarrow$$

www.halapa.com

$$\Rightarrow q = 100 \cdot \left(1 - \sqrt[5]{\frac{C_0}{C_5}}\right) \Rightarrow q = 100 \cdot \left(1 - \sqrt[5]{\frac{10000}{15000}}\right) \Rightarrow q = 100 \cdot \left(1 - \sqrt[5]{\frac{2}{3}}\right) \Rightarrow q = 7.789.$$

Vježba 026

Netko uloži danas u banku 5000 kn. Na kraju pete godine može raspolagati iznosom 7500 kn. Uz koliku su godišnju kamatnu stopu računate kamate? Obračun kamata je složen, godišnji i anticipativni.

Rezultat: 7.789.

Zadatak 027 (Ivvy, trgovačka škola)

Koliko će imati u banci na kraju desete godine osoba koja ulaže početkom svake godine 2000 kn ako je obračun kamata složen, godišnji i dekurzivan? Banka obračunava 8% godišnjih kamata.

Rješenje 027

n = 10, R = 2000, p = 8, S_{10} = ?

Ako se jednaki iznosi R uplaćuju (isplaćuju) početkom svakog razdoblja (n promatranih razdoblja) uz složeni, dekurzivni obračun kamata i fiksnu kamatnu stopu p (za promatrano razdoblje ukamaćivanja), tada te uplate (isplate) zovemo prenumerando uplate (isplate).
Formula za računanje konačne vrijednosti prenumerando uplata (isplata):

$$S_n = R \cdot r \cdot \frac{r^n - 1}{r - 1}.$$

Najprije izračunamo dekurzivni kamatni faktor r:

$$\left.\begin{array}{l} p = 8 \\ r = 1 + \frac{p}{100} \end{array}\right\} \Rightarrow r = 1 + \frac{8}{100} \Rightarrow r = 1 + 0.08 \Rightarrow r = 1.08.$$

Konačna vrijednost prenumerando uplata iznosi:

$$\left.\begin{array}{l} n = 10 \\ S_n = R \cdot r \cdot \frac{r^n - 1}{r - 1} \end{array}\right\} \Rightarrow S_{10} = R \cdot r \cdot \frac{r^{10} - 1}{r - 1} \Rightarrow S_{10} = 2000 \cdot 1.08 \cdot \frac{1.08^{10} - 1}{1.08 - 1} \Rightarrow S_{10} = 31290.97 \ kn.$$

www.halapa.com

Vježba 027

Koliko će imati u banci na kraju desete godine osoba koja ulaže početkom svake godine 1000 kn ako je obračun kamata složen, godišnji i dekurzivan? Banka obračunava 8% godišnjih kamata.

Rezultat: 15645.49 kn.

Zadatak 028 (Ivvy, trgovačka škola)

Koliki iznos treba uplaćivati u banku početkom svake godine ako se želi na kraju osme godine raspolagati iznosom od 80000 kn? Obračun kamata je složen, godišnji i dekurzivni, a banka primjenjuje fiksnu godišnju kamatnu stopu p = 10.

Rješenje 028

n = 8, S_8 = 80000 kn, p = 10, R = ?

Ako se jednaki iznosi R uplaćuju (isplaćuju) početkom svakog razdoblja (n promatranih razdoblja) uz složeni, dekurzivni obračun kamata i fiksnu kamatnu stopu p (za promatrano razdoblje ukamaćivanja), tada te uplate (isplate) zovemo prenumerando uplate (isplate).
Formula za računanje prenumerando uplate (isplate):

$$R = S_n \cdot \frac{r - 1}{r \cdot \left(r^n - 1\right)}.$$

Najprije izračunamo dekurzivni kamatni faktor r:

$$\left.\begin{array}{l} p = 10 \\ r = 1 + \frac{p}{100} \end{array}\right\} \Rightarrow r = 1 + \frac{10}{100} \Rightarrow r = 1 + 0.1 \Rightarrow r = 1.1.$$

Računamo prenumerando uplate:

$$\left.\begin{array}{l} n=8 \\ R=S_n\cdot\dfrac{r-1}{r\cdot\left(r^n-1\right)} \end{array}\right\} \Rightarrow R=S_8\cdot\frac{r-1}{r\cdot\left(r^8-1\right)} \Rightarrow R=80000\cdot\frac{1.1-1}{1.1\cdot\left(1.1^8-1\right)} \Rightarrow R=6359.56\ kn.$$

Vježba 028

Koliki iznos treba uplaćivati u banku početkom svake godine ako se želi na kraju osme godine raspolagati iznosom od 40000 kn? Obračun kamata je složen, godišnji i dekurzivni, a banka primjenjuje fiksnu godišnju kamatnu stopu p = 10.

Rezultat: 3179.78 kn.

Zadatak 029 (Ivvy, trgovačka škola)

Koliko se prenumerando nominalno jednakih godišnjih uplata po 10000 kn mora uplatiti da bi se raspolagalo iznosom 120000 kn? Obračun kamata je složen, godišnji i dekurzivni, a banka obračunava kamate uz fiksnu godišnju kamatnu stopu p = 10.

Rješenje 029

R = 10000 kn, S_n = 120000 kn, p = 10, n = ?

Ponovimo!

$$\log a^n=n\cdot\log a \quad , \quad \log\frac{a}{b}=\log a-\log b.$$

Ako se jednaki iznosi R uplaćuju (isplaćuju) početkom svakog razdoblja (n promatranih razdoblja) uz složeni, dekurzivni obračun kamata i fiksnu kamatnu stopu p (za promatrano razdoblje ukamaćivanja), tada te uplate (isplate) zovemo prenumerando uplate (isplate).

Formula za računanje konačne vrijednosti prenumerando uplata (isplata):

$$S_n=R\cdot r\cdot\frac{r^n-1}{r-1}.$$

Najprije izračunamo dekurzivni kamatni faktor r:

$$\left.\begin{array}{l} p=10 \\ r=1+\dfrac{p}{100} \end{array}\right\} \Rightarrow r=1+\frac{10}{100} \Rightarrow r=1+0.1 \Rightarrow r=1.1.$$

Iz formule za računanje konačne vrijednosti prenumerando uplata (isplata) dobije se n:

$$S_n=R\cdot r\cdot\frac{r^n-1}{r-1} \Rightarrow 120000=10000\cdot 1.1\cdot\frac{1.1^n-1}{1.1-1} \Rightarrow 120000=10000\cdot 1.1\cdot\frac{1.1^n-1}{0.1}\ /\cdot 0.1 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 12000=10000\cdot 1.1\cdot\left(1.1^n-1\right) \Rightarrow 12000=11000\cdot\left(1.1^n-1\right)\ /:1000 \Rightarrow 12=11\cdot\left(1.1^n-1\right) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 12=11\cdot\left(1.1^n-1\right)\ /:11 \Rightarrow \frac{12}{11}=1.1^n-1 \Rightarrow 1.1^n-1=\frac{12}{11} \Rightarrow 1.1^n=\frac{12}{11}+1 \Rightarrow 1.1^n=\frac{23}{11} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{bmatrix}\text{logaritmiramo} \\ \text{izraz}\end{bmatrix} \Rightarrow 1.1^n=\frac{23}{11}\ /\log \Rightarrow \log 1.1^n=\log\frac{23}{11} \Rightarrow n\cdot\log 1.1=\log 23-\log 11 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow n=\frac{\log 23-\log 11}{\log 1.1} \Rightarrow n=7.7389314 \Rightarrow n\approx 8 \text{ godina}.$$

Vježba 029

Koliko se prenumerando nominalno jednakih godišnjih uplata po 5000 kn mora uplatiti da bi se raspolagalo iznosom 60000 kn? Obračun kamata je složen, godišnji i dekurzivni, a banka obračunava kamate uz fiksnu godišnju kamatnu stopu p = 10.

Rezultat: n ≈ 8 godina.

Zadatak 030 (Ivvy, trgovačka škola)

Početkom svake godine, uzastopno 2 godine, neka osoba ulaže 4000 kn. Ako na kraju druge godine može raspolagati iznosom od 9000 kn, uz koliku je kamatnu stopu vršeno ukamaćivanje? Obračun kamata je složen, godišnji i dekurzivni.

www.halapa.com

Rješenje 030

n = 2, R = 4000 kn, S_n = 9000 kn, p = ?

Ponovimo!

$$a^2 - b^2 = (a-b)\cdot(a+b).$$

Ako se jednaki iznosi R uplaćuju (isplaćuju) početkom svakog razdoblja (n promatranih razdoblja) uz složeni, dekurzivni obračun kamata i fiksnu kamatnu stopu p (za promatrano razdoblje ukamaćivanja), tada te uplate (isplate) zovemo prenumerando uplate (isplate).

Formula za računanje konačne vrijednosti prenumerando uplata (isplata):

$$S_n = R\cdot r\cdot\frac{r^n-1}{r-1}.$$

Iz formule za računanje konačne vrijednosti prenumerando uplata (isplata) dobije se dekurzivni kamatni faktor r:

$$\left.\begin{array}{l} n=2 \\ S_n = R\cdot r\cdot\dfrac{r^n-1}{r-1}\end{array}\right\} \Rightarrow S_2 = R\cdot r\cdot\frac{r^2-1}{r-1} \Rightarrow S_2 = R\cdot r\cdot\frac{(r-1)\cdot(r+1)}{r-1} \Rightarrow S_2 = R\cdot r\cdot(r+1) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 9000 = 4000\cdot r\cdot(r+1)\ /:1000 \Rightarrow 9 = 4\cdot r\cdot(r+1) \Rightarrow 9 = 4\cdot r^2 + 4\cdot r \Rightarrow 4\cdot r^2 + 4\cdot r - 9 = 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \left.\begin{array}{l} a=4\ ,\ b=4\ ,\ c=-9 \\ r_{1,2} = \dfrac{-b\pm\sqrt{b^2-4\cdot a\cdot c}}{2\cdot a}\end{array}\right\} \Rightarrow r_{1,2} = \frac{-4\pm\sqrt{16-4\cdot 4\cdot(-9)}}{2\cdot 4} \Rightarrow r_{1,2} = \frac{-4\pm\sqrt{16+144}}{8} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow r_{1,2} = \frac{-4\pm\sqrt{160}}{8} \Rightarrow \left.\begin{array}{l} r_1 = \dfrac{-4+\sqrt{160}}{8} \\ r_2 = \dfrac{-4-\sqrt{160}}{8}\end{array}\right\}.$$

Budući da je p > 0, slijedi r > 1 pa

$$r_2 = \frac{-4-\sqrt{160}}{8}$$

ne može biti rješenje. Znači da je dekurzivni kamatni faktor jednak:

$$r = \frac{-4+\sqrt{160}}{8} \Rightarrow r = 1.08113883.$$

Kamatna stopa iznosi:

$$r = 1 + \frac{p}{100} \Rightarrow \frac{p}{100} = r - 1\ /\cdot 100 \Rightarrow p = 100\cdot(r-1) \Rightarrow p = 100\cdot(1.08113883 - 1) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow p = 100\cdot 0.08113883 \Rightarrow p = 8.113883.$$

Vježba 030

Početkom svake godine, uzastopno 2 godine, neka osoba ulaže 2000 kn. Ako na kraju druge godine može raspolagati iznosom od 4500 kn, uz koliku je kamatnu stopu vršeno ukamaćivanje? Obračun kamata je složen, godišnji i dekurzivni.

Rezultat: p = 8.113883.

Zadatak 031 (Anamarija, maturantica TUPŠ-a)

Koja glavnica daje uz 10% ukamaćivanja 23205 kn kamata za 4 godine? (kamate se pribrajaju glavnici svake godine)

Rješenje 031

p = 10, K = 23205 kn, n = 4, C_0 = ?

Složene kamate su kamate koje se izračunavaju za svako razdoblje ukamaćivanja od promjenljive glavnice, tj. uz kamate glavnice obračunavaju se i kamate na kamate.

www.halapa.com

Dekurzivni obračun kamata je obračun kamata na kraju razdoblja ukamaćivanja od glavnice s početka tog razdoblja.

Neka je:

C_0 – početna (sadašnja) vrijednost glavnice
n – broj godina trajanja kapitalizacije
p – fiksni godišnji kamatnjak
C_n – konačna (buduća) vrijednost glavnice.

Konačna vrijednost uloga je:

$$C_n = C_0 \cdot \left(1 + \frac{p}{100}\right)^n .$$

Ukupne složene kamate za to razdoblje iznose:

$$K = C_n - C_0.$$

Računamo početnu vrijednost ili glavnicu C_0:

$$K = C_n - C_0 \Rightarrow K = C_0 \cdot \left(1 + \frac{p}{100}\right)^n - C_0 \Rightarrow K = C_0 \cdot \left(\left(1 + \frac{p}{100}\right)^n - 1\right) \Rightarrow C_0 = \frac{K}{\left(1 + \frac{p}{100}\right)^n - 1} =$$

$$= \frac{23205\ kn}{\left(1 + \frac{10}{100}\right)^4 - 1} = \frac{23205\ kn}{1.1^4 - 1} = 50000\ kn.$$

Vježba 031

Koja glavnica daje uz 10% ukamaćivanja 46410 kn kamata za 4 godine? (kamate se pribrajaju glavnici svake godine)

Rezultat: 100 000 kn.

www.halapa.com

Zadatak 032 (Zahvalna Marina ☺, studentica)

Potrošački kredit za kupnju TV-prijamnika odobrila je banka u iznosu 7500.00 kn uz godišnju kamatnu stopu 12% i udjel u gotovini 15% i rok otplate 18 mjeseci. Izračunajte ukupne kamate i iznos mjesečne rate otplate.

Rješenje 032

Veličine koje se javljaju kod potrošačkog kredita:

C – iznos odobrenog potrošačkog kredita	
p% - učešće u gotovini , P - udio	$P = \frac{C \cdot p}{100}$
C_1 – iznos stvarnog kredita	$C_1 = C - P$
q – anticipativna kamatna stopa (obračunavanje kamata je anticipativno, tj. kamate se obračunavaju na početku svakog mjeseca od ostatka dugovanja)	
m – rok otplate potrošačkog kredita u mjesecima	
k – anticipativni kamatni koeficijent	$k = \frac{q \cdot (m+1)}{24}$
K – ukupne kamate	$K = \frac{C_1 \cdot k}{100}$
C_2 – ukupno dugovanje	$C_2 = C_1 + K$
R – iznos konstantne mjesečne rate	$R = \frac{C_2}{m}$

Ako je iznos rate decimalni broj, radimo ovako:

1. za iznos svih mjesečnih rata osim (obično) prve uzima se cjelobrojni dio decimalnog broja
2. za prvu ratu uzima se cjelobrojni dio decimalnog broja plus decimalni dio decimalnog broja pomnožen s brojem mjeseci

Shema:

$$\left.\begin{matrix} C \\ p \\ q \\ m \end{matrix}\right\} \Rightarrow \left\{ P = \frac{C \cdot p}{100} \right\} \Rightarrow \left\{ \begin{matrix} C_1 = C - P \\ k = \frac{q \cdot (m+1)}{24} \end{matrix} \right\} \Rightarrow \left\{ K = \frac{C_1 \cdot k}{100} \right\} \Rightarrow \left\{ \begin{matrix} C_2 = C_1 + K \\ R = \frac{C_2}{m} \end{matrix} \right\}$$

Rješenje zadatka glasi:

C = 7500.00 kn, q = 12, p = 15, m = 18 mj, K = ?, R = ?

C – iznos odobrenog potrošačkog kredita	C = 7500.00 kn
P - udio	$P = \frac{C \cdot p}{100} = \frac{7500.00 \cdot 15}{100} = 1125.00\ kn$
C_1 – iznos stvarnog kredita	$C_1 = C - P = 7500.00\ kn - 1125.00\ kn = 6375.00\ kn$
q – anticipativna kamatna stopa	12
m – rok otplate u mjesecima	18
k – anticipativni kamatni koeficijent	$k = \frac{q \cdot (m+1)}{24} = \frac{12 \cdot (18+1)}{24} = \frac{12 \cdot 19}{24} = 9.5$
K – ukupne kamate	$K = \frac{C_1 \cdot k}{100} = \frac{6375.00\ kn \cdot 9.5}{100} = 605.63\ kn$
C_2 – ukupno dugovanje	$C_2 = C_1 + K = 6375.00\ kn + 605.63\ kn = 6980.63\ kn$
R – iznos konstantne mjesečne rate	$R = \frac{C_2}{m} = \frac{6980.63\ kn}{18} = 387.81\ kn \approx 387.00\ kn$
R_1 – prva rata	R_1 = 387.00 kn + 0.81 kn · 18 = 401.58 kn

Vježba 032

Potrošački kredit za kupnju robe odobrila je banka u iznosu 28000.00 kn uz godišnju kamatnu stopu 6% i udjel u gotovini 10% i rok otplate 3 godine. Izračunajte ukupne kamate i iznos mjesečne rate otplate.

Rezultat: K = 2331.00 kn , R = 764.00 kn , R1 = 791.00 kn.

www.hala

Zadatak 033 (Jakov, student)

Koliki iznos treba štediša uložiti danas u banku ako želi da na osnovi te uplate na kraju osme godine (računajući od danas) raspolaže iznosom od 50 000 kn? Obračun kamata je složen, godišnji i dekurzivan, a banka obračunava kamate po kvartalnoj stopi p = 2.

Rješenje 033

Ponovimo!

Kod dekurzivnog načina obračuna kamata kamate se obračunavaju i pripisuju na kraju svakog razdoblja ukamaćivanja. Kamatnu stopu označavamo s p.

Ako je C_0 početna vrijednost uloga, n broj ukamaćivanja, p fiksna kamatna stopa (za vrijeme ukamaćivanja), C_n konačna vrijednost uloga, tada je:

$$C_n = C_0 \cdot r^n \quad , \quad r = 1 + \frac{p}{100} \text{ dekurzivni kamatni faktor.}$$

Propisana kamatna stopa za osnovni vremenski interval naziva se nominalna (zadana) kamatna stopa.

Razlikujemo:

- a – duljina osnovnog vremenskog intervala na koji se odnosi nominalna kamatna stopa
- b – duljina osnovnog vremenskog intervala u kojem se obavlja ukamaćivanje

Ako su ti osnovni vremenski intervali jednake duljine tada se nominalna kamatna stopa može direktno primjenjivati u obračunavanju kamata.

Ako osnovni vremenski intervali nisu jednake duljine, potrebno je preračunati nominalnu kamatnu stopu na vremenske intervale ukamaćivanja. Treba ustanoviti koliko se puta (m) provodi obračun kamata u odnosu prema osnovnom vremenskom intervalu nominalne kamatne stope:

$$m = \frac{a}{b}.$$

Ako se nominalna kamatna stopa p podijeli sa m, dobije se relativna kamatna stopa p_r:

$$p_r = \frac{p}{m}.$$

Budući da je obračun kamata godišnji, banka u godini dana jednom obračuna kamate. Za 8 godina banka će 8 puta obračunati kamate.

n = 8, C_8 = 50 000 kn, b = 12 mj, a = 3 mj, p = 2, C_0 = ?

p = 2 nominalna kvartalna kamatna stopa i ukamaćivanje godišnje

$$\left.\begin{array}{l} p = 2 \\ a = 3\ mj \\ b = 12\ mj \end{array}\right\} \Rightarrow m = \frac{a}{b} = \frac{3\ mj}{12\ mj} = \frac{1}{4} \Rightarrow p_r = \frac{p}{m} = \frac{2}{\frac{1}{4}} = 8 \text{ relativna kamatna stopa}.$$

Dekurzivni kamatni faktor:

$$r = 1 + \frac{p_r}{100} \Rightarrow r = 1 + \frac{8}{100} \Rightarrow r = 1.08.$$

Računamo početnu vrijednost uloga C_0:

$$C_8 = C_0 \cdot r^8 \Rightarrow C_0 = \frac{C_8}{r^8} \Rightarrow C_0 = \frac{50000\ kn}{1.08^8} \Rightarrow C_0 = 27013.44\ kn.$$

Vježba 033

Koliki iznos treba štediša uložiti danas u banku ako želi da na osnovi te uplate na kraju osme godine (računajući od danas) raspolaže iznosom od 100 000 kn? Obračun kamata je složen, godišnji i dekurzivan, a banka obračunava kamate po kvartalnoj stopi p = 2.

Rezultat: 54026.89 kn.

www.halapa.com

Zadatak 034 (Jakov, student)

Koliki iznos treba štediša uložiti danas u banku ako želi da na osnovi te uplate na kraju osme godine (računajući od danas) raspolaže iznosom od 50 000 kn? Obračun kamata je složen, godišnji i dekurzivan, a banka obračunava kamate po godišnjoj stopi p = 2.

Rješenje 034

Ponovimo!

Kod dekurzivnog načina obračuna kamata kamate se obračunavaju i pripisuju na kraju svakog razdoblja ukamaćivanja. Kamatnu stopu označavamo s p.

Ako je C_0 početna vrijednost uloga, n broj ukamaćivanja, p fiksna kamatna stopa (za vrijeme ukamaćivanja), C_n konačna vrijednost uloga, tada je:

$$C_n = C_0 \cdot r^n \quad , \quad r = 1 + \frac{p}{100} \text{ dekurzivni kamatni faktor}.$$

Propisana kamatna stopa za osnovni vremenski interval naziva se nominalna (zadana) kamatna stopa. Razlikujemo:

- a – duljina osnovnog vremenskog intervala na koji se odnosi nominalna kamatna stopa
- b – duljina osnovnog vremenskog intervala u kojem se obavlja ukamaćivanje

Ako su ti osnovni vremenski intervali jednake duljine tada se nominalna kamatna stopa može direktno primjenjivati u obračunavanju kamata.

Ako osnovni vremenski intervali nisu jednake duljine, potrebno je preračunati nominalnu kamatnu stopu na vremenske intervale ukamaćivanja. Treba ustanoviti koliko se puta (m) provodi obračun kamata u odnosu prema osnovnom vremenskom intervalu nominalne kamatne stope:

$$m = \frac{a}{b}.$$

Ako se nominalna kamatna stopa p podijeli sa m, dobije se relativna kamatna stopa p_r:

$$p_r = \frac{p}{m}.$$

Budući da je obračun kamata godišnji, banka u godini dana jednom obračuna kamate. Za 8 godina banka će 8 puta obračunati kamate.

n = 8, C_8 = 50 000 kn, b = 12 mj, a = 12 mj, p = 2, C_0 = ?

p = 2 nominalna godišnja kamatna stopa i ukamaćivanje godišnje

$$\left.\begin{array}{l} p=2 \\ a=12\ mj \\ b=12\ mj \end{array}\right\} \Rightarrow m=\frac{a}{b}=\frac{12\ mj}{12\ mj}=1 \Rightarrow p_r=\frac{p}{m}=\frac{2}{1}=2 \Rightarrow p_r=p=2.$$

Dekurzivni kamatni faktor:

$$r=1+\frac{p_r}{100} \Rightarrow r=1+\frac{2}{100} \Rightarrow r=1.02.$$

Računamo početnu vrijednost uloga C_0:

$$C_8=C_0\cdot r^8 \Rightarrow C_0=\frac{C_8}{r^8} \Rightarrow C_0=\frac{50000\ kn}{1.02^8} \Rightarrow C_0=42674.52\ kn.$$

Vježba 034

Koliki iznos treba štediša uložiti danas u banku ako želi da na osnovi te uplate na kraju osme godine (računajući od danas) raspolaže iznosom od 100 000 kn? Obračun kamata je složen, godišnji i dekurzivan, a banka obračunava kamate po godišnjoj stopi p = 2.

Rezultat: 85349.04 kn.

Zadatak 035 (Jakov, student)

Koliki iznos treba štediša uložiti danas u banku ako želi da na osnovi te uplate na kraju osme godine (računajući od danas) raspolaže iznosom od 50 000 kn? Obračun kamata je složen, kvartalni i dekurzivan, a banka obračunava kamate po godišnjoj stopi p = 2.

Rješenje 035

Ponovimo!

Kod dekurzivnog načina obračuna kamata kamate se obračunavaju i pripisuju na kraju svakog razdoblja ukamaćivanja. Kamatnu stopu označavamo s p.

Ako je C_0 početna vrijednost uloga, n broj ukamaćivanja, p fiksna kamatna stopa (za vrijeme ukamaćivanja), C_n konačna vrijednost uloga, tada je:

$$C_n=C_0\cdot r^n \quad , \quad r=1+\frac{p}{100} \text{ dekurzivni kamatni faktor.}$$

Propisana kamatna stopa za osnovni vremenski interval naziva se nominalna (zadana) kamatna stopa. Razlikujemo:

- a – duljina osnovnog vremenskog intervala na koji se odnosi nominalna kamatna stopa
- b – duljina osnovnog vremenskog intervala u kojem se obavlja ukamaćivanje

Ako su ti osnovni vremenski intervali jednake duljine tada se nominalna kamatna stopa može direktno primjenjivati u obračunavanju kamata.

Ako osnovni vremenski intervali nisu jednake duljine, potrebno je preračunati nominalnu kamatnu stopu na vremenske intervale ukamaćivanja. Treba ustanoviti koliko se puta (m) provodi obračun kamata u odnosu prema osnovnom vremenskom intervalu nominalne kamatne stope:

$$m=\frac{a}{b}.$$

Ako se nominalna kamatna stopa p podijeli sa m, dobije se relativna kamatna stopa p_r:

$$p_r=\frac{p}{m}.$$

Budući da je obračun kamata kvartalni, banka u godini dana četiri puta obračuna kamate. Za 8 godina banka će 32 puta obračunati kamate.

n = 32, C_{32} = 50 000 kn, b = 3 mj, a = 12 mj, p = 2, C_0 = ?

p = 2 nominalna kvartalna kamatna stopa i ukamaćivanje godišnje

www.halapa.com

$$\left.\begin{array}{l} p=2 \\ a=12\ mj \\ b=3\ mj \end{array}\right\} \Rightarrow m=\frac{a}{b}=\frac{12\ mj}{3\ mj}=4 \Rightarrow p_r=\frac{p}{m}=\frac{2}{4}=0.5 \text{ relativna kamatna stopa.}$$

Dekurzivni kamatni faktor:

$$r=1+\frac{p_r}{100} \Rightarrow r=1+\frac{0.5}{100} \Rightarrow r=1.005.$$

Računamo početnu vrijednost uloga C_0:

$$C_{32}=C_0 \cdot r^{32} \Rightarrow C_0=\frac{C32}{r^{32}} \Rightarrow C_0=\frac{50000\ kn}{1.005^{32}} \Rightarrow C_0=42624.18\ kn.$$

Vježba 035

Koliki iznos treba štediša uložiti danas u banku ako želi da na osnovi te uplate na kraju osme godine (računajući od danas) raspolaže iznosom od 100 000 kn? Obračun kamata je složen, kvartalni i dekurzivan, a banka obračunava kamate po godišnjoj stopi p = 2.

Rezultat: 85248.36 kn.

Zadatak 036 (Jakov, student)

Koliki iznos treba štediša uložiti danas u banku ako želi da na osnovi te uplate na kraju osme godine (računajući od danas) raspolaže iznosom od 50 000 kn? Obračun kamata je složen, kvartalni i dekurzivan, a banka obračunava kamate po kvartalnoj stopi p = 2.

Rješenje 036

Ponovimo!

Kod dekurzivnog načina obračuna kamata kamate se obračunavaju i pripisuju na kraju svakog razdoblja ukamaćivanja. Kamatnu stopu označavamo s p.

www.halapa.com

Ako je C_0 početna vrijednost uloga, n broj ukamaćivanja, p fiksna kamatna stopa (za vrijeme ukamaćivanja), C_n konačna vrijednost uloga, tada je:

$$C_n=C_0 \cdot r^n \quad , \quad r=1+\frac{p}{100} \text{ dekurzivni kamatni faktor.}$$

Propisana kamatna stopa za osnovni vremenski interval naziva se nominalna (zadana) kamatna stopa. Razlikujemo:

- a – duljina osnovnog vremenskog intervala na koji se odnosi nominalna kamatna stopa
- b – duljina osnovnog vremenskog intervala u kojem se obavlja ukamaćivanje

Ako su ti osnovni vremenski intervali jednake duljine tada se nominalna kamatna stopa može direktno primjenjivati u obračunavanju kamata.

Ako osnovni vremenski intervali nisu jednake duljine, potrebno je preračunati nominalnu kamatnu stopu na vremenske intervale ukamaćivanja. Treba ustanoviti koliko se puta (m) provodi obračun kamata u odnosu prema osnovnom vremenskom intervalu nominalne kamatne stope:

$$m=\frac{a}{b}.$$

Ako se nominalna kamatna stopa p podijeli sa m, dobije se relativna kamatna stopa p_r:

$$p_r=\frac{p}{m}.$$

Budući da je obračun kamata kvartalni, banka u godini dana četiri puta obračuna kamate. Za 8 godina banka će 32 puta obračunati kamate.

n = 32, C_{32} = 50 000 kn, b = 3 mj, a = 3 mj, p = 2, C_0 = ?

p = 2 nominalna kvartalna kamatna stopa i ukamaćivanje kvartalno

$$\left.\begin{array}{l} p=2 \\ a=3\ mj \\ b=3\ mj \end{array}\right\} \Rightarrow m=\frac{a}{b}=\frac{3\ mj}{3\ mj}=1 \Rightarrow p_r=\frac{p}{m}=\frac{2}{1}=2 \Rightarrow p_r=p=2.$$

Dekurzivni kamatni faktor:

$$r = 1 + \frac{p_r}{100} \Rightarrow r = 1 + \frac{2}{100} \Rightarrow r = 1.02.$$

Računamo početnu vrijednost uloga C_0:

$$C_{32} = C_0 \cdot r^{32} \Rightarrow C_0 = \frac{C_{32}}{r^{32}} \Rightarrow C_0 = \frac{50000\ kn}{1.02^{32}} \Rightarrow C_0 = 26531.67\ kn.$$

Vježba 036

Koliki iznos treba štediša uložiti danas u banku ako želi da na osnovi te uplate na kraju osme godine (računajući od danas) raspolaže iznosom od 100 000 kn? Obračun kamata je složen, kvartalni i dekurzivan, a banka obračunava kamate po kvartalnoj stopi p = 2.

Rezultat: 53063.33 kn.

Zadatak 037 (Marina, studentica)

Štediša ima na kraju pete godine iznos od 40 000.00 kuna. Koliko je morao ulagati početkom svake godine, ako je fiksna stopa za obračun složenih, dekurzivnih i polugodišnjih kamata 7%?

Rješenje 037

Ponovimo!

Ako se jednaki iznosi R uplaćuju (isplaćuju) početkom svakog razdoblja (n promatranih razdoblja) uz složeni, dekurzivni obračun kamata i fiksnu kamatnu stopu p (za promatrano razdoblje ukamaćivanja), tada te uplate (isplate) zovemo prenumerando uplate (isplate).
Formula za računanje prenumerando uplate (isplate):

$$R = S_n \cdot \frac{r-1}{r \cdot \left(r^n - 1\right)}.$$

Propisana kamatna stopa za osnovni vremenski interval naziva se nominalna (zadana) kamatna stopa.
Razlikujemo:

- a – duljina osnovnog vremenskog intervala na koji se odnosi nominalna kamatna stopa
- b – duljina osnovnog vremenskog intervala u kojem se obavlja ukamaćivanje

Ako su ti osnovni vremenski intervali jednake duljine tada se nominalna kamatna stopa može direktno primjenjivati u obračunavanju kamata.

Ako osnovni vremenski intervali nisu jednake duljine, potrebno je preračunati nominalnu kamatnu stopu na vremenske intervale ukamaćivanja. Treba ustanoviti koliko se puta (m) provodi obračun kamata u odnosu prema osnovnom vremenskom intervalu nominalne kamatne stope:

$$m = \frac{a}{b}.$$

Ako se nominalna kamatna stopa p podijeli sa m, dobije se relativna kamatna stopa p_r:

$$p_r = \frac{p}{m}.$$

n = 5, S_5 = 40 000.00 kn, p = 7, a = 6 mj, b = 12 mj, R = ?

p = 7 nominalna polugodišnja kamatna stopa i ukamaćivanje godišnje

$$\left.\begin{array}{l} p = 7 \\ a = 6\ mj \\ b = 12\ mj \end{array}\right\} \Rightarrow m = \frac{a}{b} = \frac{6\ mj}{12\ mj} = \frac{1}{2} \Rightarrow p_r = \frac{p}{m} = \frac{7}{\frac{1}{2}} = 14.$$

Dekurzivni kamatni faktor:

$$r = 1 + \frac{p_r}{100} \Rightarrow r = 1 + \frac{14}{100} \Rightarrow r = 1.14.$$

$$\left.\begin{array}{l} n = 5 \\ R = S_n \cdot \dfrac{r-1}{r \cdot \left(r^n - 1\right)} \end{array}\right\} \Rightarrow R = S_5 \cdot \frac{r-1}{r \cdot \left(r^5 - 1\right)} \Rightarrow R = 40000.00\ kn \cdot \frac{1.14 - 1}{1.14 \cdot \left(1.14^5 - 1\right)} \Rightarrow R = 5308.19\ kn.$$

www.halapa.com

Vježba 037

Štediša ima na kraju pete godine iznos od 80 000.00 kuna. Koliko je morao ulagati početkom svake godine, ako je fiksna stopa za obračun složenih, dekurzivnih i polugodišnjih kamata 7%?

Rezultat: 10616.39 kn.

Zadatak 038 (Jasmina, buduća ekonomistica)

Neki se iznos oroči na deset godina. Banka je najprije primjenjivala godišnju stopu 5%, a onda 4%. Koliko je godina banka primjenjivala prvu, a koliko godina drugu kamatnu stopu, ako se ulazni iznos povećao 55.28%? Obračun kamata je godišnji i dekurzivan.

Rješenje 038

Ponovimo!

Kod **dekurzivnog** načina obračuna kamata kamate se obračunavaju i pripisuju na kraju svakog razdoblja ukamaćivanja. Kamatnu stopu označavamo s p.

Ako je C_0 početna vrijednost uloga, n broj ukamaćivanja, p fiksna kamatna stopa (za vrijeme ukamaćivanja), C_n konačna vrijednost uloga, tada je:

$$C_n = C_0 \cdot r^n \quad , \quad r = 1 + \frac{p}{100}.$$

$$a^{-n} = \frac{1}{a^n} \quad , \quad \frac{a^x}{b^x} = \left(\frac{a}{b}\right)^x \quad , \quad a^x \cdot a^y = a^{x+y} \quad , \quad \log a^n = n \cdot \log a \quad , \quad \log \frac{a}{b} = \log a - \log b.$$

Neka je x broj godina za koji je banka primjenjivala godišnju stopu 5%. Tada je 10 – x broj godina za koji banka primjenjuje godišnju stopu 4%.

Ukupan iznos nakon x godina iznosi:

$$\left.\begin{matrix} p = 5 \ , \ r = 1 + \frac{p}{100} \\ C_x = C_0 \cdot r^x \end{matrix}\right\} \Rightarrow \left.\begin{matrix} r = 1 + \frac{5}{100} \\ C_x = C_0 \cdot r^x \end{matrix}\right\} \Rightarrow \left.\begin{matrix} r = 1.05 \\ C_x = C_0 \cdot r^x \end{matrix}\right\} \Rightarrow C_x = C_0 \cdot 1.05^x.$$

Sada je C_x početna vrijednost uloga za idućih 10 – x godina pa vrijedi:

$$\left.\begin{matrix} p = 4 \ , \ r = 1 + \frac{p}{100} \\ C_{10-x} = C_x \cdot r^{10-x} \end{matrix}\right\} \Rightarrow \left.\begin{matrix} r = 1 + \frac{4}{100} \\ C_{10-x} = C_x \cdot r^{10-x} \end{matrix}\right\} \Rightarrow \left.\begin{matrix} r = 1.04 \\ C_{10-x} = C_x \cdot r^{10-x} \end{matrix}\right\} \Rightarrow C_{10-x} = C_x \cdot 1.04^{10-x} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow C_{10-x} = C_0 \cdot 1.05^x \cdot 1.04^{10-x}.$$

Budući da se ulazni iznos povećao 55.28%, dobije se:

$$C_{10-x} = C_0 + \frac{55.28}{100} \cdot C_0 \Rightarrow C_{10-x} = C_0 + 0.5528 \cdot C_0 \Rightarrow C_{10-x} = 1.5528 \cdot C_0.$$

Računamo broj godina x:

$$\left.\begin{matrix} C_{10-x} = C_0 \cdot 1.05^x \cdot 1.04^{10-x} \\ C_{10-x} = 1.5528 \cdot C_0 \end{matrix}\right\} \Rightarrow C_0 \cdot 1.05^x \cdot 1.04^{10-x} = 1.5528 \cdot C_0 \ /:C_0 \Rightarrow 1.05^x \cdot 1.04^{10-x} = 1.5528 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 1.05^x \cdot 1.04^{10} \cdot 1.04^{-x} = 1.5528 \Rightarrow 1.05^x \cdot 1.04^{10} \cdot \frac{1}{1.04^x} = 1.5528 \Rightarrow \frac{1.05^x}{1.04^x} \cdot 1.04^{10} = 1.5528 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \left(\frac{1.05}{1.04}\right)^x \cdot 1.04^{10} = 1.5528 \ / \cdot \frac{1}{1.04^{10}} \Rightarrow \left(\frac{1.05}{1.04}\right)^x = \frac{1.5528}{1.04^{10}} \Rightarrow \left[\begin{matrix} \text{logaritmiramo} \\ \text{jednadžbu} \end{matrix}\right] \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \left(\frac{1.05}{1.04}\right)^x = \frac{1.5528}{1.04^{10}} \ / \log \Rightarrow \log\left(\frac{1.05}{1.04}\right)^x = \log \frac{1.5528}{1.04^{10}} \Rightarrow x \cdot \log \frac{1.05}{1.04} = \log \frac{1.5528}{1.04^{10}} \Rightarrow$$

www.halapa.com

$$\Rightarrow\ x=\frac{\log\frac{1.5528}{1.04^{10}}}{\log\frac{1.05}{1.04}}\ \Rightarrow\ x=\frac{\log 1.5528-10\cdot\log 1.04}{\log 1.05-\log 1.04}\ \Rightarrow\ x=5\ godina.$$

Banka je primjenjivala 5 godina prvu i 5 godina (10 – 5) drugu kamatnu stopu.

Vježba 038

Neki se iznos oroči na deset godina. Banka je najprije primjenjivala godišnju stopu 5%, a onda 4%. Koliko je godina banka primjenjivala prvu, a koliko godina drugu kamatnu stopu, ako se ulazni iznos povećao 60%? Obračun kamata je godišnji i dekurzivan.

Rezultat: 8 godina i 2 godine.

Zadatak 039 (Neno, ekonomska škola)

Koliko treba uložiti u banku da bismo nakon 1 godine i 4 mjeseca mogli podići 11000 kn? Obračun kamata je složen, četveromjesečni i anticipativni, a banka primjenjuje godišnju kamatnu stopu 12. Riješi zadatak primjenom relativne kamatne stope.

Rješenje 039

Ponovimo!

Kod **anticipativnog** načina obračuna kamata kamate se obračunavaju na početku razdoblja ukamaćivanja od glavnice s kraja tog razdoblja. Kamatnu stopu označavamo s q.

Neka je C_0 početna vrijednost uloga, n broj ukamaćivanja, q fiksna kamatna stopa (koja se odnosi na vrijeme ukamaćivanja), C_n konačna vrijednost uloga na kraju n – tog razdoblja ukamaćivanja.

Konačna vrijednost uloga je:

$$C_n=C_0\cdot\rho^n\qquad,\qquad\rho=\frac{100}{100-q}\ \text{anticipativni kamatni faktor}.$$

www.halapa.com

Početna vrijednost uloga iznosi:

$$C_0=\frac{C_n}{\rho^n}\ \Rightarrow\ C_0=C_n\cdot\left(1-\frac{q}{100}\right)^n.$$

Ako osnovni vremenski interval na koji se odnosi nominalna (zadana) kamatna stopa i osnovni vremenski interval u kojem se ukamaćuje nisu jednake duljine, treba preračunati nominalnu kamatnu stopu za vremenske intervala ukamaćivanja. Potrebno je najprije izračunati koliko se puta (m) provodi obračun kamata u odnosu prema osnovnom vremenskom intervalu nominalne kamatne stope:

$$m=\frac{a}{b},$$

gdje je:

- a – duljina osnovnog vremenskog intervala na koji se odnosi nominalna kamatna stopa
- b – duljina osnovnog vremenskog intervala u kojem se obavlja ukamaćivanje.

Relativna kamatna stopa za anticipativni obračuna kamata računa se formulom:

$$q_r=\frac{q}{m}.$$

Budući da je obračun kamata četveromjesečni, za 1 godinu (4 mj + 4 mj + 4mj) i 4 mjeseca banka će 4 puta obaviti ukamaćivanje:

n = 4.

Banka primjenjuje godišnju kamatnu stopu:

a = 12 mj.

Obračun kamata je četveromjesečni:

b = 4 mj.

$$\left.\begin{array}{l}a=12\ mj\\ b=4\ mj\end{array}\right\}\ \Rightarrow\ m=\frac{a}{b}\ \Rightarrow\ m=\frac{12\ mj}{4\ mj}\ \Rightarrow\ m=3.$$

q = 12, n = 4, m = 3, C_4 = 11 000 kn, C_0 = ?

Relativna kamatna stopa za anticipativni obračun kamata iznosi:

$$\left.\begin{array}{l} q=12 \\ m=3 \end{array}\right\} \Rightarrow q_r=\frac{q}{m} \Rightarrow q_r=\frac{12}{3} \Rightarrow q_r=4.$$

Početna vrijednost uloga je:

$$C_0=C_4\cdot\left(1-\frac{q_r}{100}\right)^4 \Rightarrow C_0=11000\cdot\left(1-\frac{4}{100}\right)^4 \Rightarrow C_0=11000\cdot 0.96^4 \Rightarrow C_0=9342.81\ kn.$$

Vježba 039

Koliko treba uložiti u banku da bismo nakon 1 godine i 4 mjeseca mogli podići 22000 kn? Obračun kamata je složen, četveromjesečni i anticipativni, a banka primjenjuje godišnju kamatnu stopu 12. Riješi zadatak primjenom relativne kamatne stope.

Rezultat: 18685.62 kn.

Zadatak 040 (Sanela, studentica)

Poduzeće treba isplatiti dugovanja koja dospijevaju:

- 10 000 kn krajem prve godine,
- 15 000 kn krajem četvrte godine,
- 18 000 kn krajem sedme godine.

Kojim iznosom može podmiriti cijelo dugovanja krajem pete godine? Obračun kamata je složen, godišnji i dekurzivni, a banka primjenjuje godišnju kamatnu stopu 6 za prvih pet godina i 10 nakon pete godine.

Rješenje 040

Ponovimo!

Kamate su naknada koju plaća dužnik za posuđenu glavnicu. Kamate se uvijek obračunavaju za neki osnovni vremenski interval. To može biti:

www.halapa.com

- mjesec (obračun kamata mjesečni)
- dva mjeseca (obračun kamata dvomjesečni)
- kvartal (obračun kamata kvartalni, tromjesečni)
- četiri mjeseca (obračun kamata četveromjesečni)
- polugodište (obračun kamata polugodišnji)
- godina (obračun kamata godišnji)
- dvije godine (obračun kamata dvogodišnji) itd.

Ako se kamate obračunavaju na kraju razdoblja ukamaćivanja od glavnice s početka tog razdoblja ukamaćivanja, tada se govori o dekurzivnom obračunu kamata.

Neka je C_0 početna vrijednost uloga, n broj ukamaćivanja, p fiksna kamatna stopa (koja se odnosi na vrijeme ukamaćivanja), C_n konačna vrijednost uloga na kraju n – tog razdoblja ukamaćivanja, K kamate. Konačna vrijednost uloga je:

$$C_n=C_0\cdot r^n \quad , \quad r=1+\frac{p}{100} \text{ dekurzivni kamatni faktor.}$$

Početna vrijednost uloga iznosi:

$$C_0=\frac{C_n}{r^n}.$$

Kamate su:

$$K=C_n-C_0.$$

Budući da se iznos od 10 000 kn koji dospijeva krajem prve godine podmiruje krajem pete godine, plaća se sa zakašnjenjem 4 godine (5 – 1) pa se mora platiti i pripadna kamata: $C_n = C_0 + K$.

C_0 = 10 000 kn, p = 6, n = 4, C_4 = ?

$$\left.\begin{array}{l} r=1+\frac{p}{100} \\ C_n=C_0\cdot r^n \end{array}\right\} \Rightarrow \left.\begin{array}{l} r=1+\frac{6}{100} \\ C_4=C_0\cdot r^4 \end{array}\right\} \Rightarrow \left.\begin{array}{l} r=1.06 \\ C_4=C_0\cdot r^4 \end{array}\right\} \Rightarrow C_4=10000\cdot 1.06^4 \Rightarrow C_4=12624.77\ kn.$$

Budući da se iznos od 15 000 kn koji dospijeva krajem četvrte godine podmiruje krajem pete godine, plaća se sa zakašnjenjem 1 godine (5 – 4) pa se mora platiti i pripadna kamata: $C_n = C_0 + K$.

C_0 = 15 000 kn, p = 6, n = 1, C_1 = ?

$$\left.\begin{array}{l} r=1+\dfrac{p}{100} \\ C_n=C_0\cdot r^n \end{array}\right\} \Rightarrow \left.\begin{array}{l} r=1+\dfrac{6}{100} \\ C_1=C_0\cdot r^1 \end{array}\right\} \Rightarrow \left.\begin{array}{l} r=1.06 \\ C_1=C_0\cdot r \end{array}\right\} \Rightarrow C_1=15000\cdot 1.06 \Rightarrow C_1=15900.00\ kn.$$

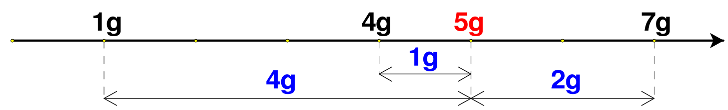
Budući da se iznos od 18 000 kn koji dospijeva krajem sedme godine podmiruje krajem pete godine, plaća se 2 godine ranije (7 – 5) pa će biti umanjen za kamate: $C_0 = C_n - K$.

$C_2 = 18\,000$ kn, $p = 10$, $n = 2$, $C_0 = ?$

$$\left.\begin{array}{l} r=1+\dfrac{p}{100} \\ C_0=\dfrac{C_n}{r^n} \end{array}\right\} \Rightarrow \left.\begin{array}{l} r=1+\dfrac{10}{100} \\ C_0=\dfrac{C_2}{r^2} \end{array}\right\} \Rightarrow \left.\begin{array}{l} r=1.1 \\ C_0=\dfrac{C_2}{r^2} \end{array}\right\} \Rightarrow C_0=\frac{18000}{1.1^2} \Rightarrow C_0=14876.03\ kn.$$

Cijelo dugovanje može se podmiriti iznosom:

$$C=C_4+C_1+C_0 \Rightarrow C=12624.77\ kn+15900.00\ kn+14876.03\ kn \Rightarrow C=43400.80\ kn.$$



Vježba 040

Poduzeće treba isplatiti dugovanja koja dospijevaju:

- 6 000 kn krajem prve godine,
- 8 000 kn krajem četvrte godine,
- 12 800 kn krajem sedme godine.

Kojim iznosom može podmiriti cijelo dugovanja krajem pete godine? Obračun kamata je složen, godišnji i dekurzivni, a banka primjenjuje godišnju kamatnu stopu 8 za prvih pet godina i 10 nakon pete godine.

Rezultat: 27 381.44 kn.

www.halapa.com