**Zadatak 001 (Denis, ekonomska škola)**

U banku je danas uloženo 10 000 kn. Kolika je vrijednost tog uloga na kraju pete godine ako je obračun kamata složen, godišnji i dekurzivan? Godišnja kamatna stopa je 10.

**Rješenje 001**

Postupak po kojem se kamate pribrajaju glavnici da bi se od tako uvećane glavnice izračunavale opet kamate, naziva se složeni kamatni račun.

$$C_n = C_0 \cdot r^n \quad , \quad r = 1 + \frac{p}{100} .$$

$C_n$ - konačna vrijednost uloga,
r - dekurzivi kamatni faktor,
$C_0$ - početna vrijednost uloga
p - fiksna kamatna stopa.

$C_0 = 10\,000, \qquad n = 5, \qquad p = 10, \qquad C_5 = ?$

$$r = 1 + \frac{p}{100} = 1 + \frac{10}{100} = 1 + 0.1 = 1.1.$$

$$C_5 = C_0 \cdot r^5 \quad => \quad C_5 = 10\,000 \cdot 1.1^5 \quad => \quad C_5 = 16\,105.10 \text{ kn}.$$

Vrijednost je 16 105.10 kn.

**Vježba 001**

U banku je danas uloženo 15 000 kn. Kolika je vrijednost tog uloga na kraju treće godine ako je obračun kamata složen, godišnji i dekurzivan? Godišnja kamatna stopa je 10.

**Rezultat:** $C_3 = 19\,965$ kn.

**Zadatak 002 (Xena, komercijalna škola)**

Kako iz formule za složeni kamatni račun uz dekurzivni način obračuna kamata izračunati zadanu veličinu?

**Rješenje 002**

Kod dekurzivnog načina obračuna kamata kamate se obračunavaju i pripisuju **na kraju svakog razdoblja ukamaćivanja.**

Postupak po kojem se kamate pribrajaju glavnici da bi se od tako uvećane glavnice izračunavale opet kamate, naziva se složeni kamatni račun.

$$C_n = C_0 \cdot r^n \quad , \quad r = 1 + \frac{p}{100} .$$

$C_n$ - konačna vrijednost uloga,
r - dekurzivi kamatni faktor,
$C_0$ - početna vrijednost uloga
p - fiksna kamatna stopa (za vrijeme ukamaćivanja)

1. **Tražimo $C_0$**

Cijelu jednadžbu

$$C_n = C_0 \cdot r^n$$

podijelimo s potencijom $r^n$:

$$C_n = C_0 \cdot r^n \quad / : r^n \quad \Rightarrow \quad C_0 = \frac{C_n}{r^n} = \frac{C_n}{\left(1 + \frac{p}{100}\right)^n} .$$

2. **Tražimo n**

Najprije podsjetimo se pravila za logaritam produkta i logaritam potencije:

$$[\log (a \cdot b) = \log a + \log b \quad , \quad \log a^n = n \cdot \log a]$$

Cijelu jednadžbu

$$C_n = C_0 \cdot r^n$$

logaritmirat ćemo kako bismo potenciju "preveli" u umnožak:

$$C_n = C_0 \cdot r^n \ /\log \ \Rightarrow \ \log C_n = \log C_0 \cdot r^n \ \Rightarrow \ \log C_n = \log C_0 + \log r^n \ \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \ \log C_n = \log C_0 + n \cdot \log r \ \Rightarrow \ -n \cdot \log r = \log C_0 - \log C_n \ /\cdot(-1) \ \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \ n \cdot \log r = \log C_n - \log C_0 \ /:\log r \ \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \ n = \frac{\log C_n - \log C_0}{\log r} \ \Rightarrow \ \left[\log a - \log b = \log \frac{a}{b}\right] \ \Rightarrow \ n = \frac{\log \frac{C_n}{C_0}}{\log r}.$$

3. **Tražimo r ili p**

Cijelu jednadžbu podijelimo s $C_0$, a zatim "vadimo" n-ti korijen (korjenujemo):

$$C_n = C_0 \cdot r^n \ /:C_0 \ \Rightarrow \ r^n = \frac{C_n}{C_0} \ /\sqrt[n]{\ } \ \Rightarrow \ r = \sqrt[n]{\frac{C_n}{C_0}}.$$

Ako računamo p, nastavljamo dalje:

$$r = \sqrt[n]{\frac{C_n}{C_0}} \ \Rightarrow \ 1 + \frac{p}{100} = \sqrt[n]{\frac{C_n}{C_0}} \ \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \ \frac{p}{100} = \sqrt[n]{\frac{C_n}{C_0}} - 1 \ /\cdot 100 \ \Rightarrow \ p = 100 \cdot \left(\sqrt[n]{\frac{C_n}{C_0}} - 1\right).$$

**Vježba 002**

Iz formule postotnog računa $100 \cdot P = C \cdot p$ izračunajte sve veličine.

**Rezultat:** $P\frac{C \cdot p}{100}$ , $C = \frac{100 \cdot P}{p}$ , $p = \frac{100 \cdot P}{C}$.

**Zadatak 003 (Ivana, ekonomska škola)**

Na štednoj knjižici neke osobe nalaze se sljedeći podaci:

| DATUM | UPLATA | ISPLATA | STANJE (SALDO) |
|---|---|---|---|
| 15.02. | 5000.00 kn | | 5000.00 kn |
| 14.04. | | 1000.00 kn | 4000.00 kn |
| 08.07. | 2000.00 kn | | 6000.00 kn |
| 21.10. | | 3500.00 kn | 2500.00 kn |

Izračunajte ukupne kamate i stanje na kraju godine za 2006. godinu. Godišnja kamatna stopa je 6%.

**Rješenje 003**

Kamate računamo francuskom metodom: **godina ima 360 dana, a dani u mjesecima obračunavaju se prema kalendaru**.

Uvest ćemo oznake:

**D za kamatni divizor,** $D = \frac{360}{p}$, **gdje je p kamatna stopa ili kamatnjak,**

**$N_i$ za kamatni broj (numerus),** $N_i = \frac{C_i \cdot d_i}{100}$, **gdje je $C_i$ kapital ili glavnica, $d_i$ broj dana ukamaćivanja**,

**K za ukupne kamate,** $K = \frac{\sum_i N_i}{D}$.

**Kod obračuna broja dana prvi dan se ne uzima dok se posljednji uzima**. Na primjer:

- broj dana od 05.01. do 08.02. je:

$$\overset{\text{siječanj}}{(31-5)}+\overset{\text{veljača}}{8}=26+8=34 \text{ dana},$$

- broj dana od 18.05 do 13.07. je:

$$\overset{\text{svibanj}}{(31-18)}+\overset{\text{lipanj}}{30}+\overset{\text{srpanj}}{13}=13+30+13=56 \text{ dana},$$

- broj dana od 13.07. do 02.11. je:

$$\overset{\text{srpanj}}{(31-13)}+\overset{\text{kolovoz}}{31}+\overset{\text{rujan}}{30}+\overset{\text{listopad}}{31}+\overset{\text{studeni}}{2}=18+31+30+31+2=112 \text{ dana.}$$

Kamate računamo pomoću kamatnih brojeva i kamatnog divizora. Zbog preglednosti podatke prikazujemo u tablici:

| Datum | Uplata | Isplata | Stanje (saldo) $C_i$ | Ukamaćivanje od – do | Broj dana $d_i$ | Kamatni brojevi $N_i=\frac{C_i\cdot d_i}{100}$ |
|---|---|---|---|---|---|---|
| 15.02. | 5000.00 kn | | 5000.00 kn | 15.02. – 14.04. | 58 | 2900 |
| 14.04. | | 1000.00 kn | 4000.00 kn | 14.04. – 08.07. | 85 | 3400 |
| 08.07. | 2000.00 kn | | 6000.00 kn | 08.07. – 21.10. | 105 | 6300 |
| 21.10. | | 3500.00 kn | 2500.00 kn | 21.10. – 31.12. | 71 | 1775 |

$$\sum_i N_i = 14375$$

Kamatni divizor je $D=\frac{360}{p}=\frac{360}{6}=60.$ Ukupne kamate iznose: $K=\frac{\sum_i N_i}{D}=\frac{14375}{60}=239.58$ kn.

Stanje na kraju godine je: 2500.00 kn + 239.58 kn = 2739.58 kn.

**Vježba 003**

Na štednoj knjižici neke osobe nalaze se sljedeći podaci:

| DATUM | UPLATA | ISPLATA | STANJE (SALDO) |
|---|---|---|---|
| 05.01. | 5000.00 kn | | 5000.00 kn |
| 08.02. | | 1200.00 kn | 3800.00 kn |
| 18.05. | 2400.00 kn | | 6200.00 kn |
| 13.07. | | 4000.00 kn | 2200.00 kn |
| 02.11. | 3200.00 kn | | 5400.00 kn |

Izračunajte ukupne kamate i stanje na kraju godine za 2005. godinu. Godišnja kamatna stopa je 6%.

**Rezultat:**

| Datum | Uplata | Isplata | Stanje (saldo) $C_i$ | Ukamaćivanje od – do | Broj dana $d_i$ | Kamatni brojevi $N_i=\frac{C_i\cdot d_i}{100}$ |
|---|---|---|---|---|---|---|
| 05.01. | 5000.00 kn | | 5000.00 kn | 05.01. – 08.02. | 34 | 1700 |
| 08.02. | | 1200.00 kn | 3800.00 kn | 08.02. – 18.05. | 99 | 3762 |
| 18.05. | 2400.00 kn | | 6200.00 kn | 18.05. – 13.07. | 56 | 3472 |
| 13.07. | | 4000.00 kn | 2200.00 kn | 13.07. – 02.11. | 112 | 2464 |
| 02.11. | 3200.00 kn | | 5400.00 kn | 02.11. – 31.12. | 59 | 3186 |

$$\sum_i N_i = 14584$$

Kamatni divizor je $D = \frac{360}{p} = \frac{360}{6} = 60.$ Ukupne kamate iznose: $K = \frac{\sum\limits_i N_i}{D} = \frac{14584}{60} = 243.07$ kn.

Stanje na kraju godine je: 5400.00 kn + 243.07 kn = 5643.07 kn.

### Zadatak 004 (Ivana, ekonomska škola)

Mjenica glasi na 175200.00 kn i dospijeva 12.06.2005. godine. Kolika je vrijednost mjenice 14.05.2005. uz 4.5% diskonta, 5‰ provizije i 200.00 kn troškova?

### Rješenje 004

Pri kupnji i prodaji mjenica obračunavaju se kamate od dana kupnje (prodaje) do dana dospijeća mjenice. Kod računanja broja dana za diskont prvi dan se ne računa, a posljednji dan se računa. U Republici Hrvatskoj se pri diskontiranju mjenice mjeseci računaju po kalendaru, a godina ima 360 dana (**francuska metoda**).

Uvest ćemo oznake:

**D za kamatni divizor,** $D = \frac{360}{p}$, **gdje je p kamatna stopa ili kamatnjak,**

**N za kamatni broj (numerus),** $N = \frac{C \cdot d}{100}$, **gdje je C kapital ili glavnica, d broj dana ukamaćivanja**,

**K za ukupne kamate,** $K = \frac{N}{D}$.

Diskont (kamate) računamo pomoću kamatnog broja i kamatnog divizora. Zbog preglednosti podatke prikazujemo u tablici:

| Iznos mjenice | Dospijeće | Ukamaćivanje od – do | Broj dana d | Kamatni broj $N = \frac{C \cdot d}{100}$, |
|---|---|---|---|---|
| 175200.00 kn | 12.06. | 14.05. – 12.06. | 29 | 500808 |
| 175200.00 kn | | | | 500808 |

Kamatni divizor je $D = \frac{360}{p} = \frac{360}{4.5} = 80.$ Diskont (kamate) iznose: $K = \frac{N}{D} = \frac{50808}{80} = 635.10$ kn.

Obračun prodaje 14.05.:

| | |
|---|---|
| Ukupan iznos mjenice | 175200.00 kn |
| – 4.5% diskonta | – 635.10 kn |
| Diskontirana vrijednost | 174564.90 kn |
| – 5‰ provizije | – 872.82 kn |
| | 173692.08 kn |
| – troškovi | – 200.00 kn |
| **Vrijednost mjenice 14.05.** | **173492.08 kn** |

### Vježba 004

Banka je 15.08. primila na diskontiranje tri mjenice:

I. 9000.00 kn plativo 15.09.
II. 12000.00 kn plativo 01.11.
III. 14000.00 kn plativo 31.12.

Uvjeti diskontiranja su: diskontna stopa 9%, provizija 1.2‰, troškovi 50.00 kn. Koliki će iznos banka isplatiti 15.08.?

**Rezultat:**
Kad imamo više mjenica, diskont možemo računati pomoću kamatnih brojeva i kamatnog divizora.

| Iznos mjenice $C_i$ | Dospijeće | Ukamaćivanje od – do | Broj dana $d_i$ | Kamatni brojevi $N_i = \frac{C_i \cdot d_i}{100}$ |
|---|---|---|---|---|
| 9000.00 kn | 15.09. | 15.08. – 15.09. | 31 | 2790 |
| 12000.00 kn | 01.11. | 15.08. – 01.11. | 78 | 9360 |
| 14000.00 kn | 31.12. | 18.05. – 31.12. | 138 | 19320 |
| $\sum_i C_i = 35000.00$ kn | | | | $\sum_i N_i = 31470$ |

Kamatni divizor je $D = \frac{360}{p} = \frac{360}{9} = 40.$ Diskont (kamate): $K = \frac{\sum_i N_i}{D} = \frac{31470}{40} = 786.75$ kn.

Obračun prodaje 15.08.:

| | |
|---|---|
| Ukupan iznos mjenica<br>– 9% diskonta | 35000.00 kn<br>– 768.75 kn |
| Diskontirana vrijednost<br>– 1.2‰ provizije | 34231.25 kn<br>– 41.08 kn |
| <br>– troškovi | 34190.17 kn<br>– 50.00 kn |
| **Vrijednost mjenica 15.08.** | **34140.17 kn** |

**Zadatak 005 (Ines, gimnazija)**

Glavnica od milijun kuna bila je 3 godine uložena uz 4% godišnjih dekurzivnih jednostavnih kamata. Za koliko kuna bi ukupne kamate bile veće da je obračun kamata složen?

**Rješenje 005**

Kod jednostavnog kamatnog računa susrećemo sljedeće veličine:

kapital ili glavnica $C_0$,
kamatna stopa ili kamatnjak p,
jednostavne kamate ili interes K,
vrijeme (na primjer u godinama) n.

Jednostavne kamate od glavnice $C_0$, uz godišnji kamatnjak p za n godina su

$$K = \frac{C_0 \cdot p \cdot n}{100}.$$

Kod složenog kamatnog računa susrećemo također slične veličine:

početna vrijednost uloga $C_0$,
fiksna kamatna stopa (za vrijeme ukamaćivanja) p,
broj ukamaćivanja n,
konačna vrijednost uloga $C_n$.

Složene kamate računaju se:

$$K = C_n - C_0 = C_0 \cdot \left(1 + \frac{p}{100}\right)^n - C_0 = C_0 \cdot \left[\left(1 + \frac{p}{100}\right)^n - 1\right].$$

Tražimo razliku između složenih i jednostavnih kamata:

$$\Delta K = C_0 \cdot \left[\left(1+\frac{p}{100}\right)^n - 1\right] - \frac{C_0 \cdot p \cdot n}{100} = C_0 \cdot \left[\left(1+\frac{p}{100}\right)^n - 1 - \frac{p \cdot n}{100}\right] = C_0 \cdot \left[\left(1+\frac{4}{100}\right)^3 - 1 - \frac{4 \cdot 3}{100}\right] =$$

$$= C_0 \cdot \left[(1+0.04)^3 - 1 - \frac{12}{100}\right] = C_0 \cdot \left[1.04^3 - 1 - 0.12\right] = 1\ 000000 \cdot [1.124864 - 1.12] = 4864\ kn.$$

**Vježba 005**

Glavnica od milijun kuna bila je 4 godine uložena uz 3% godišnjih dekurzivnih jednostavnih kamata. Za koliko kuna bi ukupne kamate bile veće da je obračun kamata složen?

**Rezultat:** 5508.81 kn.

**Zadatak 006 (Ines, gimnazija)**

Glavnica 2500 EUR uz godišnji dekurzivni kamatnjak p donese za 3 godine 150 EUR jednostavnih kamata. Kolike bi složene kamate donijela ta glavnica za isto vrijeme uz isti kamatnjak?

**Rješenje 006**

Kod jednostavnog kamatnog računa susrećemo sljedeće veličine:

kapital ili glavnica $C_0$,
kamatna stopa ili kamatnjak p,
jednostavne kamate ili interes K,
vrijeme (na primjer u godinama) n.

$C_0 = 2500$, n = 3, K = 150, p = ?

Uobičajeno je jednostavni kamatni račun pisati u obliku: $100 \cdot K = C_0 \cdot p \cdot n$.

Tada je kamatna stopa:

$$p = \frac{100 \cdot K}{C_0 \cdot n} = \frac{100 \cdot 150}{2500 \cdot 3} = 2.$$

Kod složenog kamatnog računa susrećemo sljedeće veličine:

početna vrijednost uloga $C_0$,
fiksna kamatna stopa (za vrijeme ukamaćivanja) p,
broj ukamaćivanja n,
konačna vrijednost uloga $C_n$.

$C_0 = 2500$, n = 3, p = 2, K = ?

Budući da se složene kamate računaju po formuli

$$K = C_n - C_0 = C_0 \cdot \left(1+\frac{p}{100}\right)^n - C_0 = C_0 \cdot \left[\left(1+\frac{p}{100}\right)^n - 1\right],$$

slijedi

$$K = 2500 \cdot \left[\left(1+\frac{2}{100}\right)^3 - 1\right] = 2500 \cdot \left[1.02^3 - 1\right] = 153.02\ \text{kn}.$$

**Vježba 006**

Glavnica 5000 EUR uz godišnji dekurzivni kamatnjak p donese za 3 godine 300 EUR jednostavnih kamata. Kolike bi složene kamate donijela ta glavnica za isto vrijeme uz isti kamatnjak?

**Rezultat:** 306.04 kn.

**Zadatak 007 (Silvija, Ivana, Lidija, ekonomska škola)**

Odobren je potrošački kredit od 28000 kn na 3 godine uz 6% godišnjih anticipativnih kamata. Učešće je 10% od kreditnog iznosa. Kolike su ukupne kamate i mjesečne rate?

## Rješenje 007

Veličine koje se javljaju kod potrošačkog kredita:

| | |
|---|---|
| C – iznos odobrenog potrošačkog kredita | |
| p% - učešće u gotovini , P - udio | $P=\frac{C\cdot p}{100}$ |
| $C_1$ – iznos stvarnog kredita | $C_1=C-P$ |
| q – anticipativna kamatna stopa (obračunavanje kamata je anticipativno, tj. kamate se obračunavaju na početku svakog mjeseca od ostatka dugovanja) | |
| m – rok otplate potrošačkog kredita u mjesecima | |
| k – anticipativni kamatni koeficijent | $k=\frac{q\cdot(m+1)}{24}$ |
| K – ukupne kamate | $K=\frac{C_1\cdot k}{100}$ |
| $C_2$ – ukupno dugovanje | $C_2=C_1+K$ |
| R – iznos konstantne mjesečne rate | $R=\frac{C_2}{m}$ |

Ako je iznos rate decimalni broj, radimo ovako:

1. za iznos svih mjesečnih rata osim (obično) prve uzima se cjelobrojni dio decimalnog broja
2. za prvu ratu uzima se cjelobrojni dio decimalnog broja plus decimalni dio decimalnog broja pomnožen s brojem mjeseci

Shema:

$$\left.\begin{matrix} C\\ p\\ q\\ m\end{matrix}\right\} \Rightarrow \left\{P=\frac{C\cdot p}{100}\right\} \Rightarrow \left\{\begin{matrix}C_1=C-P\\ k=\frac{q\cdot(m+1)}{24}\end{matrix}\right\} \Rightarrow \left\{K=\frac{C_1\cdot k}{100}\right\} \Rightarrow \left\{\begin{matrix}C_2=C_1+K\\ R=\frac{C_2}{m}\end{matrix}\right\}$$

Rješenje zadatka glasi:

C = 28000 kn, m = 3 g = 3 · 12 mj = 36 mj, q = 6, p = 10

| | |
|---|---|
| C – iznos odobrenog potrošačkog kredita | C = 28000 kn |
| P - udio | $P=\frac{C\cdot p}{100}=\frac{28000\cdot 10}{100}=2800\ kn$ |
| $C_1$ – iznos stvarnog kredita | $C_1=C-P=28000\ kn-2800\ kn=25200\ kn$ |
| q – anticipativna kamatna stopa | 6 |
| m – rok otplate u mjesecima | 36 |
| k – anticipativni kamatni koeficijent | $k=\frac{q\cdot(m+1)}{24}=\frac{6\cdot 37}{24}=9.25$ |
| K – ukupne kamate | $K=\frac{C_1\cdot k}{100}=\frac{25200\cdot 9.25}{100}=2331\ kn$ |
| $C_2$ – ukupno dugovanje | $C_2=C_1+K=25200\ kn+2331\ kn=27531\ kn$ |
| R – iznos konstantne mjesečne rate | $R=\frac{C_2}{m}=\frac{27531}{36}=764.75\ kn\approx 764\ kn$ |
| $R_1$ – prva rata | $R_1$ = 764 + 0.75 · 36 = 764 kn + 27 kn = 791 kn |

**Vježba 007**

Odobren je potrošački kredit od 18000 kn na 3 godine uz 11% godišnjih anticipativnih kamata. Učešće je 10% od kreditnog iznosa. Kolike su ukupne kamate i mjesečne rate?

**Rezultat:** K = 2747.52 kn, R = 526 kn, $R_1$ = 537.52 kn.

**Zadatak 008 (Silvija, Ivana, Lidija, ekonomska škola)**

Odobren je potrošački kredit od 15000 kn, rok vraćanja 12 mjeseci uz 9% godišnju kamatu. Kolike su mjesečne rate?

**Rješenje 008**

Veličine koje se javljaju kod potrošačkog kredita:

| | |
|---|---|
| C – iznos odobrenog potrošačkog kredita | |
| p% - učešće u gotovini , P - udio | $P = \frac{C \cdot p}{100}$ |
| $C_1$ – iznos stvarnog kredita | $C_1 = C - P$ |
| q – anticipativna kamatna stopa (obračunavanje kamata je anticipativno, tj. kamate se obračunavaju na početku svakog mjeseca od ostatka dugovanja) | |
| m – rok otplate potrošačkog kredita u mjesecima | |
| k – anticipativni kamatni koeficijent | $k = \frac{q \cdot (m+1)}{24}$ |
| K – ukupne kamate | $K = \frac{C_1 \cdot k}{100}$ |
| $C_2$ – ukupno dugovanje | $C_2 = C_1 + K$ |
| R – iznos konstantne mjesečne rate | $R = \frac{C_2}{m}$ |

Ako je iznos rate decimalni broj, radimo ovako:

1. za iznos svih mjesečnih rata osim (obično) prve uzima se cjelobrojni dio decimalnog broja
2. za prvu ratu uzima se cjelobrojni dio decimalnog broja plus decimalni dio decimalnog broja pomnožen s brojem mjeseci

Shema:

$$\left.\begin{matrix} C \\ p \\ q \\ m \end{matrix}\right\} \Rightarrow \left\{ P = \frac{C \cdot p}{100} \right\} \Rightarrow \left\{ \begin{matrix} C_1 = C - P \\ k = \frac{q \cdot (m+1)}{24} \end{matrix} \right\} \Rightarrow \left\{ K = \frac{C_1 \cdot k}{100} \right\} \Rightarrow \left\{ \begin{matrix} C_2 = C_1 + K \\ R = \frac{C_2}{m} \end{matrix} \right\}$$

Rješenje zadatka glasi:

C = 15000 kn, m = 12 mj, q = 9

Budući da nema učešća u gotovini, vrijedi: $P = 0 \Rightarrow C_1 = C - P = C - 0 = C$

| | |
|---|---|
| C – iznos odobrenog potrošačkog kredita | C = 15000 kn |
| P - udio | P = 0 |
| $C_1$ – iznos stvarnog kredita | $C_1 = C = 15000\ kn$ |
| q – anticipativna kamatna stopa | 9 |
| m – rok otplate u mjesecima | 12 |
| k – anticipativni kamatni koeficijent | $k = \frac{q \cdot (m+1)}{24} = \frac{9 \cdot 13}{24} = 4.875$ |

| | |
|---|---|
| K – ukupne kamate | $K=\frac{C_1\cdot k}{100}=\frac{15000\cdot 4.875}{100}=731.25\ kn$ |
| $C_2$ – ukupno dugovanje | $C_2=C_1+K=15000\ kn+731.25\ kn=15731.25\ kn$ |
| R – iznos konstantne mjesečne rate | $R=\frac{C_2}{m}=\frac{15731.25}{12}=1310.94\ kn\approx 1310\ kn$ |
| $R_1$ – prva rata | $R_1 = 1310 + 0.94 \cdot 12 = 1321.28$ kn |

**Vježba 008**

Odobren je potrošački kredit od 10000 kn, rok vraćanja 4 mjeseca uz 7% godišnju kamatu. Kolike su mjesečne rate?

**Rezultat:** R = 2536 kn, $R_1 = 2537.80$ kn.

**Zadatak 009 (Katarina, ekonomska škola)**

Glavnica od milijun kuna bila je 3 godine uložena uz 4% godišnjih dekurzivnih jednostavnih kamata. Za koliko kuna bi ukupne kamate bile veće da je obračun kamata bio složen?

**Rješenje 009**

Jednostavne kamate

C = 1 000 000 kn, n = 3 god, p = 4, k = ?

Jednostavne kamate iznose:

$$100\cdot k=C\cdot p\cdot n\ \Rightarrow\ k=\frac{C\cdot p\cdot n}{100}=\frac{1000000\cdot 4\cdot 3}{100}=\frac{10000\cdot 12}{1}=120000\ kn.$$

Složene kamate

$C_0 = 1\,000\,000$ kn, n = 3, p = 4, K = ?

Složene kamate iznose:

$$K=C_n-C_0=C_0\cdot\left(1+\frac{p}{100}\right)^n-C_0=C_0\cdot\left[\left(1+\frac{p}{100}\right)^n-1\right]=1000000\cdot\left[\left(1+\frac{4}{100}\right)^3-1\right]=$$

$$=1000000\cdot\left[1.04^3-1\right]=124864\ kn.$$

Razlika u kamatama je:

K – k = 124864 kn – 120000 kn = 4864 kn.

**Vježba 009**

Glavnica od milijun kuna bila je 3 godine uložena uz 2% godišnjih dekurzivnih jednostavnih kamata. Za koliko kuna bi ukupne kamate bile veće da je obračun kamata bio složen?

**Rezultat:** 1208 kn.

**Zadatak 010 (Željka, Marija, Sanja, ekonomska škola)**

U banku je danas uloženo 15 000 kn. Kolika je vrijednost tog uloga na kraju treće godine ako je obračun kamata složen, godišnji i **dekurzivni**? Godišnja kamatna stopa je 10.

**Rješenje 010**

Kod **dekurzivnog** načina obračuna kamata kamate se obračunavaju i pripisuju na kraju svakog razdoblja ukamaćivanja. Kamatnu stopu označavamo s p.

Ako je $C_0$ početna vrijednost uloga, n broj ukamaćivanja, p fiksna kamatna stopa (za vrijeme ukamaćivanja), $C_n$ konačna vrijednost uloga, tada je:

$$C_n=C_0\cdot r^n\qquad,\qquad r=1+\frac{p}{100}.$$

$$\left.\begin{array}{l}C_0=15000\ kn\\ n=3\\ p=10\\ C_3=?\end{array}\right\}\Rightarrow\left.\begin{array}{l}r=1+\frac{p}{100}\\ C_3=C_0\cdot r^3\end{array}\right\}\Rightarrow\left.\begin{array}{l}r=1+\frac{10}{100}=1.1\\ C_3=15000\cdot 1.1^3\end{array}\right\}\Rightarrow C_3=19965\ kn.$$

**Vježba 010**

U banku je danas uloženo 12 000 kn. Kolika je vrijednost tog uloga na kraju treće godine ako je obračun kamata složen, godišnji i **dekurzivni**? Godišnja kamatna stopa je 10.

**Rezultat:** 15 972 kn.

## Zadatak 011 (Željka, Marija, Sanja, ekonomska škola)

U banku je danas uloženo 15 000 kn. Kolika je vrijednost tog uloga na kraju treće godine ako je obračun kamata složen, godišnji i **anticipativni**? Godišnja kamatna stopa je 10.

## Rješenje 011

Kod **anticipativnog** načina obračuna kamata kamate se obračunavaju na početku razdoblja ukamaćivanja od glavnice s kraja tog razdoblja. Kamatnu stopu označavamo s q.

Ako je $C_0$ početna vrijednost uloga, n broj ukamaćivanja, q kamatna stopa (za vrijeme ukamaćivanja), $C_n$ konačna vrijednost uloga na kraju n – tog razdoblja ukamaćivanja, tada je:

$$C_n = C_0 \cdot \rho^n \qquad , \qquad \rho = \frac{100}{100 - q}.$$

$$\left.\begin{array}{l} C_0 = 15000\ kn \\ n = 3 \\ q = 10 \\ C_3 = ? \end{array}\right\} \Rightarrow \left.\begin{array}{l} \rho = \dfrac{100}{100 - q} \\ C_3 = C_0 \cdot \rho^3 \end{array}\right\} \Rightarrow \left.\begin{array}{l} \rho = \dfrac{100}{100 - 10} = \dfrac{100}{90} = \dfrac{10}{9} \\ C_3 = 15000 \cdot \left(\dfrac{10}{9}\right)^3 \end{array}\right\} \Rightarrow C_3 = 20576.13\ kn.$$

**Vježba 011**

U banku je danas uloženo 12 000 kn. Kolika je vrijednost tog uloga na kraju treće godine ako je obračun kamata složen, godišnji i **anticipativni**? Godišnja kamatna stopa je 10.

**Rezultat:** 16460.91 kn.

## Zadatak 012 (Marija, ekonomska škola)

Molim Vas pojasnite nominalnu, relativnu i konformnu kamatnu stopu uz dekurzivni način obračuna kamata.

## Rješenje 012

Odredi relativne i konformne kamatne stope uz dekurzivni način obračuna kamata ako je:

a) p = 4 nominalna godišnja kamatna stopa i ukamaćivanje godišnje
b) p = 4 nominalna godišnja kamatna stopa i ukamaćivanje polugodišnje
c) p = 4 nominalna godišnja kamatna stopa i ukamaćivanje četveromjesečno
d) p = 4 nominalna godišnja kamatna stopa i ukamaćivanje kvartalno
e) p = 4 nominalna godišnja kamatna stopa i ukamaćivanje mjesečno

f) p = 4 nominalna polugodišnja kamatna stopa i ukamaćivanje godišnje
g) p = 4 nominalna polugodišnja kamatna stopa i ukamaćivanje polugodišnje
h) p = 4 nominalna polugodišnja kamatna stopa i ukamaćivanje četveromjesečno
i) p = 4 nominalna polugodišnja kamatna stopa i ukamaćivanje kvartalno
j) p = 4 nominalna polugodišnja kamatna stopa i ukamaćivanje mjesečno

k) p = 4 nominalna mjesečna kamatna stopa i ukamaćivanje godišnje
l) p = 4 nominalna mjesečna kamatna stopa i ukamaćivanje polugodišnje
m) p = 4 nominalna mjesečna kamatna stopa i ukamaćivanje četveromjesečno
n) p = 4 nominalna mjesečna kamatna stopa i ukamaćivanje kvartalno
o) p = 4 nominalna mjesečna kamatna stopa i ukamaćivanje mjesečno

Kod dekurzivnog načina obračuna kamata kamate se obračunavaju i pripisuju na kraju svakog razdoblja ukamaćivanja.

Propisana kamatna stopa za osnovni vremenski interval naziva se nominalna (zadana) kamatna stopa. Razlikujemo:

- a – duljina osnovnog vremenskog intervala na koji se odnosi nominalna kamatna stopa
- b – duljina osnovnog vremenskog intervala u kojem se obavlja ukamaćivanje

Ako su ti osnovni vremenski intervali jednake duljine tada se nominalna kamatna stopa može direktno primjenjivati u obračunavanju kamata.

Ako osnovni vremenski intervali nisu jednake duljine, potrebno je preračunati nominalnu kamatnu stopu na vremenske intervale ukamaćivanja. Treba ustanoviti koliko se puta (m) provodi obračun kamata u odnosu prema osnovnom vremenskom intervalu nominalne kamatne stope:

$$m = \frac{a}{b}.$$

Relativna kamatna stopa je:

$$p_r = \frac{p}{m}.$$

Konformna kamatna stopa je:

$$p' = 100 \cdot \left[ \left( 1 + \frac{p}{100} \right)^{\frac{1}{m}} - 1 \right].$$

a) p = 4 nominalna godišnja kamatna stopa i ukamaćivanje godišnje

$$\left. \begin{array}{l} p = 4 \\ a = 12 \; mj \\ b = 12 \; mj \end{array} \right\} \Rightarrow \; m = \frac{a}{b} = \frac{12}{12} = 1 \; \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} p_r = \dfrac{p}{m} = \dfrac{4}{1} = 4 \\ p' = 100 \cdot \left[ \left( 1 + \dfrac{p}{100} \right)^{\frac{1}{m}} - 1 \right] = 100 \cdot \left[ \left( 1 + \dfrac{4}{100} \right)^{\frac{1}{1}} - 1 \right] = 100 \cdot \left[ 1 + \dfrac{4}{100} - 1 \right] = 4. \end{array} \right.$$

b) p = 4 nominalna godišnja kamatna stopa i ukamaćivanje polugodišnje

$$\left. \begin{array}{l} p = 4 \\ a = 12 \; mj \\ b = 6 \; mj \end{array} \right\} \Rightarrow \; m = \frac{a}{b} = \frac{12}{6} = 2 \; \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} p_r = \dfrac{p}{m} = \dfrac{4}{2} = 2 \\ p' = 100 \cdot \left[ \left( 1 + \dfrac{p}{100} \right)^{\frac{1}{m}} - 1 \right] = 100 \cdot \left[ \left( 1 + \dfrac{4}{100} \right)^{\frac{1}{2}} - 1 \right] = 1.98039027. \end{array} \right.$$

c) p = 4 nominalna godišnja kamatna stopa i ukamaćivanje četveromjesečno

$$\left. \begin{array}{l} p = 4 \\ a = 12 \; mj \\ b = 4 \; mj \end{array} \right\} \Rightarrow \; m = \frac{a}{b} = \frac{12}{4} = 3 \; \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} p_r = \dfrac{p}{m} = \dfrac{4}{3} = 1.333333333 \\ p' = 100 \cdot \left[ \left( 1 + \dfrac{p}{100} \right)^{\frac{1}{m}} - 1 \right] = 100 \cdot \left[ \left( 1 + \dfrac{4}{100} \right)^{\frac{1}{3}} - 1 \right] = 1.31594038. \end{array} \right.$$

d) p = 4 nominalna godišnja kamatna stopa i ukamaćivanje kvartalno

$$\left.\begin{array}{l} p=4 \\ a=12\ mj \\ b=3\ mj \end{array}\right\} \Rightarrow\ m=\frac{a}{b}=\frac{12}{3}=4\ \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \left\{\begin{array}{l} p_r=\frac{p}{m}=\frac{4}{4}=1 \\ p'=100\cdot\left[\left(1+\frac{p}{100}\right)^{\frac{1}{m}}-1\right]=100\cdot\left[\left(1+\frac{4}{100}\right)^{\frac{1}{4}}-1\right]=0.98534065. \end{array}\right.$$

e) p = 4 nominalna godišnja kamatna stopa i ukamaćivanje mjesečno

$$\left.\begin{array}{l} p=4 \\ a=12\ mj \\ b=1\ mj \end{array}\right\} \Rightarrow\ m=\frac{a}{b}=\frac{12}{1}=12\ \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \left\{\begin{array}{l} p_r=\frac{p}{m}=\frac{4}{12}=0.333333333 \\ p'=100\cdot\left[\left(1+\frac{p}{100}\right)^{\frac{1}{m}}-1\right]=100\cdot\left[\left(1+\frac{4}{100}\right)^{\frac{1}{12}}-1\right]=0.32737398. \end{array}\right.$$

f) p = 4 nominalna polugodišnja kamatna stopa i ukamaćivanje godišnje

$$\left.\begin{array}{l} p=4 \\ a=6\ mj \\ b=12\ mj \end{array}\right\} \Rightarrow\ m=\frac{a}{b}=\frac{6}{12}=\frac{1}{2}\ \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \left\{\begin{array}{l} p_r=\frac{p}{m}=\frac{4}{\frac{1}{2}}=8 \\ p'=100\cdot\left[\left(1+\frac{p}{100}\right)^{\frac{1}{m}}-1\right]=100\cdot\left[\left(1+\frac{4}{100}\right)^{\frac{1}{\frac{1}{2}}}-1\right]=100\cdot\left[\left(1+\frac{4}{100}\right)^{2}-1\right]=8.16. \end{array}\right.$$

g) p = 4 nominalna polugodišnja kamatna stopa i ukamaćivanje polugodišnje

$$\left.\begin{array}{l} p=4 \\ a=6\ mj \\ b=6\ mj \end{array}\right\} \Rightarrow\ m=\frac{a}{b}=\frac{6}{6}=1\ \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \left\{\begin{array}{l} p_r=\frac{p}{m}=\frac{4}{1}=4 \\ p'=100\cdot\left[\left(1+\frac{p}{100}\right)^{\frac{1}{m}}-1\right]=100\cdot\left[\left(1+\frac{4}{100}\right)^{\frac{1}{1}}-1\right]=100\cdot\left[1+\frac{4}{100}-1\right]=4. \end{array}\right.$$

h) p = 4 nominalna polugodišnja kamatna stopa i ukamaćivanje četveromjesečno

$$\left.\begin{array}{l} p=4 \\ a=6\ mj \\ b=4\ mj \end{array}\right\} \Rightarrow\ m=\frac{a}{b}=\frac{6}{4}=\frac{3}{2}\ \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{cases} p_r = \frac{p}{m} = \frac{4}{\frac{3}{2}} = \frac{8}{3} = 2.666666667 \\ p' = 100 \cdot \left[ \left(1+\frac{p}{100}\right)^{\frac{1}{m}} - 1 \right] = 100 \cdot \left[ \left(1+\frac{4}{100}\right)^{\frac{1}{\frac{3}{2}}} - 1 \right] = 100 \cdot \left[ \left(1+\frac{4}{100}\right)^{\frac{2}{3}} - 1 \right] = 2.64919775. \end{cases}$$

i) p = 4 nominalna polugodišnja kamatna stopa i ukamaćivanje kvartalno

$$\left. \begin{array}{l} p = 4 \\ a = 6\ mj \\ b = 3\ mj \end{array} \right\} \Rightarrow m = \frac{a}{b} = \frac{6}{3} = 2 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{cases} p_r = \frac{p}{m} = \frac{4}{2} = 2 \\ p' = 100 \cdot \left[ \left(1+\frac{p}{100}\right)^{\frac{1}{m}} - 1 \right] = 100 \cdot \left[ \left(1+\frac{4}{100}\right)^{\frac{1}{2}} - 1 \right] = 1.98039027. \end{cases}$$

j) p = 4 nominalna polugodišnja kamatna stopa i ukamaćivanje mjesečno

$$\left. \begin{array}{l} p = 4 \\ a = 6\ mj \\ b = 1\ mj \end{array} \right\} \Rightarrow m = \frac{a}{b} = \frac{6}{1} = 6 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{cases} p_r = \frac{p}{m} = \frac{4}{6} = 0.666666667 \\ p' = 100 \cdot \left[ \left(1+\frac{p}{100}\right)^{\frac{1}{m}} - 1 \right] = 100 \cdot \left[ \left(1+\frac{4}{100}\right)^{\frac{1}{6}} - 1 \right] = 0.65581969. \end{cases}$$

k) p = 4 nominalna mjesečna kamatna stopa i ukamaćivanje godišnje

$$\left. \begin{array}{l} p = 4 \\ a = 1\ mj \\ b = 12\ mj \end{array} \right\} \Rightarrow m = \frac{a}{b} = \frac{1}{12} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{cases} p_r = \frac{p}{m} = \frac{4}{\frac{1}{12}} = 48 \\ p' = 100 \cdot \left[ \left(1+\frac{p}{100}\right)^{\frac{1}{m}} - 1 \right] = 100 \cdot \left[ \left(1+\frac{4}{100}\right)^{\frac{1}{\frac{1}{12}}} - 1 \right] = 100 \cdot \left[ \left(1+\frac{4}{100}\right)^{12} - 1 \right] = 60.1032219. \end{cases}$$

l) p = 4 nominalna mjesečna kamatna stopa i ukamaćivanje polugodišnje

$$\left. \begin{array}{l} p = 4 \\ a = 1\ mj \\ b = 6\ mj \end{array} \right\} \Rightarrow m = \frac{a}{b} = \frac{1}{6} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} p_r = \dfrac{p}{m} = \dfrac{4}{\frac{1}{6}} = 24 \\ \\ p' = 100 \cdot \left[ \left(1 + \dfrac{p}{100}\right)^{\frac{1}{m}} - 1 \right] = 100 \cdot \left[ \left(1 + \dfrac{4}{100}\right)^{\frac{1}{\frac{1}{6}}} - 1 \right] = 100 \cdot \left[ \left(1 + \dfrac{4}{100}\right)^{6} - 1 \right] = 26.5319018. \end{array} \right.$$

m) p = 4 nominalna mjesečna kamatna stopa i ukamaćivanje četveromjesečno

$$\left. \begin{array}{l} p = 4 \\ a = 1 \; mj \\ b = 4 \; mj \end{array} \right\} \Rightarrow m = \frac{a}{b} = \frac{1}{4} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} p_r = \dfrac{p}{m} = \dfrac{4}{\frac{1}{4}} = 16 \\ \\ p' = 100 \cdot \left[ \left(1 + \dfrac{p}{100}\right)^{\frac{1}{m}} - 1 \right] = 100 \cdot \left[ \left(1 + \dfrac{4}{100}\right)^{\frac{1}{\frac{1}{4}}} - 1 \right] = 100 \cdot \left[ \left(1 + \dfrac{4}{100}\right)^{4} - 1 \right] = 16.985856. \end{array} \right.$$

n) p = 4 nominalna mjesečna kamatna stopa i ukamaćivanje kvartalno

$$\left. \begin{array}{l} p = 4 \\ a = 1 \; mj \\ b = 3 \; mj \end{array} \right\} \Rightarrow m = \frac{a}{b} = \frac{1}{3} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} p_r = \dfrac{p}{m} = \dfrac{4}{\frac{1}{3}} = 12 \\ \\ p' = 100 \cdot \left[ \left(1 + \dfrac{p}{100}\right)^{\frac{1}{m}} - 1 \right] = 100 \cdot \left[ \left(1 + \dfrac{4}{100}\right)^{\frac{1}{\frac{1}{3}}} - 1 \right] = 100 \cdot \left[ \left(1 + \dfrac{4}{100}\right)^{3} - 1 \right] = 12.4864. \end{array} \right.$$

o) p = 4 nominalna mjesečna kamatna stopa i ukamaćivanje mjesečno

$$\left. \begin{array}{l} p = 4 \\ a = 1 \; mj \\ b = 1 \; mj \end{array} \right\} \Rightarrow m = \frac{a}{b} = \frac{1}{1} = 1 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} p_r = \dfrac{p}{m} = \dfrac{4}{1} = 4 \\ \\ p' = 100 \cdot \left[ \left(1 + \dfrac{p}{100}\right)^{\frac{1}{m}} - 1 \right] = 100 \cdot \left[ \left(1 + \dfrac{4}{100}\right)^{\frac{1}{1}} - 1 \right] = 100 \cdot \left[ 1 + \dfrac{4}{100} - 1 \right] = 4. \end{array} \right.$$

**Vježba 012**

Odredi relativnu i konformnu kamatnu stopu uz dekurzivni način obračuna kamata ako je:
p = 2 nominalna godišnja kamatna stopa i ukamaćivanje godišnje

**Rezultat:** $p_r = 2 \quad , \quad p' = 2.$

**Zadatak 013 (Višnja, studentica)**

Za koliko će godina svota 50000 € i dekurzivno složeno polugodišnje ukamaćivanje dekurzivnim kamatnjakom p = 9 % narasti na istu vrijednost kao svota 60000 € uz dekurzivni kamatnjak p' = 6 % i tromjesečno ukamaćivanje, ako se računa relativnim kamatnjakom?

**Rješenje 013**

| Prva svota | Druga svota |
|---|---|
| $C_0 = 50000$<br>$p = 9$ nominalna kamatna stopa (godišnja) $\Rightarrow$<br>$\Rightarrow\ a = 12\ mj$<br>$b = 6\ mj\ \Rightarrow$ ukamaćivanje polugodišnje<br>$m = \frac{a}{b} = \frac{12}{6} = 2$<br>$p_r = \frac{p}{m} = \frac{9}{2} = 4.5$ relativna kamatna stopa<br>$r = 1 + \frac{p_r}{100} = 1 + \frac{4.5}{100} = 1.045$<br>$C_{m \cdot n} = C_0 \cdot r^{m \cdot n}\ \Rightarrow\ C_{2n} = 50000 \cdot 1.045^{2n}$ | $C_0 = 60000$<br>$p' = 6$ nominalna kamatna stopa (godišnja) $\Rightarrow$<br>$\Rightarrow\ a = 12\ mj$<br>$b = 3\ mj\ \Rightarrow$ ukamaćivanje tromjesečno<br>$m = \frac{a}{b} = \frac{12}{3} = 4$<br>$p_r = \frac{p}{m} = \frac{6}{4} = 1.5$ relativna kamatna stopa<br>$r = 1 + \frac{p_r}{100} = 1 + \frac{1.5}{100} = 1.015$<br>$C_{m \cdot n} = C_0 \cdot r^{m \cdot n}\ \Rightarrow\ C_{4n} = 60000 \cdot 1.015^{4n}$ |

Budući da svote za n godina moraju biti jednake, vrijedi:

$$60000 \cdot 1.015^{4n} = 50000 \cdot 1.045^{2n}\ /{:}50000\ \Rightarrow\ 1.2 \cdot 1.015^{4n} = 1.045^{2n}\ /\log\ \Rightarrow$$

$$\Rightarrow\ \log 1.2 + 4n \cdot \log 1.015 = 2n \cdot \log 1.045\ \Rightarrow\ \log 1.2 = 2n \cdot \log 1.045 - 4n \cdot \log 1.015 =$$

$$\Rightarrow\ \log 1.2 = n \cdot \left(2 \cdot \log 1.045 - 4 \cdot \log 1.015\right)\ \Rightarrow\ n = \frac{\log 1.2}{2 \cdot \log 1.045 - 4 \cdot \log 1.015} = \frac{\log 1.2}{\log 1.045^2 - \log 1.015^4} =$$

$$= \frac{\log 1.2}{\log \frac{1.045^2}{1.015^4}} = 6.4\ god.$$

**Vježba 013**

Za koliko će godina svota 50000 € i dekurzivno složeno polugodišnje ukamaćivanje dekurzivnim kamatnjakom p = 9 % narasti na istu vrijednost kao svota 60000 € uz dekurzivni kamatnjak p' = 4 % i tromjesečno ukamaćivanje, ako se računa relativnim kamatnjakom?

**Rezultat:** 3.8 god.

## Zadatak 014 (Sanja, ekonomska škola, Anita, komercijalna škola)

Danas je štediša uložio u banku 5000.00 eura. Kojim će iznosom raspolagati na kraju četvrte godine, ako je godišnji kamatnjak prve godine 6%, a sljedećih godina povećava se godišnje 0.5%? Obračun kamata je složen, godišnji i dekurzivan.

**Rješenje 014**

Neka je:

- $C_0$ – početna (sadašnja) vrijednost glavnice
- n – broj godina trajanja kapitalizacije
- $p_i$ – promjenjivi godišnji kamatnjak
- $C_n$ – konačna (buduća) vrijednost glavnice

Ako se pretpostavi da je zadani kamatnjak godišnji, ali promjenjiv onda se konačna (buduća) vrijednost glavnice na kraju n – te godine računa ovako:

$$C_n = C_0 \cdot \left(1 + \frac{p_1}{100}\right) \cdot \left(1 + \frac{p_2}{100}\right) \cdot \left(1 + \frac{p_3}{100}\right) \cdot\ ...\ \cdot \left(1 + \frac{p_n}{100}\right).$$

Računamo iznos na kraju četvrte godine:

$C_0$ = 5 000.00 eura, n = 4 godine, $p_1 = 6$, $p_2 = 6.5$, $p_3 = 7$, $p_4 = 7.5$, $C_4 = ?$

$$C_4 = C_0 \cdot \left(1 + \frac{p_1}{100}\right) \cdot \left(1 + \frac{p_2}{100}\right) \cdot \left(1 + \frac{p_3}{100}\right) \cdot \left(1 + \frac{p_4}{100}\right) =$$

$$= 5000.00 \cdot \left(1 + \frac{6}{100}\right) \cdot \left(1 + \frac{6.5}{100}\right) \cdot \left(1 + \frac{7}{100}\right) \cdot \left(1 + \frac{7.5}{100}\right) = 5000.00 \cdot 1.06 \cdot 1.065 \cdot 1.07 \cdot 1.075 = 6492.59 \text{ eura.}$$

### Vježba 014

Danas je štediša uložio u banku 10000.00 eura. Kojim će iznosom raspolagati na kraju četvrte godine, ako je godišnji kamatnjak prve godine 6%, a sljedećih godina povećava se godišnje 0.5%? Obračun kamata je složen, godišnji i dekurzivan.

**Rezultat:** $C_4 = 12985.17$ eura.

### Zadatak 015 (Denis, ekonomska škola)

Glavnica od 4215.23 kune uložena uz 1% mjesečnih dekurzivnih i složenih kamata donijela je 487.57 kuna kamata. Koliko je mjeseci bila uložena?

### Rješenje 015

Postupak po kojem se kamate pribrajaju glavnici da bi se od tako uvećane glavnice izračunavale opet kamate, naziva se složeni kamatni račun.

$$C_n = C_0 \cdot r^n \quad , \quad r = 1 + \frac{p}{100}.$$

$C_n$ - konačna vrijednost uloga,
r - dekurzivi kamatni faktor,
$C_0$ - početna vrijednost uloga
p - fiksna kamatna stopa.

$C_0 = 4215.23, \quad p = 1, \quad K = 487.57, \quad n = ?$

$r = 1 + \frac{p}{100} = 1 + \frac{1}{100} = 1 + 0.01 = 1.01$ $\qquad C_n = C_0 + K = 4215.23 \text{ kn} + 487.57 \text{ kn} = 4702.80 \text{ kn}$

Budući da je kamatna stopa mjesečna i ukamaćivanje mjesečno, računamo broj mjeseci n:

$$C_n = C_0 \cdot r^n \Rightarrow r^n = \frac{C_n}{C_0} \, / \log \Rightarrow \log r^n = \log \frac{C_n}{C_0} \Rightarrow n \cdot \log r = \log \frac{C_n}{C_0} \Rightarrow n = \frac{\log \frac{C_n}{C_0}}{\log r} =$$

$$= \frac{\log \frac{4702.80}{4215.23}}{\log 1.01} \approx 11 \text{ mjeseci.}$$

### Vježba 015

Glavnica od 4215.23 kune uložena uz 2% mjesečnih dekurzivnih i složenih kamata donijela je 487.57 kuna kamata. Koliko je mjeseci bila uložena?

**Rezultat:** 5.5 mjeseci.

### Zadatak 016 (Denis, ekonomska škola)

Glavnica od 2500 EUR uz godišnji dekurzivni kamatnjak p donese za tri godine 150 EUR jednostavnih kamata. Kolike bi složene kamate donijela ta glavnica za isto vrijeme uz isti kamatnjak?

### Rješenje 016

$C_0 = 2500, \quad n = 3, \quad K = 150, \quad p = ?$

Iz formule za jednostavni kamatni račun izračunamo kamatnjak p:

$$100 \cdot K = C_0 \cdot p \cdot n \Rightarrow p = \frac{100 \cdot K}{C_0 \cdot n} = \frac{100 \cdot 150}{2500 \cdot 3} = 2.$$

Računamo kamate pomoću složenog kamatnog računa:

$C_0 = 2500, \quad n = 3, \quad p = 2, \quad K = ?$

$$r = 1 + \frac{p}{100} = 1 + \frac{2}{100} = 1 + 0.02 = 1.02$$

$$K = C_3 - C_0 = C_0 \cdot r^3 - C_0 = C_0 \cdot \left(r^3 - 1\right) = 2500 \cdot \left(1.02^3 - 1\right) = 153.02 \text{ EUR.}$$

### Vježba 016

Glavnica od 5000 EUR uz godišnji dekurzivni kamatnjak p donese za tri godine 300 EUR jednostavnih kamata. Kolike bi složene kamate donijela ta glavnica za isto vrijeme uz isti kamatnjak?

**Rezultat:** 306.04 EUR.

### Zadatak 017 (Ivana, Jelena, Edita, Goran, ekonomski fakultet)

Izvedi formulu za složeno ukamaćivanje.

### Rješenje 017

Složene kamate su kamate koje se izračunavaju za svako razdoblje ukamaćivanja od promjenljive glavnice, tj. uz kamate glavnice obračunavaju se i kamate na kamate.

Dekurzivni obračun kamata je obračun kamata na kraju razdoblja ukamaćivanja od glavnice s početka tog razdoblja.

Neka je:

$C_0$ – početna (sadašnja) vrijednost glavnice
n – broj godina trajanja kapitalizacije
p – fiksni godišnji kamatnjak
$C_n$ – konačna (buduća) vrijednost glavnice.

Budući da je obračun kamata godišnji, složen i dekurzivan, konačna je vrijednost glavnice na kraju:

- prve godine $C_1 = C_0 + \frac{p}{100} \cdot C_0 = C_0 \cdot \left(1 + \frac{p}{100}\right)$
- druge godine $C_2 = C_1 + \frac{p}{100} \cdot C_1 = C_1 \cdot \left(1 + \frac{p}{100}\right) = C_0 \cdot \left(1 + \frac{p}{100}\right)^2$
- treće godine $C_3 = C_2 + \frac{p}{100} \cdot C_2 = C_2 \cdot \left(1 + \frac{p}{100}\right) = C_0 \cdot \left(1 + \frac{p}{100}\right)^3$
- četvrte godine $C_4 = C_3 + \frac{p}{100} \cdot C_3 = C_3 \cdot \left(1 + \frac{p}{100}\right) = C_0 \cdot \left(1 + \frac{p}{100}\right)^4$

……

- n-te godine $C_n = ?$

Konačne vrijednosti glavnice na kraju godine čine geometrijski niz:

$$C_0, C_1, C_2, C_3, C_4, \ldots, C_n$$

$$C_0, C_0 \cdot \left(1 + \frac{p}{100}\right), C_0 \cdot \left(1 + \frac{p}{100}\right)^2, C_0 \cdot \left(1 + \frac{p}{100}\right)^3, C_0 \cdot \left(1 + \frac{p}{100}\right)^4, \ldots, C_n$$

U tom je nizu prvi član $a_1 = C_0$, količnik $q = 1 + \frac{p}{100}$, broj članova je $n+1$.

Potrebno je odrediti konačnu vrijednost glavnice na kraju n – te godine, tj. $C_n$ koja označava opći član $a_{n+1}$.

Ponovimo!

Opći član geometrijskog niza glasi: $a_n = a_1 \cdot q^{n-1}$.

Konačno se dobije:

$$a_{n+1} = a_1 \cdot q^n \Rightarrow C_n = C_0 \cdot \left(1 + \frac{p}{100}\right)^n.$$

### Vježba 017

U banku je uložen iznos od 125 000.00 kn. Kolika je vrijednost uloga na kraju desete godine ako je obračun kamata složen, godišnji i dekurzivan? Godišnji kamatnjak je 20.

**Rezultat:** $C_{10} = 125000 \cdot \left(1 + \frac{20}{100}\right)^{10} = 773967.05\ kn.$

**Zadatak 018 (Ivana, Jelena, Edita, Goran, ekonomski fakultet)**

Izvedi formulu za neprekidno ukamaćivanje.

**Rješenje 018**

Neprekidno (kontinuirano) ukamaćivanje je poseban obračun kamata u kojem se kamate obračunavaju svakog trenutka i pribrajaju glavnici. Primjenjuje se u određivanju prirodnih prirasta (prirast biljaka, životinja, ljudi) i u makroekonomskim istraživanjima.

Neka je:

$C_0$ – početna (sadašnja) vrijednost glavnice
n – broj godina trajanja kapitalizacije
p – fiksni godišnji kamatnjak
$C_n$ – konačna (buduća) vrijednost glavnice.

Ako je ukamaćivanje složeno, dekurzivno i godišnje, tada je konačna vrijednost glavnice:

$$C_n = C_0 \cdot \left(1 + \frac{p}{100}\right)^n .$$

Ako je ukamaćivanje ispodgodišnje, uz m obračuna kamata, konačna vrijednost glavnice uz relativni kamatnjak je:

$$C_n = C_0 \cdot \left(1 + \frac{p}{100 \cdot m}\right)^{n \cdot m} .$$

Uvedemo supstituciju:

$$x = \frac{100 \cdot m}{p} \Rightarrow \begin{cases} \dfrac{1}{x} = \dfrac{p}{100 \cdot m} \\ m = \dfrac{x \cdot p}{100} . \end{cases}$$

Sada je:

$$C_n = C_0 \cdot \left(1 + \frac{1}{x}\right)^{\frac{x \cdot n \cdot p}{100}} .$$

Kada m raste, tj. kad se kamate pribrajaju glavnici u sve manjim vremenskim razdobljima, raste sve više x:

$$m \to \infty \Rightarrow x \to \infty .$$

Zato je:

$$C_n = \lim_{x \to \infty} C_0 \cdot \left(1 + \frac{1}{x}\right)^{\frac{x \cdot n \cdot p}{100}} = \lim_{x \to \infty} C_0 \cdot \left[\left(1 + \frac{1}{x}\right)^x\right]^{\frac{n \cdot p}{100}} = C_0 \cdot \left[\lim_{x \to \infty} \left(1 + \frac{1}{x}\right)^x\right]^{\frac{n \cdot p}{100}} =$$

$$= \left[\begin{array}{c} \text{koristimo limes} \\ \lim\limits_{x \to \infty} \left(1 + \dfrac{1}{x}\right)^x = e \end{array}\right] = C_0 \cdot e^{\frac{n \cdot p}{100}} .$$

**Vježba 018**

Glavnica 5000 kn ukamaćuje se 4 godine uz godišnji kamatnjak 5. Kolika je konačna vrijednost glavnice, ako je obračun kamata dekurzivan i neprekidan (kontinuiran)?

**Rezultat:** $C_4 = 5000 \cdot e^{\frac{4 \cdot 5}{100}} = 5000 \cdot e^{0.2} \approx 6107.01 \ kn.$

**Zadatak 019 (Ivana, Jelena, Edita, Goran, ekonomski fakultet)**

Odredite relativnu i konformnu kamatnu stopu, a zatim ih usporedite ako je nominalna kamatna stopa p = 12 godišnje i ukamaćivanje kvartalno.

**Rješenje 019**

$$\left.\begin{array}{l} p = 16 \ \text{nominalna kamatna stopa (godišnja)} \Rightarrow a = 12 \ mj \\ b = 3 \ mj \ \ \text{ukamaćivanje kvartalno} \end{array}\right\} \Rightarrow m = \frac{a}{b} = \frac{12}{3} = 4$$

Kamatnjaci su:

- kvartalni relativni kamatnjak

$$p_r = \frac{p}{m} = \frac{16}{4} = 4,$$

- kvartalni konformni kamatnjak

$$. \; p' = 100 \cdot \left[ \sqrt[m]{1 + \frac{p}{100}} - 1 \right] = 100 \cdot \left[ \sqrt[4]{1 + \frac{16}{100}} - 1 \right] = 100 \cdot \left[ \sqrt[4]{1.16} - 1 \right] = 3.780198565376661465.$$

Zaključak:

$$p_r > p'.$$

**Vježba 019**

Odredite relativnu i konformnu kamatnu stopu, a zatim ih usporedite ako je nominalna kamatna stopa p = 20 godišnje i ukamaćivanje kvartalno.

**Rezultat:** $p_r = 5 \quad , \quad p' = 100 \cdot \left[ \sqrt[4]{1 + \frac{20}{100}} - 1 \right] = 4.66351393921055557 83.$

**Zadatak 020 (Ivana, komercijalna škola)**

Netko oroči 20000 kn na tri godine. Ako su ukupne kamate jednake 3152.50 kn uz koju je godišnju kamatnu stopu novac oročen? Obračun je kamata godišnji, složen i dekurzivan.

**Rješenje 020**

$C_0$ = 20000, n = 3, K = 3152.50, p = ?

Konačna vrijednost uloga na kraju treće godine iznosi:

$$C_3 = C_0 + K = 20000 + 3152.50 = 23152.50 \; kn.$$

Računamo kamatnu stopu p:

$$C_3 = C_0 \cdot \left(1 + \frac{p}{100}\right)^3 \; /:C_0 \; \Rightarrow \left(1 + \frac{p}{100}\right)^3 = \frac{C_3}{C_0} \; / \sqrt[3]{\;} \; \Rightarrow 1 + \frac{p}{100} = \sqrt[3]{\frac{C_3}{C_0}} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \frac{p}{100} = \sqrt[3]{\frac{C_3}{C_0}} - 1 \; / \cdot 100 \; \Rightarrow p = 100 \cdot \left[ \sqrt[3]{\frac{C_3}{C_0}} - 1 \right] \Rightarrow p = 100 \cdot \left[ \sqrt[3]{\frac{23152.50}{20000}} - 1 \right] = 100 \cdot [1.05 - 1] = 5.$$

**Vježba 020**

Netko oroči 40000 kn na tri godine. Ako su ukupne kamate jednake 6305 kn uz koju je godišnju kamatnu stopu novac oročen? Obračun je kamata godišnji, složen i dekurzivan.

**Rezultat:** p = 5.