Zadatak 061 (Ljilja, srednja škola)

Ako je $(2 \cdot a):(3 \cdot b)=(4 \cdot b):(3 \cdot a)$, onda je $b^2 : a^2$ jednako:

A. 0.2 B. 0.5 C. 2 D. 5

Rješenje 061

Ponovimo!

Ako su a i b brojevi, kažemo da je količnik a : b, b ≠ 0 omjer brojeva a i b.
Vrijednost omjera ne mijenja se ako se prvi i drugi broj pomnože ili podijele istim brojem.

$$a : b=(a \cdot n):(b \cdot n)$$

$$a : b=(a : n):(b : n).$$

Razmjer ili proporcija je jednakost dvaju jednakih omjera. Ako je

$$a : b = k \quad i \quad c : d = k,$$

tada je razmjer ili proporcija

$$a : b = c : d.$$

Umnožak vanjskih članova razmjera a i d jednak je umnošku unutarnjih članova razmjera b i c.

$$a : b=c : d \Rightarrow a \cdot d=b \cdot c.$$

$$(2 \cdot a):(3 \cdot b)=(4 \cdot b):(3 \cdot a) \Rightarrow (2 \cdot a) \cdot (3 \cdot a)=(3 \cdot b) \cdot (4 \cdot b) \Rightarrow 6 \cdot a^2=12 \cdot b^2 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 6 \cdot a^2=12 \cdot b^2 \; /:6 \Rightarrow a^2=2 \cdot b^2.$$

Sada je:

$$b^2 : a^2=b^2 : \left(2 \cdot b^2\right)=\left[\begin{array}{l} \text{dijelimo} \\ \text{omjer sa } b^2 \end{array}\right]=1 : 2=\frac{1}{2}=0.5.$$

Odgovor je pod B.

Vježba 061

Ako je $(2 \cdot a):(3 \cdot b)=(4 \cdot b):(3 \cdot a)$, onda je $a^2 : b^2$ jednako:

A. 0.2 B. 0.5 C. 2 D. 5

Rezultat: C.

Zadatak 062 (Vedran, srednja škola)

Tri su radnika pristali da ih se za obavljeni posao plati zajedno 75 forina, koje će među sobom razdijeliti tako da svaki dobije u skladu s brojem zadataka koje je obavio. Prvi je radio 15 dana i obavio po 20 zadataka na dan, drugi je radio 10 dana po 36 zadataka, a treći 12 dana po 70 zadataka. Koliko je koji zaradio?

Rješenje 062

Ponovimo!

Složeni račun diobe koristimo kada su dijelovi veličine koju treba podijeliti razmjerni s više veličina.
Ako neku veličinu dijelimo na dijelove $x_1, x_2, x_3, \ldots, x_n$ upravo razmjerno s dvjema veličinama zadanim nizovima brojeva $a_1, a_2, a_3, \ldots, a_n$ i $b_1, b_2, b_3, \ldots, b_n$, tada je:

$$x_1=k \cdot a_1 \cdot b_1 \quad , \quad x_2=k \cdot a_2 \cdot b_2 \quad , \quad x_3=k \cdot a_3 \cdot b_3 \quad , \quad \ldots \quad , \quad x_n=k \cdot a_n \cdot b_n,$$

gdje je k koeficijent razmjernosti.
Označimo slovima x_1, x_2 i x_3 zarade prvog, drugog i trećeg djelatnika. Tada je

$$x_1+x_2+x_3=75.$$

Budući da su veličine upravo razmjerne (više dana rada – veća zarada, više obavljenih zadataka – veća zarada), slijedi da je:

- prvi djelatnik zaradio

$$x_1=k \cdot 15 \cdot 20 \Rightarrow x_1=300 \cdot k$$

- drugi djelatnik zaradio

$$x_2 = k \cdot 10 \cdot 36 \;\Rightarrow\; x_2 = 360 \cdot k$$

- treći djelatnik zaradio

$$x_3 = k \cdot 12 \cdot 70 \;\Rightarrow\; x_3 = 840 \cdot k.$$

Tada je

$$x_1 + x_2 + x_3 = 300 \cdot k + 360 \cdot k + 840 \cdot k \;\Rightarrow\; x_1 + x_2 + x_3 = 1500 \cdot k.$$

Računamo koeficijent razmjernosti k.

$$\left.\begin{array}{l} x_1 + x_2 + x_3 = 1500 \cdot k \\ x_1 + x_2 + x_3 = 75 \end{array}\right\} \Rightarrow \begin{bmatrix} \text{metoda} \\ \text{komparacije} \end{bmatrix} \Rightarrow 1500 \cdot k = 75 \;\Rightarrow\; 1500 \cdot k = 75 \;/ : 1500 \;\Rightarrow$$

$$\Rightarrow\; k = \frac{75}{1500} \;\Rightarrow\; k = \frac{75}{1500} \;\Rightarrow\; k = \frac{1}{20}.$$

Zarade djelatnika iznose:

Prvi djelatnik	$x_1 = 300 \cdot \frac{1}{20} \;\Rightarrow\; x_1 = 15$
Drugi djelatnik	$x_2 = 360 \cdot \frac{1}{20} \;\Rightarrow\; x_2 = 18$
Treći djelatnik	$x_3 = 840 \cdot \frac{1}{20} \;\Rightarrow\; x_3 = 42$
Provjera:	75

Vježba 062

Tri su radnika pristali da ih se za obavljeni posao plati zajedno 75 forina, koje će među sobom razdijeliti tako da svaki dobije u skladu s brojem zadataka koje je obavio. Prvi je radio 30 dana i obavio po 10 zadataka na dan, drugi je radio 20 dana po 18 zadataka, a treći 24 dana po 35 zadataka. Koliko je koji zaradio?

Rezultat: 15, 18, 42.

Zadatak 063 (Goga, srednja škola)

Pješak prijeđe 70 m u minuti, a ptica trkačica 70 km na sat. Kako se odnose njihove brzine?

$$A.\ 1:1 \qquad B.\ 1:4 \qquad C.\ 3:50 \qquad D.\ 4:75$$

Rješenje 063

Ponovimo!

$$1\ km = 1000\ m \;\Rightarrow\; 1\ m = \frac{1}{1000}\ km \quad , \quad 1\ h = 60\ \min \;\Rightarrow\; 1\ \min = \frac{1}{60}\ h \quad , \quad \frac{\frac{a}{b}}{\frac{c}{d}} = \frac{a \cdot d}{b \cdot c}.$$

Ako su a i b brojevi, kažemo da je količnik a : b, b $\neq 0$ omjer brojeva a i b.
Vrijednost omjera ne mijenja se ako se prvi i drugi broj pomnože ili podijele istim brojem.

$$a : b = (a \cdot n) : (b \cdot n)$$
$$a : b = (a : n) : (b : n).$$

1.inačica

$$70\ \frac{m}{\min} : 70\ \frac{km}{h} = 70\ \frac{m}{\min} : \left(70 \cdot \frac{1000}{60}\ \frac{m}{\min}\right) = 70\ \frac{m}{\min} : \left(70 \cdot \frac{1000}{60}\ \frac{m}{\min}\right) =$$

$$= 70 : \left(70 \cdot \frac{1000}{60}\right) = 70 : \left(70 \cdot \frac{1000}{60}\right) = 70 : \left(70 \cdot \frac{50}{3}\right) = \begin{bmatrix} \text{proširujemo omjer} \\ \text{razlomkom } \frac{3}{70} \end{bmatrix} =$$

$$= \left(70 \cdot \frac{3}{70}\right) : \left(70 \cdot \frac{50}{3} \cdot \frac{3}{70}\right) = \left(70 \cdot \frac{3}{70}\right) : \left(70 \cdot \frac{50}{3} \cdot \frac{3}{70}\right) = 3 : 50.$$

Odgovor je pod C.

2.inačica

$$70 \frac{m}{\min} : 70 \frac{km}{h} = \left(70 \cdot \frac{\frac{1}{1000} km}{\frac{1}{60} h}\right) : 70 \frac{km}{h} = \left(70 \cdot \frac{60}{1000} \frac{km}{h}\right) : 70 \frac{km}{h} = \left(70 \cdot \frac{60}{1000} \frac{km}{h}\right) : 70 \frac{km}{h} =$$

$$= \left(70 \cdot \frac{60}{1000}\right) : 70 = \left(70 \cdot \frac{60}{1000}\right) : 70 = \left(70 \cdot \frac{3}{50}\right) : 70 = \left(70 \cdot \frac{3}{50}\right) : 70 = \left(7 \cdot \frac{3}{5}\right) : 70 =$$

$$= \begin{bmatrix} \text{proširujemo omjer} \\ \text{razlomkom } \frac{5}{7} \end{bmatrix} = \left(7 \cdot \frac{3}{5} \cdot \frac{5}{7}\right) : \left(70 \cdot \frac{5}{7}\right) = \left(7 \cdot \frac{3}{5} \cdot \frac{5}{7}\right) : \left(70 \cdot \frac{5}{7}\right) = 3 : 50.$$

Odgovor je pod C.

Vježba 063

Pješak prijeđe 700 dm u minuti, a ptica trkačica 70 km za 60 minuta. Kako se odnose njihove brzine?

A. 1 : 1 *B.* 1 : 4 *C.* 3 : 50 *D.* 4 : 75

Rezultat: C.

Zadatak 064 (Ninoslav, srednja škola)

Zadana su dva broja tako da se njihova razlika, zbroj i umnožak odnose kao 1 : 7 : 24. Nađi umnožak brojeva.

Rješenje 064

Neka su a i b traženi brojevi. Tada vrijedi:

$$(a-b) : (a+b) : (a \cdot b) = 1 : 7 : 24 \Rightarrow \left.\begin{array}{l} a-b=k \\ a+b=7 \cdot k \\ a \cdot b = 24 \cdot k \end{array}\right\},$$ gdje je k faktor razmjernosti ili proporcionalnosti.

Iz prve dvije jednadžbe izračuna se a u ovisnosti od k.

$$\left.\begin{array}{l} a-b=k \\ a+b=7 \cdot k \end{array}\right\} \Rightarrow \begin{bmatrix} \text{metoda suprotnih} \\ \text{koeficijenata} \end{bmatrix} \Rightarrow 2 \cdot a = 8 \cdot k \Rightarrow 2 \cdot a = 8 \cdot k \;/ : 2 \Rightarrow a = 4 \cdot k.$$

Sada računamo b.

$$\left.\begin{array}{l} a \cdot b = 24 \cdot k \\ a = 4 \cdot k \end{array}\right\} \Rightarrow \begin{bmatrix} \text{metoda} \\ \text{supstitucije} \end{bmatrix} \Rightarrow 4 \cdot k \cdot b = 24 \cdot k \Rightarrow 4 \cdot k \cdot b = 24 \cdot k \;/ \cdot \frac{1}{4 \cdot k} \Rightarrow b = 6.$$

Računamo k.

$$\left.\begin{array}{l} a-b=k \\ a+b=7 \cdot k \\ b=6 \end{array}\right\} \Rightarrow \left.\begin{array}{l} a-6=k \\ a+6=7 \cdot k \end{array}\right\} \Rightarrow \left.\begin{array}{l} a=k+6 \\ a=7 \cdot k-6 \end{array}\right\} \Rightarrow \begin{bmatrix} \text{metoda} \\ \text{komparacije} \end{bmatrix} \Rightarrow k+6=7 \cdot k-6 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow k-7 \cdot k = -6-6 \Rightarrow -6 \cdot k = -12 \Rightarrow -6 \cdot k = -12 \;/ : (-6) \Rightarrow k = 2.$$

Umnožak brojeva a i b iznosi:

$$\left.\begin{array}{l} a \cdot b = 24 \cdot k \\ k = 2 \end{array}\right\} \Rightarrow a \cdot b = 24 \cdot 2 \Rightarrow a \cdot b = 48.$$

Vježba 064

Zadana su dva broja tako da se njihova razlika, zbroj i umnožak odnose kao 1 : 7 : 24. Nađi zbroj brojeva.

Rezultat: 14.

Zadatak 065 (Sanchy, gimnazija)

Ako je $\frac{a}{a-b} = \frac{1}{3}$, onda $\frac{a+b}{b}$ iznosi:

$$A.\ 3 \qquad B.\ \frac{1}{3} \qquad C.\ 2 \qquad D.\ \frac{1}{2}$$

Rješenje 065

Ponovimo!

$$\frac{a}{b} = \frac{c}{d} \Rightarrow a \cdot d = b \cdot c \quad , \quad \frac{a}{n} + \frac{b}{n} = \frac{a+b}{n} \quad , \quad n = \frac{n}{1} \quad , \quad \frac{a}{b} + \frac{c}{d} = \frac{a \cdot d + b \cdot c}{b \cdot d}.$$

$$\frac{\frac{a}{b}}{\frac{c}{d}} = \frac{a \cdot d}{b \cdot c} \quad , \quad \frac{a}{b} = \frac{c}{d} \Rightarrow \frac{b}{a} = \frac{d}{c} \quad , \quad \frac{a}{n} - \frac{b}{n} = \frac{a-b}{n}.$$

1.inačica

Iz zadane jednakosti izračunamo, na primjer, nepoznanicu a.

$$\frac{a}{a-b} = \frac{1}{3} \Rightarrow 3 \cdot a = a - b \Rightarrow 3 \cdot a - a = -b \Rightarrow 2 \cdot a = -b \Rightarrow 2 \cdot a = -b \ /: 2 \Rightarrow a = -\frac{b}{2}.$$

Tada je:

$$\frac{a+b}{b} = \frac{a}{b} + \frac{b}{b} = \frac{a}{b} + 1 = \frac{-\frac{b}{2}}{b} + 1 = \frac{-\frac{b}{2}}{\frac{b}{1}} + 1 = \frac{-\frac{b}{2}}{\frac{b}{1}} + 1 = \frac{-\frac{1}{2}}{\frac{1}{1}} + 1 = -\frac{1}{2} + 1 = -\frac{1}{2} + \frac{1}{1} = \frac{-1+2}{2} = \frac{1}{2}.$$

Odgovor je pod D.

2.inačica

Zadanu jednakost transformiramo na sljedeći način:

$$\frac{a}{a-b} = \frac{1}{3} \Rightarrow \frac{a-b}{a} = 3 \Rightarrow \frac{a}{a} - \frac{b}{a} = 3 \Rightarrow 1 - \frac{b}{a} = 3 \Rightarrow -\frac{b}{a} = 3 - 1 \Rightarrow -\frac{b}{a} = 2 \Rightarrow -\frac{b}{a} = 2 \ / \cdot (-1) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \frac{b}{a} = -2 \Rightarrow \frac{a}{b} = -\frac{1}{2}.$$

Dalje slijedi:

$$\frac{a}{b} = -\frac{1}{2} \Rightarrow \frac{a}{b} = -\frac{1}{2} \ / + 1 \Rightarrow \frac{a}{b} + 1 = -\frac{1}{2} + 1 \Rightarrow \frac{a}{b} + \frac{1}{1} = -\frac{1}{2} + \frac{1}{1} \Rightarrow \frac{a+b}{b} = \frac{-1+2}{1} \Rightarrow \frac{a+b}{b} = \frac{1}{2}.$$

Odgovor je pod D.

Vježba 065

Ako je $\frac{a}{a-b} = \frac{1}{3}$, onda $\frac{a+b}{a}$ iznosi:

$$A.\ 1 \qquad B.\ 2 \qquad C.\ -1 \qquad D.\ -2$$

Rezultat: C.

Zadatak 066 (Vlado, gimnazija)

Na zemljopisnoj karti udaljenost dvaju mjesta iznosi 15 cm, a stvarna udaljenost tih mjesta je 120 km. Koliko je mjerilo karte?

$$A.\ 1:80000 \qquad B.\ 1:8000 \qquad C.\ 1:800000 \qquad D.\ 1:400000$$

Rješenje 066

Ponovimo!

$$1\ km = 1000\ m \quad , \quad 1\ m = 100\ cm.$$

Ako su a i b brojevi, kažemo da je količnik a : b, b $\neq 0$ omjer brojeva a i b.
Vrijednost omjera ne mijenja se ako se prvi i drugi broj pomnože ili podijele istim brojem.

$$a:b = (a \cdot n):(b \cdot n)$$

$$a:b = (a:n):(b:n).$$

Razmjer ili proporcija je jednakost dvaju jednakih omjera. Ako je

$$a:b = k \quad i \quad c:d = k,$$

tada je razmjer ili proporcija

$$a:b = c:d.$$

Umnožak vanjskih članova razmjera a i d jednak je umnošku unutarnjih članova razmjera b i c.

$$a:b = c:d \;\Rightarrow\; a \cdot d = b \cdot c.$$

Neka je dano mjerilo M = 1 : x. To znači da 1 cm na karti odgovara x cm u stvarnosti (u prirodi). Tada je:

$$1:x = 15\ cm : 120\ km \;\Rightarrow\; 15\ cm \cdot x = 120\ km \cdot 1 \;\Rightarrow\; 15\ cm \cdot x = 120\ km \;\Rightarrow$$

$$\Rightarrow\; 15\ cm \cdot x = 120\ km \ / \cdot \frac{1}{15\ cm} \;\Rightarrow\; x = \frac{120\ km}{15\ cm} \;\Rightarrow\; x = \frac{12000000\ cm}{15\ cm} \;\Rightarrow\; x = 800000.$$

Mjerilo je

$$M = 1:800000.$$

Odgovor je pod C.

Vježba 066

Na zemljopisnoj karti udaljenost dvaju mjesta iznosi 7.5 cm, a stvarna udaljenost tih mjesta je 60 km. Koliko je mjerilo karte?

$$A.\ 1:80000 \qquad B.\ 1:8000 \qquad C.\ 1:800000 \qquad D.\ 1:400000$$

Rezultat: C.

Zadatak 067 (Matija, gimnazija)

Zvono teško 50 000 funti lijeva se od kovine koja se radi od bakra, kositra i stare kovine od zvona, koji se miješaju u omjeru (masa) 100 : 25 : 10. Koliko će pojedinih kovina trebati za lijevanje zvona?

Rješenje 067

Ponovimo!

Razmjer ili proporcija je jednakost dvaju jednakih omjera. Ako je

$$a : b = k \quad i \quad c : d = k,$$

tada je razmjer ili proporcija

$$a : b = c : d.$$

Umnožak vanjskih članova razmjera a i d jednak je umnošku unutarnjih članova razmjera b i c.

$$a : b = c : d \;\Rightarrow\; a \cdot d = b \cdot c.$$

Ako postoji n jednakih omjera

$$\begin{gathered} a_1 : b_1 = k \\ a_2 : b_2 = k \\ a_3 : b_3 = k \\ \ldots \\ a_n : b_n = k, \end{gathered}$$

produženi razmjer je

$$a_1 : a_2 : a_3 : \ldots : a_n = b_1 : b_2 : b_3 : \ldots : b_n.$$

Produženi razmjer ima sljedeća svojstva:

$$\begin{gathered} \left(a_1 \pm a_2 \pm a_3 \pm \ldots \pm a_n\right) : \left(b_1 \pm b_2 \pm b_3 \pm \ldots \pm b_n\right) = a_1 : b_1 \\ \left(a_1 \pm a_2 \pm a_3 \pm \ldots \pm a_n\right) : \left(b_1 \pm b_2 \pm b_3 \pm \ldots \pm b_n\right) = a_2 : b_2 \\ \left(a_1 \pm a_2 \pm a_3 \pm \ldots \pm a_n\right) : \left(b_1 \pm b_2 \pm b_3 \pm \ldots \pm b_n\right) = a_3 : b_3 \\ \ldots \\ \left(a_1 \pm a_2 \pm a_3 \pm \ldots \pm a_n\right) : \left(b_1 \pm b_2 \pm b_3 \pm \ldots \pm b_n\right) = a_n : b_n. \end{gathered}$$

1.inačica

Ukupnu težinu zvona 50000 funti podijelit ćemo na težinu bakra A, kositra B i staru kovinu C u zadanom omjeru. Zato pišemo:

$$\left.\begin{matrix} A : B : C = 100 : 25 : 10 \\ A + B + C = 50\,000 \end{matrix}\right\} \Rightarrow \left.\begin{matrix} A = 100 \cdot k \\ B = 25 \cdot k \\ C = 10 \cdot k \\ A + B + C = 50\,000 \end{matrix}\right\} \Rightarrow \begin{bmatrix} \text{metoda} \\ \text{supstitucije} \end{bmatrix} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 100 \cdot k + 25 \cdot k + 10 \cdot k = 50\,000 \Rightarrow 135 \cdot k = 50\,000 \Rightarrow 135 \cdot k = 50\,000 \;/ : 135 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow k = \frac{50\,000}{135} \Rightarrow k = \frac{10\,000}{27}.$$

Za lijevanje zvona trebat će:

- bakra

$$\left.\begin{matrix} A = 100 \cdot k \\ k = \dfrac{10\,000}{27} \end{matrix}\right\} \Rightarrow A = 100 \cdot \frac{10\,000}{27} \Rightarrow A = 37\,037.04 \;\; funti$$

- kositra

$$\left.\begin{matrix} B = 25 \cdot k \\ k = \dfrac{10\,000}{27} \end{matrix}\right\} \Rightarrow B = 25 \cdot \frac{10\,000}{27} \Rightarrow B = 9\,259.26 \;\; funti$$

- stare kovine

$$\left.\begin{array}{l} C = 10 \cdot k \\ k = \dfrac{10\,000}{27} \end{array}\right\} \Rightarrow C = 10 \cdot \frac{10\,000}{27} \Rightarrow C = 3\,703.70 \;\; funti.$$

2.inačica

Ukupnu težinu zvona 50000 funti podijelit ćemo na težinu bakra A, kositra B i staru kovinu C u zadanom omjeru. Uporabit ćemo svojstvo produženog razmjera.

Bakar

- $A + B + C = 50\,000 \quad , \quad A : B : C = 100 : 25 : 10.$

$$(A + B + C) : (100 + 25 + 10) = A : 100 \Rightarrow 50\,000 : 135 = A : 100 \Rightarrow 135 \cdot A = 5\,000\,000 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 135 \cdot A = 5\,000\,000 \;/ : 135 \Rightarrow A = 37037.04 \;\; funti.$$

Kositar

- $A + B + C = 50\,000 \quad , \quad A : B : C = 100 : 25 : 10.$

$$(A + B + C) : (100 + 25 + 10) = B : 25 \Rightarrow 50\,000 : 135 = B : 25 \Rightarrow 135 \cdot B = 1\,250\,000 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 135 \cdot B = 1\,250\,000 \;/ : 135 \Rightarrow B = 9\,259.26 \;\; funti.$$

Stara kovina

- $A + B + C = 50\,000 \quad , \quad A : B : C = 100 : 25 : 10.$

$$(A + B + C) : (100 + 25 + 10) = C : 10 \Rightarrow 50\,000 : 135 = C : 10 \Rightarrow 135 \cdot C = 500\,000 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 135 \cdot C = 500\,000 \;/ : 135 \Rightarrow C = 3\,703.70 \;\; funti.$$

Ili

$$C = (A + B + C) - (A + B) = 50\,000 - (37\,037.04 + 9\,259.26) = 50\,000 - 46296.30 = 3\,703.70 \;\; funti.$$

= bakar : kositar : stara kovina

Vježba 067

Zvono teško 50 000 funti lijeva se od kovine koja se radi od bakra, kositra i stare kovine od zvona, koji se miješaju u omjeru (masa) 5 : 4 : 1. Koliko će pojedinih kovina trebati za lijevanje zvona?

Rezultat: 25 000 funti bakra, 20 000 funti kositra, 5 000 funti stare kovine.

Zadatak 068 (Matija, gimnazija)

U nekoj vojnoj utvrdi služi 12 tribuna, 26 protribuna, 50 centuriona i 32 procenturiona koji među sobom imaju raspodijeliti 1810 zlatnika plijena i to tako da ako tribun dobije 10, protribun dobije 8, centurion 6, a procenturion 3. Koliko će zlatnika koji dobiti?

Rješenje 068

Ponovimo!

Složenim računom diobe služimo se kada su dijelovi veličine koju treba podijeliti razmjerni s više veličina. Kada neku veličinu trebamo podijeliti na dijelove x_1, x_2, x_3, ... , x_n upravo razmjerno s dvjema veličinama zadanim nizovima brojeva: a_1, a_2, a_3, ... , a_n i b_1, b_2, b_3, ... , b_n, tada je:

$$x_1 = k \cdot a_1 \cdot b_1 \quad , \quad x_2 = k \cdot a_2 \cdot b_2 \quad , \quad x_3 = k \cdot a_3 \cdot b_3 \quad , \quad \ldots \quad , \quad x_n = k \cdot a_n \cdot b_n ,$$

gdje je k koeficijent razmjernosti (proporcionalnosti).

Plijen od 1810 zlatnika treba podijeliti na četiri dijela, tako da 12 tribuna dobije A zlatnika, 26 protribuna B zlatnika, 50 centuriona C zlatnika i 32 procenturiona D zlatnika.

Plijen treba razdijeliti na skupine upravno razmjerno broju ljudi i upravno razmjerno broju primljenih zlatnika.

Budući da je A zarada 12 tribuna, B zarada 26 protribuna, C zarada 50 centuriona i D zarada 32 procenturiona vrijedi:

$$A + B + C + D = 1810.$$

Slijedi da je zarada:

- 12 tribuna i ako svaki dobije 10 zlatnika

$$A = k \cdot 12 \cdot 10 \;\Rightarrow\; A = 120 \cdot k$$

- 26 protribuna i ako svaki dobije 8 zlatnika

$$B = k \cdot 26 \cdot 8 \;\Rightarrow\; B = 208 \cdot k$$

- 50 centuriona i ako svaki dobije 6 zlatnika

$$C = k \cdot 50 \cdot 6 \;\Rightarrow\; C = 300 \cdot k$$

- 32 procenturiona i ako svaki dobije 3 zlatnika

$$D = k \cdot 32 \cdot 3 \;\Rightarrow\; D = 96 \cdot k.$$

Računamo koeficijent razmjernosti k.

$$A + B + C + D = 1810 \;\Rightarrow\; 120 \cdot k + 208 \cdot k + 300 \cdot k + 96 \cdot k = 1810 \;\Rightarrow\; 724 \cdot k = 1810 \;\Rightarrow$$

$$\Rightarrow\; 724 \cdot k = 1810 \;/ : 724 \;\Rightarrow\; k = 2.5.$$

Podjela plijena je sljedeća:

$$\left.\begin{array}{l} \text{tribuni} \\ \text{protribuni} \\ \text{centurioni} \\ \text{procenturioni} \end{array}\right\} \Rightarrow \left.\begin{array}{l} A = 120 \cdot k \\ B = 208 \cdot k \\ C = 300 \cdot k \\ D = 96 \cdot k \end{array}\right\} \Rightarrow \left[\, k = 2.5 \,\right] \Rightarrow \left.\begin{array}{l} A = 120 \cdot 2.5 \\ B = 208 \cdot 2.5 \\ C = 300 \cdot 2.5 \\ D = 96 \cdot 2.5 \end{array}\right\} \Rightarrow \left.\begin{array}{l} A = 300 \\ B = 520 \\ C = 750 \\ D = 240 \end{array}\right\}.$$

Od ukupnog broja zlatnika dobit će:

- tribun

$$\frac{A}{12} = \frac{300}{12} = 25 \text{ zlatnika}$$

- protribun

$$\frac{B}{26} = \frac{520}{26} = 20 \text{ zlatnika}$$

- centurion

$$\frac{C}{50} = \frac{750}{50} = 15 \text{ zlatnika}$$

- procenturion

$$\frac{D}{32} = \frac{240}{32} = 7.5 \text{ zlatnika.}$$

 **?**  **?** 

Vježba 068

U nekoj vojnoj utvrdi služi 6 tribuna, 13 protribuna, 25 centuriona i 16 procenturiona koji među sobom imaju raspodijeliti 1810 zlatnika plijena i to tako da ako tribun dobije 20, protribun dobije 16, centurion 12, a procenturion 6. Koliko će zlatnika koji dobiti?

Rezultat: Tribun 50, protribun 40, centurion 30 i procenturion 15 zlatnika.

Zadatak 069 (Marina, strukovna škola)

Jedna je obitelj za potrošnju 33 m^3 plina platila 80.32 kn. Koliko će iznositi račun za potrošnju 127 m^3 plina?

$A.\ 309.11\ kn \qquad B.\ 416.64\ kn \qquad C.\ 521.78\ kn \qquad D.\ 632.44\ kn$

Rješenje 069

Ponovimo!

Ako su a i b brojevi, kažemo da je količnik a : b, b $\neq 0$ omjer brojeva a i b.

Vrijednost omjera ne mijenja se ako se prvi i drugi broj pomnože ili podijele istim brojem.

$$a : b = (a \cdot n) : (b \cdot n)$$

$$a : b = (a : n) : (b : n).$$

Razmjer ili proporcija je jednakost dvaju jednakih omjera. Ako je

$$a : b = k \quad i \quad c : d = k,$$

tada je razmjer ili proporcija

$$a : b = c : d.$$

Umnožak vanjskih članova razmjera a i d jednak je umnošku unutarnjih članova razmjera b i c.

$$a : b = c : d \Rightarrow a \cdot d = b \cdot c.$$

Jednostavno pravilo trojno je postupak kojim se iz tri poznata člana razmjera određuje četvrti član. Neka su varijable a i b upravno razmjerne (proporcionalne) (rast jedne uzrokuje rast druge i obrnuto; pad jedne uzrokuje pad druge i obrnuto). Neka je b_2 nepoznata veličina. Upamtimo shemu:

$$\uparrow \; a_1 \text{ .... } b_1 \; \uparrow$$
$$a_2 \text{ .... } b_2$$

Budući da su veličine razmjerne strelice se postavljaju u istom smjeru i u pravilu krećemo od nepoznate veličine. Postavimo razmjer u skladu sa smjerom strelica (počinje se od početka strelica, a završava s krajem strelice)

$$b_2 : b_1 = a_2 : a_1 \Rightarrow a_1 \cdot b_2 = b_1 \cdot a_2 \Rightarrow a_1 \cdot b_2 = b_1 \cdot a_2 \; / : a_1 \Rightarrow b_2 = \frac{b_1 \cdot a_2}{a_1}.$$

1.inačica

Ako je 33 m^3 plina plaćeno 80.32 kn, onda 1 m^3 plina košta

$$\frac{80.32}{33} \, kn.$$

Za 127 m^3 plina platit će se

$$127 \cdot \frac{80.32}{33} \, kn = \frac{127}{1} \cdot \frac{80.32}{33} \, kn = \frac{127 \cdot 80.32}{33} \, kn = 309.11 \, kn.$$

Odgovor je pod A.

2.inačica

Ako je 33 m^3 plina plaćeno 80.32 kn, onda se za 1 kn može kupiti

$$\frac{33}{80.32} \, m^3$$

plina.

Neka je x iznos kojim ćemo platiti 127 m^3 plina. Iz linearne jednadžbe dobije se:

$$\frac{33}{80.31} \cdot x = 127 \Rightarrow \frac{33}{80.32} \cdot x = 127 \; / \cdot \frac{80.32}{33} \Rightarrow x = 127 \cdot \frac{80.32}{33} \Rightarrow x = \frac{127}{1} \cdot \frac{80.32}{33} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow x = \frac{127 \cdot 80.32}{33} \Rightarrow x = 309.11 \, kn.$$

Odgovor je pod A.

3.inačica

Postavimo tablicu:

$$\uparrow \; 33 \text{ m}^3 \text{ .... } 80.32 \text{ kn} \; \uparrow$$
$$127 \text{ m}^3 \text{ .... } x$$

Strelice su postavljene u istom smjeru jer za više plina platit ćemo više kuna (veličine su razmjerne). Iz razmjera izračuna se koliko će obitelj platiti za 127 m^3 plina.

$$x : 80.32 = 127 : 33 \Rightarrow 33 \cdot x = 80.32 \cdot 127 \Rightarrow 33 \cdot x = 80.32 \cdot 127 \quad / : 3 \Rightarrow x = \frac{80.32 \cdot 127}{33} \Rightarrow x = 309.11 \ kn.$$

Odgovor je pod A.

Vježba 069

Jedna je obitelj za potrošnju 66 m^3 plina platila 160.64 kn. Koliko će iznositi račun za potrošnju 127 m^3 plina?

$A.\ 309.11\ kn \qquad B.\ 416.64\ kn \qquad C.\ 521.78\ kn \qquad D.\ 632.44\ kn$

Rezultat: A.

Zadatak 070 (Lana, gimnazija)

Broj 2400 podijeli na 3 dijela koji su u omjeru 3 : 5 : 8.

Rješenje 070

Ponovimo!

Omjer je količnik dviju istovrsnih veličina

$$a : b = k \quad \text{ili} \quad \frac{a}{b} = k,$$

gdje je:

a – prvi član omjera,
b – drugi član omjera,
k – vrijednost (količnik) omjera.

Vrijednost omjera ne mijenja se ako se prvi i drugi broj pomnože ili podijele istim brojem.

$$a : b = (a \cdot n) : (b \cdot n)$$
$$a : b = (a : n) : (b : n).$$

Razmjer ili proporcija je jednakost dvaju jednakih omjera. Ako je

$$a : b = k \quad i \quad c : d = k,$$

tada je razmjer ili proporcija

$$a : b = c : d.$$

Umnožak vanjskih članova razmjera a i d jednak je umnošku unutarnjih članova razmjera b i c.

$$a : b = c : d \Rightarrow a \cdot d = b \cdot c.$$

Ako postoji n jednakih omjera

$$a_1 : b_1 = k$$
$$a_2 : b_2 = k$$
$$a_3 : b_3 = k$$
$$\ldots$$
$$a_n : b_n = k,$$

produženi razmjer je

$$a_1 : a_2 : a_3 : \ldots : a_n = b_1 : b_2 : b_3 : \ldots : b_n.$$

Produženi razmjer ima sljedeća svojstva:

$$a_1 : a_2 : a_3 : \ldots : a_n = (b_1 : n) : (b_2 : n) : (b_3 : n) : \ldots : (b_n : n) \ , \ n \neq 0.$$
$$(a_1 \pm a_2 \pm a_3 \pm \ldots \pm a_n) : (b_1 \pm b_2 \pm b_3 \pm \ldots \pm b_n) = a_1 : b_1$$
$$(a_1 \pm a_2 \pm a_3 \pm \ldots \pm a_n) : (b_1 \pm b_2 \pm b_3 \pm \ldots \pm b_n) = a_2 : b_2$$
$$(a_1 \pm a_2 \pm a_3 \pm \ldots \pm a_n) : (b_1 \pm b_2 \pm b_3 \pm \ldots \pm b_n) = a_3 : b_3$$
$$\ldots$$

$$\left(a_1 \pm a_2 \pm a_3 \pm \ldots \pm a_n\right) : \left(b_1 \pm b_2 \pm b_3 \pm \ldots \pm b_n\right) = a_n : b_n.$$

1.inačica

Broj 2400 podijelimo na tri pribrojnika a, b i c koji su u omjeru 3 : 5 : 8. Zato pišemo:

$$\left.\begin{array}{l} a : b : c = 3 : 5 : 8 \\ a + b + c = 2\,400 \end{array}\right\} \Rightarrow \left.\begin{array}{l} a = 3 \cdot k \\ b = 5 \cdot k \\ c = 8 \cdot k \\ a + b + c = 2\,400 \end{array}\right\} \Rightarrow \left[\begin{array}{l} \text{metoda} \\ \text{supstitucije} \end{array}\right] \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 3 \cdot k + 5 \cdot k + 8 \cdot k = 2\,400 \Rightarrow 16 \cdot k = 2\,400 \Rightarrow 16 \cdot k = 2\,400 \; /:16 \Rightarrow k = 150.$$

Pribrojnici su:

- broj a

$$\left.\begin{array}{l} a = 3 \cdot k \\ k = 150 \end{array}\right\} \Rightarrow a = 3 \cdot 150 \Rightarrow a = 450.$$

- broj b

$$\left.\begin{array}{l} b = 5 \cdot k \\ k = 150 \end{array}\right\} \Rightarrow b = 5 \cdot 150 \Rightarrow b = 750.$$

- broj c

$$\left.\begin{array}{l} c = 8 \cdot k \\ k = 150 \end{array}\right\} \Rightarrow c = 8 \cdot 150 \Rightarrow c = 1200.$$

Ili

$$c = 2\,400 - (a + b) = 2\,400 - (450 + 750) = 2\,400 - 1200 = 1\,200.$$

2.inačica

Broj 2400 podijelimo na tri pribrojnika a, b i c koji su u omjeru 3 : 5 : 8. Uporabit ćemo svojstvo produženog razmjera.

Broj a

- $a + b + c = 2\,400 \quad , \quad a : b : c = 3 : 5 : 8.$

$$(a + b + c) : (3 + 5 + 8) = a : 3 \Rightarrow 2\,400 : 16 = a : 3 \Rightarrow 16 \cdot a = 7\,200 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 16 \cdot a = 7\,200 \; /:16 \Rightarrow a = 450.$$

Broj b

- $a + b + c = 2\,400 \quad , \quad a : b : c = 3 : 5 : 8.$

$$(a + b + c) : (3 + 5 + 8) = b : 5 \Rightarrow 2\,400 : 16 = b : 5 \Rightarrow 16 \cdot b = 12\,000 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 16 \cdot b = 12\,000 \; /:16 \Rightarrow b = 750.$$

Broj c

- $a + b + c = 2\,400 \quad , \quad a : b : c = 3 : 5 : 8.$

$$(a + b + c) : (3 + 5 + 8) = c : 8 \Rightarrow 2\,400 : 16 = c : 8 \Rightarrow 16 \cdot c = 19\,200 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 16 \cdot c = 19\,200 \; /:16 \Rightarrow c = 1200.$$

Ili

$$c = 2\,400 - (a + b) = 2\,400 - (450 + 750) = 2\,400 - 1200 = 1\,200.$$

3.inačica

Broj 2400 podijelimo na tri pribrojnika a, b i c koji su u omjeru 3 : 5 : 8.

$a+b+c=2400$, $a:b:c=3:5:8$		
$2400:(3+5+8)=2400:16=150$		
a	b	c
$3\cdot 150=450$	$5\cdot 150=750$	$8\cdot 150=1200$

Vježba 070

Broj 4800 podijeli na 3 dijela koji su u omjeru 3 : 5 : 8.

Rezultat: 900, 1500, 2400.

Zadatak 071 (Mala, ugostiteljska škola)

Za izradu "Coconut kiss" koktela miješa se kokosovo mlijeko, sok od ananasa, sok naranče i svježe vrhnje u omjeru 4 : 4 : 4 : 3. Koliko je potrebno uzeti navedenih sastojaka ako želimo napraviti 3 litre koktela?

Rješenje 071

Ponovimo!

$$1\ l=10\ dl.$$

Kada neku veličinu S trebamo podijeliti na dijelove $x_1, x_2, x_3, \ldots, x_n$ razmjerno s veličinom zadanom nizom brojeva $a_1, a_2, a_3, \ldots, a_n$

$$\left(x_1 : x_2 : x_3 : \ldots : x_n = a_1 : a_2 : a_3 : \ldots : a_n\right)$$

tada je

$$\left.\begin{array}{l} x_1+x_2+x_3+\ldots+x_n=S \\ x_1=k\cdot a_1 \\ x_2=k\cdot a_2 \\ x_3=k\cdot a_3 \\ \ldots\ldots\ldots\ldots \\ x_n=k\cdot a_n \end{array}\right\},$$

gdje je k koeficijent razmjernosti.

Označimo redom potrebne količine sastojaka.

- x_1 – kokosovo mlijeko
- x_2 – sok od ananasa
- x_3 – sok naranče
- x_4 – svježe vrhnje.

Tada je

$$x_1 : x_2 : x_3 : x_4 = 4:4:4:3 \Rightarrow \left.\begin{array}{l} x_1=4\cdot k \\ x_2=4\cdot k \\ x_3=4\cdot k \\ x_4=3\cdot k \end{array}\right\}.$$

Budući da je

$$x_1+x_2+x_3+x_4=3,$$

to je

$$\left.\begin{aligned} &x_1+x_2+x_3+x_4=3\\ &x_1=4\cdot k\\ &x_2=4\cdot k\\ &x_3=4\cdot k\\ &x_4=3\cdot k \end{aligned}\right\} \Rightarrow\ 4\cdot k+4\cdot k+4\cdot k+3\cdot k=3\ \Rightarrow\ 15\cdot k=3\ \Rightarrow\ 15\cdot k=3\ /:15\ \Rightarrow\ k=0.2.$$

Tražene količine sastojaka su:

$$\left.\begin{aligned} &x_1=4\cdot k\\ &x_2=4\cdot k\\ &x_3=4\cdot k\\ &x_4=3\cdot k\\ &k=0.2 \end{aligned}\right\} \Rightarrow \left.\begin{aligned} &x_1=4\cdot 0.2\\ &x_2=4\cdot 0.2\\ &x_3=4\cdot 0.2\\ &x_4=3\cdot 0.2 \end{aligned}\right\} \Rightarrow \left.\begin{aligned} &x_1=0.8\ l\\ &x_2=0.8\ l\\ &x_3=0.8\ l\\ &x_4=0.6\ l \end{aligned}\right\} \Rightarrow \left.\begin{aligned} &x_1=8\ dl\\ &x_2=8\ dl\\ &x_3=8\ dl\\ &x_4=6\ dl \end{aligned}\right\}.$$

Vježba 071

Za izradu "Coconut kiss" koktela miješa se kokosovo mlijeko, sok od ananasa, sok naranče i svježe vrhnje u omjeru 4 : 4 : 4 : 3. Koliko je potrebno uzeti navedenih sastojaka ako želimo napraviti 6 litara koktela?

Rezultat: 16 dl, 16 dl, 16 dl, 12 dl.

Zadatak 072 (3D, ugostiteljska škola)

Dva se broja odnose kao 2 : 3. Uvećamo li oba za 3 novi se brojevi odnose kao 5 : 7. Koji su to brojevi?

Rješenje 072

Ponovimo!

Omjer je količnik dviju istovrsnih veličina

$$a:b=k\ \text{ ili }\ \frac{a}{b}=k,$$

gdje je:

a – prvi član omjera,
b – drugi član omjera,
k – vrijednost (količnik) omjera.

Razmjer ili proporcija je jednakost dvaju jednakih omjera. Ako je

$$\mathrm{a:b=k}\quad \mathrm{i}\quad \mathrm{c:d=k},$$

tada je razmjer ili proporcija

$$\mathrm{a:b=c:d}.$$

Umnožak vanjskih članova razmjera a i d jednak je umnošku unutarnjih članova razmjera b i c.

$$a:b=c:d\ \Rightarrow\ a\cdot d=b\cdot c.$$

Zakon distribucije množenja prema zbrajanju.

$$a\cdot(b+c)=a\cdot b+a\cdot c\quad,\quad a\cdot b+a\cdot c=a\cdot(b+c).$$

Kako zapisati da je broj a uvećan za broj n?

$$a+n.$$

Neka su x i y dva broja koji se odnose kao 2 : 3. Tada je:

$$x : y = 2 : 3 \Rightarrow 3 \cdot x = 2 \cdot y \Rightarrow 3 \cdot x - 2 \cdot y = 0.$$

Uvećamo li oba broja za 3, novi se brojevi odnose kao 5 : 7 pa vrijedi:

$$(x+3) : (y+3) = 5 : 7 \Rightarrow 7 \cdot (x+3) = 5 \cdot (y+3) \Rightarrow 7 \cdot x + 21 = 5 \cdot y + 15 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 7 \cdot x - 5 \cdot y = 15 - 21 \Rightarrow 7 \cdot x - 5 \cdot y = -6.$$

Iz sustava jednadžbi odrede se brojevi x i y.

$$\left.\begin{array}{l} 3 \cdot x - 2 \cdot y = 0 \\ 7 \cdot x - 5 \cdot y = -6 \end{array}\right\} \Rightarrow \left[\begin{array}{l} \text{metoda suprotnih} \\ \text{koeficijenata} \end{array}\right] \Rightarrow \left.\begin{array}{l} 3 \cdot x - 2 \cdot y = 0 \ / \cdot 5 \\ 7 \cdot x - 5 \cdot y = -6 \ / \cdot (-2) \end{array}\right\} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \left.\begin{array}{l} 15 \cdot x - 10 \cdot y = 0 \\ -14 \cdot x + 10 \cdot y = 12 \end{array}\right\} \Rightarrow x = 12.$$

Računamo y.

$$\left.\begin{array}{l} 3 \cdot x - 2 \cdot y = 0 \\ x = 12 \end{array}\right\} \Rightarrow 3 \cdot 12 - 2 \cdot y = 0 \Rightarrow 36 - 2 \cdot y = 0 \Rightarrow -2 \cdot y = -36 \Rightarrow -2 \cdot y = -36 \ / : (-2) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow y = 18.$$

Vježba 072

Dva se broja odnose kao 1 : 2. Uvećamo li oba za 6 novi se brojevi odnose kao 3 : 5. Koji su to brojevi?

Rezultat: 12 i 24.

Zadatak 073 (Ivan, grafička škola)

Ako je a : b : c = 2 : 3 : 6 i a + b + c = 55, koliko je b?

Rješenje 073

Ponovimo!

Omjer je količnik dviju istovrsnih veličina

$$a : b = k \ \text{ ili } \ \frac{a}{b} = k,$$

gdje je:

a – prvi član omjera,
b – drugi član omjera,
k – vrijednost (količnik) omjera.

Vrijednost omjera ne mijenja se ako se prvi i drugi broj pomnože ili podijele istim brojem.

$$a : b = (a \cdot n) : (b \cdot n)$$
$$a : b = (a : n) : (b : n).$$

Ako postoji n jednakih omjera

$$a_1 : b_1 = k$$
$$a_2 : b_2 = k$$
$$a_3 : b_3 = k$$
$$\ldots$$
$$a_n : b_n = k,$$

produženi razmjer je

$$a_1 : a_2 : a_3 : \ldots : a_n = b_1 : b_2 : b_3 : \ldots : b_n.$$

Produženi razmjer ima sljedeće svojstvo:

$$a_1 : a_2 : a_3 : ... : a_n = (b_1 \cdot n) : (b_2 \cdot n) : (b_3 \cdot n) : ... : (b_n \cdot n) \ , \ n \neq 0.$$

Budući da je zadan produženi razmjer, tada vrijedi:

$$a : b : c = 2 : 3 : 6 \ \Rightarrow \left.\begin{array}{l} a = 2 \cdot k \\ b = 3 \cdot k \\ c = 6 \cdot k \end{array}\right\}, \text{ gdje je } k \text{ faktor razmjernosti ili proporcionalnosti.}$$

Računamo koeficijent razmjernosti k.

$$\left.\begin{array}{l} a = 2 \cdot k \\ b = 3 \cdot k \\ c = 6 \cdot k \\ a + b + c = 55 \end{array}\right\} \Rightarrow \left[\begin{array}{l} \text{metoda} \\ \text{supstitucije} \end{array}\right] \Rightarrow 2 \cdot k + 3 \cdot k + 6 \cdot k = 55 \Rightarrow 11 \cdot k = 55 \Rightarrow 11 \cdot k = 55 \ /:11 \Rightarrow k = 5.$$

Sada računamo b.

$$\left.\begin{array}{l} b = 3 \cdot k \\ k = 5 \end{array}\right\} \Rightarrow \left[\begin{array}{l} \text{metoda} \\ \text{supstitucije} \end{array}\right] \Rightarrow b = 3 \cdot 5 \Rightarrow b = 15.$$

Vježba 073

Ako je a : b : c = 2 : 3 : 6 i a + b + c = 55, koliko je c?

Rezultat: 30.

Zadatak 074 (Ivana, maturantica)

Zadane su dužine a, b i c. Nađite $x = \frac{b \cdot c}{a}$.

Rješenje 074

Ponovimo!

Razmjer ili proporcija je jednakost dvaju jednakih omjera. Ako je

a : b = k i c : d = k,

tada je razmjer ili proporcija

a : b = c : d.

Umnožak vanjskih članova razmjera a i d jednak je umnošku unutarnjih članova razmjera b i c.

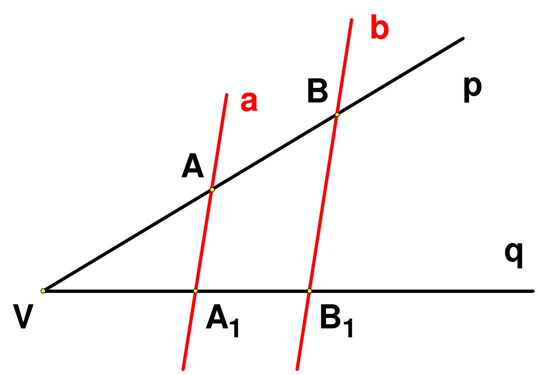
$$a : b = c : d \ \Rightarrow \ a \cdot d = b \cdot c.$$

Talesov poučak o proporcionalnosti

Usporedni (paralelni) pravci na krakovima kuta odsijecaju proporcionalne dužine.

Ako usporedni (paralelni) pravci a i b sijeku krak p kuta $\angle pVq$ u točkama A i B, a krak q u točkama A_1 i B_1, tada je:

$$\frac{AA_1}{BB_1} = \frac{VA}{VB} = \frac{VA_1}{VB_1}.$$

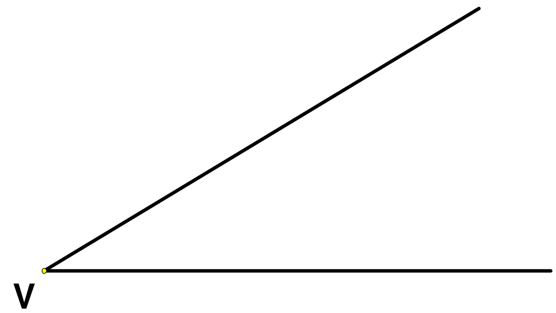


Uočimo da se zadani izraz može napisati u obliku razmjera (proporcije):

$$x = \frac{b \cdot c}{a} \Rightarrow x = \frac{b \cdot c}{a} \, / \cdot a \Rightarrow x \cdot a = b \cdot c \Rightarrow a : b = c : x.$$

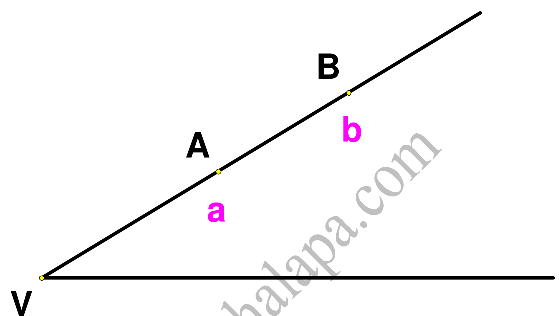
Konstrukcija dužine x provodi se sljedećim redom.

1. Nacrta se proizvoljan šiljasti kut sa vrhom V.



2. Od vrha V na jedan od krakova šiljastog kuta ucrtaju se prva dva člana a i b razmjera.

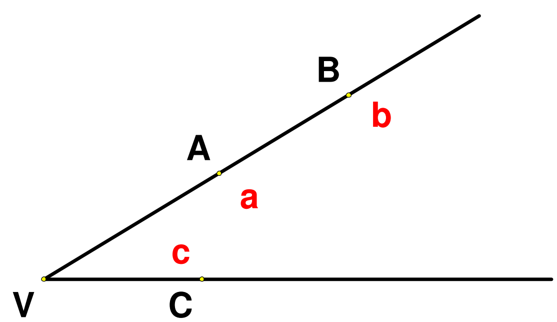
$$a : b = c : x.$$



Tako se dobiju točke A i B.

3. Od vrha V na drugi krak šiljastog kuta ucrta se treći član c razmjera.

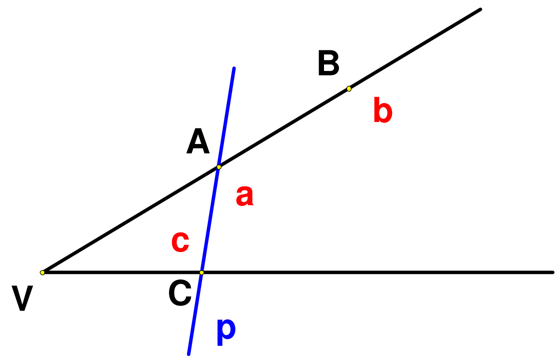
$$a : b = c : x.$$



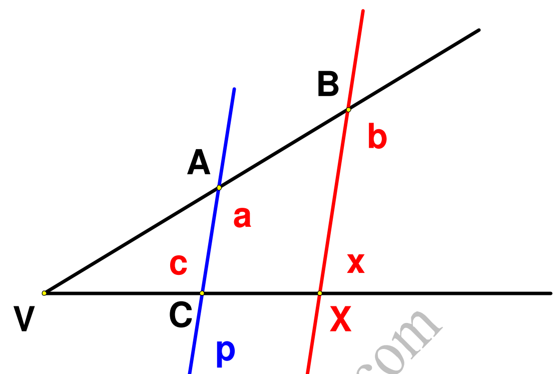
Tako se dobije točka C.

4. Točke A i C spoje se pravcem p. Zapamtimo da pravac p mora spajati točke koje odgovaraju prvom i trećem članu razmjera

$$a : b = c : x.$$



5. Usporednica (paralela) sa pravcem p kroz točku B siječe krak VC u točki X.



Tada je:

$$\left.\begin{array}{l} VX = x \\ VX = \dfrac{b \cdot c}{a} \end{array}\right\} \Rightarrow x = \frac{b \cdot c}{a}.$$

Komentar!
Ako su zadane dužine a, b i jedinična dužina 1, tada se na sličan način uporabom Taleova poučka mogu izračunati sljedeći izrazi:

- $x = a \cdot b \Rightarrow x = \dfrac{a \cdot b}{1} \Rightarrow 1 : a = b : x$
- $x = a^2 \Rightarrow x = a \cdot a \Rightarrow x = \dfrac{a \cdot a}{1} \Rightarrow 1 : a = a : x$
- $x = \dfrac{a}{b} \Rightarrow x = \dfrac{a \cdot 1}{b} \Rightarrow b : a = 1 : x.$

Vježba 074

Zadana je dužina a. Nađite $x = \dfrac{1}{a}$.

Rezultat: Analogno kao u zadatku. Vrijedi: $x = \dfrac{1}{a} \Rightarrow x = \dfrac{1 \cdot 1}{a} \Rightarrow a : 1 = 1 : x.$

Zadatak 075 (Natalija, srednja škola)

Veličina a razmjerna je s veličinom b i obrnuto razmjerna s veličinom c. Koliko puta se promijeni veličina a ako b poraste tri puta, a c se smanji na četvrtinu?

Rješenje 075

Ponovimo!
Kako zapisati da je veličina x n puta veća od veličine y?

$$x = n \cdot y \qquad , \qquad \frac{x}{n} = y \qquad , \qquad \frac{x}{y} = n.$$

Kako zapisati da je veličina x n puta manja od veličine y?

$$n \cdot x = y \qquad , \qquad x = \frac{y}{n} \qquad , \qquad \frac{x}{y} = \frac{1}{n}.$$

Dvije veličine y i x upravno su razmjerne ako je njihov količnik stalan, tj. ako vrijedi:

$$\frac{y}{x} = k \;\Rightarrow\; y = k \cdot x.$$

(ako x poraste n puta i y poraste n puta, ako se x smanji n puta i y se smanji n puta)
Dvije veličine y i x obrnuto su razmjerne ako je njihov umnožak stalan, tj. ako vrijedi:

$$y \cdot x = k \;\Rightarrow\; y = \frac{k}{x}.$$

(ako x poraste n puta tada se y smanji n puta, ako se x smanji n puta tada y poraste n puta)

$$n = \frac{n}{1} \quad , \quad \frac{\frac{a}{b}}{\frac{c}{d}} = \frac{a \cdot d}{b \cdot c} \quad , \quad \frac{\frac{a}{c}}{\frac{b}{c}} = \frac{\frac{a}{c}}{\frac{b}{c}} = \frac{\frac{a}{1}}{\frac{b}{1}} = \frac{a}{b} \quad , \quad \frac{\frac{a}{b}}{\frac{a}{c}} = \frac{\frac{a}{b}}{\frac{a}{c}} = \frac{\frac{1}{b}}{\frac{1}{c}} = \frac{c}{b}.$$

Budući da je veličina a razmjerna s veličinom b i obrnuto razmjerna s veličinom c vrijedi:

$$a = \frac{b}{c}.$$

Iz uvjeta zadatka slijedi:

- da veličina b poraste tri puta

$$b_1 = 3 \cdot b$$

- da se veličina c smanji na četvrtinu

$$c_1 = \frac{1}{4} \cdot c.$$

Sada je

$$a_1 = \frac{b_1}{c_1} \;\Rightarrow\; a_1 = \frac{3 \cdot b}{\frac{1}{4} \cdot c} \;\Rightarrow\; a_1 = \frac{\frac{3 \cdot b}{1}}{\frac{c}{4}} \;\Rightarrow\; a_1 = \frac{12 \cdot b}{c}.$$

Računamo omjer a_1 i a.

$$\frac{a_1}{a} = \frac{\frac{12 \cdot b}{c}}{\frac{b}{c}} \;\Rightarrow\; \frac{a_1}{a} = \frac{\frac{12 \cdot b}{c}}{\frac{b}{c}} \;\Rightarrow\; \frac{a_1}{a} = \frac{\frac{12}{1}}{\frac{1}{1}} \;\Rightarrow\; \frac{a_1}{a} = 12.$$

Veličina a poveća se 12 puta.

Vježba 075

Veličina a razmjerna je s veličinom b i obrnuto razmjerna s veličinom c. Koliko puta se promijeni veličina a ako b poraste dva puta, a c se smanji na trećinu?

Rezultat: 6 puta.

Zadatak 076 (Vily, gimnazija)

Iva i Matej dijele iznos od 24 464 kn u omjeru 3 : 5. Koliko je kuna Iva dobila manje od Mateja?

$A.\ 3262\ kn \qquad B.\ 4892.80\ kn \qquad C.\ 6116\ kn \qquad D.\ 9785.60\ kn$

Rješenje 076

Ponovimo!

Ako su a i b brojevi, kažemo da je količnik a : b, $b \neq 0$ omjer brojeva a i b.
Vrijednost omjera ne mijenja se ako se prvi i drugi broj pomnože ili podijele istim brojem.

$$a : b = (a \cdot n) : (b \cdot n)$$

$$a : b = (a : n) : (b : n).$$

Razmjer ili proporcija je jednakost dvaju jednakih omjera. Ako je

$$a : b = k \quad i \quad c : d = k,$$

tada je razmjer ili proporcija

$$a : b = c : d.$$

Umnožak vanjskih članova razmjera a i d jednak je umnošku unutarnjih članova razmjera b i c.

$$a : b = c : d \Rightarrow a \cdot d = b \cdot c.$$

Ako postoji n jednakih omjera

$$a_1 : b_1 = k$$
$$a_2 : b_2 = k$$
$$a_3 : b_3 = k$$
$$\ldots$$
$$a_n : b_n = k,$$

produženi razmjer je

$$a_1 : a_2 : a_3 : \ldots : a_n = b_1 : b_2 : b_3 : \ldots : b_n.$$

Produženi razmjer ima sljedeća svojstva:

$$(a_1 \pm a_2 \pm a_3 \pm \ldots \pm a_n) : (b_1 \pm b_2 \pm b_3 \pm \ldots \pm b_n) = a_1 : b_1$$
$$(a_1 \pm a_2 \pm a_3 \pm \ldots \pm a_n) : (b_1 \pm b_2 \pm b_3 \pm \ldots \pm b_n) = a_2 : b_2$$
$$(a_1 \pm a_2 \pm a_3 \pm \ldots \pm a_n) : (b_1 \pm b_2 \pm b_3 \pm \ldots \pm b_n) = a_3 : b_3$$
$$\ldots$$
$$(a_1 \pm a_2 \pm a_3 \pm \ldots \pm a_n) : (b_1 \pm b_2 \pm b_3 \pm \ldots \pm b_n) = a_n : b_n.$$

$$\frac{a-b}{n} = \frac{a}{n} - \frac{b}{n} \quad , \quad n = \frac{n}{1} \quad , \quad \frac{a}{b} \cdot \frac{c}{d} = \frac{a \cdot c}{b \cdot d}.$$

Zakon distribucije množenja prema zbrajanju.

$$a \cdot (b + c) = a \cdot b + a \cdot c \quad , \quad a \cdot b + a \cdot c = a \cdot (b + c).$$

Kako se računa $\frac{a}{b}$ od x?

$$\frac{a}{b} \cdot x.$$

Kako zapisati da je broj a za n manji od broja b?

$$a + n = b \quad , \quad a = b - n \quad , \quad b - a = n.$$

1.inačica

Neka je:

- x iznos koji je dobila Iva
- y iznos koji je dobio Matej.

Prema uvjetima zadatka dobije se sustav jednadžbi.

$$\left.\begin{array}{l} x+y=24\,464 \\ x:y=3:5 \end{array}\right\} \Rightarrow \left.\begin{array}{l} x+y=24\,464 \\ 5\cdot x=3\cdot y \end{array}\right\} \Rightarrow \left.\begin{array}{l} x+y=24\,464 \\ 5\cdot x=3\cdot y \;/\cdot\frac{1}{5} \end{array}\right\} \Rightarrow \left.\begin{array}{l} x+y=24\,464 \\ x=\frac{3}{5}\cdot y \end{array}\right\} \Rightarrow \begin{bmatrix} \text{metoda} \\ \text{supstitucije} \end{bmatrix} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \frac{3}{5}\cdot y+y=24\,464 \Rightarrow \frac{3}{5}\cdot y+y=24\,464 \;/\cdot 5 \Rightarrow 3\cdot y+5\cdot y=122\,320 \Rightarrow 8\cdot y=122\,320 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 8\cdot y=122\,320 \;/:8 \Rightarrow y=15\,290.$$

Iznos koji je dobio Matej je 15 290 kn. Iznos koji je dobila Iva je:

$$\left.\begin{array}{l} x+y=24\,464 \\ y=15\,290 \end{array}\right\} \Rightarrow x+15\,290=24\,464 \Rightarrow x=24\,464-15\,290 \Rightarrow x=9174\ kn.$$

Računamo koliko je Iva dobila manje od Mateja.

$$y-x=15\,290-9174=6116\ kn.$$

Odgovor je pod C.

2.inačica

Neka je:

- x iznos koji je dobila Iva
- y iznos koji je dobio Matej.

Prema uvjetima zadatka slijedi:

$$\left.\begin{array}{l} x+y=24\,464 \\ x:y=3:5 \end{array}\right\} \Rightarrow \left.\begin{array}{l} x+y=24\,464 \\ x=3\cdot k \\ y=5\cdot k \\ k-\text{koeficijent proporcionalnosti} \end{array}\right\} \Rightarrow \begin{bmatrix} \text{metoda} \\ \text{supstitucije} \end{bmatrix} \Rightarrow 3\cdot k+5\cdot k=24\,464 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 8\cdot k=24\,464 \Rightarrow 8\cdot k=24\,464 \;/:8 \Rightarrow k=3058.$$

Računamo iznose Ive i Mateja.

$$\left.\begin{array}{l} x=3\cdot k \\ y=5\cdot k \\ k=3058 \end{array}\right\} \Rightarrow \left.\begin{array}{l} x=3\cdot 3058 \\ y=5\cdot 3058 \end{array}\right\} \Rightarrow \left.\begin{array}{l} x=9174 \\ y=15\,290 \end{array}\right\}.$$

Svota koju je Iva dobila manje od Mateja iznosi:

$$y-x=15\,290-9174=6116\ kn.$$

Odgovor je pod C.

3.inačica

Budući da Iva i Matej cjelokupni iznos dijele u omjeru 3 : 5, podijelit ćemo ga na 8 (8 = 3 + 5) jednakih dijelova. Tada će Matej dobiti pet osmina cjelokupnog iznosa, a Iva tri osmine.

- Matej.............$\frac{5}{8}\cdot 24\,464$
- Iva ....$\frac{3}{8}\cdot 24\,464$

Računamo koliko je Iva dobila manje od Mateja.

$$\frac{5}{8}\cdot 24\,464-\frac{3}{8}\cdot 24\,464=24\,464\cdot\left(\frac{5}{8}-\frac{3}{8}\right)=24\,464\cdot\frac{5-3}{8}=24\,464\cdot\frac{2}{8}=24\,464\cdot\frac{2}{8}=24\,464\cdot\frac{1}{4}=$$

$$=\frac{24\,464}{1}\cdot\frac{1}{4}=\frac{24\,464}{4}=6116\ kn.$$

Odgovor je pod C.

4.inačica

Neka je:

- x iznos koji je dobila Iva
- y iznos koji je dobio Matej.

Ukupnu svotu 24 464 kn podijelit ćemo u omjeru 3 : 5 koliko dobiju Iva i Matej. Uporabit ćemo svojstvo produženog razmjera.

Iva

$$\bullet \quad x + y = 24\,464 \quad , \quad x : y = 3 : 5.$$

$$(x+y) : (3+5) = x : 3 \Rightarrow 24\,464 : 8 = x : 3 \Rightarrow 8 \cdot x = 3 \cdot 24\,464 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 8 \cdot x = 73392 \Rightarrow 8 \cdot x = 73393 \;/ : 8 \Rightarrow x = 9174.$$

Matej

$$\bullet \quad x + y = 24\,464 \quad , \quad x : y = 3 : 5.$$

$$(x+y) : (3+5) = y : 5 \Rightarrow 24\,464 : 8 = y : 5 \Rightarrow 8 \cdot y = 24\,464 \cdot 5 \Rightarrow 8 \cdot y = 122\,320 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 8 \cdot y = 122\,320 \;/ : 8 \Rightarrow y = 15\,290.$$

Računamo koliko je Iva dobila manje od Mateja.

$$y - x = 15\,290 - 9174 = 6116 \; kn.$$

Odgovor je pod C.

Vježba 076

Iva i Matej dijele iznos od 24 464 kn u omjeru 6 : 10. Koliko je kuna Iva dobila manje od Mateja?

$A.\ 3262\ kn \qquad B.\ 4892.80\ kn \qquad C.\ 6116\ kn \qquad D.\ 9785.60\ kn$

Rezultat: C.

Zadatak 077 (ABC, strukovna škola)

Srećko je visok 187 cm. Koliko je to stopa ako 1 stopa iznosi 0.3048 m?

$A.\ 4.8271\ stopa \qquad B.\ 5.6998\ stopa \qquad C.\ 6.1352\ stopa \qquad D.\ 7.9413\ stopa$

Rješenje 077

Ponovimo!

$$1\ m = 100\ cm.$$

Ako su a i b brojevi, kažemo da je količnik a : b, b $\neq 0$ omjer brojeva a i b.
Vrijednost omjera ne mijenja se ako se prvi i drugi broj pomnože ili podijele istim brojem.

$$a : b = (a \cdot n) : (b \cdot n)$$

$$a : b = (a : n) : (b : n).$$

Razmjer ili proporcija je jednakost dvaju jednakih omjera. Ako je

$$a : b = k \quad i \quad c : d = k,$$

tada je razmjer ili proporcija

$$a : b = c : d.$$

Umnožak vanjskih članova razmjera a i d jednak je umnošku unutarnjih članova razmjera b i c.

$$a : b = c : d \Rightarrow a \cdot d = b \cdot c.$$

Jednostavno pravilo trojno je postupak kojim se iz tri poznata člana razmjera određuje četvrti član.
Varijable x i y su upravno razmjerne (povećanje jedne uzrokuje povećanje druge i obrnuto). Neka je y_2 nepoznata veličina. Skiciramo tablicu:

$$\begin{array}{l} x_1 \text{ .... } y_1 \\ x_2 \text{ .... } y_2 \end{array}$$

Kod upravno razmjernih veličina strjelice se postavljaju u istom smjeru. Obično krećemo od nepoznate varijable. Postavljamo razmjer u skladu sa smjerom strjelica.

$$y_2 : y_1 = x_2 : x_1 \;\Rightarrow\; y_2 \cdot x_1 = y_1 \cdot x_2 \;\Rightarrow\; y_2 \cdot x_1 = y_1 \cdot x_2 \;/ \cdot \frac{1}{x_1} \;\Rightarrow\; y_2 = \frac{y_1 \cdot x_2}{x_1}.$$

1.inačica

Budući da 1 stopa iznosi 0.3048 m, slijedi:

$$1 \ stopa = 0.3048 \ m \;\Rightarrow\; 1 \ stopa = 30.48 \ cm.$$

Visina Srećka u stopama je

$$187 : 30.48 = 6.1352.$$

Odgovor je pod C.

2.inačica

Postavimo početni odnos dviju veličina.

$30.48 \ cm$ .... $1 \ stopa$

Svedemo jednu veličinu na jedinicu.

$1 \ cm$ .... $\frac{1}{30.48} \ stopa$

Množenjem dolazimo do traženog broja.

$187 \ cm$ .... $187 \cdot \frac{1}{30.48} \ stopa = 6.1352 \ stopa$

Odgovor je pod C.

3.inačica

Neka je x visina Srećka u stopama. Tada vrijedi razmjer:

$$x : 187 \ cm = 1 \ stopa : 30.48 \ cm \;\Rightarrow\; x \cdot 30.48 \ cm = 187 \ cm \cdot 1 \ stopa \;\Rightarrow$$

$$\Rightarrow\; x \cdot 30.48 \ cm = 187 \ cm \cdot 1 \ stopa \;/ \cdot \frac{1}{30.48 \ cm} \;\Rightarrow\; x = \frac{187 \ cm \cdot 1 \ stopa}{30.48 \ cm} \;\Rightarrow\; x = 6.1352 \ stopa.$$

Odgovor je pod C.

4.inačica

Postavimo pravilo trojno.

$$\begin{array}{l} 1 \ \text{stopa} \text{ .... } 30.48 \ \text{cm} \\ x \text{ .... } 187 \ \text{cm} \end{array}$$

$$x : 1 \ stopa = 187 \ cm : 30.48 \ cm \;\Rightarrow\; x \cdot 30.48 \ cm = 1 \ stopa \cdot 187 \ cm \;\Rightarrow$$

$$\Rightarrow\; x \cdot 30.48 \ cm = 1 \ stopa \cdot 187 \ cm \;/ \cdot \frac{1}{30.48 \ cm} \;\Rightarrow\; x = \frac{1 \ stopa \cdot 187 \ cm}{30.48 \ cm} \;\Rightarrow\; x = 6.1352 \ stopa.$$

Odgovor je pod C.

Vježba 077

Srećko je visok 180 cm. Koliko je to stopa ako 1 stopa iznosi 0.3048 m?

$A. \ 5.6789 \ stopa \qquad B. \ 6.3266 \ stopa \qquad C. \ 5.9055 \ stopa \qquad D. \ 5.9872 \ stopa$

Rezultat: C.

Zadatak 078 (Kristina, srednja škola)

U nekom pogonu planira se proizvodnja 315 litara alkoholnog pića. Za proizvodnju tog pića rabe se četiri vrste alkohola: B_1, B_2, B_3, B_4. Tehnološki uvjeti proizvodnje prikazani su u obliku razmjera:

$$B_1 : B_2 = 3 : 2$$
$$B_3 : B_2 = 2 : 1$$
$$B_1 : B_4 = 5 : 6.$$

Koliko je litara alkohola svake vrste potrebno imati na zalihama kako bi se ostvarila planirana proizvodnja alkoholnog pića uz zadane tehnološke uvjete?

Rješenje 078

Ponovimo!

Ako su a i b brojevi, kažemo da je količnik a : b, $b \neq 0$ omjer brojeva a i b.
Vrijednost omjera ne mijenja se ako se prvi i drugi broj pomnože ili podijele istim brojem.

$$a : b = (a \cdot n) : (b \cdot n)$$
$$a : b = (a : n) : (b : n).$$

Produženi omjer je skraćeni način pisanja n jednakih omjera. Ako postoji n jednakih omjera takvih da je

$$a_1 : a_2 = k_1$$
$$a_2 : a_3 = k_2$$
$$a_3 : a_4 = k_3$$
$$\ldots$$
$$a_{n-1} : a_n = k_{n-1},$$

produženi omjer je

$$a_1 : a_2 : a_3 : \ldots : a_n.$$

Razmjer ili proporcija je jednakost dvaju jednakih omjera. Ako je

$$a : b = k \quad i \quad c : d = k,$$

tada je razmjer ili proporcija

$$a : b = c : d.$$

Za razmjer vrijedi:

$$a : b = c : d \Rightarrow b : a = d : c.$$

Ako postoji n jednakih omjera

$$a_1 : b_1 = k$$
$$a_2 : b_2 = k$$
$$a_3 : b_3 = k$$
$$\ldots$$
$$a_n : b_n = k,$$

produženi razmjer je

$$a_1 : a_2 : a_3 : \ldots : a_n = b_1 : b_2 : b_3 : \ldots : b_n.$$

Produženi razmjer ima sljedeća svojstva:

$$(a_1 \pm a_2 \pm a_3 \pm \ldots \pm a_n) : (b_1 \pm b_2 \pm b_3 \pm \ldots \pm b_n) = a_1 : b_1$$
$$(a_1 \pm a_2 \pm a_3 \pm \ldots \pm a_n) : (b_1 \pm b_2 \pm b_3 \pm \ldots \pm b_n) = a_2 : b_2$$
$$(a_1 \pm a_2 \pm a_3 \pm \ldots \pm a_n) : (b_1 \pm b_2 \pm b_3 \pm \ldots \pm b_n) = a_3 : b_3$$
$$\ldots$$

$$\left(a_1 \pm a_2 \pm a_3 \pm \ldots \pm a_n\right) : \left(b_1 \pm b_2 \pm b_3 \pm \ldots \pm b_n\right) = a_n : b_n .$$

$$n = \frac{n}{1} \quad , \quad \frac{a}{b} \cdot \frac{c}{d} = \frac{a \cdot c}{b \cdot d} .$$

1.inačica

$$\left.\begin{array}{l} B_1 : B_2 = 3:2 \\ B_3 : B_2 = 2:1 \\ B_1 : B_4 = 5:6 \end{array}\right\} \Rightarrow \left.\begin{array}{l} 3 \cdot B_2 = 2 \cdot B_1 \\ B_3 = 2 \cdot B_2 \\ 5 \cdot B_4 = 6 \cdot B_1 \end{array}\right\} \Rightarrow \left.\begin{array}{l} 3 \cdot B_2 = 2 \cdot B_1 \quad /:3 \\ B_3 = 2 \cdot B_2 \\ 5 \cdot B_4 = 6 \cdot B_1 \quad /:5 \end{array}\right\} \Rightarrow \left.\begin{array}{l} B_2 = \frac{2}{3} \cdot B_1 \\ B_3 = 2 \cdot B_2 \\ B_4 = \frac{6}{5} \cdot B_1 \end{array}\right\} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{bmatrix} \text{metoda} \\ \text{supstitucije} \end{bmatrix} \Rightarrow \left.\begin{array}{l} B_2 = \frac{2}{3} \cdot B_1 \\ B_3 = 2 \cdot \frac{2}{3} \cdot B_1 \\ B_4 = \frac{6}{5} \cdot B_1 \end{array}\right\} \Rightarrow \left.\begin{array}{l} B_2 = \frac{2}{3} \cdot B_1 \\ B_3 = \frac{2}{1} \cdot \frac{2}{3} \cdot B_1 \\ B_4 = \frac{6}{5} \cdot B_1 \end{array}\right\} \Rightarrow \left.\begin{array}{l} B_2 = \frac{2}{3} \cdot B_1 \\ B_3 = \frac{4}{3} \cdot B_1 \\ B_4 = \frac{6}{5} \cdot B_1 \end{array}\right\} .$$

Računamo B_1.

$$\left.\begin{array}{l} B_2 = \frac{2}{3} \cdot B_1 \ , \ B_3 = \frac{4}{3} \cdot B_1 \ , \ B_4 = \frac{6}{5} \cdot B_1 \\ B_1 + B_2 + B_3 + B_4 = 315 \end{array}\right\} \Rightarrow \begin{bmatrix} \text{metoda} \\ \text{supstitucije} \end{bmatrix} \Rightarrow B_1 + \frac{2}{3} \cdot B_1 + \frac{4}{3} \cdot B_1 + \frac{6}{5} \cdot B_1 = 315 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow B_1 + \frac{2}{3} \cdot B_1 + \frac{4}{3} \cdot B_1 + \frac{6}{5} \cdot B_1 = 315 \quad / \cdot 15 \Rightarrow 15 \cdot B_1 + 10 \cdot B_1 + 20 \cdot B_1 + 18 \cdot B_1 = 4725 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 63 \cdot B_1 = 4725 \Rightarrow 63 \cdot B_1 = 4725 \quad /:63 \Rightarrow B_1 = 75 \ \textit{litara}.$$

Računamo B_2, B_3 i B_4.

$$\left.\begin{array}{l} B_2 = \frac{2}{3} \cdot B_1 \\ B_3 = \frac{4}{3} \cdot B_1 \\ B_4 = \frac{6}{5} \cdot B_1 \\ B_1 = 75 \end{array}\right\} \Rightarrow \left.\begin{array}{l} B_2 = \frac{2}{3} \cdot 75 \\ B_3 = \frac{4}{3} \cdot 75 \\ B_4 = \frac{6}{5} \cdot 75 \\ B_1 = 75 \end{array}\right\} \Rightarrow \left.\begin{array}{l} B_2 = \frac{2}{3} \cdot \frac{75}{1} \\ B_3 = \frac{4}{3} \cdot \frac{75}{1} \\ B_4 = \frac{6}{5} \cdot \frac{75}{1} \\ B_1 = 75 \end{array}\right\} \Rightarrow \left.\begin{array}{l} B_2 = \frac{150}{3} \\ B_3 = \frac{300}{3} \\ B_4 = \frac{450}{5} \\ B_1 = 75 \end{array}\right\} \Rightarrow \left.\begin{array}{l} B_2 = 50 \ \textit{litara} \\ B_3 = 100 \ \textit{litara} \\ B_4 = 90 \ \textit{litara} \\ B_1 = 75 \ \textit{litara} \end{array}\right\} .$$

2.inačica

$$\left.\begin{array}{l} B_1 : B_2 = 3:2 \\ B_3 : B_2 = 2:1 \\ B_1 : B_4 = 5:6 \end{array}\right\} \Rightarrow \left.\begin{array}{l} B_1 : B_4 = 5:6 \\ B_1 : B_2 = 3:2 \\ B_3 : B_2 = 2:1 \end{array}\right\} \Rightarrow \left.\begin{array}{l} B_4 : B_1 = 6:5 \\ B_1 : B_2 = 3:2 \\ B_2 : B_3 = 1:2 \end{array}\right\} \Rightarrow \left.\begin{array}{l} B_4 : B_1 = (6 \cdot 3) : (5 \cdot 3) \\ B_1 : B_2 = (3 \cdot 5) : (2 \cdot 5) \\ B_2 : B_3 = (1 \cdot 10) : (2 \cdot 10) \end{array}\right\} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \left.\begin{array}{l} B_4 : B_1 = 18:15 \\ B_1 : B_2 = 15:10 \\ B_2 : B_3 = 10:20 \end{array}\right\} \Rightarrow \begin{bmatrix} \text{produženi} \\ \text{razmjer} \end{bmatrix} \Rightarrow B_4 : B_1 : B_2 : B_3 = 18:15:10:20 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \left.\begin{aligned} B_4 &= 18 \cdot t \\ B_1 &= 15 \cdot t \\ B_2 &= 10 \cdot t \\ B_3 &= 20 \cdot t \end{aligned}\right\} \text{gdje } t \text{ označava koeficijent razmjernosti.}$$

Iz sustava jednadžbi izračunamo t.

$$\left.\begin{aligned} & B_1 = 15 \cdot t \ , \ B_2 = 10 \cdot t \ , \ B_3 = 20 \cdot t \ , \ B_4 = 18 \cdot t \\ & B_1 + B_2 + B_3 + B_4 = 315 \end{aligned}\right\} \Rightarrow \begin{bmatrix} \text{metoda} \\ \text{supstitucije} \end{bmatrix} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 15 \cdot t + 10 \cdot t + 20 \cdot t + 18 \cdot t = 315 \Rightarrow 63 \cdot t = 315 \Rightarrow 63 \cdot t = 315 \ /:63 \Rightarrow t = 5.$$

Računamo B_1, B_2, B_3 i B_4.

$$\left.\begin{aligned} B_1 &= 15 \cdot t \\ B_2 &= 10 \cdot t \\ B_3 &= 20 \cdot t \\ B_4 &= 18 \cdot t \end{aligned}\right\} \Rightarrow [t = 5] \Rightarrow \left.\begin{aligned} B_1 &= 15 \cdot 5 \\ B_2 &= 10 \cdot 5 \\ B_3 &= 20 \cdot 5 \\ B_4 &= 18 \cdot 5 \end{aligned}\right\} \Rightarrow \left.\begin{aligned} B_1 &= 75 \ litara \\ B_2 &= 50 \ litara \\ B_3 &= 100 \ litara \\ B_4 &= 90 \ litara \end{aligned}\right\}.$$

3.inačica

Uporabit ćemo svojstvo produženog razmjera.

- $B_1 + B_2 + B_3 + B_4 = 315 \quad , \quad B_1 : B_2 : B_3 : B_4 = 15 : 10 : 20 : 18.$

$$(B_1 + B_2 + B_3 + B_4) : (15 + 10 + 20 + 18) = B_1 : 15 \Rightarrow 315 : 63 = B_1 : 15 \Rightarrow 63 \cdot B_1 = 4725 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 63 \cdot B_1 = 4725 \ /:63 \Rightarrow B_1 = 75 \ litara.$$

- $B_1 + B_2 + B_3 + B_4 = 315 \quad , \quad B_1 : B_2 : B_3 : B_4 = 15 : 10 : 20 : 18.$

$$(B_1 + B_2 + B_3 + B_4) : (15 + 10 + 20 + 18) = B_2 : 10 \Rightarrow 315 : 63 = B_2 : 10 \Rightarrow 63 \cdot B_1 = 3150 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 63 \cdot B_2 = 3150 \ /:63 \Rightarrow B_2 = 50 \ litara.$$

- $B_1 + B_2 + B_3 + B_4 = 315 \quad , \quad B_1 : B_2 : B_3 : B_4 = 15 : 10 : 20 : 18.$

$$(B_1 + B_2 + B_3 + B_4) : (15 + 10 + 20 + 18) = B_3 : 20 \Rightarrow 315 : 63 = B_3 : 20 \Rightarrow 63 \cdot B_3 = 6300 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 63 \cdot B_3 = 6300 \ /:63 \Rightarrow B_3 = 100 \ litara.$$

- $B_1 + B_2 + B_3 + B_4 = 315 \quad , \quad B_1 : B_2 : B_3 : B_4 = 15 : 10 : 20 : 18.$

$$(B_1 + B_2 + B_3 + B_4) : (15 + 10 + 20 + 18) = B_4 : 18 \Rightarrow 315 : 63 = B_4 : 18 \Rightarrow 63 \cdot B_4 = 5670 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 63 \cdot B_4 = 5670 \ /:63 \Rightarrow B_4 = 90 \ litara.$$

Vježba 078

U nekom pogonu planira se proizvodnja 315 litara alkoholnog pića. Za proizvodnju tog pića rabe se četiri vrste alkohola: B_1, B_2, B_3, B_4. Tehnološki uvjeti proizvodnje prikazani su u obliku razmjera:

$$B_1 : B_2 = 3 : 2$$
$$B_2 : B_3 = 2 : 1$$
$$B_4 : B_1 = 6 : 5.$$

Koliko je litara alkohola svake vrste potrebno imati na zalihama kako bi se ostvarila planirana proizvodnja alkoholnog pića uz zadane tehnološke uvjete?

Rezultat: $B_1 = 75$ l, $B_2 = 50$ l, $B_3 = 100$ l, $B_4 = 75$ l.

Zadatak 079 (Domagoj, srednja škola)

Težina nekog objekta obrnuto je proporcionalna kvadratu njegove udaljenosti od središta Zemlje. Na Zemljinoj površini, što je 6400 km od središta Zemlje, težina astronauta je 824 N. Koliko je astronaut udaljen od Zemljine površine ako mu je težina 74 N?

$A.\ 1918\ km$ $\quad B.\ 14956\ km$ $\quad C.\ 82467\ km$ $\quad D.\ 447634\ km$

Rješenje 079

Ponovimo!

1.inačica

Za dvije veličine kažemo da su obrnuto proporcionalne (razmjerne) ako vrijede pravila:

- koliko se puta poveća prva veličina, toliko se puta smanji druga veličina
- koliko se puta smanji prva veličina, toliko se puta poveća druga veličina.

Precizno definirano:

Za dvije veličine x i y kažemo da su obrnuto proporcionalne (razmjerne) ako je njihov umnožak (produkt) stalan:

$$x \cdot y = \text{konstantno}.$$

$$824\ \text{N} \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ 6400^2\ \text{km}^2$$
$$74\ \text{N} \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ x^2$$

$$74 \cdot x^2 = 824 \cdot 6400^2 \Rightarrow 74 \cdot x^2 = 824 \cdot 6400^2 \ /: 74 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow x^2 = \frac{824 \cdot 6400^2}{74} \Rightarrow x^2 = \frac{824 \cdot 6400^2}{74} \ / \sqrt{\ } \Rightarrow x = \sqrt{\frac{824 \cdot 6400^2}{74}} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow x = 6400 \cdot \sqrt{\frac{824}{74}} \Rightarrow x = 21356.$$

Astronaut je od središta Zemlje udaljen 21 356 km, a od površine Zemlje udaljenost iznosi:

$$d = 212356\ km - 6400\ km \Rightarrow d = 14956\ km.$$

Odgovor je pod B.

2.inačica

$$824\ \text{N} \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ 6400^2\ \text{km}^2$$
$$74\ \text{N} \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ x^2$$

Strjelicu uvijek **vučemo od x^2**. Postavimo da nepoznanica x^2 bude u **donjem** redu.

$$824\ \text{N} \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ 6400^2\ \text{km}^2$$
$$74\ \text{N} \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ x^2 \quad \uparrow$$

Prva rečenica je uvjetna, a druga upitna pa kažemo: "Ako je na 6400^2 km^2 udaljenosti od središta Zemlje težina astronauta 824 N, hoće li težina 74 N biti na **većoj ili manjoj** udaljenosti?". Odgovor je **većoj**! Znači da su veličine obrnuto proporcionalne pa druga strjelica mora imati **suprotan smjer** od one uz nepoznanicu x^2.

$$824\ \text{N} \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ 6400^2\ km^2$$
$$\downarrow\ 74\ \text{N} \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ x^2 \quad \uparrow$$

[u brojnik se piše broj koji je početak strjelice koja nije uz x^2, a u nazivnik se piše broj koji je završetak te strjelice]

$$x^2 = 6400^2 \cdot \frac{824}{74} \Rightarrow x^2 = 6400^2 \cdot \frac{824}{74} \ / \sqrt{\ } \Rightarrow x = \sqrt{6400^2 \cdot \frac{824}{74}} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \ x = 6400 \cdot \sqrt{\frac{824}{74}} \ \Rightarrow \ x = 21356.$$

Astronaut je od središta Zemlje udaljen 21 356 km, a od površine Zemlje udaljenost iznosi:

$$d = 212356 \ km - 6400 \ km \ \Rightarrow \ d = 14956 \ km.$$

Odgovor je pod B.

3.inačica

Budući da je težina nekog objekta obrnuto proporcionalna kvadratu njegove udaljenosti od središta Zemlje to se može zapisati pomoću formule

$$G = \frac{k}{r^2},$$

gdje je k faktor proporcionalnosti.

Tada se iz uvjeta zadatka dobije sustav jednadžbi:

$$\left.\begin{array}{l} G_1 = 824 \ N \ , \ r_1 = 6400 \ km \ , \ G_1 = \frac{k}{r_1^2} \\ G_2 = 74 \ N \ , \ r_2 = r \ , \ G_2 = \frac{k}{r_2^2} \end{array}\right\} \Rightarrow \left.\begin{array}{l} 824 = \frac{k}{6400^2} \\ 74 = \frac{k}{r^2} \end{array}\right\} \Rightarrow \begin{bmatrix} \text{podijelimo} \\ \text{jednadžbe} \end{bmatrix} \Rightarrow \frac{824}{74} = \frac{\frac{k}{6400^2}}{\frac{k}{r^2}} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \frac{824}{74} = \frac{\frac{k}{6400^2}}{\frac{k}{r^2}} \Rightarrow \frac{824}{74} = \frac{\frac{1}{6400^2}}{\frac{1}{r^2}} \Rightarrow \frac{824}{74} = \frac{r^2}{6400^2} \Rightarrow 74 \cdot r^2 = 824 \cdot 6400^2 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 74 \cdot r^2 = 824 \cdot 6400^2 \ /:74 \Rightarrow r^2 = \frac{824 \cdot 6400^2}{74} \Rightarrow r^2 = \frac{824 \cdot 6400^2}{74} \ /\sqrt{\ } \Rightarrow$$

$$\Rightarrow r = \sqrt{\frac{824 \cdot 6400^2}{74}} \Rightarrow r = 6400 \cdot \sqrt{\frac{824}{74}} \Rightarrow r = 21356.$$

Astronaut je od središta Zemlje udaljen 21 356 km, a od površine Zemlje udaljenost iznosi:

$$d = 212356 \ km - 6400 \ km \ \Rightarrow \ d = 14956 \ km.$$

Odgovor je pod B.

Vježba 079

Težina nekog objekta obrnuto je proporcionalna kvadratu njegove udaljenosti od središta Zemlje. Na Zemljinoj površini, što je 6400 km od središta Zemlje, težina astronauta je 1648 N. Koliko je astronaut udaljen od Zemljine površine ako mu je težina 148 N?

A. 1918 km B. 14956 km C. 82467 km D. 447634 km

Rezultat: B.

Zadatak 080 (Dado, gimnazija)

Sljedeća tablica povezuje duljine izražene u stopama i metrima. Popunite vrijednosti koje nedostaju.

Stopa (foot)	1	5.8	
Metar (m)	0.3048		1.40208

Rješenje 080

Ponovimo!

Ako su a i b brojevi, kažemo da je količnik a : b, b ≠ 0 omjer brojeva a i b.
Razmjer ili proporcija je jednakost dvaju jednakih omjera. Ako je

$$a : b = k \ \ i \ \ c : d = k,$$

tada je razmjer ili proporcija

$$a : b = c : d.$$

Umnožak vanjskih članova razmjera a i d jednak je umnošku unutarnjih članova razmjera b i c.

$$a : b = c : d \;\Rightarrow\; a \cdot d = b \cdot c.$$

Stopa (foot)	1	5.8	y
Metar (m)	0.3048	x	1.40208

Broj metara x izračunamo iz razmjera:

$$1 : 0.3048 = 5.8 : x \;\Rightarrow\; x = 0.3048 \cdot 5.8 \;\Rightarrow\; x = 1.76784.$$

Broj stopa y izračunamo iz razmjera:

$$1 : 0.3048 = y : 1.40208 \;\Rightarrow\; 0.3048 \cdot y = 1.40208 \;\Rightarrow\; 0.3048 \cdot y = 1.40208 \;/ : 0.3048 \;\Rightarrow$$

$$\Rightarrow\; y = \frac{1.40208}{0.3048} \;\Rightarrow\; y = 4.6.$$

Stopa (foot)	1	5.8	4.6
Metar (m)	0.3048	1.76784	1.40208

Vježba 080

Sljedeća tablica povezuje duljine izražene u stopama i metrima. Popunite vrijednosti koje nedostaju.

Stopa (foot)	2	5.8	
Metar (m)	0.6096		1.40208

Rezultat:

Stopa (foot)	2	5.8	4.6
Metar (m)	0.6096	1.76784	1.40208