Zadatak 041 (Martina, hotelijerska škola)

Tri su osobe uložile u jedan posao ove svote: A 12000 kn, B 90000 kn i C 150000 kn. Ako je ukupna zarada od tog posla 2100000 kn, koji dio zarade će pripasti osobi C?

Rješenje 041

1.inačica

Ukupnu zaradu tri će osobe podijeliti u omjeru svojih uloga. Zato pišemo:

$$\left.\begin{array}{l} A:B:C=12\,000:90\,000:150\,000 \\ A+B+C=2\,100\,000 \end{array}\right\} \Rightarrow \left.\begin{array}{l} A=12\,000\cdot k \\ B=90\,000\cdot k \\ C=150\,000\cdot k \\ A+B+C=2\,100\,000 \end{array}\right\} \Rightarrow \begin{bmatrix} \text{metoda} \\ \text{supstitucije} \end{bmatrix} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 12\,000\cdot k+90\,000\cdot k+150\,000\cdot k=2\,100\,000 \Rightarrow 252\,000\cdot k=2\,100\,000 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 252\,000\cdot k=2\,100\,000 \;/:252\,000 \Rightarrow k=\frac{2\,100\,000}{252\,000} \Rightarrow k=\frac{2\,100\,000}{252\,000} \Rightarrow k=\frac{2100}{252} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{bmatrix} \text{kratimo} \\ \text{sa } 6 \end{bmatrix} \Rightarrow k=\frac{350}{42} \Rightarrow \begin{bmatrix} \text{kratimo} \\ \text{sa } 2 \end{bmatrix} \Rightarrow k=\frac{175}{21} \Rightarrow \begin{bmatrix} \text{kratimo} \\ \text{sa } 7 \end{bmatrix} \Rightarrow k=\frac{25}{3}.$$

Zarada koja pripada osobi C iznosi:

$$\left.\begin{array}{l} C=150\,000\cdot k \\ k=\frac{25}{3} \end{array}\right\} \Rightarrow C=150\,000\cdot\frac{25}{3} \Rightarrow C=1\,250\,000\ kn.$$

2.inačica

Označimo slovom x uložene svote novaca osoba A, B i C.

$$\left.\begin{array}{l} A=12\,000\ kn=x \\ B=90\,000\ kn=\frac{90\,000}{12\,000}\cdot x=7.5\cdot x \\ C=150\,000\ kn=\frac{150\,000}{12\,000}\cdot x=12.5\cdot x \end{array}\right\}.$$

Budući da je zadana ukupna zarada dobije se linearna jednadžba s jednom nepoznanicom:

$$x+7.5\cdot x+12.5\cdot x=2\,100\,000 \Rightarrow 21\cdot x=2\,100\,000 \Rightarrow 21\cdot x=2\,100\,000 \;/:21 \Rightarrow x=100\,000.$$

Zarada koja pripada osobi C iznosi:

$$\left.\begin{array}{l} C=12.5\cdot x \\ x=100\,000 \end{array}\right\} \Rightarrow C=12.5\cdot 100\,000 \Rightarrow C=1\,250\,000\ kn.$$

Vježba 041

Tri su osobe uložile u jedan posao ove svote: A 12000 kn, B 90000 kn i C 150000 kn. Ako je ukupna zarada od tog posla 2100000 kn, koji dio zarade će pripasti osobi B?

Rezultat: 750000 kn.

Zadatak 042 (Milly, gimnazija)

Ako je $\frac{a}{b}=5$, koliko je $\frac{a-b}{b}$?

Rješenje 042

Ponovimo!

$$\frac{a-b}{n}=\frac{a}{n}-\frac{b}{n}.$$

1.inačica

$$\frac{a-b}{b}=\frac{a}{b}-\frac{b}{b}=\frac{a}{b}-\frac{b}{b}=\frac{a}{b}-1=\left[\frac{a}{b}=5\right]=5-1=4.$$

2.inačica

$$\frac{a}{b}=5 \Rightarrow \frac{a}{b}=5 \ / \cdot b \Rightarrow a=5\cdot b.$$

$$\frac{a-b}{b}=\left[a=5\cdot b\right]=\frac{5\cdot b-b}{b}=\frac{4\cdot b}{b}=\frac{4\cdot b}{b}=4.$$

Vježba 042

Ako je $\frac{a}{b}=5,$ koliko je $\frac{a+b}{b}$?

Rezultat: 6.

Zadatak 043 (Milly, gimnazija)

Ako je $\frac{a-b}{b}=\frac{3}{4},$ koliko je $\frac{b}{a+b}$?

Rješenje 043

Ponovimo!

$$\frac{a-b}{n}=\frac{a}{n}-\frac{b}{n} \quad , \quad \frac{a+b}{n}=\frac{a}{n}+\frac{b}{n}.$$

1.inačica

$$\frac{a-b}{b}=\frac{3}{4} \Rightarrow \frac{a}{b}-\frac{b}{b}=\frac{3}{4} \Rightarrow \frac{a}{b}-\frac{b}{b}=\frac{3}{4} \Rightarrow \frac{a}{b}-1=\frac{3}{4} \Rightarrow \frac{a}{b}=\frac{3}{4}+1 \Rightarrow \frac{a}{b}=\frac{7}{4}.$$

$$\frac{b}{a+b}=\frac{\frac{b}{b}}{\frac{a+b}{b}}=\frac{\frac{b}{b}}{\frac{a+b}{b}}=\frac{\frac{b}{b}}{\frac{a}{b}+\frac{b}{b}}=\frac{1}{\frac{a}{b}+\frac{b}{b}}=\left[\frac{a}{b}=\frac{7}{4}\right]=\frac{1}{\frac{7}{4}+1}=\frac{1}{\frac{11}{4}}=\frac{4}{11}.$$

2.inačica

$$\frac{a-b}{b}=\frac{3}{4} \Rightarrow \frac{a-b}{b}=\frac{3}{4} \ / \cdot b \Rightarrow a-b=\frac{3}{4}\cdot b \Rightarrow a=\frac{3}{4}\cdot b+b \Rightarrow a=\frac{7}{4}\cdot b.$$

$$\frac{b}{a+b}=\left[a=\frac{7}{4}\cdot b\right]=\frac{b}{\frac{7}{4}\cdot b+b}=\frac{b}{\frac{11}{4}\cdot b}=\frac{b}{\frac{11}{4}\cdot b}=\frac{1}{\frac{11}{4}}=\frac{4}{11}.$$

Vježba 043

Ako je $\frac{a-b}{b}=\frac{3}{4},$ koliko je $\frac{a+b}{b}$?

Rezultat: $\frac{11}{4}.$

Zadatak 044 (Ratko, srednja škola)

Brojevi a, b i c su u omjeru 2 : 3 : 4. Ako je njihova aritmetička sredina jednaka 15, koliko iznosi najmanji od njih?

Rješenje 044

Ponovimo!

Neka je dana n – torka pozitivnih brojeva (a_1, a_2, a_3, ..., a_n). Tada je aritmetička sredina A_n brojeva a_1, a_2, a_3, ..., a_n definirana izrazom

$$A_n = \frac{a_1 + a_2 + a_3 + \ ... \ + a_n}{n}.$$

Za tri broja a_1, a_2, a_3 aritmetička sredina glasi

$$A_3 = \frac{a_1 + a_2 + a_3}{3}.$$

Razmjer ili proporcija je jednakost dvaju jednakih omjera. Ako je

$$a : b = k \quad i \quad c : d = k,$$

tada je razmjer ili proporcija

$$a : b = c : d.$$

Umnožak vanjskih članova razmjera a i d jednak je umnošku unutarnjih članova razmjera b i c.

$$a : b = c : d \ \Rightarrow \ a \cdot d = b \cdot c.$$

Ako postoji n jednakih omjera

$$\begin{gathered} a_1 : b_1 = k \\ a_2 : b_2 = k \\ a_3 : b_3 = k \\ ... \\ a_n : b_n = k, \end{gathered}$$

produženi razmjer je

$$a_1 : a_2 : a_3 : ... : a_n = b_1 : b_2 : b_3 : ... : b_n.$$

Produženi razmjer ima sljedeća svojstva:

$$\begin{gathered} \left(a_1 \pm a_2 \pm a_3 \pm \ ... \ \pm a_n\right) : \left(b_1 \pm b_2 \pm b_3 \pm \ ... \ \pm b_n\right) = a_1 : b_1 \\ \left(a_1 \pm a_2 \pm a_3 \pm \ ... \ \pm a_n\right) : \left(b_1 \pm b_2 \pm b_3 \pm \ ... \ \pm b_n\right) = a_2 : b_2 \\ \left(a_1 \pm a_2 \pm a_3 \pm \ ... \ \pm a_n\right) : \left(b_1 \pm b_2 \pm b_3 \pm \ ... \ \pm b_n\right) = a_3 : b_3 \\ ... \\ \left(a_1 \pm a_2 \pm a_3 \pm \ ... \ \pm a_n\right) : \left(b_1 \pm b_2 \pm b_3 \pm \ ... \ \pm b_n\right) = a_n : b_n. \end{gathered}$$

1.inačica

Budući da je zadana aritmetička sredina, slijedi:

$$\frac{a+b+c}{3} = 15 \ \Rightarrow \ \frac{a+b+c}{3} = 15 \ / \cdot 3 \ \Rightarrow \ a+b+c = 45.$$

Sada je:

$$\left.\begin{array}{l} a : b : c = 2 : 3 : 4 \\ a+b+c = 45 \end{array}\right\} \Rightarrow \left.\begin{array}{l} a = 2 \cdot k \\ b = 3 \cdot k \\ c = 4 \cdot k \\ a+b+c = 45 \end{array}\right\} \Rightarrow \left[\begin{array}{l} \text{metoda} \\ \text{supstitucije} \end{array}\right] \Rightarrow 2 \cdot k + 3 \cdot k + 4 \cdot k = 45 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 9 \cdot k = 45 \ \Rightarrow \ 9 \cdot k = 45 \ /: 9 \ \Rightarrow \ k = 5.$$

Najmanji broj iznosi:

$$\left.\begin{array}{l} a = 2 \cdot k \\ k = 5 \end{array}\right\} \Rightarrow \ a = 2 \cdot 5 \ \Rightarrow \ a = 10.$$

2.inačica

Budući da je zadana aritmetička sredina, slijedi:

$$\frac{a+b+c}{3}=15 \Rightarrow \frac{a+b+c}{3}=15 \;/\cdot 3 \Rightarrow a+b+c=45.$$

Uporabit ćemo svojstvo produženog razmjera.

- $a+b+c=45 \quad , \quad a:b:c=2:3:4.$

$$(a+b+c):(2+3+4)=a:2 \Rightarrow 45:9=a:2 \Rightarrow 9\cdot a=90 \Rightarrow 9\cdot a=90 \;/:9 \Rightarrow a=10.$$

- $a+b+c=45 \quad , \quad a:b:c=2:3:4.$

$$(a+b+c):(2+3+4)=b:3 \Rightarrow 45:9=b:3 \Rightarrow 9\cdot b=135 \Rightarrow 9\cdot b=135 \;/:9 \Rightarrow b=15.$$

- $a+b+c=45 \quad , \quad a:b:c=2:3:4.$

$$(a+b+c):(2+3+4)=c:4 \Rightarrow 45:9=c:4 \Rightarrow 9\cdot c=180 \Rightarrow 9\cdot c=180 \;/:9 \Rightarrow c=20.$$

Najmanji broj iznosi:

$$a = 10.$$

Vježba 044

Brojevi a, b i c su u omjeru 2 : 3 : 4. Ako je njihova aritmetička sredina jednaka 15, koliko iznosi najveći od njih?

Rezultat: 20.

Zadatak 045 (Matija, srednja škola)

Mjere kutova trokuta su u omjeru 2 : 3 : 4. Koliko iznosi najveći kut trokuta?

Rješenje 045

Ponovimo!

Zbroj kutova u trokutu iznosi 180°:

$$\alpha+\beta+\gamma=180^0.$$

Razmjer ili proporcija je jednakost dvaju jednakih omjera. Ako je

$$a : b = k \quad i \quad c : d = k,$$

tada je razmjer ili proporcija

$$a : b = c : d.$$

Umnožak vanjskih članova razmjera a i d jednak je umnošku unutarnjih članova razmjera b i c.

$$a:b=c:d \Rightarrow a\cdot d=b\cdot c.$$

Ako postoji n jednakih omjera

$$\begin{gathered} a_1 : b_1 = k \\ a_2 : b_2 = k \\ a_3 : b_3 = k \\ \ldots \\ a_n : b_n = k, \end{gathered}$$

produženi razmjer je

$$a_1 : a_2 : a_3 : \ldots : a_n = b_1 : b_2 : b_3 : \ldots : b_n.$$

Produženi razmjer ima sljedeća svojstva:

$$\begin{gathered} (a_1 \pm a_2 \pm a_3 \pm \ldots \pm a_n):(b_1 \pm b_2 \pm b_3 \pm \ldots \pm b_n)=a_1 : b_1 \\ (a_1 \pm a_2 \pm a_3 \pm \ldots \pm a_n):(b_1 \pm b_2 \pm b_3 \pm \ldots \pm b_n)=a_2 : b_2 \\ (a_1 \pm a_2 \pm a_3 \pm \ldots \pm a_n):(b_1 \pm b_2 \pm b_3 \pm \ldots \pm b_n)=a_3 : b_3 \\ \ldots \\ (a_1 \pm a_2 \pm a_3 \pm \ldots \pm a_n):(b_1 \pm b_2 \pm b_3 \pm \ldots \pm b_n)=a_n : b_n. \end{gathered}$$

1.inačica

$$\left.\begin{array}{l}\alpha:\beta:\gamma=2:3:4\\ \alpha+\beta+\gamma=180^{0}\end{array}\right\} \Rightarrow \left.\begin{array}{l}\alpha=2\cdot k\\ \beta=3\cdot k\\ \gamma=4\cdot k\\ \alpha+\beta+\gamma=180^{0}\end{array}\right\} \Rightarrow \left[\begin{array}{l}\text{metoda}\\ \text{supstitucije}\end{array}\right] \Rightarrow 2\cdot k+3\cdot k+4\cdot k=180^{0} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 9\cdot k=180^{0} \Rightarrow 9\cdot k=180^{0} \;/:9 \Rightarrow k=20^{0}.$$

Najveći kut trokuta iznosi:

$$\left.\begin{array}{l}\gamma=4\cdot k\\ k=20^{0}\end{array}\right\} \Rightarrow \gamma=4\cdot 20^{0} \Rightarrow \gamma=80^{0}.$$

2.inačica

Uporabit ćemo svojstvo produženog razmjera.

- $\alpha+\beta+\gamma=180^{0} \quad , \quad \alpha:\beta:\gamma=2:3:4.$

$$(\alpha+\beta+\gamma):(2+3+4)=\alpha:2 \Rightarrow 180^{0}:9=\alpha:2 \Rightarrow 9\cdot\alpha=360^{0} \Rightarrow 9\cdot\alpha=360^{0} \;/:9 \Rightarrow \alpha=40^{0}.$$

- $\alpha+\beta+\gamma=180^{0} \quad , \quad \alpha:\beta:\gamma=2:3:4.$

$$(\alpha+\beta+\gamma):(2+3+4)=\beta:3 \Rightarrow 180^{0}:9=\beta:3 \Rightarrow 9\cdot\beta=540^{0} \Rightarrow 9\cdot\beta=540^{0} \;/:9 \Rightarrow \beta=60^{0}.$$

- $\alpha+\beta+\gamma=180^{0} \quad , \quad \alpha:\beta:\gamma=2:3:4.$

$$(\alpha+\beta+\gamma):(2+3+4)=\gamma:4 \Rightarrow 180^{0}:9=\gamma:4 \Rightarrow 9\cdot\gamma=720^{0} \Rightarrow 9\cdot\gamma=720^{0} \;/:9 \Rightarrow \gamma=80^{0}.$$

Najveći kut trokuta iznosi:

$$\gamma = 80°.$$

Vježba 045

Mjere kutova trokuta su u omjeru 2 : 3 : 4. Koliko iznosi najmanji kut trokuta?

Rezultat: 40°.

Zadatak 046 (Maturantica, hotelijerska škola)

Dva broja odnose se kao 1 : 4. Drugi broj je za 15 veći od prvog broja. Koliko iznose brojevi?

Rješenje 046

Ponovimo!

Kako zapisati da je broj x za a veći od broja y?

$$x=y+a \quad , \quad x-a=y \quad , \quad x-y=a.$$

Razmjer ili proporcija je jednakost dvaju jednakih omjera. Ako je

$$a:b=k \quad i \quad c:d=k,$$

tada je razmjer ili proporcija

$$a:b=c:d.$$

Umnožak vanjskih članova razmjera a i d jednak je umnošku unutarnjih članova razmjera b i c.

$$a:b=c:d \Rightarrow a\cdot d=b\cdot c.$$

Ako postoji n jednakih omjera

$$\begin{array}{c}a_1:b_1=k\\ a_2:b_2=k\\ a_3:b_3=k\\ \ldots\\ a_n:b_n=k,\end{array}$$

produženi razmjer je

$$a_1 : a_2 : a_3 : ... : a_n = b_1 : b_2 : b_3 : ... : b_n.$$

Produženi razmjer ima sljedeća svojstva:

$$\left(a_1 \pm a_2 \pm a_3 \pm ... \pm a_n\right) : \left(b_1 \pm b_2 \pm b_3 \pm ... \pm b_n\right) = a_1 : b_1$$
$$\left(a_1 \pm a_2 \pm a_3 \pm ... \pm a_n\right) : \left(b_1 \pm b_2 \pm b_3 \pm ... \pm b_n\right) = a_2 : b_2$$
$$\left(a_1 \pm a_2 \pm a_3 \pm ... \pm a_n\right) : \left(b_1 \pm b_2 \pm b_3 \pm ... \pm b_n\right) = a_3 : b_3$$
$$...$$
$$\left(a_1 \pm a_2 \pm a_3 \pm ... \pm a_n\right) : \left(b_1 \pm b_2 \pm b_3 \pm ... \pm b_n\right) = a_n : b_n.$$

1.inačica

Označimo sa x i y tražene brojeve. Tada iz uvjeta zadatka slijedi:

$$\left.\begin{array}{l} x : y = 1 : 4 \\ x + 15 = y \end{array}\right\} \Rightarrow \left.\begin{array}{l} x = k \\ y = 4 \cdot k \\ x + 15 = y \end{array}\right\} \Rightarrow \left[\begin{array}{l} \text{metoda} \\ \text{supstitucije} \end{array}\right] \Rightarrow k + 15 = 4 \cdot k \Rightarrow k - 4 \cdot k = -15 \Rightarrow$$
$$\Rightarrow -3 \cdot k = -15 \Rightarrow -3 \cdot k = -15 \;/ : (-3) \Rightarrow k = 5.$$

Brojevi x i y iznose:

$$\left.\begin{array}{l} x = k \\ y = 4 \cdot k \\ k = 5 \end{array}\right\} \Rightarrow \left.\begin{array}{l} x = 5 \\ y = 4 \cdot 5 \end{array}\right\} \Rightarrow \left.\begin{array}{l} x = 5 \\ y = 20 \end{array}\right\}.$$

2.inačica

Označimo sa x i y tražene brojeve. Tada iz uvjeta zadatka slijedi:

$$\left.\begin{array}{l} x : y = 1 : 4 \\ x + 15 = y \end{array}\right\} \Rightarrow \left[\begin{array}{l} \text{metoda} \\ \text{supstitucije} \end{array}\right] \Rightarrow x : (x + 15) = 1 : 4 \Rightarrow 4 \cdot x = 1 \cdot (x + 15) \Rightarrow 4 \cdot x = x + 15 \Rightarrow$$
$$\Rightarrow 4 \cdot x - x = 15 \Rightarrow 3 \cdot x = 15 \Rightarrow 3 \cdot x = 15 \;/ : 3 \Rightarrow x = 5.$$

Brojevi x i y iznose:

$$\left.\begin{array}{l} x = 5 \\ x + 15 = y \end{array}\right\} \Rightarrow \left.\begin{array}{l} x = 5 \\ 5 + 15 = y \end{array}\right\} \Rightarrow \left.\begin{array}{l} x = 5 \\ 20 = y \end{array}\right\} \Rightarrow \left.\begin{array}{l} x = 5 \\ y = 20 \end{array}\right\}.$$

3.inačica

Uporabit ćemo svojstvo produženog razmjera.

- $x - y = 15 \quad , \quad x : y = 1 : 4.$

$$(x - y) : (1 - 4) = x : 1 \Rightarrow -15 : (-3) = x : 1 \Rightarrow -3 \cdot x = -15 \Rightarrow -3 \cdot x = -15 \;/ : (-3) \Rightarrow x = 5.$$

- $x - y = 15 \quad , \quad x : y = 1 : 4.$

$$(x - y) : (1 - 4) = y : 4 \Rightarrow -15 : (-3) = y : 4 \Rightarrow -3 \cdot y = -60 \Rightarrow -3 \cdot y = -60 \;/ : (-3) \Rightarrow y = 20.$$

Vježba 046

Dva broja odnose se kao 1 : 4. Prvi broj je za 15 manji od drugog broja. Koliko iznose brojevi?

Rezultat: 5 , 20.

Zadatak 047 (Iva, gimnazija)

U pravokutnom trokutu jedna kateta je tri puta dulja od druge. Koliki je manji šiljasti kut trokuta?

Rješenje 047

Ponovimo!

Kako zapisati da je broj x n puta veći od broja y?

$$x = n \cdot y \quad , \quad \frac{x}{n} = y \quad , \quad \frac{x}{y} = n.$$

Tangens šiljastog kuta pravokutnog trokuta jednak je omjeru duljine katete nasuprot toga kuta i duljine katete uz kut.

Poučci o odnosu stranice i kuta trokuta:

- Svaka stranica trokuta manja je od prostalih dviju stranica trokuta.

$$a < b + c \quad , \quad b < a + c \quad , \quad c < a + b.$$

- Nasuprot većoj stranici nalazi se veći kut.

$$a > b \Rightarrow \alpha > \beta \quad , \quad a > c \Rightarrow \alpha > \gamma \quad , \quad b > c \Rightarrow \beta > \gamma.$$

- Nasuprot većem kutu nalazi se veća stranica.

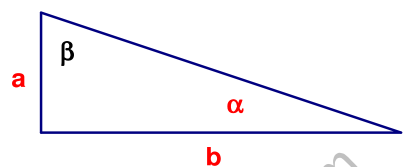
$$\alpha > \beta \Rightarrow a > b \quad , \quad \alpha > \gamma \Rightarrow a > c \quad , \quad \beta > \gamma \Rightarrow b > c.$$

- Nasuprot jednakim stranicama nalaze se jednaki kutovi.

$$a = b \Rightarrow \alpha = \beta \quad , \quad a = c \Rightarrow \alpha = \gamma \quad , \quad b = c \Rightarrow \beta = \gamma.$$

- Nasuprot jednakim kutovima nalaze se jednake stranice.

$$\alpha = \beta \Rightarrow a = b \quad , \quad \alpha = \gamma \Rightarrow a = c \quad , \quad \beta = \gamma \Rightarrow b = c.$$



Budući da je u pravokutnom trokutu jedna kateta tri puta dulja od druge, manji šiljasti kut iznosi:

$$\left.\begin{array}{l} a \\ b = 3 \cdot a \\ tg\,\alpha = \frac{a}{b} \end{array}\right\} \Rightarrow tg\,\alpha = \frac{a}{3 \cdot a} \Rightarrow tg\,\alpha = \frac{\cancel{a}}{3 \cdot \cancel{a}} \Rightarrow tg\,\alpha = \frac{1}{3} \Rightarrow \alpha = tg^{-1}\left(\frac{1}{3}\right) \Rightarrow \alpha = 18^{0}\,26'6''.$$

Vježba 047

U pravokutnom trokutu jedna kateta je tri puta dulja od druge. Koliki je veći šiljasti kut trokuta?

Rezultat: 71° 33' 54".

Zadatak 048 (Damir, maturant)

Duljine stranica trokuta u omjeru su 4 : 3 : 6. Koliki je najmanji kut trokuta?

Rješenje 048

Ponovimo!

$$(x \cdot y)^n = x^n \cdot y^n.$$

Razmjer ili proporcija je jednakost dvaju jednakih omjera. Ako je

$$a : b = k \quad i \quad c : d = k,$$

tada je razmjer ili proporcija

$$a : b = c : d.$$

Umnožak vanjskih članova razmjera a i d jednak je umnošku unutarnjih članova razmjera b i c.

$$a : b = c : d \Rightarrow a \cdot d = b \cdot c.$$

Ako postoji n jednakih omjera

$$a_1 : b_1 = k$$
$$a_2 : b_2 = k$$

$$a_3 : b_3 = k$$
$$\dots$$
$$a_n : b_n = k,$$

produženi razmjer je

$$a_1 : a_2 : a_3 : \dots : a_n = b_1 : b_2 : b_3 : \dots : b_n.$$

Podsjetimo se kako glasi kosinusov poučak (poučak o kosinusu).

U trokutu ABC vrijede ove jednakosti

$$a^2 = b^2 + c^2 - 2 \cdot b \cdot c \cdot \cos\alpha \quad , \quad b^2 = a^2 + c^2 - 2 \cdot a \cdot c \cdot \cos\beta \quad , \quad c^2 = a^2 + b^2 - 2 \cdot a \cdot b \cdot \cos\gamma.$$

Poučci o odnosu stranice i kuta trokuta:

- Svaka stranica trokuta manja je od prostalih dviju stranica trokuta.
$$a < b + c \quad , \quad b < a + c \quad , \quad c < a + b.$$
- Nasuprot većoj stranici nalazi se veći kut.
$$a > b \Rightarrow \alpha > \beta \quad , \quad a > c \Rightarrow \alpha > \gamma \quad , \quad b > c \Rightarrow \beta > \gamma.$$
- Nasuprot većem kutu nalazi se veća stranica.
$$\alpha > \beta \Rightarrow a > b \quad , \quad \alpha > \gamma \Rightarrow a > c \quad , \quad \beta > \gamma \Rightarrow b > c.$$
- Nasuprot jednakim stranicama nalaze se jednaki kutovi.
$$a = b \Rightarrow \alpha = \beta \quad , \quad a = c \Rightarrow \alpha = \gamma \quad , \quad b = c \Rightarrow \beta = \gamma.$$
- Nasuprot jednakim kutovima nalaze se jednake stranice.
$$\alpha = \beta \Rightarrow a = b \quad , \quad \alpha = \gamma \Rightarrow a = c \quad , \quad \beta = \gamma \Rightarrow b = c.$$

Za produženi razmjer duljina stranica trokuta vrijedi:

$$a : b : c = 4 : 3 : 6 \Rightarrow \left.\begin{array}{l} a = 4 \cdot k \\ b = 3 \cdot k \\ c = 6 \cdot k \end{array}\right\}.$$

Najmanji kut leži nasuprot stranici b i njegova vrijednost iznosi:

$$\left.\begin{array}{l} a = 4 \cdot k \ , \ b = 3 \cdot k \ , \ c = 6 \cdot k \\ b^2 = a^2 + c^2 - 2 \cdot a \cdot c \cdot \cos\beta \end{array}\right\} \Rightarrow \left.\begin{array}{l} a = 4 \cdot k \ , \ b = 3 \cdot k \ , \ c = 6 \cdot k \\ \cos\beta = \dfrac{a^2 + c^2 - b^2}{2 \cdot a \cdot c} \end{array}\right\} \Rightarrow \left[\begin{array}{l} \text{metoda} \\ \text{supstitucije} \end{array}\right] \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \cos\beta = \frac{(4 \cdot k)^2 + (6 \cdot k)^2 - (3 \cdot k)^2}{2 \cdot 4 \cdot k \cdot 6 \cdot k} \Rightarrow \cos\beta = \frac{16 \cdot k^2 + 36 \cdot k^2 - 9 \cdot k^2}{48 \cdot k^2} \Rightarrow \cos\beta = \frac{43 \cdot k^2}{48 \cdot k^2} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \cos\beta = \frac{43 \cdot k^2}{48 \cdot k^2} \Rightarrow \cos\beta = \frac{43}{48} \Rightarrow \beta = \cos^{-1}\left(\frac{43}{48}\right) \Rightarrow \beta = 26^0 23'4''.$$

Vježba 048

Duljine stranica trokuta u omjeru su 8 : 6 : 12. Koliki je najmanji kut trokuta?

Rezultat: 26° 23' 4".

Zadatak 049 (Jasna, gimnazija)

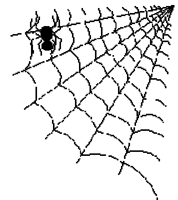
Ljudska vlas ima promjer 10^{-4} m. Promjer niti paukove mreže jednak je $5 \cdot 10^{-6}$ m. Koliko je puta ljudska vlas deblja od niti paukove mreže?

Rješenje 049

Označimo sa x promjer ljudske vlasi, a sa y promjer niti paukove mreže. Računamo omjer promjera ljudske vlasi i promjera niti paukove mreže:

$$\left.\begin{array}{l} x=10^{-4}\ m \\ y=5\cdot 10^{-6}\ m \end{array}\right\} \Rightarrow \frac{x}{y}=\frac{10^{-4}\ m}{5\cdot 10^{-6}\ m} \Rightarrow \frac{x}{y}=20 \Rightarrow x=20\cdot y.$$

Ljudska vlas je 20 puta deblja od niti paukove mreže.



Vježba 049

Ljudska vlas ima promjer 10^{-4} m. Promjer niti paukove mreže jednak je $5 \cdot 10^{-6}$ m. Koliko je puta nit paukove mreže tanja od ljudske vlasi?

Rezultat: 20.

Zadatak 050 (Jasna, gimnazija)

Broj 2400 podijeli na tri dijela koji su u omjeru 3 : 5 : 8.

Rješenje 050

Ponovimo!

Razmjer ili proporcija je jednakost dvaju jednakih omjera. Ako je

$$a : b = k \quad i \quad c : d = k,$$

tada je razmjer ili proporcija

$$a : b = c : d.$$

Umnožak vanjskih članova razmjera a i d jednak je umnošku unutarnjih članova razmjera b i c.

$$a : b = c : d \Rightarrow a \cdot d = b \cdot c.$$

Ako postoji n jednakih omjera

$$\begin{array}{c} a_1 : b_1 = k \\ a_2 : b_2 = k \\ a_3 : b_3 = k \\ \ldots \\ a_n : b_n = k, \end{array}$$

produženi razmjer je

$$a_1 : a_2 : a_3 : \ldots : a_n = b_1 : b_2 : b_3 : \ldots : b_n.$$

Produženi razmjer ima sljedeća svojstva:

$$\begin{array}{c} \left(a_1 \pm a_2 \pm a_3 \pm \ldots \pm a_n\right) : \left(b_1 \pm b_2 \pm b_3 \pm \ldots \pm b_n\right) = a_1 : b_1 \\ \left(a_1 \pm a_2 \pm a_3 \pm \ldots \pm a_n\right) : \left(b_1 \pm b_2 \pm b_3 \pm \ldots \pm b_n\right) = a_2 : b_2 \\ \left(a_1 \pm a_2 \pm a_3 \pm \ldots \pm a_n\right) : \left(b_1 \pm b_2 \pm b_3 \pm \ldots \pm b_n\right) = a_3 : b_3 \\ \ldots \\ \left(a_1 \pm a_2 \pm a_3 \pm \ldots \pm a_n\right) : \left(b_1 \pm b_2 \pm b_3 \pm \ldots \pm b_n\right) = a_n : b_n. \end{array}$$

1.inačica

Označimo slovima a, b i c tri pribrojnika čiji je zbroj 2400 i za koje vrijedi razmjer a : b : c = 3 : 5 : 8.

$$\left.\begin{array}{l} a:b:c=3:5:8 \\ a+b+c=2400 \end{array}\right\} \Rightarrow \left.\begin{array}{l} a=3\cdot k \\ b=5\cdot k \\ c=8\cdot k \\ a+b+c=2400 \end{array}\right\} \Rightarrow \left[\begin{array}{l} \text{metoda} \\ \text{supstitucije} \end{array}\right] \Rightarrow 3\cdot k+5\cdot k+8\cdot k=2400 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 16\cdot k=2400 \Rightarrow 16\cdot k=2400 \ /:16 \Rightarrow k=150.$$

Traženi brojevi a, b i c iznose:

$$\left.\begin{array}{l} a=3\cdot k \\ b=5\cdot k \\ c=8\cdot k \\ k=150 \end{array}\right\} \Rightarrow \left.\begin{array}{l} a=3\cdot 150 \\ b=5\cdot 150 \\ c=8\cdot 150 \end{array}\right\} \Rightarrow \left.\begin{array}{l} a=450 \\ b=750 \\ c=1200 \end{array}\right\}.$$

2.inačica

Označimo slovima a, b i c tri pribrojnika čiji je zbroj 2400 i za koje vrijedi razmjer a : b : c = 3 : 5 : 8. Uporabit ćemo svojstvo produženog razmjera.

- $a+b+c=2400 \quad , \quad a:b:c=3:5:8.$

$$(a+b+c):(3+5+8)=a:3 \Rightarrow 2400:16=a:3 \Rightarrow 16\cdot a=7200 \Rightarrow 16\cdot a=7200 \ /:16 \Rightarrow a=450.$$

- $a+b+c=2400 \quad , \quad a:b:c=3:5:8.$

$$(a+b+c):(3+5+8)=b:5 \Rightarrow 2400:16=b:5 \Rightarrow 16\cdot b=12000 \Rightarrow 16\cdot b=12000 \ /:16 \Rightarrow b=750.$$

- $a+b+c=2400 \quad , \quad a:b:c=3:5:8.$

$$(a+b+c):(3+5+8)=c:8 \Rightarrow 2400:16=c:8 \Rightarrow 16\cdot c=19200 \Rightarrow 16\cdot c=19200 \ /:16 \Rightarrow c=1200.$$

Vježba 050

Broj 2400 podijeli na tri dijela koji su u omjeru 6 : 10 : 16.

Rezultat: 450, 750 , 1200.

Zadatak 051 (Danchy, srednja škola)

Na zemljovidu mjerila 1 : 200000 međusobna udaljenost dvaju mjesta iznosi 6 cm. Kolika je ta udaljenost u prirodi?

Rješenje 051

Ponovimo!

$$1\ km=1000\ m \quad , \quad 1\ m=100\ cm.$$

Razmjer ili proporcija je jednakost dvaju jednakih omjera. Ako je

a : b = k i c : d = k,

tada je razmjer ili proporcija

a : b = c : d.

Umnožak vanjskih članova razmjera a i d jednak je umnošku unutarnjih članova razmjera b i c.

$$a:b=c:d \Rightarrow a\cdot d=b\cdot c.$$

1.inačica

Mjerilo zemljovida 1 : 200000 znači da 1 cm na zemljovidu odgovara 200000 cm u prirodi. Neka je x međusobna udaljenost dvaju mjesta u prirodi. Tada iz razmjera slijedi:

$$1\ cm:200000\ cm=6\ cm:x \Rightarrow 1\ cm\cdot x=200000\ cm\cdot 6\ cm \Rightarrow 1\ cm\cdot x=200000\ cm\cdot 6\ cm \ /\cdot\frac{1}{1\ cm} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow x=\frac{200000\ cm\cdot 6\ cm}{1\ cm} \Rightarrow x=1200000\ cm \Rightarrow x=12000\ m \Rightarrow x=12\ km.$$

2.inačica

Mjerilo zemljovida 1 : 200000 znači da 1 cm na zemljovidu odgovara 200000 cm u prirodi. Znači da će 6 cm na zemljovidu odgovarati u prirodi

$$200000 \cdot 6 \ cm = 1200000 \ cm = 12000 \ m = 12 \ km.$$

Vježba 051

Na zemljovidu mjerila 1 : 200000 međusobna udaljenost dvaju mjesta iznosi 4 cm. Kolika je ta udaljenost u prirodi?

Rezultat: 8 km.

Zadatak 052 (Danchy, srednja škola)

Odredi mjerilo zemljovida na kojem 2 cm odgovaraju 900 km u prirodi.

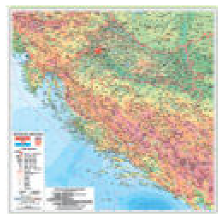
Rješenje 052

Ponovimo!

$$1 \ km = 1000 \ m \quad , \quad 1 \ m = 100 \ cm.$$

Ako su a i b brojevi, kažemo da je količnik a : b, b ≠ 0 omjer brojeva a i b.
Vrijednost omjera ne mijenja se ako se prvi i drugi broj pomnože ili podijele istim brojem.

$$a : b = (a \cdot n) : (b \cdot n)$$
$$a : b = (a : n) : (b : n).$$



Postavimo omjer pazeći na mjerne jedinice.

$$2 \ cm : 900 \ km \Rightarrow 2 \ cm : 900000 \ m \Rightarrow 2 \ cm : 90000000 \ cm \Rightarrow$$
$$\Rightarrow (2 \ cm : 2 \ cm) : (90000000 \ cm : 2 \ cm) \Rightarrow 1 : 45000000 \Rightarrow \underbrace{1 : 45000000}_{\text{mjerilo}}.$$

Vježba 052

Odredi mjerilo zemljovida na kojem 2 cm odgovaraju 8 km u prirodi.

Rezultat: 1 : 200000.

Zadatak 053 (Ivana, ekonomska škola)

$$\text{Dokaži implikaciju}: \frac{a}{b} = \frac{c}{d} \Rightarrow \frac{4 \cdot a - 3 \cdot b}{5 \cdot a + 2 \cdot b} = \frac{4 \cdot c - 3 \cdot d}{5 \cdot c + 2 \cdot d}.$$

Rješenje 053

1.inačica

- $$\frac{a}{b} = \frac{c}{d} \Rightarrow \begin{bmatrix} \text{jednakost} \\ \text{pomnožimo s 4} \end{bmatrix} \Rightarrow \frac{a}{b} = \frac{c}{d} \ / \cdot 4 \Rightarrow \frac{4 \cdot a}{b} = \frac{4 \cdot c}{d} \Rightarrow \begin{bmatrix} \text{od jednakosti} \\ \text{oduzmemo 3} \end{bmatrix} \Rightarrow$$
$$\Rightarrow \frac{4 \cdot a}{b} = \frac{4 \cdot c}{d} \ / - 3 \Rightarrow \frac{4 \cdot a}{b} - 3 = \frac{4 \cdot c}{d} - 3 \Rightarrow \frac{4 \cdot a - 3 \cdot b}{b} = \frac{4 \cdot c - 3 \cdot d}{d} \Rightarrow$$
$$\Rightarrow \frac{4 \cdot a - 3 \cdot b}{b} = \frac{4 \cdot c - 3 \cdot d}{d} \ / \cdot \frac{b}{4 \cdot c - 3 \cdot d} \Rightarrow \frac{4 \cdot a - 3 \cdot b}{4 \cdot c - 3 \cdot d} = \frac{b}{d}. \qquad (1)$$

- $$\frac{a}{b} = \frac{c}{d} \Rightarrow \begin{bmatrix} \text{jednakost} \\ \text{pomnožimo s 5} \end{bmatrix} \Rightarrow \frac{a}{b} = \frac{c}{d} \ / \cdot 5 \Rightarrow \frac{5 \cdot a}{b} = \frac{5 \cdot c}{d} \Rightarrow \begin{bmatrix} \text{jednakosti} \\ \text{pribrojimo 2} \end{bmatrix} \Rightarrow$$
$$\Rightarrow \frac{5 \cdot a}{b} = \frac{5 \cdot c}{d} \ / + 2 \Rightarrow \frac{5 \cdot a}{b} + 2 = \frac{5 \cdot c}{d} + 2 \Rightarrow \frac{5 \cdot a + 2 \cdot b}{b} = \frac{5 \cdot c + 2 \cdot d}{d} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \frac{5\cdot a+2\cdot b}{b}=\frac{5\cdot c+2\cdot d}{d} \quad / \cdot \frac{b}{5\cdot c+2\cdot d} \quad \Rightarrow \frac{5\cdot a+2\cdot b}{5\cdot c+2\cdot d}=\frac{b}{d}. \qquad (2)$$

Iz (1) i (2) dobije se tražena implikacija.

$$\left.\begin{array}{l} \dfrac{4\cdot a-3\cdot b}{4\cdot c-3\cdot d}=\dfrac{b}{d} \\ \dfrac{5\cdot a+2\cdot b}{5\cdot c+2\cdot d}=\dfrac{b}{d} \end{array}\right\} \Rightarrow \frac{4\cdot a-3\cdot b}{4\cdot c-3\cdot d}=\frac{5\cdot a+2\cdot b}{5\cdot c+2\cdot d} \Rightarrow \frac{4\cdot a-3\cdot b}{4\cdot c-3\cdot d}=\frac{5\cdot a+2\cdot b}{5\cdot c+2\cdot d} \quad / \cdot \frac{4\cdot c-3\cdot d}{5\cdot a+2\cdot b} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \frac{4\cdot a-3\cdot b}{5\cdot a+2\cdot b}=\frac{4\cdot c-3\cdot d}{5\cdot c+2\cdot d}.$$

2.inačica

$$\frac{a}{b}=\frac{c}{d}=k \Rightarrow \left.\begin{array}{l} \dfrac{a}{b}=k \\ \dfrac{c}{d}=k \end{array}\right\} \Rightarrow \left.\begin{array}{l} a=k\cdot b \\ c=k\cdot d \end{array}\right\}.$$

Sada računamo:

- $$\frac{4\cdot a-3\cdot b}{5\cdot a+2\cdot b}=\frac{4\cdot k\cdot b-3\cdot b}{5\cdot k\cdot b+2\cdot b}=\frac{b\cdot(4\cdot k-3)}{b\cdot(5\cdot k+2)}=\frac{b\cdot(4\cdot k-3)}{b\cdot(5\cdot k+2)}=\frac{4\cdot k-3}{5\cdot k+2}. \qquad (1)$$
- $$\frac{4\cdot c-3\cdot d}{5\cdot c+2\cdot d}=\frac{4\cdot k\cdot d-3\cdot d}{5\cdot k\cdot d+2\cdot d}=\frac{d\cdot(4\cdot k-3)}{d\cdot(5\cdot k+2)}=\frac{d\cdot(4\cdot k-3)}{d\cdot(5\cdot k+2)}=\frac{4\cdot k-3}{5\cdot k+2}. \qquad (2)$$

Iz (1) i (2) slijedi:

$$\frac{4\cdot a-3\cdot b}{5\cdot a+2\cdot b}=\frac{4\cdot c-3\cdot d}{5\cdot c+2\cdot d}.$$

3.inačica

Iz

$$\frac{4\cdot a-3\cdot b}{5\cdot a+2\cdot b}=\frac{4\cdot c-3\cdot d}{5\cdot c+2\cdot d}$$

dobije se

$$\frac{4\cdot a-3\cdot b}{5\cdot a+2\cdot b}=\frac{4\cdot c-3\cdot d}{5\cdot c+2\cdot d} \Rightarrow \frac{4\cdot a-3\cdot b}{5\cdot a+2\cdot b}=\frac{4\cdot c-3\cdot d}{5\cdot c+2\cdot d} \quad / \cdot (5\cdot a+2\cdot b)\cdot(5\cdot c+2\cdot d) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow (4\cdot a-3\cdot b)\cdot(5\cdot c+2\cdot d)=(5\cdot a+2\cdot b)\cdot(4\cdot c-3\cdot d) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 20\cdot a\cdot c+8\cdot a\cdot d-15\cdot b\cdot c-6\cdot b\cdot d=20\cdot a\cdot c-15\cdot a\cdot d+8\cdot b\cdot c-6\cdot b\cdot d \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 20\cdot a\cdot c+8\cdot a\cdot d-15\cdot b\cdot c-6\cdot b\cdot d=20\cdot a\cdot c-15\cdot a\cdot d+8\cdot b\cdot c-6\cdot b\cdot d \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 8\cdot a\cdot d-15\cdot b\cdot c=-15\cdot a\cdot d+8\cdot b\cdot c \Rightarrow 8\cdot a\cdot d+15\cdot a\cdot d=8\cdot b\cdot c+15\cdot b\cdot c \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 23\cdot a\cdot d=23\cdot b\cdot c \Rightarrow 23\cdot a\cdot d=23\cdot b\cdot c \quad /:23 \Rightarrow a\cdot d=b\cdot c \Rightarrow a\cdot d=b\cdot c \quad / \cdot \frac{1}{b\cdot d} \Rightarrow \frac{a}{b}=\frac{c}{d}.$$

Vježba 053

Dokaži implikaciju : $\dfrac{a}{b}=\dfrac{c}{d} \Rightarrow \dfrac{4\cdot a-5\cdot b}{3\cdot a+2\cdot b}=\dfrac{4\cdot c-5\cdot d}{3\cdot c+2\cdot d}.$

Rezultat: Dokaz analogan.

Zadatak 054 (Sara, gimnazija)

Dvije otopine, jedna 50% – tna i druga 5% – tna, miješaju se u omjeru 4 : 5. Kolika je postotna otopina tih mješavina?

$$A)\ 20\%-\text{tna} \qquad B)\ 25\%-\text{tna} \qquad C)\ 30\%-\text{tna} \qquad D)\ 35\%-\text{tna}$$

Rješenje 054

Ponovimo!

Razmjer ili proporcija je jednakost dvaju jednakih omjera. Ako je

$$a : b = k \quad i \quad c : d = k,$$

tada je razmjer ili proporcija

$$a : b = c : d.$$

Umnožak vanjskih članova razmjera a i d jednak je umnošku unutarnjih članova razmjera b i c.

$$a : b = c : d \;\Rightarrow\; a \cdot d = b \cdot c.$$

Zakon distribucije množenja prema zbrajanju:

$$a \cdot (b + c) = a \cdot b + a \cdot c \quad , \quad a \cdot b + a \cdot c = a \cdot (b + c).$$

Imamo dvije vrste otopina:
prve x litara koncentracije a i druge y litara koncentracije b i neka je a > b.
Ako ih pomiješamo, dobit ćemo smjesu od x + y litara koncentracije p. Dakle, imamo:

$$a \cdot x + b \cdot y = p \cdot (x + y).$$

Odavde slijedi:

$$a \cdot x + b \cdot y = p \cdot (x + y) \;\Rightarrow\; a \cdot x + b \cdot y = p \cdot x + p \cdot y \;\Rightarrow\; a \cdot x - p \cdot x = p \cdot y - b \cdot y \;\Rightarrow$$

$$\Rightarrow\; x \cdot (a - p) = y \cdot (p - b).$$

Prikazano u obliku razmjera glasi:

$$x : y = (p - b) : (a - p).$$

Traženi omjer miješanja prve i druge otopine jednak je

$$(p - b) : (a - p).$$

Do tog omjera možemo doći pomoću sheme:

$$\left.\begin{array}{ccc} a & & p-b \\ & p & \\ b & & a-p \end{array}\right| .$$

1.inačica

Neka je x količina prve otopine koncentracije 50%. Neka je y količina druge otopine koncentracije 5%. Neka je p koncentracija smjese, mješavine tih otopina. Iz uvjeta zadatka dobije se sustav jednadžbi.

$$\left.\begin{array}{l} \frac{50}{100} \cdot x + \frac{5}{100} \cdot y = p \cdot (x + y) \\ x : y = 4 : 5 \end{array}\right\} \Rightarrow \left.\begin{array}{l} \frac{50}{100} \cdot x + \frac{5}{100} \cdot y = p \cdot (x + y) \\ 5 \cdot x = 4 \cdot y \end{array}\right\} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \left.\begin{array}{l} \frac{50}{100} \cdot x + \frac{5}{100} \cdot y = p \cdot (x + y) \\ 5 \cdot x = 4 \cdot y \quad / : 5 \end{array}\right\} \Rightarrow \left.\begin{array}{l} \frac{50}{100} \cdot x + \frac{5}{100} \cdot y = p \cdot (x + y) \\ x = \frac{4}{5} \cdot y \end{array}\right\} \Rightarrow \left[\begin{array}{l} \text{metoda} \\ \text{supstitucije} \end{array}\right] \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \frac{50}{100} \cdot \frac{4}{5} \cdot y + \frac{5}{100} \cdot y = p \cdot \left(\frac{4}{5} \cdot y + y\right) \Rightarrow \frac{40}{100} \cdot y + \frac{5}{100} \cdot y = p \cdot \frac{9}{5} \cdot y \Rightarrow \frac{45}{100} \cdot y = p \cdot \frac{9}{5} \cdot y \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \frac{45}{100}\cdot y = p\cdot\frac{9}{5}\cdot y \;/\cdot\frac{5}{9\cdot y} \Rightarrow p=\frac{25}{100} \Rightarrow p=25\%.$$

Odgovor je pod B.

2.inačica

Neka je x količina prve otopine koncentracije 50%. Neka je y količina druge otopine koncentracije 5%. Neka je p koncentracija smjese, mješavine tih otopina. Iz uvjeta zadatka dobije se sustav jednadžbi.

$$\left.\begin{array}{l}\frac{50}{100}\cdot x+\frac{5}{100}\cdot y=p\cdot(x+y)\\ \frac{x}{y}=\frac{4}{5}\end{array}\right\} \Rightarrow \left.\begin{array}{l}\frac{50}{100}\cdot x+\frac{5}{100}\cdot y=p\cdot(x+y)\;/\cdot\frac{1}{y}\\ \frac{x}{y}=\frac{4}{5}\end{array}\right\} \Rightarrow \left.\begin{array}{l}\frac{50}{100}\cdot\frac{x}{y}+\frac{5}{100}=p\cdot\left(\frac{x}{y}+1\right)\\ \frac{x}{y}=\frac{4}{5}\end{array}\right\} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{bmatrix}\text{metoda}\\ \text{supstitucije}\end{bmatrix} \Rightarrow \frac{50}{100}\cdot\frac{4}{5}+\frac{5}{100}=p\cdot\left(\frac{4}{5}+1\right) \Rightarrow \frac{40}{100}+\frac{5}{100}=\frac{9}{5}\cdot p \Rightarrow \frac{45}{100}=\frac{9}{5}\cdot p \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \frac{45}{100}=\frac{9}{5}\cdot p \;/\cdot\frac{5}{9} \Rightarrow p=\frac{25}{100} \Rightarrow p=25\%.$$

Odgovor je pod B.

3.inačica

Neka je p koncentracija smjese, mješavine dvije otopine čije su koncentracije 50% i 5%. Postavimo shemu:

$$\begin{array}{ccc|} 50 & & p-5 \\ & p & \\ 5 & & 50-p \end{array}.$$

Iz omjera izračuna se p.

$$(p-5):(50-p)=4:5 \Rightarrow 5\cdot(p-5)=4\cdot(50-p) \Rightarrow 5\cdot p-25=200-4\cdot p \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 5\cdot p+4\cdot p=200+25 \Rightarrow 9\cdot p=225 \Rightarrow 9\cdot p=225 \;/:9 \Rightarrow p=25 \Rightarrow p=25\%.$$

Odgovor je pod B.

Vježba 054

Dvije otopine, jedna 50% – tna i druga 5% – tna, miješaju se u omjeru 8 : 10. Kolika je postotna
otopina tih mješavina?

$A)$ 20% – tna $\quad B)$ 25% – tna $\quad C)$ 30% – tna $\quad D)$ 35% – tna

Rezultat: B.

Zadatak 055 (Vlatka, gimnazija)

U 10 litara tekućine T_1 ulije se 4 litre tekućine T_2 i 6 litara tekućine T_3. Ako se iz tako dobivene smjese odliju 3 litre, količina tekućine T_3 koja ostane u posudi iznosit će:

$A)$ 5.5 l $\quad B)$ 3.6 l $\quad C)$ 4.5 l $\quad D)$ 5.1 l

Rješenje 055

Ponovimo!

Omjer je količnik dviju istovrsnih veličina

$$a:b=k \;\text{ ili }\; \frac{a}{b}=k,$$

gdje je:

a – prvi član omjera,

b – drugi član omjera,
k – vrijednost (količnik) omjera.

Razmjer ili proporcija je jednakost dvaju jednakih omjera. Ako je

$$a : b = k \quad i \quad c : d = k,$$

tada je razmjer ili proporcija

$$a : b = c : d.$$

Ako postoji n jednakih omjera

$$a_1 : b_1 = k$$
$$a_2 : b_2 = k$$
$$a_3 : b_3 = k$$
$$\ldots$$
$$a_n : b_n = k,$$

produženi razmjer je

$$a_1 : a_2 : a_3 : \ldots : a_n = b_1 : b_2 : b_3 : \ldots : b_n.$$

Produženi razmjer ima svojstvo:

$$a_1 : a_2 : a_3 : \ldots : a_n = (b_1 : n) : (b_2 : n) : (b_3 : n) : \ldots : (b_n : n) \;, \; n \neq 0.$$

Budući da se u 10 litara tekućine T_1 ulije 4 litre tekućine T_2 i 6 litara tekućine T_3, ukupno će biti 20 litara smjese. U toj smjesi tekućine se odnose kao

$$T_1 : T_2 : T_3 = 10 : 4 : 6 \Rightarrow T_1 : T_2 : T_3 = (10 : 2) : (4 : 2) : (6 : 2) \Rightarrow T_1 : T_2 : T_3 = 5 : 2 : 3.$$

Ako se iz smjese odliju 3 litre omjer tekućina T_1, T_2 i T_3 nije se promijenio. Za 17 litara smjese vrijedi:

$$\left.\begin{array}{l} T_1 + T_2 + T_3 = 17 \\ T_1 : T_2 : T_3 = 5 : 2 : 3 \end{array}\right\} \Rightarrow \left.\begin{array}{l} T_1 + T_2 + T_3 = 17 \\ T_1 = 5 \cdot k \\ T_2 = 2 \cdot k \\ T_3 = 3 \cdot k \end{array}\right\} \Rightarrow 5 \cdot k + 2 \cdot k + 3 \cdot k = 17 \Rightarrow 10 \cdot k = 17 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 10 \cdot k = 17 \; /: 10 \Rightarrow k = 1.7.$$

Količina tekućine T_3 koja ostane u posudi iznosi:

$$\left.\begin{array}{l} T_3 = 3 \cdot k \\ k = 1.7 \end{array}\right\} \Rightarrow T_3 = 3 \cdot 1.7 \Rightarrow T_3 = 5.1.$$

Odgovor je pod D.

Vježba 055

U 10 litara tekućine T_1 ulije se 4 litre tekućine T_2 i 6 litara tekućine T_3. Ako se iz tako dobivene smjese odliju 3 litre, količina tekućine T_3 koja ostane u posudi iznosit će:

$$A)\ 3.8\ l \qquad B)\ 3.4\ l \qquad C)\ 4.5\ l \qquad D)\ 2.5\ l$$

Rezultat: B.

Zadatak 056 (Vlatka, gimnazija)

Marko je u svojoj čaši pomiješao sirup s vodom u omjeru 2 : 9. Mirko je u svojoj čaši, jednake veličine, sirup i vodu pomiješao u omjeru 1 : 6. Ako se ovako priređena dva soka uliju u jedan vrč, u kojem će omjeru biti sirup i voda u vrču?

Rješenje 056

Ponovimo!

Omjer je količnik dviju istovrsnih veličina

$$a : b = k \text{ ili } \frac{a}{b} = k,$$

gdje je:

a – prvi član omjera,
b – drugi član omjera,
k – vrijednost (količnik) omjera.

Vrijednost omjera se ne mijenja ako se članovi omjera pomnože (proširenje omjera) ili podijele (skraćivanje omjera) s nekim realnim brojem različitim od nule.

$$a : b = k \Rightarrow (a \cdot n) : (b \cdot n) = k$$
$$a : b = k \Rightarrow (a : n) : (b : n) = k.$$

Marko je u svojoj čaši pomiješao sirup s vodom u omjeru 2 : 9. Znači da:

- sirup zauzima $\frac{2}{11}$ – ne obujma čaše
- voda zauzima $\frac{9}{11}$ – na obujma čaše.

Mirko je u svojoj čaši, jednake veličine, pomiješao sirup s vodom u omjeru 1 : 6. Znači da:

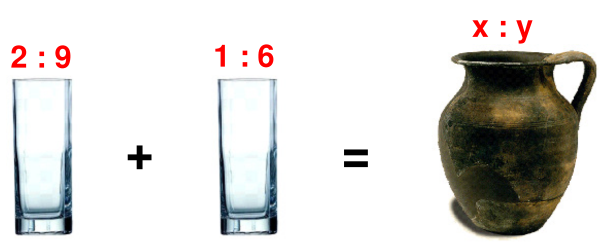
- sirup zauzima $\frac{1}{7}$ – nu obujma čaše
- voda zauzima $\frac{6}{7}$ – na obujma čaše.

Ako se ovako priređena dva soka uliju u jedan vrč obujam:

- sirupa iznosi $\frac{2}{11} + \frac{1}{7} = \frac{14+11}{77} = \frac{25}{77}$ – na obujma smjese
- vode iznosi $\frac{9}{11} + \frac{6}{7} = \frac{63+66}{77} = \frac{129}{77}$ – na obujma smjese.

Računamo omjer sirupa i vode u vrču:

$$\frac{25}{77} : \frac{129}{77} = \left(\frac{25}{77} \cdot 77\right) : \left(\frac{129}{77} \cdot 77\right) = 25 : 129.$$



Vježba 056

Marko je u svojoj čaši pomiješao sirup s vodom u omjeru 4 : 18. Mirko je u svojoj čaši, jednake veličine, sirup i vodu pomiješao u omjeru 1 : 6. Ako se ovako priređena dva soka uliju u jedan vrč, u kojem će omjeru biti sirup i voda u vrču?

Rezultat: 25 : 129.

Zadatak 057 (Marija, gimnazija)

Ako je $(x \cdot y) : (y \cdot z) : (z \cdot x) = 2 : 3 : 5$, koliko je $x : y : z$?

Rješenje 057

Ponovimo!

$$a^n \cdot a^m = a^{n+m} \quad , \quad (a \cdot b)^n = a^n \cdot b^n.$$

Omjer je količnik dviju istovrsnih veličina

$$a : b = k \ \text{ ili } \ \frac{a}{b} = k,$$

gdje je:

a – prvi član omjera,
b – drugi član omjera,
k – vrijednost (količnik) omjera.

Vrijednost omjera se ne mijenja ako se članovi omjera pomnože (proširenje omjera) ili podijele (skraćivanje omjera) s nekim realnim brojem različitim od nule.

$$a : b = k \Rightarrow (a \cdot n) : (b \cdot n) = k$$
$$a : b = k \Rightarrow (a : n) : (b : n) = k.$$

Ako postoji n jednakih omjera

$$\begin{aligned} a_1 : b_1 &= k \\ a_2 : b_2 &= k \\ a_3 : b_3 &= k \\ &\dots \\ a_n : b_n &= k, \end{aligned}$$

produženi razmjer je

$$a_1 : a_2 : a_3 : \dots : a_n = b_1 : b_2 : b_3 : \dots : b_n.$$

Produženi razmjer ima svojstvo:

$$a_1 : a_2 : a_3 : \dots : a_n = (b_1 \cdot n) : (b_2 \cdot n) : (b_3 \cdot n) : \dots : (b_n \cdot n) \ , \ n \neq 0.$$

$$(x \cdot y) : (y \cdot z) : (z \cdot x) = 2 : 3 : 5 \Rightarrow \left. \begin{array}{l} x \cdot y = 2 \cdot k \\ y \cdot z = 3 \cdot k \\ z \cdot x = 5 \cdot k \end{array} \right\} \Rightarrow \left[\begin{array}{l} \text{pomnožimo} \\ \text{jednadžbe} \end{array} \right] \Rightarrow$$

$$\Rightarrow x \cdot y \cdot y \cdot z \cdot z \cdot x = 2 \cdot k \cdot 3 \cdot k \cdot 5 \cdot k \Rightarrow x^2 \cdot y^2 \cdot z^2 = 30 \cdot k^3 \Rightarrow (x \cdot y \cdot z)^2 = 30 \cdot k^3 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow (x \cdot y \cdot z)^2 = 30 \cdot k^3 \ / \sqrt{\ } \Rightarrow x \cdot y \cdot z = \sqrt{30 \cdot k^3} \Rightarrow \left[\begin{array}{l} \text{djelomično} \\ \text{korjenovanje} \end{array} \right] \Rightarrow$$

$$\Rightarrow x \cdot y \cdot z = \sqrt{30 \cdot k^2 \cdot k} \Rightarrow x \cdot y \cdot z = k \cdot \sqrt{30 \cdot k}.$$

Računamo nepoznanicu x.

$$\left. \begin{array}{l} x \cdot y \cdot z = k \cdot \sqrt{30 \cdot k} \\ y \cdot z = 3 \cdot k \end{array} \right\} \Rightarrow \left[\begin{array}{l} \text{podijelimo} \\ \text{jednadžbe} \end{array} \right] \Rightarrow \frac{x \cdot y \cdot z}{y \cdot z} = \frac{k \cdot \sqrt{30 \cdot k}}{3 \cdot k} \Rightarrow \frac{x \cdot y \cdot z}{y \cdot z} = \frac{k \cdot \sqrt{30 \cdot k}}{3 \cdot k} \Rightarrow x = \frac{\sqrt{30 \cdot k}}{3}.$$

Računamo nepoznanicu y.

$$\left. \begin{array}{l} x \cdot y \cdot z = k \cdot \sqrt{30 \cdot k} \\ x \cdot z = 5 \cdot k \end{array} \right\} \Rightarrow \left[\begin{array}{l} \text{podijelimo} \\ \text{jednadžbe} \end{array} \right] \Rightarrow \frac{x \cdot y \cdot z}{x \cdot z} = \frac{k \cdot \sqrt{30 \cdot k}}{5 \cdot k} \Rightarrow \frac{x \cdot y \cdot z}{x \cdot z} = \frac{k \cdot \sqrt{30 \cdot k}}{5 \cdot k} \Rightarrow y = \frac{\sqrt{30 \cdot k}}{5}.$$

Računamo nepoznanicu z.

$$\left. \begin{array}{l} x \cdot y \cdot z = k \cdot \sqrt{30 \cdot k} \\ x \cdot y = 2 \cdot k \end{array} \right\} \Rightarrow \left[\begin{array}{l} \text{podijelimo} \\ \text{jednadžbe} \end{array} \right] \Rightarrow \frac{x \cdot y \cdot z}{x \cdot y} = \frac{k \cdot \sqrt{30 \cdot k}}{2 \cdot k} \Rightarrow \frac{x \cdot y \cdot z}{x \cdot y} = \frac{k \cdot \sqrt{30 \cdot k}}{2 \cdot k} \Rightarrow z = \frac{\sqrt{30 \cdot k}}{2}.$$

Sada je:

$$x:y:z=\frac{\sqrt{30\cdot k}}{3}:\frac{\sqrt{30\cdot k}}{5}:\frac{\sqrt{30\cdot k}}{2}\quad\Rightarrow$$

$$\Rightarrow\quad x:y:z=\left(\frac{\sqrt{30\cdot k}}{3}\cdot\frac{30}{\sqrt{30\cdot k}}\right):\left(\frac{\sqrt{30\cdot k}}{5}\cdot\frac{30}{\sqrt{30\cdot k}}\right):\left(\frac{\sqrt{30\cdot k}}{2}\cdot\frac{30}{\sqrt{30\cdot k}}\right)\quad\Rightarrow$$

$$\Rightarrow\quad x:y:z=\left(\frac{\sqrt{30\cdot k}}{3}\cdot\frac{30}{\sqrt{30\cdot k}}\right):\left(\frac{\sqrt{30\cdot k}}{5}\cdot\frac{30}{\sqrt{30\cdot k}}\right):\left(\frac{\sqrt{30\cdot k}}{2}\cdot\frac{30}{\sqrt{30\cdot k}}\right)\quad\Rightarrow$$

$$\Rightarrow\quad x:y:z=\frac{30}{3}:\frac{30}{5}:\frac{30}{2}\quad\Rightarrow\quad x:y:z=10:6:15.$$

Vježba 057

Ako je $(x\cdot y):(y\cdot z):(z\cdot x)=4:6:10,$ koliko je $x:y:z$?

Rezultat: $x:y:z=10:6:15.$

Zadatak 058 (4A, TUPŠ)

Omjer šećera i maslaca u kolaču je 4 : 3. U kolač smo stavili 15 dag maslaca. Koliko ćemo staviti dekagrama šećera?

Rješenje 058

Ponovimo!

Razmjer ili proporcija je jednakost dvaju jednakih omjera. Ako je

a : b = k i c : d = k,

tada je razmjer ili proporcija

a : b = c : d.

Umnožak vanjskih članova razmjera a i d jednak je umnošku unutarnjih članova razmjera b i c.

$$a:b=c:d\quad\Rightarrow\quad a\cdot d=b\cdot c.$$

 : 

Neka je x količina šećera, a y količina maslaca u kolaču. Tada vrijedi:

$$\left.\begin{array}{l} x:y=4:3 \\ y=15 \end{array}\right\}\quad\Rightarrow\quad x:15=4:3\quad\Rightarrow\quad 3\cdot x=4\cdot 15\quad\Rightarrow\quad 3\cdot x=60\quad\Rightarrow\quad 3\cdot x=60\ /:3\quad\Rightarrow\quad x=20.$$

Stavit ćemo 20 dag šećera u kolač.

Vježba 058

Omjer šećera i maslaca u kolaču je 4 : 3. U kolač smo stavili 30 dag maslaca. Koliko ćemo staviti dekagrama šećera?

Rezultat: 40 dag.

Zadatak 059 (Maja, srednja škola)

Omjer ugljikohidrata i bjelančevina u sendvičima u školskoj kantini je 20 : 3. Ako sendvič ima 87.6 g ugljikohidrata, koliko ima bjelančevina?

$A.\ 9.733\ g \qquad B.\ 13.14\ g \qquad C.\ 29.2\ g \qquad D.\ 58.4\ g$

Rješenje 059

Ponovimo!

Razmjer ili proporcija je jednakost dvaju jednakih omjera. Ako je

$$a : b = k \quad i \quad c : d = k,$$
tada je razmjer ili proporcija
$$a : b = c : d.$$
Umnožak vanjskih članova razmjera a i d jednak je umnošku unutarnjih članova razmjera b i c.
$$a : b = c : d \;\Rightarrow\; a \cdot d = b \cdot c.$$


Neka je x količina ugljikohidrata, a y količina bjelančevina u sendviču. Tada vrijedi:
$$\left.\begin{array}{l} x : y = 20 : 3 \\ x = 87.6 \end{array}\right\} \Rightarrow 87.6 : y = 20 : 3 \Rightarrow 20 \cdot y = 87.6 \cdot 3 \Rightarrow 20 \cdot y = 262.8 \Rightarrow$$
$$\Rightarrow 20 \cdot y = 262.8 \;/ : 20 \;\Rightarrow\; y = 13.14.$$
Bjelančevina ima 13.14 g.
Odgovor je pod B.

Vježba 059

Omjer ugljikohidrata i bjelančevina u sendvičima u školskoj kantini je 10 : 3. Ako sendvič ima 87.6 g ugljikohidrata, koliko ima bjelančevina?

$A.\ 2.628\ g \qquad B.\ 13.14\ g \qquad C.\ 26.28\ g \qquad D.\ 58.4\ g$

Rezultat: C.

Zadatak 060 (Sanja, srednja škola)

Ako je $a : b : c = 1 : 2 : 3$, onda je $(a+b) : (b+c) : (c+a)$ jednako:

A. 4 : 5 : 3 B. 3 : 5 : 4 C. 5 : 3 : 4 D. 3 : 4 : 5

Rješenje 060

Ponovimo!

Ako su a i b brojevi, kažemo da je količnik a : b, b ≠ 0 omjer brojeva a i b.
Vrijednost omjera ne mijenja se ako se prvi i drugi broj pomnože ili podijele istim brojem.
$$a : b = (a \cdot n) : (b \cdot n)$$
$$a : b = (a : n) : (b : n).$$
Ako postoji n jednakih omjera
$$a_1 : b_1 = k$$
$$a_2 : b_2 = k$$
$$a_3 : b_3 = k$$
$$\ldots$$
$$a_n : b_n = k,$$
produženi razmjer je
$$a_1 : a_2 : a_3 : \ldots : a_n = b_1 : b_2 : b_3 : \ldots : b_n.$$
Za dani produženi razmjer vrijedi:
$$a : b : c = 1 : 2 : 3 \Rightarrow \left.\begin{array}{l} a = k \\ b = 2 \cdot k \\ c = 3 \cdot k \end{array}\right\}.$$
Sada je:

$$(a+b):(b+c):(c+a)=(k+2\cdot k):(2\cdot k+3\cdot k):(3\cdot k+k)=(3\cdot k):(5\cdot k):(4\cdot k)=$$

$$=\left[\begin{array}{l}\text{dijelimo}\\ \text{brojem } k\end{array}\right]=3:5:4.$$

Odgovor je pod B.

Vježba 060

Ako je $a:b:c=2:3:5$, onda je $(a+b):(b+c):(c+a)$ jednako:

A. $5:8:7$ B. $8:7:5$ C. $5:7:8$ *D.* $3:4:5$

Rezultat: A.