Zadatak 181 (Berači jabuka ☺, gimnazija)

Na plantaži jabuka sedam radnika može obaviti berbu za 22 dana. Nakon četiri dana berbe pokazala se potreba da berba završi za narednih 14 dana. Koliko najmanje novih radnika treba zaposliti od petog dana? Pretpostavlja se da svi radnici rade jednakim tempom.

Rješenje 181

Ponovimo!

$$\frac{a}{b}\cdot\frac{c}{d}=\frac{a\cdot c}{b\cdot d} \quad , \quad a\cdot\frac{b}{c}=\frac{a\cdot b}{c} \quad , \quad n=\frac{n}{1} \quad , \quad \frac{a}{b}-\frac{c}{d}=\frac{a\cdot d-b\cdot c}{b\cdot d} \quad , \quad \frac{a}{b}:\frac{c}{d}=\frac{a}{b}\cdot\frac{d}{c}=\frac{a\cdot d}{b\cdot c}.$$

$$\frac{a}{b}=1 \Rightarrow a=b.$$

Skratiti razlomak znači brojnik i nazivnik tog razlomka podijeliti istim brojem različitim od nule i jedinice

$$\frac{a\cdot n}{b\cdot n}=\frac{a}{b} \ , \ n\neq 0 \ , \ n\neq 1.$$

Omjer je količnik dviju istovrsnih veličina

$$a:b=k \ \text{ ili } \ \frac{a}{b}=k,$$

gdje je:

a – prvi član omjera,
b – drugi član omjera,
k – vrijednost (količnik) omjera.

Razmjer ili proporcija je jednakost dvaju jednakih omjera. Ako je

$$a:b=k \ \text{ i } \ c:d=k,$$

tada je razmjer ili proporcija

$$a:b=c:d.$$

Umnožak vanjskih članova razmjera a i d jednak je umnošku unutarnjih članova razmjera b i c.

$$a:b=c:d \Rightarrow a\cdot d=b\cdot c.$$

Za dvije veličine kažemo da su obrnuto proporcionalne (razmjerne) ako vrijede pravila:

- koliko se puta poveća prva veličina, toliko se puta smanji druga veličina
- koliko se puta smanji prva veličina, toliko se puta poveća druga veličina.

Precizno definirano:
Za dvije veličine x i y kažemo da su obrnuto proporcionalne (razmjerne) ako je njihov umnožak (produkt) stalan:

$$x\cdot y=\text{konstantno}.$$

1.inačica

Ako 7 radnika za 22 dana obave berbu tada oni za 1 dan obave $\frac{1}{22}$ berbe, a 1 radnik za 1 dan obavi

$$\frac{1}{7}\cdot\frac{1}{22}=\frac{1}{154}$$

berbe. Prva četiri dana radilo je svih sedam i obavili su

$$4\cdot 7\cdot\frac{1}{154}=\frac{28}{154}=\frac{28}{154}=\frac{2}{11}$$

berbe. Ostalo je

$$1-\frac{2}{11}=\frac{1}{1}-\frac{2}{11}=\frac{11-2}{11}=\frac{9}{11}$$

berbe. Sada se dovede x novih radnika i taj ostatak berbe mora obaviti 7 + x radnika za 14 dana. Budući da jedan radnik za jedan dan obavi $\frac{1}{154}$ berbe to 7 + x radnika za 1 dan obavi

$$\frac{7+x}{154}$$

berbe te će $\frac{9}{11}$ berbe biti obavljeno za 14 dana. Postavimo jednadžbu:

$$\frac{9}{11}:\frac{7+x}{154}=14 \;\Rightarrow\; \frac{9}{11}\cdot\frac{154}{7+x}=14 \;\Rightarrow\; \frac{9}{11}\cdot\frac{154}{7+x}=14 \;\Rightarrow\; \frac{9}{1}\cdot\frac{14}{7+x}=14 \;\Rightarrow$$

$$\Rightarrow\; \frac{9\cdot 14}{7+x}=14 \;\Rightarrow\; \frac{9\cdot 14}{7+x}=14 \;/:14 \;\Rightarrow\; \frac{9}{7+x}=1 \;\Rightarrow\; 7+x=9 \;\Rightarrow\; x=9-7 \;\Rightarrow\; x=2.$$

Najmanje treba zaposliti 2 radnika.

2.inačica

Sedam radnika može obaviti berbu za 22 dana.
Jedan radnik bi to učinio za

$$7\cdot 22=154$$

dana.
Sedam radnika radilo je 4 dana.
Jedan radnik taj dio berbe obavio bi za

$$7\cdot 4=28$$

dana. Jedan radnik bi preostali dio berbe obavio za

$$154-28=126$$

dana. Ostatak posla mora se završiti za 14 dana. To može napraviti

$$126:14=9$$

radnika. Budući da već 7 radnika radi, treba još zaposliti najmanje

$$9-7=2$$

radnika.

3.inačica

Ukupnu količinu posla koju 7 radnika treba obaviti za 22 dana možemo izraziti brojem

$$7\cdot 22.$$

Za 4 dana zajedničke berbe njih 7 obavilo je

$$7\cdot 4$$

dijela ukupne berbe. Neka je x broj novih radnika. Tada bi 7 + x radnika trebalo obaviti ostatak berbe za 14 dana. Za 14 dana tih 7 + x radnika završilo bi

$$(7+x)\cdot 14$$

dijela ukupne berbe. Vrijedi jednadžba:

$$7\cdot 22=7\cdot 4+(7+x)\cdot 14 \;\Rightarrow\; 7\cdot 22=7\cdot 4+(7+x)\cdot 14 \;/:7 \;\Rightarrow\; 22=4+(7+x)\cdot 2 \;\Rightarrow$$

$$\Rightarrow\ 22 = 4 + (7 + x) \cdot 2 \ /:2\ \Rightarrow\ 11 = 2 + 7 + x\ \Rightarrow\ 2 + 7 + x = 11\ \Rightarrow\ x = 11 - 2 - 7\ \Rightarrow\ x = 2.$$

Najmanje treba zaposliti 2 radnika.

4.inačica

Nakon što je 7 radnika bralo 4 dana, ostatak berbe bi njih 7 obavilo za još

22 – 4 = 18

dana. Međutim, nakon dolaska x novih radnika, isti dio berbe treba obaviti 7 + x radnika. Iz sheme za ostatak posla dobije se razmjer.

$$\begin{array}{cr} \uparrow & \textbf{7 radnika .... 18 dana} & \downarrow \\ & \textbf{7 + x radnika .... 14 dana} & \end{array}$$

Strjelicu uvijek **vučemo od x**. Postavi da nepoznanica x bude u **donjem** redu.
Prva rečenica je uvjetna, a druga upitna pa kažemo: "Ako 7 radnika obave neki posao za 18 dana, hoće li 7 + x djelatnika obaviti isti posao za **više ili manje** dana?". Odgovor je **manje**! Znači da su veličine obrnuto proporcionalne pa druga strjelica mora imati **suprotan smjer** od one uz nepoznanicu x.
Postavimo razmjer u skladu sa smjerom strjelica (počinje se od početka strjelice, a završava s krajem strjelice)

$$(7 + x) : 7 = 18 : 14\ \Rightarrow\ 14 \cdot (7 + x) = 7 \cdot 18\ \Rightarrow\ 14 \cdot (7 + x) = 7 \cdot 18 \ /:7\ \Rightarrow$$

$$\Rightarrow\ 2 \cdot (7 + x) = 18\ \Rightarrow\ 2 \cdot (7 + x) = 18 \ /:2\ \Rightarrow\ 7 + x = 9\ \Rightarrow\ x = 9 - 7\ \Rightarrow\ x = 2.$$

Najmanje treba zaposliti 2 radnika.

Vježba 181

Probajte zadatak riješiti sa plantažom krušaka!

Rezultat: ☺

Zadatak 182 (Matija, gimnazija)

Nazivnik razlomka za 700 je veći od brojnika. Nakon kraćenja dobije se razlomak $\frac{3}{7}$. Kojim je brojem kraćen razlomak?

Rješenje 182

Ponovimo!

Kako zapisati da je broj b za n veći od broja a?

$$b - n = a \quad , \quad b = a + n \quad , \quad b - a = n.$$

Kako zapisati da je broj b za n manji od broja a?

$$b + n = a \quad , \quad b = a - n \quad , \quad a - b = n.$$

Zakon distribucije množenja prema zbrajanju.

$$a \cdot (b + c) = a \cdot b + a \cdot c \quad , \quad a \cdot b + a \cdot c = a \cdot (b + c).$$

Skratiti razlomak znači brojnik i nazivnik tog razlomka podijeliti istim brojem različitim od nule i jedinice

$$\frac{a \cdot n}{b \cdot n} = \frac{a}{b}\ ,\ n \neq 0\ ,\ n \neq 1.$$

1.inačica

Neka je x brojnik razlomka. Tada je nazivnik x + 700 i vrijedi:

$$\frac{x}{x + 700} = \frac{3}{7}\ \Rightarrow\ \frac{x}{x + 700} = \frac{3}{7} \ /\cdot 7 \cdot (x + 700)\ \Rightarrow\ 7 \cdot x = 3 \cdot (x + 700)\ \Rightarrow$$

$$\Rightarrow\ 7\cdot x=3\cdot x+2100\ \Rightarrow\ 7\cdot x-3\cdot x=2100\ \Rightarrow\ 4\cdot x=2100\ \Rightarrow\ 4\cdot x=2100\ /:4\ \Rightarrow\ x=525.$$

Razlomak glasi:

$$\frac{x}{x+700}=\left[\,x=525\,\right]=\frac{525}{525+700}=\frac{525}{1225}.$$

Da bismo dobili $\frac{3}{7}$ moramo razlomak $\frac{525}{1225}$ kratiti sa 175.

$$\left.\begin{aligned}525:3=175\\1225:7=175\end{aligned}\right\}.$$

2.inačica

Neka je x nazivnik razlomka. Tada je brojnik x – 700 i vrijedi:

$$\frac{x-700}{x}=\frac{3}{7}\ \Rightarrow\ \frac{x-700}{x}=\frac{3}{7}\ /\cdot 7\cdot x\ \Rightarrow\ 7\cdot(x-700)=3\cdot x\ \Rightarrow\ 7\cdot x-4900=3\cdot x\ \Rightarrow$$

$$\Rightarrow\ 7\cdot x-3\cdot x=4900\ \Rightarrow\ 4\cdot x=4900\ \Rightarrow\ 4\cdot x=4900\ /:4\ \Rightarrow\ x=1225.$$

Razlomak glasi:

$$\frac{x-700}{x}=\left[\,x=1225\,\right]=\frac{1225-700}{1225}=\frac{525}{1225}.$$

Da bismo dobili $\frac{3}{7}$ moramo razlomak $\frac{525}{1225}$ kratiti sa 175.

$$\left.\begin{aligned}525:3=175\\1225:7=175\end{aligned}\right\}.$$

Vježba 182

Nazivnik razlomka za 75 je veći od brojnika. Nakon kraćenja dobije se razlomak $\frac{2}{3}$. Kojim je brojem kraćen razlomak?

Rezultat: 75.

Zadatak 183 (Ema, srednja škola)

Duljina je Stjepanova koraka 75 cm, a duljina Marijanina koraka 60 cm. U jednoj minuti Stjepan napravi 45 koraka, a Marijana 60. Stjepan krene u šetnju jednu minutu prije Marijane. Koliko će koraka napraviti Marijana dok ne stigne Stjepana?

$A.\ 150\ koraka \qquad B.\ 225\ koraka \qquad C.\ 900\ koraka \qquad D.\ 1125\ koraka$

Rješenje 183

Ponovimo!

Zakon distribucije množenja prema zbrajanju.

$$a\cdot(b+c)=a\cdot b+a\cdot c\quad,\quad a\cdot b+a\cdot c=a\cdot(b+c).$$

Najprije odredimo koliki put prijeđu Stjepan i Marijana u jednoj minuti. U jednoj minuti:

- Stjepan napravi 45 koraka (duljina koraka je 75 cm) pa prijeđeni put iznosi

$$45\cdot 75\ cm=3375\ cm$$

- Marijana napravi 60 koraka (duljina koraka je 60 cm) pa prijeđeni put iznosi

$$60\cdot 60\ cm=3600\ cm.$$

Neka je x vrijeme u minutama za koje Marijana stigne Stjepana. Za x minuta ona će prijeći put od

$$3600\cdot x$$

centimetara.

Stjepan hoda minutu više od Marijane pa će za x + 1 minutu prijeći put od

$$3375 \cdot (x+1)$$

centimetara. Budući da njihovi putovi moraju biti jednaki, vrijedi jednadžba:

$$3600 \cdot x = 3375 \cdot (x+1) \Rightarrow 3600 \cdot x = 3375 \cdot x + 3375 \Rightarrow 3600 \cdot x - 3375 \cdot x = 3375 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 225 \cdot x = 3375 \Rightarrow 225 \cdot x = 3375 \;/ : 225 \Rightarrow x = 15.$$

Djevojka će napraviti 900 koraka.

$$15 \cdot 60 = 900.$$

Odgovor je pod C.

Vježba 183

Duljina je Stjepanova koraka 75 cm, a duljina Marijanina koraka 60 cm. U dvije minute Stjepan napravi 90 koraka, a Marijana 120. Stjepan krene u šetnju jednu minutu prije Marijane. Koliko će koraka napraviti Marijana dok ne stigne Stjepana?

$A.\ 150\ koraka \qquad B.\ 225\ koraka \qquad C.\ 900\ koraka \qquad D.\ 1125\ koraka$

Rezultat: C.

Zadatak 184 (Ante, srednja škola)

Irena i Mia zajedno oberu grm kupina za 12 minuta. Ako bi svaka od njih taj grm kupina obrala sama, Ireni bi trebalo 10 minuta više nego Miji. Koliko bi vremena trebalo Ireni da taj grm kupina obere sama?

$A.\ 14\ \text{minuta} \qquad B.\ 22\ \text{minute} \qquad C.\ 24\ \text{minute} \qquad D.\ 30\ \text{minuta}$

Rješenje 184

Ponovimo!

$$a^1 = a \quad , \quad a^n \cdot a^m = a^{n+m}.$$

Kako zapisati da je broj b za n veći od broja a?

$$b - n = a \quad , \quad b = a + b \quad , \quad b - a = n.$$

Zakon distribucije množenja prema zbrajanju.

$$a \cdot (b+c) = a \cdot b + a \cdot c \quad , \quad a \cdot b + a \cdot c = a \cdot (b+c).$$

Skratiti razlomak znači brojnik i nazivnik tog razlomka podijeliti istim brojem različitim od nule i jedinice

$$\frac{a \cdot n}{b \cdot n} = \frac{a}{b} \;,\; n \neq 0 \;,\; n \neq 1.$$

Neka je:

- x vrijeme u minutama za koje Irena sama obere grm
- y vrijeme u minutama za koje Mia sama obere grm.

U jednoj minuti:

- Irena obere $\frac{1}{x}$ – ti dio grma
- Mia obere $\frac{1}{y}$ – ti dio grma.

U jednoj minuti djevojke zajedno oberu $\frac{1}{x} + \frac{1}{y}$ – ti dio grma. Budući da skupa oberu grm za 12 minuta, vrijedi jednadžba:

$$12\cdot\left(\frac{1}{x}+\frac{1}{y}\right)=1 \Rightarrow 12\cdot\left(\frac{1}{x}+\frac{1}{y}\right)=1 \; / \cdot \frac{1}{12} \Rightarrow \frac{1}{x}+\frac{1}{y}=\frac{1}{12}.$$

Irena za branje grma trena 10 minuta više nego Mia pa vrijedi jednadžba:

$$y=x-10.$$

Iz sustava jednadžbi dobije se x.

$$\left.\begin{array}{l} y=x-10 \\ \frac{1}{x}+\frac{1}{y}=\frac{1}{12} \end{array}\right\} \Rightarrow \frac{1}{x}+\frac{1}{x-10}=\frac{1}{12} \Rightarrow \frac{1}{x}+\frac{1}{x-10}=\frac{1}{12} \; / \cdot 12\cdot x\cdot(x-10) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 12\cdot(x-10)+12\cdot x=x\cdot(x-10) \Rightarrow 12\cdot x-120+12\cdot x=x^2-10\cdot x \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 12\cdot x-120+12\cdot x-x^2+10\cdot x=0 \Rightarrow -x^2+34\cdot x-120=0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow -x^2+34\cdot x-120=0 \; / \cdot(-1) \Rightarrow x^2-34\cdot x+120=0 \Rightarrow \left.\begin{array}{l} x^2-34\cdot x+120=0 \\ a=1 \;,\; b=-34 \;,\; c=120 \end{array}\right\} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \left.\begin{array}{l} a=1 \;,\; b=-34 \;,\; c=120 \\ x_{1,2}=\frac{-b\pm\sqrt{b^2-4\cdot a\cdot c}}{2\cdot a} \end{array}\right\} \Rightarrow x_{1,2}=\frac{-(-34)\pm\sqrt{(-34)^2-4\cdot 1\cdot 120}}{2\cdot 1} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow x_{1,2}=\frac{34\pm\sqrt{1156-480}}{2} \Rightarrow x_{1,2}=\frac{34\pm\sqrt{676}}{2} \Rightarrow x_{1,2}=\frac{34\pm 26}{2} \Rightarrow \left.\begin{array}{l} x_1=\frac{34+26}{2} \\ x_2=\frac{34-26}{2} \end{array}\right\} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \left.\begin{array}{l} x_1=\frac{60}{2} \\ x_2=\frac{8}{2} \end{array}\right\} \Rightarrow \left.\begin{array}{l} x_1=\frac{60}{2} \\ x_2=\frac{8}{2} \end{array}\right\} \Rightarrow \left.\begin{array}{l} x_1=30 \\ x_2=4 \text{ nije rješenje jer bi bilo } y=x-10<0 \end{array}\right\} \Rightarrow x=30.$$

Odgovor je pod D.

Vježba 184

Irena i Mia zajedno oberu grm kupina za 12 minuta. Ako bi svaka od njih taj grm kupina obrala sama, Ireni bi trebalo 10 minuta više nego Miji. Koliko bi vremena trebalo Miji da taj grm kupina obere sama?

A. 15 minuta *B.* 20 minuta *C.* 25 minuta *D.* 35 minuta

Rezultat: B.

Zadatak 185 (Ante, srednja škola)

Brat i sestra zajedno imaju 51 godinu. Brat će za tri godine imati onoliko godina koliko sestra ima sada. Prije koliko je godina brat navršio 18 godina?

Rješenje 185

Ponovimo!

Kako zapisati da je broj b za n veći od broja a?

$$b - n = a \quad , \quad b = a + b \quad , \quad b - a = n.$$

Neka je:

- x današnja starost brata
- y današnja starost sestre.

Njih dvoje zajedno imaju 51 godinu pa vrijedi jednadžba:

$$x + y = 51.$$

Budući da će za tri godine brat imati onoliko godina koliko sestra ima sada, zaključujemo da vrijedi jednadžba

$$y = x + 3.$$

Iz sustava odredimo nepoznanicu x.

$$\left.\begin{array}{l} x + y = 51 \\ y = x + 3 \end{array}\right\} \Rightarrow x + x + 3 = 51 \Rightarrow x + x = 51 - 3 \Rightarrow 2 \cdot x = 48 \Rightarrow 2 \cdot x = 48 \; / : 2 \Rightarrow x = 24.$$

Danas brat ima 24 godine, a 18 godina navršio je prije 6 godina.

$$24 - 18 = 6.$$

Vježba 185

Brat i sestra zajedno imaju 51 godinu. Brat će za tri godine imati onoliko godina koliko sestra ima sada. Prije koliko je godina brat navršio 10 godina?

Rezultat: 14 godina.

Zadatak 186 (Miroslav, gimnazija)

Livadu za 30 dana popasu 64 krave. Na istoj livadi bi 36 krava moglo pasti 60 dana.
a) Koliko krava popase livadu za 35 dana?
b) Koliko dana bi paslo 50 krava?

Rješenje 186

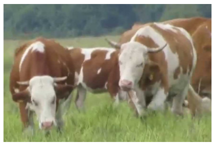
Ponovimo!

Skup prirodnih brojeva označavamo slovom N, a zapisujemo

$$N = \left\{ 1,\ 2,\ 3,\ 4,\ 5,\ \ldots\ ,\ n - 1,\ n,\ n + 1,\ \ldots \right\}.$$

Pretpostavimo da trava svakodnevno raste.
Za 30 dana 64 krave popast će 1920 obroka trave, 30 · 64 = 1920.
Za 60 dana 36 krava popast će 2160 obroka trave, 60 · 36 = 2160.
Uočimo da je za 30 dana (60 – 30) broj obroka trave povećan za 240 obroka, 2160 – 1920 = 240.
Dakle, dnevno naraste 8 obroka trave, 240 : 30 = 8.
Na početku je livada imala 1680 obroka trave, 1920 – 240 = 1680.
a) Računamo koliko krava popase livadu za 35 dana.
Za 35 dana (dnevno izraste 8 obroka trave) bit će 1960 obroka trave, 1680 + 35 · 8 = 1960.
To će popasti 56 krava, 1960 : 35 = 56.
b) Računamo koliko bi dana paslo 50 krava.
Neka je x broj dana za koje 50 krava popase livadu. Za 50 krava treba 50 · x obroka trave. Na početku je livada imala 1680 obroka, a dnevno naraste 8 obroka trave pa vrijedi jednadžba:

$$50 \cdot x = 1680 + 8 \cdot x \;\Rightarrow\; 50 \cdot x - 8 \cdot x = 1680 \;\Rightarrow\; 42 \cdot x = 1680 \;\Rightarrow\; 42 \cdot x = 1680 \;/ : 42 \;\Rightarrow\; x = 40.$$



Vježba 186

Odmor!

Rezultat: Einsteinova jednadžba uspjeha
U = X – Y + Z,
gdje je U uspjeh u životu, X rad, Y zabava, Z nemoj previše govoriti.

Zadatak 187 (Miroslav, gimnazija)

Luka je mijenjao zečeve za kokoši. Za svaka 2 zeca dobio je 3 kokoši. Svaka kokoš snijela je onoliko jaja koliko iznosi trećina broja kokoši. Jaja je prodao tako da je za svakih 9 jaja uzeo onoliko kuna koliko kokoš snese jaja. Koliko je bilo kokoši, a koliko zečeva, ako je za jaja naplaćeno 72000 kuna?

Rješenje 187

Ponovimo!

$$a^1 = a \quad , \quad a^n \cdot a^m = a^{n+m} \quad , \quad \frac{a}{b} \cdot \frac{c}{d} = \frac{a \cdot c}{b \cdot d} \quad , \quad n = \frac{n}{1}.$$

$$\frac{a}{b} : \frac{c}{d} = \frac{a}{b} \cdot \frac{d}{c} = \frac{a \cdot d}{b \cdot c}.$$

Kako se računa $\frac{a}{b}$ od x?

$$\frac{a}{b} \cdot x.$$

Skratiti razlomak znači brojnik i nazivnik tog razlomka podijeliti istim brojem različitim od nule i jedinice

$$\frac{a \cdot n}{b \cdot n} = \frac{a}{b} \;,\; n \neq 0 \;,\; n \neq 1.$$

Za svaka 2 zeca Luka je dobio 3 kokoši. Za 1 zeca dobio je $\frac{3}{2}$ kokoši. ☺

Neka je x broj zečeva koje je Luka imao. Tada je ukupan broj kokoši

$$\frac{3}{2} \cdot x.$$

Svaka kokoš snijela je onoliko jaja koliko iznosi trećina broja kokoši. Broj jaja je:

$$\left(\frac{3}{2} \cdot x\right) \cdot \frac{1}{3} \cdot \left(\frac{3}{2} \cdot x\right) = \frac{3}{2} \cdot x \cdot \frac{1}{3} \cdot \frac{3}{2} \cdot x = \frac{3}{2} \cdot x \cdot \frac{1}{3} \cdot \frac{3}{2} \cdot x = \frac{1}{2} \cdot x \cdot \frac{3}{2} \cdot x = \frac{3}{4} \cdot x^2.$$

Jaja je prodao tako da je za svakih 9 jaja uzeo onoliko kuna koliko kokoš snese jaja i zaradio 72000 kuna. Vrijedi jednadžba:

$$\left(\frac{3}{4} \cdot x^2 : 9\right) \cdot \frac{x}{2} = 72\,000 \;\Rightarrow\; \left(\frac{3}{4} \cdot x^2 : \frac{9}{1}\right) \cdot \frac{x}{2} = 72\,000 \;\Rightarrow\; \frac{3}{4} \cdot x^2 \cdot \frac{1}{9} \cdot \frac{x}{2} = 72\,000 \;\Rightarrow$$

$$\Rightarrow\; \frac{3}{4} \cdot x^2 \cdot \frac{1}{9} \cdot \frac{x}{2} = 72\,000 \;\Rightarrow\; \frac{1}{4} \cdot x^2 \cdot \frac{1}{3} \cdot \frac{x}{2} = 72\,000 \;\Rightarrow\; \frac{x^3}{24} = 72\,000 \;\Rightarrow$$

$$\Rightarrow \frac{x^3}{24} = 72\,000 \;/\cdot 24 \Rightarrow x^3 = 1728\,000 \Rightarrow x^3 = 1728\,000 \;/\sqrt[3]{\;} \Rightarrow x = \sqrt[3]{1728\,000} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow x = 120.$$

Bilo je 120 zečeva i

$$\frac{3}{2} \cdot x = \left[\, x = 120 \,\right] = \frac{3}{2} \cdot 120 = \frac{3}{2} \cdot 120 = 180$$

kokoši.

=

Vježba 187

Luka je mijenjao zečeve za kokoši. Za svaka 2 zeca dobio je 3 kokoši. Svaka kokoš snijela je onoliko jaja koliko iznosi trećina broja kokoši. Jaja je prodao tako da je za svakih 9 jaja uzeo onoliko kuna koliko kokoš snese jaja. Koliko je bilo kokoši, a koliko zečeva, ako je za jaja naplaćeno 576000 kuna?

Rezultat: 240 zečeva, 360 kokoši.

Zadatak 188 (Mirela, srednja škola)

Ako voda utječe u bazen kroz jednu cijev bazen će se napuniti za 4 sata, a ako utječe kroz drugu napunit će se za 6 sati.
a) Utječe li voda kroz obje cijevi koji će se dio bazena napuniti za jedan sat?
b) Utječe li voda kroz obje cijevi koji će se dio bazena napuniti za dva sata?
c) Utječe li voda kroz obje cijevi za koje će se vrijeme napuniti bazen?

Rješenje 188

Ponovimo!

$$\frac{a}{b} + \frac{c}{d} = \frac{a \cdot d + b \cdot c}{b \cdot d} \quad , \quad \frac{a}{b} \cdot \frac{b}{a} = 1.$$

Skratiti razlomak znači brojnik i nazivnik tog razlomka podijeliti istim brojem različitim od nule i jedinice

$$\frac{a \cdot n}{b \cdot n} = \frac{a}{b} \;,\; n \neq 0 \;,\; n \neq 1.$$

Razlomak pretvorimo u decimalni broj tako da brojnik podijelimo nazivnikom.
Probleme ovog tipa svodimo na promatranje "količine" događaja u jedinici vremena.
(Branko Topić, Matematika za prijamne ispite, Varaždin, 2004.)
Za jedan sat:

- prva cijev napuni $\frac{1}{4}$ bazena
- druga cijev napuni $\frac{1}{6}$ bazena.

a) Zajedno za 1 sat obje cijevi napune

$$\frac{1}{4} + \frac{1}{6} = \frac{3+2}{12} = \frac{5}{12}$$

bazena.
b) Zajedno za 2 sata obje cijevi napune

$$2 \cdot \left(\frac{1}{4} + \frac{1}{6}\right) = 2 \cdot \frac{3+2}{12} = 2 \cdot \frac{5}{12} = 2 \cdot \frac{5}{12} = \frac{5}{6}$$

bazena.

c) Neka je x vrijeme u satima za koje će obje cijevi napuniti bazen. Vrijedi jednadžba:

$$x \cdot \left(\frac{1}{4}+\frac{1}{6}\right)=1 \Rightarrow x \cdot \frac{3+2}{12}=1 \Rightarrow x \cdot \frac{5}{12}=1 \Rightarrow x \cdot \frac{5}{12}=1 \ / \cdot \frac{12}{5} \Rightarrow x=\frac{12}{5} \Rightarrow x=2.4 \ h.$$

Vježba 188

Ako voda utječe u bazen kroz jednu cijev bazen će se napuniti za 6 sati, a ako utječe kroz drugu napunit će se za 3 sata.
a) Utječe li voda kroz obje cijevi koji će se dio bazena napuniti za jedan sat?
b) Utječe li voda kroz obje cijevi za koje će se vrijeme napuniti bazen?

Rezultat: a) $\frac{1}{2}$ bazena b) 2 h.

Zadatak 189 (Gabrijela, srednja škola)

U dvjema posudama od po 50 litara nalaze se izvjesne količine tekućine. Ako bismo iz druge prelili u prvu $\frac{1}{3}$ sadržaja, prva bi posuda bila puna. A ako bismo iz prve prelili u drugu $\frac{1}{2}$ sadržaja, druga bi bila puna. Koliko je u kojoj posudi tekućine?

Rješenje 189

Ponovimo!
Kako zapisati n – ti dio od broja x?

$$\frac{1}{n} \cdot x.$$

Neka je:
- x broj litara tekućine u prvoj posudi
- y broj litara tekućine u drugoj posudi.

Prvu rečenicu "Ako bismo iz druge prelili u prvu $\frac{1}{3}$ sadržaja, prva bi posuda bila puna." preoblikujemo u jednadžbu.

$$\frac{1}{3} \cdot y+x=50.$$

Drugu rečenicu "A ako bismo iz prve prelili u drugu $\frac{1}{2}$ sadržaja, druga bi bila puna." preoblikujemo u jednadžbu.

$$\frac{1}{2} \cdot x+y=50.$$

Zapišimo sustav jednadžbi i riješimo ga!

$$\left.\begin{array}{l} \frac{1}{3} \cdot y+x=50 \\ \frac{1}{2} \cdot x+y=50 \end{array}\right\} \Rightarrow \left.\begin{array}{l} \frac{1}{3} \cdot y+x=50 \ / \cdot 3 \\ \frac{1}{2} \cdot x+y=50 \ / \cdot 2 \end{array}\right\} \Rightarrow \left.\begin{array}{l} y+3 \cdot x=150 \\ x+2 \cdot y=100 \end{array}\right\} \Rightarrow \left.\begin{array}{l} 3 \cdot x+y=150 \\ x+2 \cdot y=100 \end{array}\right\} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \left[\begin{array}{l} \text{metoda suprotnih} \\ \text{koeficijenata} \end{array}\right] \Rightarrow \left.\begin{array}{l} 3 \cdot x+y=150 \ / \cdot (-2) \\ x+2 \cdot y=100 \end{array}\right\} \Rightarrow \left.\begin{array}{l} -6 \cdot x-2 \cdot y=-300 \\ x+2 \cdot y=100 \end{array}\right\} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow -5 \cdot x=-200 \Rightarrow -5 \cdot x=-200 \ /:(-5) \Rightarrow x=40.$$

Računamo y.

$$\left.\begin{array}{l} 3\cdot x+y=150 \\ x=40 \end{array}\right\} \Rightarrow 3\cdot 40+y=150 \Rightarrow 120+y=150 \Rightarrow y=150-120 \Rightarrow y=30.$$

Vježba 189

U dvjema posudama od po 100 litara nalaze se izvjesne količine tekućine. Ako bismo iz druge prelili u prvu $\frac{1}{3}$ sadržaja, prva bi posuda bila puna. A ako bismo iz prve prelili u drugu $\frac{1}{2}$ sadržaja, druga bi bila puna. Koliko je u kojoj posudi tekućine?

Rezultat: x = 80 litara, y = 60 litara.

Zadatak 190 (Marin, srednja škola)

Na pitanje nastavnika koliko je odsutnih učenika, jedan učenik je odgovorio: "Jedna devetina." U tom trenutku u razred ulazi jedan učenik, a učenici izjavljuju: "Sada nas nedostaje $\frac{1}{12}$." Koliko je ukupno učenika u tom razredu?

Rješenje 190

Ponovimo!

$$n=\frac{n}{1} \quad , \quad \frac{a}{b}-\frac{c}{d}=\frac{a\cdot d-b\cdot c}{b\cdot d}.$$

Kako zapisati n – ti dio od broja x?

$$\frac{1}{n}\cdot x.$$

1.inačica

Neka je x broj učenika tog razreda. Ako ih je odsutno jedna devetina to iznosi $\frac{1}{9}\cdot x.$

Kada jedan učenik uđe u razred (broj odsutnih smanji se za 1) odsutno ih je $\frac{1}{12}\cdot x.$ Možemo napisati jednadžbu.

$$\frac{1}{9}\cdot x-1=\frac{1}{12}\cdot x \Rightarrow \frac{1}{9}\cdot x-1=\frac{1}{12}\cdot x \;/\cdot 36 \Rightarrow 4\cdot x-36=3\cdot x \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 4\cdot x-3\cdot x=36 \Rightarrow x=36.$$

2.inačica

Neka je x broj učenika tog razreda. Ako je na početku bilo odsutno jedna devetina na nastavi je bilo

$$x-\frac{1}{9}\cdot x=\frac{x}{1}-\frac{1}{9}\cdot x=\frac{9\cdot x-x}{9}=\frac{8\cdot x}{9}.$$

Kada je jedan učenik ušao u razred (broj nazočnih povećao se za 1) bilo ih je odsutno $\frac{1}{12}\cdot x$ pa je nastavi nazočilo

$$x-\frac{1}{12}\cdot x=\frac{x}{1}-\frac{1}{12}\cdot x=\frac{12\cdot x-x}{12}=\frac{11\cdot x}{12}.$$

Možemo napisati jednadžbu.

$$\frac{8}{9}\cdot x+1=\frac{11}{12}\cdot x \Rightarrow \frac{8}{9}\cdot x+1=\frac{11}{12}\cdot x \;/\cdot 36 \Rightarrow 32\cdot x+36=33\cdot x \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 32\cdot x-33\cdot x=-36 \Rightarrow -x=-36 \Rightarrow -x=-36 \;/\cdot(-1) \Rightarrow x=36.$$

Vježba 190

Zašto je kalkulator najbolji čovjekov prijatelj?

Rezultat: Zato što na njega uvijek možeš računati.

Zadatak 191 (Martina, srednja škola)

Učenik je zbrojio dva decimalna broja. Pogreškom je pomaknuo decimalnu točku u prvom broju za jedno mjesto ulijevo i dobio zbroj 83.886, umjesto točnog rezultata 312. Koje je brojeve trebalo zbrojiti?

Rješenje 191

Ponovimo!

Decimalni broj množimo dekadskom jedinicom (10, 100, 1000, 10000, …) tako da mu decimalnu točku pomaknemo udesno za onoliko mjesta koliko dekadska jedinica ima nula.
Decimalni broj dijelimo dekadskom jedinicom (10, 100, 1000, 10000, …) tako da mu decimalnu točku pomaknemo ulijevo za onoliko mjesta koliko dekadska jedinica ima nula.
Kako zapisati n – ti dio od broja x?

$$\frac{1}{n}\cdot x.$$

Neka su x i y traženi decimalni brojevi. Njihov zbroj je 312 pa možemo napisati jednadžbu

$$x+y=312.$$

Ako u prvom broju x decimalnu točku pomaknemo za jedno mjesto ulijevo (znači podijelili smo ga brojem 10) broj se smanjio deset puta. Možemo napisati jednadžbu

$$\frac{1}{10}\cdot x+y=83.886.$$

Postavimo i riješimo sustav jednadžbi.

$$\left.\begin{array}{l} x+y=312 \\ \frac{1}{10}\cdot x+y=83.886 \end{array}\right\} \Rightarrow \left[\begin{array}{l} \text{metoda suprotnih} \\ \text{koeficijenata} \end{array}\right] \Rightarrow \left.\begin{array}{l} x+y=312 \;/\cdot 10 \\ \frac{1}{10}\cdot x+y=83.886 \;/\cdot(-10) \end{array}\right\} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \left.\begin{array}{l} 10\cdot x+10\cdot y=3120 \\ -x-10\cdot y=-838.86 \end{array}\right\} \Rightarrow 9\cdot x=2\,281.14 \Rightarrow 9\cdot x=2\,281.14 \;/:9 \Rightarrow x=253.46.$$

Računamo y.

$$\left.\begin{array}{l} x+y=312 \\ x=253.46 \end{array}\right\} \Rightarrow 253.46+y=312 \Rightarrow y=312-253.46 \Rightarrow y=58.54.$$

Vježba 191

Učenik je zbrojio dva decimalna broja. Pogreškom je pomaknuo decimalnu točku u prvom broju za jedno mjesto ulijevo i dobio zbroj 3.13, umjesto točnog rezultata 7. Koje je brojeve trebalo zbrojiti?

Rezultat: 4.3 i 2.7.

Zadatak 192 (2A, TUPŠ)

Spremnik se kroz prvu cijev može napuniti za 3 sata, a kroz drugu isprazniti za 5 sati. Za koje će se vrijeme napuniti spremnik ako se istodobno otvore obje cijevi?

Rješenje 192

Ponovimo!

$$1\ h=60\ \text{min} \quad , \quad \frac{a}{b}-\frac{c}{d}=\frac{a\cdot d-b\cdot c}{b\cdot d} \quad , \quad \frac{a}{b}=\frac{c}{d} \Rightarrow \frac{b}{a}=\frac{d}{c} \quad , \quad \frac{n}{1}=n.$$

Kako se računa n – ti dio od x?

$$\frac{1}{n}\cdot x.$$

1.inačica

Prva cijev napuni spremnik za 3 sata pa će za 1 sat napuniti $\frac{1}{3}$ spremnika.

Druga cijev isprazni puni spremnik za 5 sati pa će za 1 sat isprazniti $\frac{1}{5}$ spremnika.

Ako bi obje cijevi zajedno napunile spremnik za x sati, onda one za 1 sat napune $\frac{1}{x}$ – ti dio spremnika. Stoga mora biti

$$\frac{1}{3}-\frac{1}{5}=\frac{1}{x} \Rightarrow \frac{1}{x}=\frac{1}{3}-\frac{1}{5} \Rightarrow \frac{1}{x}=\frac{5-3}{15} \Rightarrow \frac{1}{x}=\frac{2}{15} \Rightarrow \frac{x}{1}=\frac{15}{2} \Rightarrow x=7.5\ h \Rightarrow x=7\ h\ 30\ \text{min}.$$

2.inačica

(Originalno rješenje ponudio je Mateo Feltrin 2A, TUPŠ. Uz njegovo dopuštenje objavljujemo ga.)

U zadatku bitan je omjer dotoka vode što iznosi 3 sata i odvoda vode koji iznosi 5 sati. Pretpostavimo li, na primjer, da voda utječe brzinom 10 L / h, pomoću te brzine lako izračunamo obujam spremnika. On iznosi 30 litara.

$$3\ h \cdot 10\ \frac{L}{h}=30\ L.$$

Sada možemo naći brzinu otjecanja vode.

$$\frac{30\ L}{5\ h}=6\ \frac{L}{h}.$$

Budući da znamo brzine i obujam, elegantno odredimo vrijeme t za koje se spremnik napuni ako su istodobno otvorene obje cijevi.

$$(10-6)\cdot t=30 \Rightarrow 4\cdot t=30 \Rightarrow 4\cdot t=30\ /:4 \Rightarrow t=7.5\ h \Rightarrow t=7\ h\ 30\ \text{min}.$$

Vježba 192

Spremnik se kroz prvu cijev može napuniti za 3 sata, a kroz drugu isprazniti za 4 sata. Za koje će se vrijeme napuniti spremnik ako se istodobno otvore obje cijevi?

Rezultat: 12 h.

Zadatak 193 (4B, TUPŠ)

Ako se vrijednost brojnika nekog razlomka uveća za vrijednost njegova nazivnika, a vrijednost nazivnika umanji za vrijednost brojnika, vrijednost tog razlomka je 2. Ako se brojniku pribroji 8, a nazivnik ostane nepromijenjen, vrijednost razlomka je 3. Koji je to razlomak?

Rješenje 193

Ponovimo!

Zakon distribucije množenja prema zbrajanju.

$$a\cdot(b+c)=a\cdot b+a\cdot c \quad , \quad a\cdot b+a\cdot c=a\cdot(b+c).$$

Kako zapisati da je broj a uvećan za broj b?

$$a+b.$$

Kako zapisati da je broj a umanjen za broj b?

$$a-b.$$

Neka je x brojnik, a y nazivnik nepoznatog razlomka $\frac{x}{y}$.

Rečenicu "Ako se vrijednost brojnika nekog razlomka uveća za vrijednost njegova nazivnika, a vrijednost nazivnika umanji za vrijednost brojnika, vrijednost tog razlomka je 2." možemo zapisati u obliku jednadžbe na sljedeći način:

$$\frac{x+y}{y-x}=2 \Rightarrow \frac{x+y}{y-x}=2 \,/\cdot (y-x) \Rightarrow x+y=2\cdot y-2\cdot x \Rightarrow x+y-2\cdot y+2\cdot x=0 \Rightarrow 3\cdot x-y=0.$$

Rečenicu "Ako se brojniku pribroji 8, a nazivnik ostane nepromijenjen, vrijednost razlomka je 3." možemo zapisati u obliku jednadžbe na ovaj način:

$$\frac{x+8}{y}=3 \Rightarrow \frac{x+8}{y}=3 \,/\cdot y \Rightarrow x+8=3\cdot y \Rightarrow x-3\cdot y=-8.$$

Zadatak se svodi na rješavanje sustava jednadžbi. Idemoooo!

$$\left.\begin{array}{l} 3\cdot x-y=0 \\ x-3\cdot y=-8 \end{array}\right\} \Rightarrow \left[\begin{array}{l} \text{metoda suprotnih} \\ \text{koeficijenata} \end{array}\right] \Rightarrow \left.\begin{array}{l} 3\cdot x-y=0 \\ x-3\cdot y=-8 \,/\cdot (-3) \end{array}\right\} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \left.\begin{array}{l} 3\cdot x-y=0 \\ -3\cdot x+9\cdot y=24 \end{array}\right\} \Rightarrow 8\cdot y=24 \Rightarrow 8\cdot y=24 \,/:8 \Rightarrow y=3.$$

Računamo x.

$$\left.\begin{array}{l} y=3 \\ 3\cdot x-y=0 \end{array}\right\} \Rightarrow 3\cdot x-3=0 \Rightarrow 3\cdot x=3 \Rightarrow 3\cdot x=3 \,/:3 \Rightarrow x=1.$$

To je razlomak

$$\frac{x}{y}=\frac{1}{3}.$$

Vježba 193

Ako se vrijednost brojnika nekog razlomka uveća za vrijednost njegova nazivnika, a vrijednost nazivnika umanji za vrijednost brojnika, vrijednost tog razlomka je 3. Ako se brojniku pribroji 3, a nazivnik ostane nepromijenjen, vrijednost razlomka je 2. Koji je to razlomak?

Rezultat: $\frac{1}{2}.$

Zadatak 194 (4B, TUPŠ)

Dvije cijevi pune bazen. Ako se otvore obje cijevi, bazen se napuni za 12 sati. Otvori li se najprije prva cijev 9 sati, a zatim druga 6 sati, napunit će se $\frac{2}{3}$ bazena. Za koje bi vrijeme prva cijev, a za koje druga cijev napunila bazen?

Rješenje 194

Ponovimo!

$$\frac{a}{b}+\frac{c}{d}=\frac{a\cdot d+b\cdot c}{b\cdot d} \quad , \quad \frac{a}{b}-\frac{c}{d}=\frac{a\cdot d-b\cdot c}{b\cdot d} \quad , \quad \frac{n}{a}=\frac{n}{b} \Rightarrow a=b.$$

$$a\cdot\frac{1}{b}=\frac{a}{b} \quad , \quad a\cdot\frac{b}{c}=\frac{a\cdot b}{c} \quad , \quad \frac{a}{b}\cdot\frac{c}{d}=\frac{a\cdot c}{b\cdot d}.$$

Skratiti razlomak znači brojnik i nazivnik tog razlomka podijeliti istim brojem različitim od nule i jedinice

$$\frac{a\cdot n}{b\cdot n}=\frac{a}{b} \;,\; n\neq 0 \;,\; n\neq 1.$$

Neka je:

- x broj sati za koje bazen napuni prva cijev
- y broj sati za koje bazen napuni druga cijev.

Prva cijev napuni bazen za x sati pa će za 1 sat napuniti $\frac{1}{x}$ – ti dio bazena.

Druga cijev napuni bazena za y sati pa će za 1 sat napuniti $\frac{1}{y}$ – ti dio bazena.

Ako obje cijevi bazen napune za 12 sati, za 1 sat napunit će $\frac{1}{12}$ bazena. Zato vrijedi jednadžba:

$$\frac{1}{x}+\frac{1}{y}=\frac{1}{12}.$$

Ako najprije prva cijev puni bazen 9 sati, a zatim druga 6 sati, napunit će se $\frac{2}{3}$ bazena. Zaključujemo da vrijedi jednadžba:

$$\frac{9}{x}+\frac{6}{y}=\frac{2}{3}.$$

Postavimo sustav jednadžbi.

$$\left.\begin{array}{l}\frac{1}{x}+\frac{1}{y}=\frac{1}{12}\\ \frac{9}{x}+\frac{6}{y}=\frac{2}{3}\end{array}\right\}\Rightarrow\left[\begin{array}{c}\text{zamjena}\\ u=\frac{1}{x}\ ,\ v=\frac{1}{y}\end{array}\right]\Rightarrow\left.\begin{array}{l}u+v=\frac{1}{12}\\ 9\cdot u+6\cdot v=\frac{2}{3}\end{array}\right\}\Rightarrow\left[\begin{array}{l}\text{metoda suprotnih}\\ \text{koeficijenata}\end{array}\right]\Rightarrow$$

$$\Rightarrow\left.\begin{array}{l}u+v=\frac{1}{12}\ /\cdot(-6)\\ 9\cdot u+6\cdot v=\frac{2}{3}\end{array}\right\}\Rightarrow\left.\begin{array}{l}-6\cdot u-6\cdot v=-\frac{6}{12}\\ 9\cdot u+6\cdot v=\frac{2}{3}\end{array}\right\}\Rightarrow\left.\begin{array}{l}-6\cdot u-6\cdot v=-\frac{6}{12}\\ 9\cdot u+6\cdot v=\frac{2}{3}\end{array}\right\}\Rightarrow$$

$$\Rightarrow\left.\begin{array}{l}-6\cdot u-6\cdot v=-\frac{1}{2}\\ 9\cdot u+6\cdot v=\frac{2}{3}\end{array}\right\}\Rightarrow 3\cdot u=-\frac{1}{2}+\frac{2}{3}\Rightarrow 3\cdot u=\frac{-3+4}{6}\Rightarrow 3\cdot u=\frac{1}{6}\Rightarrow$$

$$\Rightarrow 3\cdot u=\frac{1}{6}\ /\cdot\frac{1}{3}\Rightarrow u=\frac{1}{18}.$$

Računamo v.

$$\left.\begin{array}{l}u=\frac{1}{18}\\ u+v=\frac{1}{12}\end{array}\right\}\Rightarrow\frac{1}{18}+v=\frac{1}{12}\Rightarrow v=\frac{1}{12}-\frac{1}{18}\Rightarrow v=\frac{3-2}{36}\Rightarrow v=\frac{1}{36}.$$

Vraćamo se na zamjene!

$$\left.\begin{array}{l}u=\frac{1}{18}\\ v=\frac{1}{36}\end{array}\right\}\Rightarrow\left[\begin{array}{l}\text{zamjena}\\ u=\frac{1}{x}\\ v=\frac{1}{y}\end{array}\right]\Rightarrow\left.\begin{array}{l}\frac{1}{x}=\frac{1}{18}\\ \frac{1}{y}=\frac{1}{36}\end{array}\right\}\Rightarrow\left.\begin{array}{l}x=18\ h\\ y=36\ h\end{array}\right\}.$$

Vježba 194

Dvije cijevi pune bazen. Ako se otvore obje cijevi, bazen se napuni za pola dana. Otvori li se najprije prva cijev 9 sati, a zatim druga 6 sati, napunit će se $\frac{2}{3}$ bazena. Za koje bi vrijeme prva cijev, a za koje druga cijev napunila bazen?

Rezultat: 18 h, 36 h.

Zadatak 195 (4B, TUPŠ)

Put između gradova A i B prelazi preko planine. Na uzbrdici brzina automobila doseže 20 km / h, a na nizbrdici 40 km / h. Iz grada A u grad B automobil stigne za 8 sati, a u povratku putuje 7 sati. Koliko je dug put? (Napomena: Kod jednolikog pravocrtnog gibanja vrijeme se računa po formuli $t=\frac{s}{v}$, gdje je t vrijeme, s put, v brzina.)

Rješenje 195

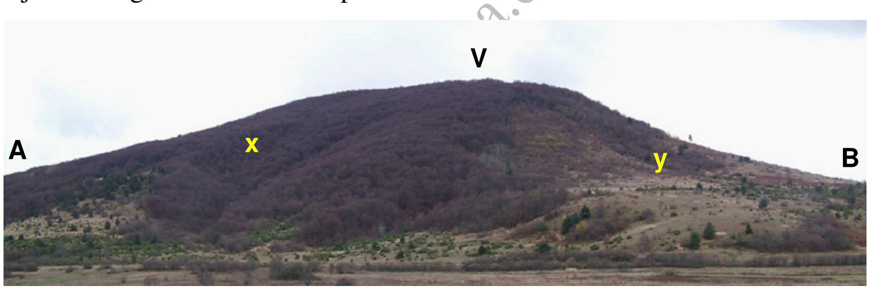
Ponovimo!

Skratiti razlomak znači brojnik i nazivnik tog razlomka podijeliti istim brojem različitim od nule i jedinice

$$\frac{a\cdot n}{b\cdot n}=\frac{a}{b}\ ,\ n\neq 0\ ,\ n\neq 1.$$

Označimo slovom V najvišu točku puta između gradova A i B. Neka je:

- x udaljenost od grada A do vrha V planine
- y udaljenost od grada B do vrha V planine.



Iz grada A u grad B automobil stigne za 8 sati. Put od grada A do vrha V planine prešao je za vrijeme $\frac{x}{20}$, a put od vrha V planine do grada B prešao je za vrijeme $\frac{y}{40}$. Zato vrijedi jednadžba:

$$\frac{x}{20}+\frac{y}{40}=8.$$

Iz grada B u grad A (na povratku) automobil stigne za 7 sati. Put od grada B do vrha V planine prešao je za vrijeme $\frac{y}{20}$, a put od vrha V planine do grada A prešao je za vrijeme $\frac{x}{40}$. Sada možemo napisati jednadžbu:

$$\frac{y}{20}+\frac{x}{40}=7.$$

Postavimo sustav jednadžbi.

$$\left.\begin{array}{l}\frac{x}{20}+\frac{y}{40}=8\\ \frac{y}{20}+\frac{x}{40}=7\end{array}\right\}\Rightarrow\left.\begin{array}{l}\frac{x}{20}+\frac{y}{40}=8\\ \frac{x}{40}+\frac{y}{20}=7\end{array}\right\}\Rightarrow\left[\begin{array}{l}\text{metoda suprotnih}\\ \text{koeficijenata}\end{array}\right]\Rightarrow\left.\begin{array}{l}\frac{x}{20}+\frac{y}{40}=8\ /\cdot(-80)\\ \frac{x}{40}+\frac{y}{20}=7\ /\cdot 40\end{array}\right\}\Rightarrow$$

$$\Rightarrow \left.\begin{array}{l} -4\cdot x-2\cdot y=-640 \\ x+2\cdot y=280 \end{array}\right\} \Rightarrow -3\cdot x=-360 \Rightarrow -3\cdot x=-360 \;/:(-3) \Rightarrow x=120.$$

Računamo y.

$$\left.\begin{array}{l} x=120 \\ x+2\cdot y=280 \end{array}\right\} \Rightarrow 120+2\cdot y=280 \Rightarrow 2\cdot y=280-120 \Rightarrow 2\cdot y=160 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 2\cdot y=160 \;/:2 \Rightarrow y=80.$$

Cijeli put od grada A do grada B dug je

$$x+y=120\ km+80\ km=200\ km.$$

Vježba 195

Put između gradova A i B prelazi preko planine. Na uzbrdici brzina automobila doseže 10 km / h, a na nizbrdici 20 km / h. Iz grada A u grad B automobil stigne za 14 sati, a u povratku putuje 13 sati. Koliko je dug put? (Napomena: Kod jednolikog pravocrtnog gibanja vrijeme se računa po formuli $t=\frac{s}{v}$, gdje je t vrijeme, s put, v brzina.)

Rezultat: 180 km.

Zadatak 196 (Ljiljana, srednja škola)

Vlak je zakašnjenje od 16 minuta nadoknadio nakon prelaska 80 km puta vozeći za 10 km / h brže od propisane brzine. Propisana brzina vlaka je:

$$A.\ 73\ \frac{km}{h} \qquad B.\ 48\ \frac{km}{h} \qquad C.\ 60\ \frac{km}{h} \qquad D.\ 50\ \frac{km}{h} \qquad E.\ 95\ \frac{km}{h}$$

(Napomena: Kod jednolikog pravocrtnog gibanja vrijeme se računa po formuli $t=\frac{s}{v}$, gdje je t vrijeme, s put, v brzina.)

Rješenje 196

Ponovimo!

$$a^1=a \quad , \quad a^n\cdot a^m=a^{n+m}.$$

Skratiti razlomak znači brojnik i nazivnik tog razlomka podijeliti istim brojem različitim od nule i jedinice

$$\frac{a\cdot n}{b\cdot n}=\frac{a}{b}\ ,\ n\neq 0\ ,\ n\neq 1.$$

Zakon distribucije množenja prema zbrajanju.

$$a\cdot(b+c)=a\cdot b+a\cdot c \quad , \quad a\cdot b+a\cdot c=a\cdot(b+c).$$

Neka je:

- v_1 = v propisana brzina
- v_2 = v + 10 veća brzina za 10 km / h
- s = 80 km put
- $\Delta t = 16\text{ min} = \frac{16}{60}\ h=\frac{16}{60}\ h=\frac{4}{15}\ h$ zakašnjenje.

Vrijeme za koje vlak prijeđe put s vozeći propisanom brzinom iznosi:

$$t_1=\frac{s}{v_1} \Rightarrow t_1=\frac{s}{v}.$$

Vrijeme za koje vlak prevali isti put s vozeći većom brzinom iznosi:

$$t_2 = \frac{s}{v_2} \Rightarrow t_2 = \frac{s}{v+10}.$$

Za razliku vremena Δt (zakašnjenje) vrijedi:

$$t_1 - t_2 = \Delta t \Rightarrow \frac{s}{v} - \frac{s}{v+10} = \Delta t \Rightarrow \frac{80}{v} - \frac{80}{v+10} = \frac{4}{15} \Rightarrow \frac{80}{v} - \frac{80}{v+10} = \frac{4}{15} \; / \cdot \frac{1}{80} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \frac{1}{v} - \frac{1}{v+10} = \frac{4}{15} \cdot \frac{1}{80} \Rightarrow \frac{1}{v} - \frac{1}{v+10} = \frac{4}{15} \cdot \frac{1}{80} \Rightarrow \frac{1}{v} - \frac{1}{v+10} = \frac{1}{300} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \frac{1}{v} - \frac{1}{v+10} = \frac{1}{300} \; / \cdot 300 \cdot v \cdot (v+10) \Rightarrow 300 \cdot (v+10) - 300 \cdot v = v \cdot (v+10) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 300 \cdot v + 3000 - 300 \cdot v = v^2 + 10 \cdot v \Rightarrow 300 \cdot v + 3000 - 300 \cdot v = v^2 + 10 \cdot v \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 3000 = v^2 + 10 \cdot v \Rightarrow v^2 + 10 \cdot v = 3000 \Rightarrow v^2 + 10 \cdot v - 3000 = 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \left.\begin{matrix} v^2 + 10 \cdot v - 3000 = 0 \\ a = 1 \; , \; b = 10 \; , \; c = -3000 \end{matrix}\right\} \Rightarrow \left.\begin{matrix} a = 1 \; , \; b = 10 \; , \; c = -3000 \\ v_{1,2} = \dfrac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4 \cdot a \cdot c}}{2 \cdot a} \end{matrix}\right\} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow v_{1,2} = \frac{-10 \pm \sqrt{10^2 - 4 \cdot 1 \cdot (-3000)}}{2 \cdot 1} \Rightarrow v_{1,2} = \frac{-10 \pm \sqrt{100 + 12000}}{2} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow v_{1,2} = \frac{-10 \pm \sqrt{12100}}{2} \Rightarrow v_{1,2} = \frac{-10 \pm 110}{2} \Rightarrow \left.\begin{matrix} v_1 = \dfrac{-10+110}{2} \\ v_2 = \dfrac{-10-110}{2} \end{matrix}\right\} \Rightarrow \left.\begin{matrix} v_1 = \dfrac{100}{2} \\ v_2 = -\dfrac{120}{2} \end{matrix}\right\} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \left.\begin{matrix} v_1 = \dfrac{100}{2} \\ v_2 = -\dfrac{120}{2} \end{matrix}\right\} \Rightarrow \left.\begin{matrix} v_1 = 50 \\ v_2 = -60 \text{ nema smisla} \end{matrix}\right\} \Rightarrow v = 50 \, \frac{km}{h}.$$

Odgovor je pod D.

Vježba 196

Vlak je zakašnjenje od 960 s nadoknadio nakon prelaska 80 km puta vozeći za 10 km / h brže od propisane brzine. Propisana brzina vlaka je:

$$A.\ 73 \frac{km}{h} \qquad B.\ 48 \frac{km}{h} \qquad C.\ 60 \frac{km}{h} \qquad D.\ 50 \frac{km}{h} \qquad E.\ 95 \frac{km}{h}$$

(Napomena: Kod jednolikog pravocrtnog gibanja vrijeme se računa po formuli $t = \frac{s}{v}$, gdje je t vrijeme, s put, v brzina.)

Rezultat: D.

Zadatak 197 (Katarina, maturantica)

U košari je 48 komada voća (jabuke, kruške i limuni). Pet osmina su jabuke, a trećina ostaloga voća su kruške. Koliko je komada limuna u košari?

Rješenje 197

Ponovimo!

$$a-\frac{b}{c}=\frac{a\cdot c-b}{c}.$$

Kako izračunati $\frac{a}{b}$ od x?

$$\frac{a}{b}\cdot x.$$

Skratiti razlomak znači brojnik i nazivnik tog razlomka podijeliti istim brojem različitim od nule i jedinice

$$\frac{a\cdot n}{b\cdot n}=\frac{a}{b}\ ,\ n\neq 0\ ,\ n\neq 1.$$

1.inačica

U košari je 48 komada voća.
Pet osmina su jabuke što iznosi

$$\frac{5}{8}\cdot 48=\frac{5}{8}\cdot 48=5\cdot 6=30.$$

Ostalog voća je 18 komada.

$$48-30=18.$$

Trećina od toga su kruške kojih ima

$$\frac{1}{3}\cdot 18=\frac{1}{3}\cdot 18=6.$$

Dakle, u košari je 12 komada limuna.

$$18-6=12 \text{ ili } 48-30-6=12.$$

2.inačica

U košari je 48 komada voća.
Pet osmina su jabuke pa na ostalo voće otpadaju tri osmine.

$$\frac{3}{8}\cdot 48=\frac{3}{8}\cdot 48=3\cdot 6=18.$$

Trećina od toga su kruške pa na limune otpadaju dvije trećine.

$$\frac{2}{3}\cdot 18=\frac{2}{3}\cdot 18=2\cdot 6=12.$$

U košari je 12 komada limuna.

$$18-6=12 \text{ ili } 48-30-6=12.$$

3.inačica

U košari je 48 komada voća.
Limuna ima

$$\frac{3}{8}\cdot\frac{2}{3}\cdot 48=\frac{3}{8}\cdot\frac{2}{3}\cdot 48=2\cdot 6=12.$$

Vježba 197

U košari je 96 komada voća (jabuke, kruške i limuni). Pet osmina su jabuke, a trećina ostaloga voća su kruške. Koliko je komada limuna u košari?

Rezultat: 24.

Zadatak 198 (Katarina, maturantica)

Odredite broj koji je za 172 manji od trostruke vrijednosti toga broja.

Rješenje 198

Ponovimo!

Kako zapisati da je broj a za n manji od broja b?

$$a+n=b \quad , \quad a=b-n \quad , \quad b-a=n.$$

Kako zapisati n – terostruku vrijednost broja x?

$$n \cdot x.$$

Neka je x traženi broj.

1.inačica

$$x+172=3 \cdot x \Rightarrow x-3 \cdot x=-172 \Rightarrow -2 \cdot x=-172 \Rightarrow -2 \cdot x=-172 \ /:(-2) \Rightarrow x=86.$$

2.inačica

$$x=3 \cdot x-172 \Rightarrow x-3 \cdot x=-172 \Rightarrow -2 \cdot x=-172 \Rightarrow -2 \cdot x=-172 \ /:(-2) \Rightarrow x=86.$$

3.inačica

$$3 \cdot x-x=172 \Rightarrow 2 \cdot x=172 \Rightarrow 2 \cdot x=172 \ /:2 \Rightarrow x=86.$$

4.inačica

Budući da je broj x manji za 172 od svoje trostruke vrijednosti, znači da je njegova dvostruka vrijednost jednaka 172. Traženi broj iznosi:

$$172 : 2 = 86.$$

Vježba 198

Odredite broj koji je za 80 manji od trostruke vrijednosti toga broja.

Rezultat: 40.

Zadatak 199 (Ivan, gimnazija)

Koliko najviše kilometara može prijeći automobil sa istim gumama, ako se prednje istroše nakon prijeđenih 50000 km, a zadnje nakon prijeđenih 30000 km?

Rješenje 199

Ponovimo!

$$\frac{a}{b} \cdot \frac{c}{d}=\frac{a \cdot c}{b \cdot d} \quad , \quad \frac{a}{b}+\frac{c}{d}=\frac{a \cdot d+b \cdot c}{b \cdot d} \quad , \quad \frac{a}{b} \cdot \frac{b}{a}=1.$$

Zakon distribucije množenja prema zbrajanju.

$$a \cdot (b+c)=a \cdot b+a \cdot c \quad , \quad a \cdot b+a \cdot c=a \cdot (b+c).$$

Skratiti razlomak znači brojnik i nazivnik tog razlomka podijeliti istim brojem različitim od nule i jedinice

$$\frac{a \cdot n}{b \cdot n}=\frac{a}{b} \ , \ n \neq 0 \ , \ n \neq 1.$$

Nakon 1 km vožnje istroši se:

- prednje gume za $\frac{1}{50\,000}$ svoje vrijednosti
- zadnje gume za $\frac{1}{30\,000}$ svoje vrijednosti.

Neka je x maksimalan broj kilometara koji može automobil prijeći istim gumama. Nakon pola puta, $\frac{x}{2}$, međusobno zamijenimo prednje i zadnje gume pa vrijedi jednadžba:

$$\frac{x}{2}\cdot\frac{1}{50\,000}+\frac{x}{2}\cdot\frac{1}{30\,000}=1 \Rightarrow \frac{x}{2}\cdot\left(\frac{1}{50\,000}+\frac{1}{30\,000}\right)=1 \Rightarrow \frac{x}{2}\cdot\frac{3+5}{150\,000}=1 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \frac{x}{2}\cdot\frac{8}{150\,000}=1 \Rightarrow \frac{x}{2}\cdot\frac{8}{150\,000}=1 \Rightarrow \frac{x}{1}\cdot\frac{4}{150\,000}=1 \Rightarrow \frac{4\cdot x}{150\,000}=1 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \frac{4\cdot x}{150\,000}=1\ /\cdot\frac{150\,000}{4} \Rightarrow x=\frac{150\,000}{4} \Rightarrow x=37\,500\ km.$$

Istim gumama moguće je najviše prijeći 37500 km, ali nakon pola puta moramo međusobno zamijeniti prednje i zadnje gume.

Vježba 199

Odmor!

Rezultat: …

Zadatak 200 (Vesna, gimnazija)

Na plesu bile su 42 osobe. Plesačica P_1 plesala je sa 7 plesača, plesačica P_2 sa 8 plesača, … , plesačica P_n sa svim plesačima nazočnima na plesu. Koliko je bilo plesačica i plesača na tom plesu?

Rješenje 200

Ponovimo!

$$\left.\begin{aligned} a &= b \\ a &= c \end{aligned}\right\} \Rightarrow b = c.$$

Neka je n broj plesačica na plesu.
Tada je m = 42 – n broj plesača.
Plesačica:

- P_1 plesala je sa 7 plesača

7 = 1 + 6

- P_2 plesala je sa 8 plesača

8 = 2 + 6

- P_3 plesala je sa 9 plesača

9 = 3 + 6

……………………………………………………

- P_n plesala je sa m plesača (sa svima plesačima)

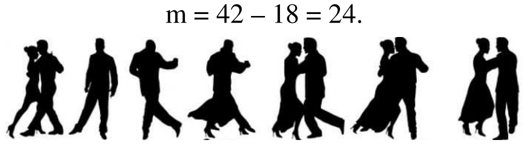
m = n + 6.

Sada je:

$$\left.\begin{aligned} m &= n+6 \\ m &= 42-n \end{aligned}\right\} \Rightarrow n+6=42-n \Rightarrow n+n=42-6 \Rightarrow 2\cdot n=36 \Rightarrow 2\cdot n=36\ /:2 \Rightarrow n=18.$$

Plesačica je bilo 18, a plesača 24.

m = 42 – 18 = 24.



Vježba 200

Odmor!

Rezultat: …