Zadatak 001 (Siniša, hotelijerska škola)

Prva cijev napuni bazen za 6 sati, a druga za 9 sati. Za koje bi vrijeme napunile bazen prva i druga cijev ako ga pune istodobno?

Rješenje 001

Zadatke ovog tipa rješavamo svodeći ih na jedinicu vremena, 1 sat.

Prva cijev napuni bazen za 6 sati pa za 1 sat napuni $\frac{1}{6}$ bazena.

Druga cijev napuni bazen za 9 sati pa za 1 sat napuni $\frac{1}{9}$ bazena.

Obje cijevi, zajedno, napunit će za 1 sat $\frac{5}{18}$ bazena. $\left[\frac{1}{6}+\frac{1}{9}=\frac{3+2}{18}=\frac{5}{18}\right]$

Pretpostavimo da obje cijevi, zajedno, napune bazen za x sati. Za 1 sat one će napuniti $\frac{1}{x}$ bazena.

Sada je

$$\frac{1}{x} = \frac{5}{18} \quad => \quad x = \frac{18}{5} = 3\text{h } 36 \text{ min.}$$

Vježba 001

Prva cijev napuni bazen za 6 sati, a druga za 24 sati. Za koje bi vrijeme napunile bazen prva i druga cijev ako ga pune istodobno?

Rezultat: 4h 48 min.

Zadatak 002 (Marko, gimnazija)

Izračunaj zbroj prvih sto prirodnih brojeva.

Rješenje 002

Zbroj ćemo naći pomoću dosjetke koju je smislio Carl Friedrich Gauss (30.IV.1777. – 23.II.1855.) njemački matematičar, astronom i fizičar (imao je tada sedam godina).

Brojeve grupiramo u parove: uočimo da je zbroj prvog člana 1 i posljednjeg člana 100 jednak 101, drugog člana 2 i pretposljednjeg člana 99, opet, jednak 101, trećeg člana 3 i trećeg člana od kraja 98, također, jednak 101, itd. Ukupno imamo 50 takvih parova. Zato je zbroj prvih sto prirodnih brojeva:

$$1 + 2 + 3 + ... + 98 + 99 + 100 = (1 + 100) + (2 + 99) + (3 + 98) + ... + (50 + 51) = 101 \cdot 50 = 5\,050.$$

Vježba 002

Izračunaj zbroj prvih osamdeset prirodnih brojeva.

Rezultat: 3 240.

Zadatak 003 (Ivana, prehrambena škola)

Radnik na kosilici treba pokositi tri travnate površine u parku. Prva je dugačka 24 m, široka 12 m, druga je dugačka 24 m, široka 14 m, a treća ima oblik kvadrata stranice 24 m. Ako za kvadratni metar površine radniku treba 6 sekundi, za koliko će vremena pokositi sve tri površine?

Rješenje 003

Prva i druga travnata površina imaju oblik pravokutnika. Površina pravokutnika računa se po formuli $P = a \cdot b$. Ttreća travnata površina ima oblik kvadrata. Površina kvadrata je $P = a^2$.

Površina prvog travnjaka: $P_1 = 24 \cdot 12 \text{ m}^2$.
Površina drugog travnjaka: $P_2 = 24 \cdot 14 \text{ m}^2$.
Površina trećeg travnjaka: $P_3 = 24 \cdot 24 \text{ m}^2$.

Ukupna površina:

$$P = P_1 + P_2 + P_3 = 24 \cdot 12 \text{ m}^2 + 24 \cdot 14 \text{ m}^2 + 24 \cdot 24 \text{ m}^2 =$$

$$= [\text{zakon distribucije množenja prema zbrajanju, } ab + ac = a(b + c)] =$$

$$= 24 \cdot (12 + 14 + 24) \text{ m}^2 = 24 \cdot 50 \text{ m}^2 = 1200 \text{ m}^2.$$

Budući da radniku za kvadratni metar površine treba 6 sekundi, za 1200 m^2 trebat će mu 1200 puta više:

$$6 \text{ s} \cdot 1200 = 7\,200 \text{ s} = [7\,200 : 3\,600] = 2 \text{ h}.$$

Radnik će pokositi sve tri površine za 2 h.

Vježba 003

Djelatnik na kosilici treba pokositi dvije travnate površine u parku. Prva je dugačka 30 m, široka 15 m, a druga ima oblik kvadrata stranice 30 m. Ako za kvadratni metar površine djelatniku treba 8 sekundi, za koliko će vremena pokositi obje površine?

Rezultat: 3 h.

Zadatak 004 (Mario, tehnička škola)

Kad je učenik pročitao polovinu knjige i još 30 stranica, ostalo mu je pročitati još trećinu knjige. Koliko stranica ima knjiga?

Rješenje 004

1.inačica

Slovom x označimo broj stranica knjige. Izjavu da je učenik pročitao polovinu knjige i još 30 stranica simbolično ćemo ovako zapisati:

$$\frac{1}{2}x + 30.$$

Ako mu je ostalo pročitati još trećinu knjige ($\frac{1}{3}x$), znači da je pročitao dvije trećine ($\frac{2}{3}x$). Zato je

$$\frac{2}{3}x = \frac{1}{2}x + 30.$$

Jednadžbu pomnožimo zajedničkim nazivnikom 6:

$$\frac{2}{3}x = \frac{1}{2}x + 30 \;/\cdot 6 \;\Rightarrow\; 4x = 3x + 180 \;\Rightarrow\; 4x - 3x = 180 \;\Rightarrow\; x = 180.$$

Knjiga ima 180 stranica.

2.inačica

Slovom x označimo broj stranica knjige. Učenik je pročitao polovinu knjige i još 30 stranica, ostalo mu je pročitati još trećinu knjige. Kad pročita i tu trećinu knjige, pročitao je cijelu knjigu. Zato je

$$\frac{1}{2}x + 30 + \frac{1}{3}x = x.$$

Riješimo jednadžbu tako da je najprije pomnožimo zajedničkim nazivnikom:

$$\frac{1}{2}x + 30 + \frac{1}{3}x = x \;/\cdot 6 \;\Rightarrow\; 3x + 180 + 2x = 6x \;\Rightarrow\; 5x - 6x = -180 \;\Rightarrow$$

$$\Rightarrow\; -x = -180 \;/\cdot(-1) \;\Rightarrow\; x = 180.$$

Knjiga ima 180 stranica.

Vježba 004

Kad je učenik pročitao polovinu knjige i još 20 stranica, ostalo mu je pročitati još četvrtinu knjige. Koliko stranica ima knjiga?

Rezultat: 80.

Zadatak 005 (Kitty, gimnazija)

Kolika je duljina stranice kvadrata čija se površina poveća za 24 cm^2 kad mu se stranice povećaju za 2 cm?

Rješenje 005

Duljinu stranice kvadrata označimo slovom x. Tada je površina: $P = x^2$.

Ako se duljina stranice kvadrata poveća za 2, napisat ćemo $x + 2$.

Sada je površina: $P = (x + 2)^2$.

Budući da se površina povećala za 24 u odnosu na staru površinu, pišemo: $(x + 2)^2 = x^2 + 24$.

Kvadriranjem i sređivanjem dobije se: $x^2 + 4x + 4 = x^2 + 24$,

$$4x + 4 = 24 \Rightarrow 4x = 24 - 4 \Rightarrow 4x = 20 \;\; / : 4 \;\; \Rightarrow x = 5.$$

Duljina stranice kvadrata je 5 cm.

Vježba 005

Kolika je duljina stranice kvadrata čija se površina poveća za 15 cm^2 kad mu se stranice povećaju za 1 cm?

Rezultat: 7 cm.

Zadatak 006 (Kitty, gimnazija)

Kolika je duljina stranice kvadrata čija se površina poveća za 24 cm^2 kad mu se stranice povećaju za 2 cm?

Rješenje 006

Duljinu stranice kvadrata označimo slovom x. Tada je površina: $P = x^2$.

Ako se duljina stranice kvadrata poveća za 2, napisat ćemo $x + 2$.

Sada je površina: $P = (x + 2)^2$.

Budući da se površina povećala za 24 u odnosu na staru površinu, pišemo: $(x + 2)^2 = x^2 + 24$.

Kvadriranjem i sređivanjem dobije se: $x^2 + 4x + 4 = x^2 + 24$,

$$4x + 4 = 24 \Rightarrow 4x = 24 - 4 \Rightarrow 4x = 20 \;\; / : 4 \;\; \Rightarrow x = 5.$$

Duljina stranice kvadrata je 5 cm.

Vježba 006

Kolika je duljina stranice kvadrata čija se površina poveća za 15 cm^2 kad mu se stranice povećaju za 1 cm?

Rezultat: 7 cm.

Zadatak 007 (Matija, tehnička škola)

Nekom pumpom se bazen u obliku kocke napuni za 45 minuta. Ako bi s istom pumpom punili bazen u obliku kocke, ali dva puta većeg brida, koliko bi trajalo punjenje?

Rješenje 007

Pretpostavimo da kocka ima brid a. Tada je njezin obujam $V = a^3$. Ako se brid dva puta poveća, tada će volumen biti:

$$V_1 = (2a)^3 = 8a^3 = 8 \cdot V.$$

Zaključak je da kocka s dva puta većim bridom ima osam puta veći obujam! Prema tome trebat će i osam puta više vremena za punjenje:

$$t = 8 \cdot 45 \text{ min} = 360 \text{ min} = 6 \text{ h}.$$

Vježba 007

Nekom pumpom se bazen u obliku kocke napuni za 10 minuta. Ako bi s istom pumpom punili bazen u obliku kocke, ali tri puta većeg brida, koliko bi trajalo punjenje?

Rezultat: 270 min = 6h 30 min.

Zadatak 008 (Danijela, gimnazija)

Po planu se žetva na poljoprivrednom dobru morala obaviti za 14 dana. U međuvremenu je norma povišena za 20 hektara na dan i žetva je obavljena za 10 dana. S koliko je hektara pod usjevom raspolagalo to dobro?

Rješenje 008

1.inačica

Označimo slovom x broj hektara požnjeven u jednom danu. Neka je y ukupan broj hektara pod usjevom. Budući da je žetva morala biti obavljena za 14 dana, vrijedi:

$$14 \cdot x = y. \qquad (1)$$

Kako je norma povišena za 20 hektara na dan i žetva obavljena za 10 dana, vrijedi:

$$10 \cdot (x + 20) = y. \qquad (2)$$

Iz (1) i (2) slijedi:

$$14x = 10(x + 20) \Rightarrow 14x = 10x + 200 \Rightarrow 14x - 10x = 200 \Rightarrow 4x = 200 \;/:4 \Rightarrow x = 50.$$

Sada se lako izračuna ukupan broj hektara:

$$y = 14 \cdot x = 14 \cdot 50 = 700.$$

Ukupno je bilo 700 hektara pod usjevom.

2.inačica

Neka je x ukupan broj hektara pod usjevom. Ako je cijeli usjev požnjeven za 14 dana, onda je na dan požnjeveno

$$\frac{x}{14}$$

hektara. Povisimo li normu za 20 hektara na dan:

$$\frac{x}{14} + 20,$$

žetva će biti obavljena za 10 dana. To znači da je na dan požnjeveno:

$$\frac{x}{10}$$

hektara. Dakle, vrijedi:

$$\frac{x}{14} + 20 = \frac{x}{10} \Rightarrow \frac{x}{14} + 20 = \frac{x}{10} \;/\cdot 70 \Rightarrow 5x + 1400 = 7x \Rightarrow 1400 = 7x - 5x \Rightarrow$$
$$\Rightarrow 2x = 1400 \;/:2 \Rightarrow x = 700.$$

Vježba 008

Po planu se žetva na poljoprivrednom dobru morala obaviti za 15 dana. U međuvremenu je norma povišena za 10 hektara na dan i žetva je obavljena za 12 dana. S koliko je hektara pod usjevom raspolagalo to dobro?

Rezultat: 600 hektara.

Zadatak 009 (Cuki, gimnazija)

Darko prodaje sladoled po 5% nižoj cijeni nego Ivan. Koliko treba sniziti cijenu Ivan da bi bio 5% jeftiniji od Darka?

Rješenje 009

1.inačica

Označimo cijenu Ivanovog sladoleda sa 100. Tada je cijena Darkovog sladoleda:

$$100 - 100 \cdot \frac{5}{100} = 95.$$

Budući da Ivan želi prodavati sladoled 5% jeftinije od Darka, nova cijena njegovog sladoleda mora biti:

$$95-95\cdot\frac{5}{100}=90.25.$$

Dakle, Ivan treba sniziti cijenu za 9.75% jer je

$$100 - 90.25 = 9.75.$$

2.inačica

Neka je y cijena Ivanovog sladoleda. Tada je cijena Darkovog sladoleda:

$$y-y\cdot\frac{5}{100}=\frac{95}{100}\cdot y.$$

Ako Ivan snizi cijenu za x%, onda je cijena njegovog sladoleda:

$$y-y\cdot\frac{x}{100}=y\cdot\left(1-\frac{x}{100}\right)=\frac{100-x}{100}\cdot y,$$

a to treba biti jednako 95% cijene Darkovog sladoleda, tj. treba biti ispunjen uvjet:

$$\frac{100-x}{100}\cdot y=\frac{95}{100}\cdot\frac{95}{100}\cdot y.$$

Sada je:

$$\frac{100-x}{100}\cdot y=\frac{95}{100}\cdot\frac{95}{100}\cdot y \;/:y \;\Rightarrow\; \frac{100-x}{100}=\frac{95}{100}\cdot\frac{95}{100} \;/\cdot 100 \;\Rightarrow\; 100-x=\frac{95\cdot 95}{100} \;\Rightarrow$$

$$\Rightarrow\; -x=\frac{9025}{100}-100 \;\Rightarrow\; -x=\frac{9025-10\,000}{100} \;\Rightarrow\; -x=\frac{-975}{100} \;/\cdot(-1) \;\Rightarrow\; x=\frac{975}{100}=9.75\%.$$

Vježba 009

Darko prodaje sladoled po 10% nižoj cijeni nego Ivan. Koliko treba sniziti cijenu Ivan da bi bio 10% jeftiniji od Darka?

Rezultat: 19%.

Zadatak 010 (Iva, gimnazija)

Koliki kut zatvaraju kazaljke sata u pet minuta do 12 sati (11 h 55 min)?

Rješenje 010

Kada se minutna kazaljka (velika kazaljka) jednom okrene na brojčaniku sata prođe 1 h. Znači da minutna kazaljka (velika kazaljka) za 1 h opiše kut 360º.

Koliko će opisati stupnjeva za 5 minuta?

Iz razmjera slijedi:

$$1 \text{ h} : 360^\circ = 5 \text{ min} : x,$$

$$x \cdot 1 \text{ h} = 360^\circ \cdot 5 \text{ min},$$

$$x=\frac{360^0\cdot 5 \text{ min}}{1\,h}=\frac{360^0\cdot 5 \text{ min}}{60 \text{ min}}=30^0.$$

Minutna kazaljka (velika kazaljka) za 5 minuta prijeđe kut (opiše kut) 30º.

Kada se satna kazaljka (mala kazaljka) jednom okrene na brojčaniku sata prođe 12 h. Znači da satna kazaljka (mala kazaljka) za 12 h opiše kut 360º.

Koliko će opisati stupnjeva za 5 minuta?

Iz sljedećeg razmjera dobije se:

$$12 \text{ h} : 360^\circ = 5 \text{ min} : y,$$

$$y \cdot 12 \text{ h} = 360^\circ \cdot 5 \text{ min},$$

$$y=\frac{360^0\cdot 5 \text{ min}}{12\,h}=\frac{360^0\cdot 5 \text{ min}}{12\cdot 60 \text{ min}}=2.5^0=2^0 30'.$$

Satna kazaljka (mala kazaljka) za 5 minuta prijeđe kut (opiše kut) 2º30'.

Kut koji zatvaraju kazaljke je: x – y = 30º – 2º30' = 29º60' – 2º30' = 27º30'.

Vježba 010

Koliki kut zatvaraju kazaljke sata u deset minuta do 12 sati (11 h 50 min)?

Rezultat: 55º.

Zadatak 011 (Andrijana, Ines, Ivana, Martina, hotelijerska škola)

U jednoj obitelji svaki sin ima dva puta više braće nego sestara, a svaka kći pet puta više braće nego sestara. Koliki je ukupan broj djece u toj obitelji?

Rješenje 011

Označimo broj braće slovom b, a broj sestara slovom s.

Iz uvjeta "... **svaki sin** ima dva puta više braće nego sestara..." dobije se jednadžba: **b – 1** = 2 · s.

Iz uvjeta "... **svaka kći** ima pet puta više braće nego sestara..." slijedi jednadžba: b = 5 · (**s – 1**).

Riješimo sustav jednadžbi:

$$\left.\begin{array}{l} b-1=2s \\ b=5\cdot(s-1) \end{array}\right\} \Rightarrow 5\cdot(s-1)-1=2s \Rightarrow 5s-5-1=2s \Rightarrow 5s-2s=6 \Rightarrow 3s=6 \Rightarrow s=2.$$

Sestre su 2, a braće:

b = 5 · (s – 1) = 5 · (2 – 1) = 5.

Ukupan broj djece je 7.

Vježba 011

U jednoj obitelji svaki sin ima tri puta više braće nego sestara, a svaka kći sedam puta više braće nego sestara. Koliki je ukupan broj djece u toj obitelji?

Rezultat: 9.

Zadatak 012 (Andrijana, Ines, Ivana, Martina, hotelijerska škola)

Svježe gljive sadrže 90% vode, a sušene 15%. Koliko kilograma gljiva treba ubrati da bi se dobio 1 kg sušenih gljiva?

Rješenje 012

Ponovimo!

Postotak je razlomak s nazivnikom 100. Može se zapisati na sljedeće načine:

$$4\%=\frac{4}{100}=0.04 \quad , \quad 32\%=\frac{32}{100}=0.32.$$

Pretpostavimo da za 1 kg sušenih gljiva treba ubrati x kg svježih.
Budući da svježe gljive sadrže 90% vode, znači da u x kg ima 10%, (100% – 90%), odnosno 0.10 · x kg potpuno suhe tvari. U 1 kg sušenih gljiva ima 15% vode, a to znači da ima 85%, (100% – 15%), ili 0.85 · 1 kg potpuno suhe tvari.

Vrijedi jednakost:

0.10 · x = 0.85 · 1 => 0.10 · x = 0.85 **/ · 10** **=>** x = 8.5 kg.

Treba ubrati 8.5 kg gljiva.

Vježba 012

Svježe gljive sadrže 90% vode, a sušene 12%. Koliko kilograma gljiva treba ubrati da bi se dobilo 30 kg sušenih gljiva?

Rezultat: 264 kg.

Zadatak 013 (Andrijana, Ines, Ivana, Martina, hotelijerska škola)

Svježe smokve sadrže 90% vode, a sušene 12%. Koliko se kilograma sušenih smokava dobije sušenjem 22 kg svježih smokava?

Rješenje 013

Promatrajmo ono što ostaje kod smokava nepromjenljivo – korisna tvar (jer voda ishlapi).
Svježe smokve sadrže 90% vode pa je korisne tvari 10%, (100% – 90%).
Sušene smokve sadrže 12% vode pa je korisne tvari 88%, (100% – 12%).
Svježe smokve imaju korisne tvari 10%, a sušene 88% pa pišemo:

$$22 \cdot 10\% = x \cdot 88\% \quad => \quad 22 \cdot 0.10 = 0.88 \cdot x. \quad => \quad x = \frac{22 \cdot 0.10}{0.88} = 2.5 \text{ kg.}$$

Dobije se 2.5 kg sušenih smokava.

Vježba 013

Svježe smokve sadrže 90% vode, a sušene 12%. Koliko se kilograma sušenih smokava dobije sušenjem 264 kg svježih smokava?

Rezultat: 30 kg.

Zadatak 014 (Rem, gimnazija)

Koja je pedeseta decimala broja $\frac{13}{14}$?

Rješenje 014

Dijeljenjem broja 13 brojem 14 dobije se mješovito periodski decimalni broj s pretperiodom 9 i periodom 285714.

$$\begin{array}{l} 13:14 = 0.9\dot{2}\dot{8}\dot{5}\dot{7}\dot{1}\dot{4}\ldots \\ 130 \\ \;= 40 \\ \quad\; 120 \\ \quad\;\; = 80 \\ \quad\quad\;\; 100 \\ \quad\quad\;\; = 20 \\ \quad\quad\quad = 60 \\ \quad\quad\quad\; = 40 \\ \quad\quad\quad\quad \ldots \end{array}$$

Skupina znamenaka koja se ponavlja 285714 ima šest znamenaka, a u pedeset decimala ima jedna znamenka pretperioda, 9, i 49 znamenaka perioda. Nađimo koliko se puta period ponavlja u 49:

$$\begin{array}{l} 49 : 6 = 8 \\ \;\;1 \end{array}$$

Budući da je 49 = 8 · 6 + 1, period se ponavlja 8 puta, a pedeseta znamenka je prva znamenka perioda, znamenka 2.

$$13:14 = 0.\overset{1}{9}\overset{48}{\overline{285714285714\ldots285714}}\overset{\downarrow}{2}85714\ldots$$

Vježba 014

Koja je pedeseta decimala broja $\frac{19}{21}$?

Rezultat: 0.

Zadatak 015 (Martina, gimnazija)

Dokaži da je zbroj dva uzastopna neparna prirodna broje djeljiv s 4.

Rješenje 015

Neparan prirodan broj je oblika:

$$2n - 1, \;\; n \in N.$$

Dva uzastopna neparna prirodna broja su:

$$2n - 1,\ 2n + 1.$$

Njihov zbroj iznosi:

$$2n - 1 + 2n + 1 = 4 \cdot n.$$

Budući da se javlja faktor 4, zbroj je djeljiv s 4.

Vježba 015

Dokaži da je zbroj tri uzastopna neparna prirodna broje djeljiv s 3.

Rezultat: $3 \cdot (2n + 1)$.

Zadatak 016 (Martina, gimnazija)

Postoje li četiri uzastopna prirodna broja kojima je zbroj prost broj?

Rješenje 016

Napišimo četiri uzastopna prirodna broja:

$$n,\ n+1,\ n+2,\ n+3,\ \ n \in N.$$

Njihov zbroj iznosi:

$$n + n + 1 + n + 2 + n + 3 = 4n + 6 = 2 \cdot (2n + 3).$$

Dobili smo rezultat paran broj različit od 2 (rezultat je složen broj) što znači da takvi brojevi ne postoje.

Vježba 016

Postoje li tri uzastopna prirodna broja kojima je zbroj prost broj?

Rezultat: Ne, jer to je uvijek složen broj djeljiv s 3, $3 \cdot (n + 1)$.

Zadatak 017 (Martina, gimnazija)

Ako otapanjem 45 litara leda nastane 40 litara vode, koliko litara leda nastane smrzavanjem 72 litre vode?

Rješenje 017

1.inačica

Nađimo postotak obujma vode u odnosu na obujam leda.

$$\left.\begin{array}{l} C = 45 \\ P = 40 \\ p = ? \end{array}\right\} \Rightarrow 100 \cdot P = C \cdot p \Rightarrow p = \frac{100 \cdot P}{C} = \frac{100 \cdot 40}{45} = \frac{100 \cdot 8}{9} = \frac{800}{9}.$$

Postotak je $\frac{800}{9}\%$.

Sada se lako izračuna količina leda koja nastane smrzavanjem 72 litre vode.

$$\left.\begin{array}{l} P = 72 \\ p = \frac{800}{9} \\ C = ? \end{array}\right\} \Rightarrow 100 \cdot P = C \cdot p \Rightarrow C = \frac{100 \cdot P}{p} = \frac{100 \cdot 72}{\frac{800}{9}} = \frac{100 \cdot 72 \cdot 9}{800} = \frac{72 \cdot 9}{8} = 81 \text{ litra.}$$

2.inačica

Uporabit ćemo pravilo trojno:

45 l leda..40 l vode

x..72 l vode

$$40 \cdot x = 45 \cdot 72 \;\Rightarrow\; x = \frac{45 \cdot 72}{40} = \frac{9 \cdot 72}{8} = 81 \text{ litra.}$$

3.inačica

Možemo ovako zaključivati:

Ako otapanjem 45 litara leda nastane 40 litara vode, znači da na jednu litru vode otpada $\frac{45}{40}$ litara leda.

Smrzavanjem 72 litre vode nastane $\frac{45}{40} \cdot 72 = \frac{9}{8} \cdot 72 = 81$ litra leda.

Vježba 017

Ako otapanjem 45 litara leda nastane 40 litara vode, koliko litara leda nastane smrzavanjem 16 litara vode?

Rezultat: 18 litara.

Zadatak 018 (Ines, Ivana, gimnazija)

Izvedi nejednakost aritmetičke i geometrijske sredine pozitivnih realnih brojeva x i y.

Rješenje 018

Kvadrat svakog realnog broja a je nenegativan broj:

$$\mathbf{a^2 \geq 0}.$$

Aritmetička sredina pozitivnih realnih brojeva x i y je:

$$A = \frac{x+y}{2}.$$

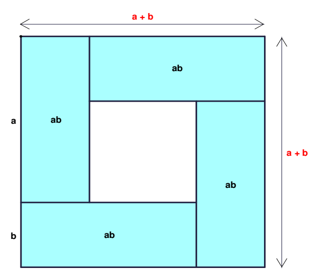
Geometrijska sredina pozitivnih realnih brojeva x i y je:

$$G = \sqrt{x \cdot y}.$$

Pođimo od izraza:

$$\left(\sqrt{x} - \sqrt{y}\right)^2 \geq 0 \;\Rightarrow\; x - 2 \cdot \sqrt{x \cdot y} + y \geq 0 \;\Rightarrow\; x + y \geq 2 \cdot \sqrt{x \cdot y} \;\; /:2 \;\Rightarrow\; \frac{x+y}{2} \geq \sqrt{x \cdot y} \;\Rightarrow\; A \geq G.$$

Pokažimo geometrijsku interpretaciju nejednakosti aritmetičke i geometrijske sredine. Uzmimo kvadrat sa stranicom duljine a + b.



Očigledno, za površinu kvadrata vrijedi:

$$(a + b)^2 \geq 4ab,$$

pri čemu znak jednakosti vrijedi ako i samo ako je a = b. Iz nejednakosti dalje slijedi:

$$(a + b)^2 \geq 4ab \;\; => \;\; a^2 + 2ab + b^2 \geq 4ab \;\; => \;\; a^2 + b^2 \geq 2ab.$$

Konačno, stavimo li $a^2 = x$ i $b^2 = y$, imamo:

$$x + y \geq 2 \cdot \sqrt{x} \cdot \sqrt{y} \;\Rightarrow\; x + y \geq 2 \cdot \sqrt{x \cdot y} \;\; /:2 \;\Rightarrow\; \frac{x+y}{2} \geq \sqrt{x \cdot y} \;\Rightarrow\; A \geq G.$$

Vježba 018

Za brojeve 2 i 8 izračunaj aritmetičku i geometrijsku sredinu i usporedi ih.

Rezultat: A = 5, G = 4.

Zadatak 019 (Andrijana, Ines, Ivana, Martina, hotelijerska škola)

Majka je tri puta starija od sina, četiri puta od kćeri, te mlađa od svog supruga tri godine. Ako je zbroj godina njihove djece jednak 35, nađi koliki je zbroj godina njezinog supruga i sina.

Rješenje 019

Slovom x označimo broj godina majke.

Majka je tri puta starija od sina. Znači da je sin tri puta mlađi od majke pa je njegov broj godina: $\frac{x}{3}$.

Majka je četiri puta starija od kćeri. Znači da je kći četiri puta mlađa od majke pa je njezin broj godina: $\frac{x}{4}$.

Majka je za tri godine mlađa od supruga. Znači da je suprug za tri godine stariji od žene pa je njegov broj godina. x + 3. Ako je zbroj godina njihove djece jednak 35, slijedi:

$$\frac{x}{3}+\frac{x}{4}=35 \;/\cdot 12 \;\Rightarrow\; 4x+3x=420 \;\Rightarrow\; 7x=420 \;/:7 \;\Rightarrow\; x=60.$$

Majka ima 60 godina. Tada je zbroj godina njezinog supruga i sina jednak:

$$x+3+\frac{x}{3}=60+3+\frac{60}{3}=63+20=83.$$

Kraći zapis:

MAJKA	SIN	KĆI	SUPRUG
x	$\frac{x}{3}$	$\frac{x}{4}$	x + 3
ZBROJ GODINA DJECE		$\frac{x}{3}+\frac{x}{4}=35 \Rightarrow x=60$	
ZBROJ GODINA SUPRUGA I SINA		$x+3+\frac{x}{3}=83$	

Vježba 019

Majka je tri puta starija od sina, četiri puta od kćeri, te mlađa od svog supruga pet godine. Ako je zbroj godina njihove djece jednak 35, nađi koliki je zbroj godina njezinog supruga i sina.

Rezultat: 85.

Zadatak 020 (Ines, gimnazija)

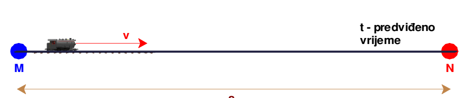
Ako bi putnički vlak od mjesta M do mjesta N vozio prosječnom brzinom 50 km/h kasnio bi 24 minute dok bi prosječnom brzinom 80 km/h stigao 30 minuta ranije od predviđenog vremena po redu vožnje. Kolika je međusobna udaljenost mjesta M i N?

Rješenje 020

$v_1 = 50$ km/h, $\Delta t_1 = 24$ min = [24 : 60] = 0.4 h, $v_2 = 80$ km/h,
$\Delta t_2 = 30$ min = [30 : 60] = 0.5 h, s = ?

Označimo slovom t vrijeme potrebno da vlak prijeđe put od mjesta M do mjesta N. Vrijeme je jednako omjeru puta i brzine:

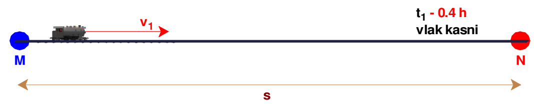
$$t=\frac{s}{v}.$$

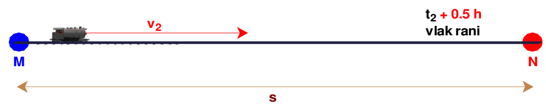


Vrijedi jednadžba:

$$\overbrace{\frac{s}{v_1}-\Delta t_1}^{\text{vlak kasni}}=\overbrace{\frac{s}{v_2}+\Delta t_2}^{\text{vlak rani}} \Rightarrow \frac{s}{50}-0.4=\frac{s}{80}+0.5 \;/\cdot 400 \Rightarrow 8s-160=5s+200 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 3s=360 \Rightarrow s=120\ km.$$





Vježba 020

Ako bi putnički vlak od mjesta M do mjesta N vozio prosječnom brzinom 50 km/h kasnio bi 0.4 h dok bi prosječnom brzinom 80 km/h stigao 0.5 h ranije od predviđenog vremena po redu vožnje. Kolika je međusobna udaljenost mjesta M i N?

Rezultat: 9.