Zadatak 041 (Ivana, studentica)

Brzina tijela bačenog vertikalno uvis početnom brzinom v_0, uz zanemareni otpor zraka, dana je formulom

$$v = v_0 - g \cdot t,$$

gdje je t proteklo vrijeme i g ubrzanje sile teže. Na kojoj će se udaljenosti od početnog položaja nalaziti tijelo nakon t sekundi od trenutka izbacivanja?

Rješenje 041

Ponovimo!

Newton-Leibnizova formula: Ako je F ' (x) = f(x), onda je $\int_a^b f(x)\,dx = F(x)\Big|_a^b = F(b) - F(a)$.

Ako se točka giba po nekoj krivulji i apsolutna veličina njezine brzine v = f(t) je funkcija vremena t, onda je put koji prijeđe točka u intervalu vremena $[t_1, t_2]$ dan formulom:

$$s = \int_{t_1}^{t_2} f(t)\,dt.$$

Nakon t sekundi, od trenutka izbacivanja, tijelo će biti na udaljenosti s:

$$\left.\begin{array}{l} v = f(t) = v_0 - g \cdot t \\ [0, t]\ ,\ s = \int_0^t f(t)\,dt \end{array}\right\} \Rightarrow s = \int_0^t \left(v_0 - g \cdot t\right) dt \Rightarrow s = \int_0^t v_0\,dt - \int_0^t g \cdot t\,dt \Rightarrow s = v_0 \cdot \int_0^t dt - g \cdot \int_0^t t\,dt \Rightarrow$$

$$\Rightarrow s = v_0 \cdot t\Big|_0^t - g \cdot \frac{t^2}{2}\Big|_0^t \Rightarrow s = v_0 \cdot (t - 0) - \frac{1}{2} \cdot g \cdot \left(t^2 - 0^2\right) \Rightarrow s = v_0 \cdot t - \frac{1}{2} \cdot g \cdot t^2.$$

Vježba 041

Brzina tijela bačenog vertikalno prema dolje početnom brzinom v_0, uz zanemareni otpor zraka, dana je formulom

$$v = v_0 + g \cdot t,$$

gdje je t proteklo vrijeme i g ubrzanje sile teže. Na kojoj će se udaljenosti od početnog položaja nalaziti tijelo nakon t sekundi od trenutka izbacivanja?

Rezultat: $s = v_0 \cdot t + \frac{1}{2} \cdot g \cdot t^2.$

Zadatak 042 (Dado, student)

Izračunajte duljinu luka semikubne parabole $y^2 = x^3$ od ishodišta koordinatnog sustava do točke kojoj su koordinate x = 4, y = 8.

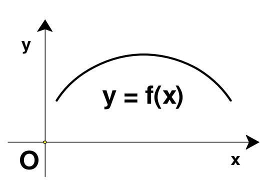
Rješenje 042

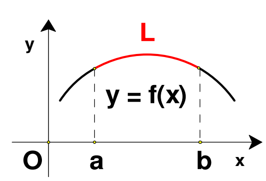
Ponovimo!

Newton-Leibnizova formula: Ako je F ' (x) = f(x), onda je $\int_a^b f(x)\,dx = F(x)\Big|_a^b = F(b) - F(a)$.

Duljina L luka glatke krivulje, u pravokutnim koordinatama, između dvije točke s apscisama x = a i x = b (a < b), iznosi

$$L = \int_a^b \sqrt{1 + \left(y'\right)^2}\,dx.$$





$$y^2 = x^3 \Rightarrow y^2 = x^3 \ /\sqrt{\ } \Rightarrow y = \sqrt{x^3} \Rightarrow \left[\sqrt[n]{a^m} = a^{\frac{m}{n}}\right] \Rightarrow y = x^{\frac{3}{2}}.$$

Derivacija funkcije iznosi:

$$y' = \left(x^{\frac{3}{2}}\right)' \Rightarrow y' = \frac{3}{2} \cdot x^{\frac{1}{2}} \Rightarrow \left[a^{\frac{m}{n}} = \sqrt[n]{a^m}\right] \Rightarrow y' = \frac{3}{2} \cdot \sqrt{x}.$$

Budući da su granice integracije od ishodišta koordinatnog sustava x = 0 do x = 4, slijedi:

$$L = \int_0^4 \sqrt{1 + \left(\frac{3}{2} \cdot \sqrt{x}\right)^2}\, dx \Rightarrow L = \int_0^4 \sqrt{1 + \frac{9}{4} \cdot x}\, dx \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \left[\begin{array}{l} \text{supstitucija} \\ t^2 = 1 + \frac{9}{4} \cdot x \Rightarrow 2 \cdot t \cdot dt = \frac{9}{4} \cdot dx \ / \cdot \frac{4}{9} \Rightarrow \frac{8}{9} \cdot t \cdot \mathrm{dt} = dx \\ \text{nove granice integracije} \\ x_1 = 0 \Rightarrow t^2 = 1 + \frac{9}{4} \cdot 0 \Rightarrow t^2 = 1 \ /\sqrt{\ } \Rightarrow t_1 = 1 \\ x_2 = 4 \Rightarrow t^2 = 1 + \frac{9}{4} \cdot 4 \Rightarrow t^2 = 1 + 9 \Rightarrow t^2 = 10 \ /\sqrt{\ } \Rightarrow t_2 = \sqrt{10} \end{array}\right] \Rightarrow L = \int_1^{\sqrt{10}} \sqrt{t^2} \cdot \frac{8}{9} \cdot t \cdot dt \Rightarrow$$

$$\Rightarrow L = \int_1^{\sqrt{10}} t \cdot \frac{8}{9} \cdot t \cdot dt \Rightarrow L = \int_1^{\sqrt{10}} \frac{8}{9} \cdot t^2 \cdot dt \Rightarrow L = \frac{8}{9} \cdot \int_1^{\sqrt{10}} t^2 \cdot dt \Rightarrow L = \frac{8}{9} \cdot \frac{t^3}{3} \Big|_1^{\sqrt{10}} \Rightarrow L = \frac{8}{27} \cdot t^3 \Big|_1^{\sqrt{10}} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow L = \frac{8}{27} \cdot \left(\left(\sqrt{10}\right)^3 - 1^3\right) \Rightarrow L = \frac{8}{27} \cdot \left(\sqrt{10^3} - 1\right) \Rightarrow \left[\begin{array}{l} \text{djelomično} \\ \text{korjenovanje} \end{array}\right] \Rightarrow L = \frac{8}{27} \cdot \left(\sqrt{10^2 \cdot 10} - 1\right) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow L = \frac{8}{27} \cdot \left(10 \cdot \sqrt{10} - 1\right).$$

Vježba 042

Izračunajte duljinu luka krivulje y = ln x od x = $\sqrt{3}$ do x = $\sqrt{8}$.

Rezultat: $1 + \frac{1}{2} \cdot \ln \frac{3}{2}$.

Zadatak 043 (Dado, student)

Nađite duljinu luka krivulje x = $e^t \cdot \cos t$, y = $e^t \cdot \sin t$ od $t_1 = 0$ do $t_2 = \ln \pi$.

Rješenje 043

Ponovimo!

$$\cos^2 \alpha + \sin^2 \alpha = 1.$$

Newton-Leibnizova formula: Ako je F ' (x) = f(x), onda je $\int_a^b f(x)\,dx = F(x) \Big|_a^b = F(b) - F(a)$.

Ako je krivulja zadana jednadžbama u parametarskom obliku x = φ(t) i y = ψ(t) (φ(t) i ψ(t) su neprekinuto derivabilne funkcije), onda je duljina luka L krivulje

$$L = \int_{t_1}^{t_2} \sqrt{\left(x'\right)^2 + \left(y'\right)^2}\, dt,$$

gdje su t_1 i t_2 vrijednosti parametara koji odgovaraju krajevima luka ($t_1 < t_2$).
Odredimo najprije derivacije zadane funkcije (deriviramo po t):

$$\left.\begin{array}{l} x=e^{t}\cdot\cos t \\ y=e^{t}\cdot\sin t \end{array}\right\} \Rightarrow \left.\begin{array}{l} x'=\left(e^{t}\cdot\cos t\right)' \\ y'=\left(e^{t}\cdot\sin t\right)' \end{array}\right\} \Rightarrow \left.\begin{array}{l} x'=e^{t}\cdot\cos t-e^{t}\cdot\sin t \\ y'=e^{t}\cdot\sin t+e^{t}\cdot\cos t \end{array}\right\}.$$

Prema formuli za duljinu luka krivulje je

$$L=\int_{0}^{\ln\pi}\sqrt{\left(e^{t}\cdot\cos t-e^{t}\cdot\sin t\right)^{2}+\left(e^{t}\cdot\sin t+e^{t}\cdot\cos t\right)^{2}}\,dt \Rightarrow$$

$$\Rightarrow L=\int_{0}^{\ln\pi}\sqrt{e^{2t}\cdot\cos^{2}t-2\cdot e^{2t}\cdot\cos t\cdot\sin t+e^{2t}\cdot\sin^{2}t+e^{2t}\cdot\sin^{2}t+2\cdot e^{2t}\cdot\sin t\cdot\cos t+e^{2t}\cdot\cos^{2}t}\,dt \Rightarrow$$

$$\Rightarrow L=\int_{0}^{\ln\pi}\sqrt{e^{2t}\cdot\cos^{2}t+e^{2t}\cdot\sin^{2}t+e^{2t}\cdot\sin^{2}t+e^{2t}\cdot\cos^{2}t}\,dt \Rightarrow L=\int_{0}^{\ln\pi}\sqrt{2\cdot e^{2t}\cdot\cos^{2}t+2\cdot e^{2t}\cdot\sin^{2}t}\,dt \Rightarrow$$

$$\Rightarrow L=\int_{0}^{\ln\pi}\sqrt{2\cdot e^{2t}\cdot\left(\cos^{2}t+\sin^{2}t\right)}\,dt \Rightarrow L=\int_{0}^{\ln\pi}\sqrt{2\cdot e^{2t}\cdot 1}\,dt \Rightarrow L=\int_{0}^{\ln\pi}\sqrt{2\cdot e^{2t}}\,dt \Rightarrow$$

$$\Rightarrow L=\int_{0}^{\ln\pi}\sqrt{2}\cdot e^{t}\,dt \Rightarrow L=\sqrt{2}\cdot\int_{0}^{\ln\pi}e^{t}\,dt \Rightarrow L=\sqrt{2}\cdot e^{t}\Big|_{0}^{\ln\pi} \Rightarrow L=\sqrt{2}\cdot\left(e^{\ln\pi}-e^{0}\right) \Rightarrow L=\sqrt{2}\cdot(\pi-1).$$

Vježba 043

Nađite duljinu luka krivulje x = 2 · cos t, y = 2 · sin t od $t_1 = 0$ do $t_2 = \pi$.

Rezultat: 2 · π.

Zadatak 044 (Alex99, student)

Nađite rad sile $f(x) = x^2$ na putu od x = 1 do x = 3.

Rješenje 044

Ponovimo!

Newton-Leibnizova formula: Ako je F '(x) = f(x), onda je $\int_{a}^{b} f(x)\,dx = F(x)\Big|_{a}^{b} = F(b)-F(a)$.

Ako promjenjiva sila y = f(x) djeluje u smjeru osi OX (apscise, x – osi), onda je rad sile na segmentu $\left[x_1, x_2\right]$:

$$W=\int_{x_1}^{x_2} f(x)\,dx.$$

Traženi rad iznosi:

$$\left.\begin{array}{l} x_1=1\ ,\ x_2=3 \\ W=\int_{x_1}^{x_2} x^{2}\,dx \end{array}\right\} \Rightarrow W=\int_{1}^{3} x^{2}\,dx=\frac{x^{3}}{3}\Big|_{1}^{3}=\frac{3^{3}}{3}-\frac{1^{3}}{3}=\frac{27}{3}-\frac{1}{3}=\frac{26}{3}=8\frac{2}{3}.$$

Vježba 044

Nađite rad sile $f(x) = x^2$ na putu od x = 0 do x = 3.

Rezultat: 9.

Zadatak 045 (Miro, tehnička škola)

Izračunajte integral: $\int \frac{x^{3}-2\cdot x+4}{x}\,dx.$

Rješenje 045

Ponovimo!

$$\int\left(f(x)\pm g(x)\right)dx=\int f(x)\,dx\pm\int g(x)\,dx \quad , \quad \int c\cdot f(x)\,dx=c\cdot\int f(x)\,dx\ ,\ c-\text{konstanta}.$$

$$\frac{a+b}{c}=\frac{a}{c}+\frac{b}{c}.$$

$$\int\frac{x^3-2\cdot x+4}{x}dx=\int\left(\frac{x^3}{x}-\frac{2\cdot x}{x}+\frac{4}{x}\right)dx=\int\left(x^2-2+\frac{4}{x}\right)dx=\int x^2\,dx-\int 2\,dx+\int\frac{4}{x}dx=$$

$$=\int x^2\,dx-2\cdot\int dx+4\cdot\int\frac{dx}{x}=\frac{x^3}{3}-2\cdot x+4\cdot\ln x+C.$$

Vježba 045

Izračunajte integral: $\int\frac{x^3-x+1}{x}dx.$

Rezultat: $\frac{x^3}{3}-x+\ln x+C.$

Zadatak 046 (Sanela, studentica)

Izračunajte integral: $\int_{-\infty}^{0}2\cdot e^{-x}\,dx.$

Rješenje 046

Ponovimo!

Newton-Leibnizova formula: Ako je F ' (x) = f(x), onda je $\int_a^b f(x)\,dx=F(x)\Big|_a^b=F(b)-F(a).$

Nepravi integral je integral kod kojeg:

- je područje integracije beskonačno
- na području integracije funkcija y = f(x) nije ograničena.

Tako je:

$$\int_{-\infty}^{b}f(x)\,dx=\lim_{a\to-\infty}\int_a^b f(x)\,dx.$$

Ako limes postoji i ako je konačan, onda zadani integral konvergira. Ako limes ne postoji ili je beskonačan (– ∞ ili + ∞), onda integral divergira.

$$\int_{-\infty}^{0}2\cdot e^{-x}\,dx=\lim_{a\to-\infty}\int_a^0 2\cdot e^{-x}\,dx=2\cdot\lim_{a\to-\infty}\int_a^0 e^{-x}\,dx=2\cdot\lim_{a\to-\infty}\left(-e^{-x}\right)\Big|_a^0=-2\cdot\lim_{a\to-\infty}\left(e^{-x}\right)\Big|_a^0=$$

$$=-2\cdot\lim_{a\to-\infty}\left(e^0-e^{-a}\right)=-2\cdot\lim_{a\to-\infty}\left(1-e^{-a}\right)=-2\cdot\left(1-\lim_{a\to-\infty}e^{-a}\right)=-2\cdot(1-\infty)=+\infty\left\{\begin{array}{l}\text{integral}\\ \text{divergira}\end{array}\right..$$

Vježba 046

Izračunajte integral: $\int_{-\infty}^{0}3\cdot e^{-x}\,dx.$

Rezultat: **+ ∞, i**ntegral divergira.

Zadatak 047 (Sanela, studentica)

Izračunajte integral: $\int_0^{\infty}e^{-2\cdot x}\,dx.$

Rješenje 047

Ponovimo!

Newton-Leibnizova formula: Ako je F ' (x) = f(x), onda je $\int_a^b f(x)\,dx=F(x)\Big|_a^b=F(b)-F(a).$

Nepravi integral je integral kod kojeg:

- je područje integracije beskonačno
- na području integracije funkcija y = f(x) nije ograničena.

Tako je:

$$\int_a^{\infty} f(x)\,dx = \lim_{b \to \infty} \int_a^{b} f(x)\,dx.$$

Ako limes postoji i ako je konačan, onda zadani integral konvergira. Ako limes ne postoji ili je beskonačan (– ∞ ili + ∞), onda integral divergira.

$$\int_0^{\infty} e^{-2\cdot x}\,dx = \lim_{b \to \infty} \int_0^{b} e^{-2\cdot x}\,dx = \lim_{b \to \infty} \left(-\frac{1}{2} \cdot e^{-2\cdot x} \right) \Big|_0^b = -\frac{1}{2} \cdot \lim_{b \to \infty} \left(e^{-2\cdot x} \right) \Big|_0^b =$$

$$= -\frac{1}{2} \cdot \lim_{b \to \infty} \left(e^{-2\cdot b} - e^{0} \right) = -\frac{1}{2} \cdot \lim_{b \to \infty} \left(e^{-2\cdot b} - 1 \right) = -\frac{1}{2} \cdot \left(\lim_{b \to \infty} e^{-2\cdot b} - 1 \right) = -\frac{1}{2} \cdot \left(\lim_{b \to \infty} \frac{1}{e^{2\cdot b}} - 1 \right) =$$

$$= -\frac{1}{2} \cdot \left(\frac{1}{\infty} - 1 \right) = -\frac{1}{2} \cdot (0 - 1) = -\frac{1}{2} \cdot (-1) = \frac{1}{2}. \left\{ \begin{array}{l} \text{integral} \\ \text{konvergira} \end{array} \right. .$$

Vježba 047

Izračunajte integral: $\int_1^{\infty} 2 \cdot e^{x}\,dx.$

Rezultat: **+ ∞, i**ntegral divergira.

Zadatak 048 (Andro, student)

Izračunajte integral: $\int \sin^2 \cdot \cos x \cdot dx.$

Rješenje 048

Ponovimo!

$$\int x^n\,dx = \frac{x^{n+1}}{n+1} + C.$$

Neka je y = f(x) derivabilna funkcija na nekom intervalu. Diferencijal funkcije y = f(x) jednak je

dy = f ' (x) · dx.

Diferencijal funkcije jednak je umnošku (produktu) derivacije te funkcije i diferencijala nezavisne varijable.

Uvedemo supstituciju (zamjenu varijabli):

t = sin x.

Ako sada na obje strane računamo diferencijal (na lijevoj strani računamo diferencijal po varijabli t, a na desnoj po varijabli x), dobivamo:

$$t' \cdot dt = (\sin x)' \cdot dx \Rightarrow 1 \cdot dt = \cos x \cdot dx \Rightarrow dt = \cos x \cdot dx.$$

Sada možemo pisati:

$$\int \sin^2 \cdot \cos x \cdot dx = \left[\begin{array}{c} \text{supstitucija} \\ t = \sin x \\ dt = \cos x \cdot dx \end{array} \right] = \int t^2 \cdot dt = \frac{t^3}{3} + C = \frac{1}{3} \cdot \sin^3 x + C.$$

Vježba 048

Izračunajte integral: $\int \sin^3 \cdot \cos x \cdot dx.$

Rezultat: $\frac{1}{4} \cdot \sin^4 x + C.$

Zadatak 049 (Martina, studentica)

Izračunajte integral: $\int x \cdot \cos^2 x \cdot dx.$

Rješenje 049

Ponovimo!

$$\int C \cdot f(x)dx = C \cdot \int f(x)dx \text{ gdje je } C \text{ konstanta } (C \neq 0) \quad , \quad \int (f(x) \pm g(x))dx = \int f(x)dx \pm \int g(x)dx.$$

$$\cos^2 x = \frac{1}{2} \cdot (1 + \cos 2x) \quad , \quad \int \sin ax = -\frac{1}{a} \cdot \cos ax \quad , \quad \int \cos ax = \frac{1}{a} \cdot \sin ax.$$

Parcijalna integracija

Ako su u = u(x) i v = v(x) neprekinuto derivabilne funkcije, tada je:

$$\int u\ dv = u \cdot v - \int v du.$$

Neka je y = f(x) derivabilna funkcija na nekom intervalu. Diferencijal funkcije y = f(x) jednak je

$$dy = f'(x) \cdot dx.$$

Diferencijal funkcije jednak je umnošku (produktu) derivacije te funkcije i diferencijala nezavisne varijable.

Integral rješavamo metodom parcijalne integracije:

$$\int x \cdot \cos^2 x \cdot dx =$$

$$= \begin{bmatrix} u = x \\ dv = \cos^2 x \cdot dx \\ du = dx \\ v = \int \cos^2 x \cdot dx = \int \frac{1}{2} \cdot (1 + \cos 2x) \cdot dx = \frac{1}{2} \cdot \int dx + \frac{1}{2} \cdot \int \cos 2x \cdot dx = \frac{x}{2} + \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} \cdot \sin 2x = \frac{x}{2} + \frac{1}{4} \cdot \sin 2x \end{bmatrix} =$$

= [Ako na obje strane računamo diferencijal od u = x, na lijevoj strani računamo diferencijal po varijabli u, a na desnoj po varijabli x pa je to du = dx] =

$$= x \cdot \left(\frac{x}{2} + \frac{1}{4} \cdot \sin 2x\right) - \int \left(\frac{x}{2} + \frac{1}{4} \cdot \sin 2x\right) \cdot dx = \frac{x^2}{2} + \frac{x}{4} \cdot \sin 2x - \int \frac{x}{2} \cdot dx - \int \frac{1}{4} \cdot \sin 2x \cdot dx =$$

$$= \frac{x^2}{2} + \frac{x}{4} \cdot \sin 2x - \frac{1}{2} \cdot \int x \cdot dx - \frac{1}{4} \cdot \int \sin 2x \cdot dx = \frac{x^2}{2} + \frac{x}{4} \cdot \sin 2x - \frac{1}{2} \cdot \frac{x^2}{2} - \frac{1}{4} \cdot \left(-\frac{1}{2} \cdot \cos 2x\right) =$$

$$= \frac{x^2}{2} + \frac{x}{4} \cdot \sin 2x - \frac{x^2}{4} + \frac{1}{8} \cdot \cos 2x = \frac{2 \cdot x^2 - x^2}{4} + \frac{x}{4} \cdot \sin 2x + \frac{1}{8} \cdot \cos 2x = \frac{x^2}{4} + \frac{x}{4} \cdot \sin 2x + \frac{1}{8} \cdot \cos 2x + C.$$

Vježba 049

Izračunajte integral: $\int x \cdot \sin x \cdot dx.$

Rezultat: $\sin x - x \cdot \cos x + C.$

Zadatak 050 (Zola, studentica)

Izračunajte integral: $\int (\sin 2x + \cos 2x)^2\, dx.$

Rješenje 050

Ponovimo!

$$(a+b)^2 = a^2 + 2 \cdot a \cdot b + b^2 \quad , \quad \sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha = 1 \quad , \quad \int (f(x) + g(x))dx = \int f(x)dx + \int g(x)dx.$$

$$2 \cdot \sin \alpha \cdot \cos \alpha = \sin 2\alpha \quad , \quad \int \sin ax = -\frac{1}{a} \cdot \cos ax.$$

$$\int (\sin 2x + \cos 2x)^2\, dx = \begin{bmatrix} \text{kvadriramo} \\ \text{zagradu} \end{bmatrix} = \int \left(\sin^2 2x + 2 \cdot \sin 2x \cdot \cos 2x + \cos^2 2x\right) dx =$$

$$=\int\left(\sin^2 2x+\cos^2 2x+2\cdot\sin 2x\cdot\cos 2x\right)dx=\int\left(\sin^2 2x+\cos^2 2x+2\cdot\sin 2x\cdot\cos 2x\right)dx=$$

$$=\int(1+2\cdot\sin 2x\cdot\cos 2x)\,dx=\int(1+\sin 4x)\,dx=\int 1\cdot dx+\int\sin 4x\,dx=\int dx+\int\sin 4x\,dx=$$

$$=x-\frac{1}{4}\cdot\cos 4x+C.$$

Vježba 050

Izračunajte integral: $\int(\sin 3x+\cos 3x)^2\,dx.$

Rezultat: $x-\frac{1}{6}\cdot\cos 6x+C.$

Zadatak 051 (Zola, studentica)

Izračunajte integral: $\int\frac{ctg\sqrt{x-1}}{\sqrt{x-1}}\,dx.$

Rješenje 051

Ponovimo!

Diferencijal funkcije

Neka je y = f(x) derivabilna funkcija na nekom intervalu. Diferencijal funkcije y = f(x) jednak je

$$dy=f\,'(x)\cdot dx.$$

Diferencijal funkcije jednak je umnošku (produktu) derivacije te funkcije i diferencijala nezavisne varijable.

$$\int C\cdot f(x)\,dx=C\cdot\int f(x)\,dx \text{ gdje je } C \text{ konstanta } (C\neq 0)\quad,\quad \int ctg\,x\,dx=\ln\sin x+C.$$

$$\log 10=1\quad,\quad \ln e=1.$$

Derivacija složene funkcije:

Ako je y = f(u) i u = g(x), tj. y = f(g(x)), a funkcije y i u imaju derivacije, tada je

$$y_x'=y_u'\cdot u_x'\quad\text{ili}\quad\frac{dy}{dx}=\frac{dy}{du}\cdot\frac{du}{dx}.$$

Računamo integral

$$\int\frac{ctg\sqrt{x-1}}{\sqrt{x-1}}\,dx.$$

Najprije uvedemo supstituciju (zamjenu varijabli):

$$t=\sqrt{x-1}.$$

Ako sada na obje strane računamo diferencijal (na lijevoj strani računamo diferencijal po varijabli t, a na desnoj po varijabli x), dobije se:

$$t'\cdot dt=\left(\sqrt{x-1}\right)'\cdot dx\ \Rightarrow\ 1\cdot dt=\frac{1}{2\cdot\sqrt{x-1}}\cdot x'\cdot dx\ \Rightarrow\ dt=\frac{1}{2\cdot\sqrt{x-1}}\cdot 1\cdot dx\ \Rightarrow$$

$$\Rightarrow\ dt=\frac{1}{2\cdot\sqrt{x-1}}\cdot dx\ /\cdot 2\ \Rightarrow\ 2\cdot dt=\frac{1}{\sqrt{x-1}}\cdot dx.$$

Sada vrijedi:

$$\int\frac{ctg\sqrt{x-1}}{\sqrt{x-1}}\,dx=\int ctg\,t\cdot 2\cdot dt=2\cdot\int ctg\,t\cdot dt=2\cdot\ln\sin t+C=2\cdot\ln\sin\sqrt{x-1}+C.$$

Vježba 051

Izračunajte integral: $\int\frac{ctg\sqrt{x+1}}{\sqrt{x+1}}\,dx.$

Rezultat: $2\cdot\ln\sin\sqrt{x+1}+C.$

Zadatak 052 (Zola, studentica)

Izračunajte integral: $\int \frac{e^{arcctg\, x} + x \cdot \ln\left(x^2+1\right) + \log 10 - \ln e}{1+x^2} dx.$

Rješenje 052

Ponovimo!

$$\log 10 = 1 \quad , \quad \ln e = 1 \quad , \quad \frac{a+b}{n} = \frac{a}{n} + \frac{b}{n} \quad , \quad \int \left(f(x) + g(x)\right) dx = \int f(x)\, dx + \int g(x)\, dx.$$

Diferencijal funkcije

Neka je y = f(x) derivabilna funkcija na nekom intervalu. Diferencijal funkcije y = f(x) jednak je

$$dy = f\,'(x) \cdot dx.$$

Diferencijal funkcije jednak je umnošku (produktu) derivacije te funkcije i diferencijala nezavisne varijable.

$$\int C \cdot f(x)\, dx = C \cdot \int f(x)\, dx \text{ gdje je } C \text{ konstanta } (C \neq 0) \quad , \quad \int e^x\, dx = e^x + C.$$

$$\int dx = x + C \quad , \quad e^{\ln a} = a.$$

$$\int \frac{e^{arcctg\, x} + x \cdot \ln\left(x^2+1\right) + \log 10 - \ln e}{1+x^2} dx = \int \frac{e^{arcctg\, x} + x \cdot \ln\left(x^2+1\right) + 1 - 1}{1+x^2} dx =$$

$$= \int \frac{e^{arcctg\, x} + x \cdot \ln\left(x^2+1\right) + 1 - 1}{1+x^2} dx = \int \frac{e^{arcctg\, x} + x \cdot \ln\left(x^2+1\right)}{1+x^2} dx =$$

$$= \int \left(\frac{e^{arcctg\, x}}{1+x^2} + \frac{x \cdot \ln\left(x^2+1\right)}{1+x^2} \right) dx = \int \frac{e^{arcctg\, x}}{1+x^2} dx + \int \frac{x \cdot \ln\left(x^2+1\right)}{1+x^2} dx.$$

- Najprije uvedemo supstituciju (zamjenu varijabli):

$$t = arcctg\, x.$$

Ako sada na obje strane računamo diferencijal (na lijevoj strani računamo diferencijal po varijabli t, a na desnoj po varijabli x), dobije se:

$$t\,' \cdot dt = \left(arcctg\, x\right)' \cdot dx \Rightarrow 1 \cdot dt = \frac{-1}{1+x^2} \cdot dx \; / \cdot (-1) \Rightarrow -\, dt = \frac{1}{1+x^2} \cdot dx.$$

- Najprije uvedemo supstituciju (zamjenu varijabli):

$$t = \ln\left(x^2+1\right).$$

Ako sada na obje strane računamo diferencijal (na lijevoj strani računamo diferencijal po varijabli t, a na desnoj po varijabli x), dobije se:

$$t\,' \cdot dt = \left(\ln\left(x^2+1\right)\right)' \cdot dx \Rightarrow 1 \cdot dt = \frac{1}{x^2+1} \cdot \left(x^2+1\right)' \cdot dx \Rightarrow dt = \frac{1}{x^2-1} \cdot 2 \cdot x \cdot dx \; / \cdot \frac{1}{2} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \frac{1}{2} \cdot dt = \frac{x}{1+x^2} \cdot dx.$$

Sada vrijedi:

$$\int \frac{e^{arcctg\, x}}{1+x^2} dx + \int \frac{x \cdot \ln\left(x^2+1\right)}{1+x^2} dx = \int e^t \cdot (-dt) + \int \frac{1}{2} \cdot dt = -\int e^t \cdot dt + \frac{1}{2} \cdot \int dt = -\,e^t + \frac{1}{2} \cdot t + C =$$

$$= -e^{\ln\left(x^2+1\right)} + \frac{1}{2} \cdot \ln\left(x^2+1\right) + C = -\left(x^2+1\right) + \frac{1}{2} \cdot \ln\left(x^2+1\right) + C = \frac{1}{2} \cdot \ln\left(x^2+1\right) - \left(x^2+1\right) + C.$$

Vježba 052

Izračunajte integral: $\int \frac{\ln(x+1)}{1+x} dx.$

Rezultat: $\frac{1}{2} \cdot \ln^2(1+x) + C.$

Zadatak 053 (Zola, studentica)

Izračunajte integral: $\int 6^{\sqrt{x}} \frac{dx}{\sqrt{x}}.$

Rješenje 053

Ponovimo!

$$\left(\sqrt{x}\right)' = \frac{1}{2 \cdot \sqrt{x}} \quad , \quad \int a^x dx = \frac{a^x}{\ln a} + C.$$

Diferencijal funkcije

Neka je y = f(x) derivabilna funkcija na nekom intervalu. Diferencijal funkcije y = f(x) jednak je

$$dy = f'(x) \cdot dx.$$

Diferencijal funkcije jednak je umnošku (produktu) derivacije te funkcije i diferencijala nezavisne varijable.

$$\int C \cdot f(x) dx = C \cdot \int f(x) dx \text{ gdje je } C \text{ konstanta } (C \neq 0).$$

Računamo integral:

$$\int 6^{\sqrt{x}} \frac{dx}{\sqrt{x}}.$$

- Najprije uvedemo supstituciju (zamjenu varijabli):

$$t = \sqrt{x}.$$

Ako sada na obje strane računamo diferencijal (na lijevoj strani računamo diferencijal po varijabli t, a na desnoj po varijabli x), dobije se:

$$t' \cdot dt = \left(\sqrt{x}\right)' \cdot dx \Rightarrow 1 \cdot dt = \frac{1}{2 \cdot \sqrt{x}} \cdot dx \Rightarrow dt = \frac{1}{2 \cdot \sqrt{x}} \cdot dx \; / \cdot 2 \Rightarrow 2 \cdot dt = \frac{dx}{\sqrt{x}}.$$

Sada vrijedi:

$$\int 6^{\sqrt{x}} \frac{dx}{\sqrt{x}} = \int 6^{\sqrt{x}} \frac{dx}{\sqrt{x}} = \int 6^t \cdot 2 \cdot dt = \int 6^t \cdot 2 \cdot dt = 2 \cdot \int 6^t \cdot dt = 2 \cdot \frac{6^t}{\ln 6} + C = 2 \cdot \frac{6^{\sqrt{x}}}{\ln 6} + C.$$

Vježba 053

Izračunajte integral: $\int 5^{\sqrt{x}} \frac{dx}{\sqrt{x}}.$

Rezultat: $2 \cdot \frac{5^{\sqrt{x}}}{\ln 5} + C.$

Zadatak 054 (Josip, student prometa)

Izračunajte integral: $\int \frac{\sin x}{\cos x} dx.$

Rješenje 054

Ponovimo!

$$(\cos x)' = -\sin x \quad , \quad \int \frac{dx}{x} = \ln x + C.$$

Diferencijal funkcije

Neka je y = f(x) derivabilna funkcija na nekom intervalu. Diferencijal funkcije y = f(x) jednak je

$$dy = f\,'(x) \cdot dx.$$

Diferencijal funkcije jednak je umnošku (produktu) derivacije te funkcije i diferencijala nezavisne varijable.

$$\int C \cdot f(x)\,dx = C \cdot \int f(x)\,dx \text{ gdje je } C \text{ konstanta } (C \neq 0).$$

Računamo integral:

$$\int \frac{\sin x}{\cos x}\,dx.$$

- Najprije uvedemo supstituciju (zamjenu varijabli):

$$t = \cos x.$$

Ako sada na obje strane računamo diferencijal (na lijevoj strani računamo diferencijal po varijabli t, a na desnoj po varijabli x), dobije se:

$$t' \cdot dt = (\cos x)' \cdot dx \Rightarrow 1 \cdot dt = -\sin x \cdot dx \Rightarrow dt = -\sin x \cdot dx \;/\cdot(-1) \Rightarrow -dt = \sin x \cdot dx.$$

Sada vrijedi:

$$\int \frac{\sin x}{\cos x}\,dx = \int \frac{\sin x}{\cos x}\,dx = \int \frac{-dt}{t} = \int \frac{-dt}{t} = -\int \frac{dt}{t} = -\ln t + C = -\ln \cos x + C.$$

Vježba 054

Izračunajte integral: $\int \frac{\cos x}{\sin x}\,dx.$

Rezultat: $\ln \sin x + C.$

Zadatak 055 (Ekaterina, studentica)

Od supstitucija t = 2 · tg x, t = 2 · sin x, x = 2 · sin t, x = 2 · tg t odaberite onu koja je pogodna za rješavanje određenog integrala $\int_0^{2\sqrt{3}} \frac{dx}{(4+x^2)^2}$, te ga riješite.

Rješenje 055

Ponovimo!

$$(a \cdot b)^n = a^n \cdot b^n \quad , \quad \left(\frac{a}{b}\right)^n = \frac{a^n}{b^n} \quad , \quad tg\,\frac{\pi}{3} = \sqrt{3} \quad , \quad \sin\frac{2\pi}{3} = \frac{\sqrt{3}}{2} \quad , \quad tg\,\alpha = \frac{\sin\alpha}{\cos\alpha}.$$

$$\cos^2\alpha + \sin^2\alpha = 1 \quad , \quad \cos^2\alpha = \frac{1+\cos 2\alpha}{2} \quad , \quad \int \cos ax\,dx = \frac{1}{a} \cdot \sin ax.$$

Diferencijal funkcije

Neka je y = f(x) derivabilna funkcija na nekom intervalu. Diferencijal funkcije y = f(x) jednak je

$$dy = f\,'(x) \cdot dx.$$

Diferencijal funkcije jednak je umnošku (produktu) derivacije te funkcije i diferencijala nezavisne varijable.

$$\int (f(x) \pm g(x))\,dx = \int f(x)\,dx \pm \int g(x)\,dx \quad , \quad \int c \cdot f(x)\,dx = c \cdot \int f(x)\,dx \;,\; c - \text{konstanta}.$$

Newton-Leibnizova formula: Ako je F ' (x) = f(x), onda je $\int_a^b f(x)\,dx = F(x)\Big|_a^b = F(b) - F(a).$

Od ponuđenih supstitucija pogodna za rješavanje određenog integrala je supstitucija

$$x = 2 \cdot tg\,t.$$

Prvo moramo odrediti diferencijal dx i nove granice integriranja.

(Na lijevoj strani deriviramo po varijabli x, a na desnoj po varijabli t.)

$$x = 2 \cdot tg\, t \;\Rightarrow\; x' \cdot dx = (2 \cdot tg\, t)' \cdot dt \;\Rightarrow\; 1 \cdot dx = 2 \cdot \frac{1}{\cos^2 t} dt \;\Rightarrow\; dx = \frac{2}{\cos^2 t} dt.$$

Nove granice integriranja su:

$$x_1 = 0 \;\Rightarrow\; 2 \cdot tg\, t = 0 \;\Rightarrow\; 2 \cdot tg\, t = 0 \;/:2 \;\Rightarrow\; tg\, t = 0 \;\Rightarrow\; t = tg^{-1} 0 \;\Rightarrow\; t_1 = 0.$$

$$x_2 = 2 \cdot \sqrt{3} \;\Rightarrow\; 2 \cdot tg\, t = 2 \cdot \sqrt{3} \;\Rightarrow\; 2 \cdot tg\, t = 2 \cdot \sqrt{3} \;/:2 \;\Rightarrow\; tg\, t = \sqrt{3} \;\Rightarrow\; t = tg^{-1} \sqrt{3} \;\Rightarrow\; t_2 = \frac{\pi}{3}.$$

Računamo integral:

$$\int_0^{2\sqrt{3}} \frac{dx}{\left(4+x^2\right)^2} = \left[\begin{array}{c} \text{supstitucija} \\ x = 2 \cdot tg\, t \;,\; dx = \frac{2}{\cos^2 t} dt \\ x_1 = 0 \;\Rightarrow\; t_1 = 0 \\ x_2 = 2 \cdot \sqrt{3} \;\Rightarrow\; t_2 = \frac{\pi}{3} \end{array}\right] = \int_0^{\frac{\pi}{3}} \frac{\frac{2}{\cos^2 t} dt}{\left(4 + (2 \cdot tg\, t)^2\right)^2} = \int_0^{\frac{\pi}{3}} \frac{\frac{2}{\cos^2 t} dt}{\left(4 + 4 \cdot tg^2 t\right)^2} =$$

$$= \int_0^{\frac{\pi}{3}} \frac{\frac{2}{\cos^2 t} dt}{\left(4 + 4 \cdot \left(\frac{\sin t}{\cos t}\right)^2\right)^2} = \int_0^{\frac{\pi}{3}} \frac{\frac{2}{\cos^2 t} dt}{\left(4 + 4 \cdot \frac{\sin^2 t}{\cos^2 t}\right)^2} = \int_0^{\frac{\pi}{3}} \frac{\frac{2}{\cos^2 t} dt}{\left(4 \cdot \left(1 + \frac{\sin^2 t}{\cos^2 t}\right)\right)^2} = \int_0^{\frac{\pi}{3}} \frac{\frac{2}{\cos^2 t} dt}{4^2 \cdot \left(1 + \frac{\sin^2 t}{\cos^2 t}\right)^2} =$$

$$= \int_0^{\frac{\pi}{3}} \frac{\frac{2}{\cos^2 t} dt}{16 \cdot \left(\frac{\cos^2 t + \sin^2 t}{\cos^2 t}\right)^2} = \frac{1}{16} \cdot \int_0^{\frac{\pi}{3}} \frac{\frac{2}{\cos^2 t} dt}{\left(\frac{1}{\cos^2 t}\right)^2} = \frac{1}{16} \cdot \int_0^{\frac{\pi}{3}} \frac{\frac{2}{\cos^2 t} dt}{\frac{1}{\cos^4 t}} = \frac{1}{16} \cdot \int_0^{\frac{\pi}{3}} \frac{2 \cdot \cos^4 t}{\cos^2 t} dt = \frac{1}{16} \cdot \int_0^{\frac{\pi}{3}} \frac{2 \cdot \cos^4 t}{\cos^2 t} dt =$$

$$= \frac{1}{8} \cdot \int_0^{\frac{\pi}{3}} \cos^2 t\, dt = \left[\cos^2 \alpha = \frac{1 + \cos 2\alpha}{2}\right] = \frac{1}{8} \cdot \int_0^{\frac{\pi}{3}} \frac{1 + \cos 2t}{2} dt = \frac{1}{16} \cdot \int_0^{\frac{\pi}{3}} (1 + \cos 2t)\, dt =$$

$$= \frac{1}{16} \cdot \left(\int_0^{\frac{\pi}{3}} dt + \int_0^{\frac{\pi}{3}} \cos 2t\, dt \right) = \frac{1}{16} \cdot \left(t \Big|_0^{\frac{\pi}{3}} + \frac{1}{2} \cdot \sin 2t \Big|_0^{\frac{\pi}{3}} \right) = \frac{1}{16} \cdot \left(\left(\frac{\pi}{3} - 0 \right) + \frac{1}{2} \cdot \left(\sin \frac{2\pi}{3} - \sin 0 \right) \right) =$$

$$= \frac{1}{16} \cdot \left(\frac{\pi}{3} + \frac{1}{2} \cdot \left(\frac{\sqrt{3}}{2} - 0 \right) \right) = \frac{1}{16} \cdot \left(\frac{\pi}{3} + \frac{\sqrt{3}}{4} \right) = \frac{\pi}{48} + \frac{\sqrt{3}}{64}.$$

Vježba 055

Primjenom naznačene supstitucije riješi ovaj integral: $\int_0^{\pi} \frac{dx}{3 + 2 \cdot \cos x}$, $t = tg \frac{x}{2}$.

Rezultat: $\frac{\pi}{\sqrt{5}}$.

Zadatak 056 (Zoran, gimnazija)

Izračunaj integral $\int \frac{x^5 - 4 \cdot x^3 + 1}{2 \cdot x} dx$.

Rješenje 056

Ponovimo!

$$\frac{a-b+c}{n}=\frac{a}{n}-\frac{b}{n}+\frac{c}{n} \quad , \quad \frac{a}{b}\cdot\frac{c}{d}=\frac{a\cdot c}{b\cdot d} \quad , \quad \frac{a^n}{a^m}=a^{n-m}.$$

$$\int\left(f(x)\pm g(x)\right)dx=\int f(x)dx\pm\int g(x)dx \quad , \quad \int c\cdot f(x)dx=c\cdot\int f(x)dx \ , \ c-\text{konstanta}.$$

$$\int x^n\,dx=\frac{x^{n+1}}{n+1}+C \quad , \quad \int\frac{dx}{x}=\ln x+C \quad , \quad \int f(x)dx=F(x)+C \text{ jer je } \left(F(x)+C\right)'=f(x).$$

$$\int\frac{x^5-4\cdot x^3+1}{2\cdot x}dx=\frac{1}{2}\cdot\int\frac{x^5-4\cdot x^3+1}{x}dx=\frac{1}{2}\cdot\int\left(\frac{x^5}{x}-\frac{4\cdot x^3}{x}+\frac{1}{x}\right)dx=\frac{1}{2}\cdot\int\left(x^4-4\cdot x^2+\frac{1}{x}\right)dx=$$

$$=\frac{1}{2}\cdot\left(\int x^4\,dx-\int 4\cdot x^2\,dx+\int\frac{1}{x}dx\right)=\frac{1}{2}\cdot\left(\int x^4\,dx-4\cdot\int x^2\,dx+\int\frac{dx}{x}\right)=$$

$$=\frac{1}{2}\cdot\left(\frac{x^5}{5}-4\cdot\frac{x^3}{3}+\ln x\right)+C=\frac{x^5}{10}-\frac{4\cdot x^3}{6}+\frac{1}{2}\cdot\ln x+C=\frac{1}{10}\cdot x^5-\frac{2}{3}\cdot x^3+\frac{1}{2}\cdot\ln x+C.$$

Vježba 056

Izračunaj integral $\int\frac{x^3+x^2+1}{x}dx.$

Rezultat: $\frac{1}{3}\cdot x^3+\frac{1}{2}\cdot x^2+\ln x+C.$

Zadatak 057 (Josipa, viša škola)

Izračunaj integral $\int\frac{x-\sqrt{x}}{\sqrt{x}}dx.$

Rješenje 057

Ponovimo!

$$\left(\sqrt{a}\right)^2=a \quad , \quad a+\frac{b}{c}=\frac{a\cdot c+b}{c} \quad , \quad \sqrt[n]{a^m}=a^{\frac{m}{n}} \quad , \quad n=\frac{n}{1} \quad , \quad \frac{\frac{a}{b}}{\frac{c}{d}}=\frac{a\cdot d}{b\cdot c}.$$

$$a^1=a \quad , \quad \frac{a-b}{n}=\frac{a}{n}-\frac{b}{n} \quad , \quad \sqrt{a\cdot b}=\sqrt{a}\cdot\sqrt{b} \quad , \quad \sqrt{a^2}=a \ , \ a\ge 0.$$

$$a^n\cdot a^m=a^{n+m}.$$

$$\int\left(f(x)\pm g(x)\right)dx=\int f(x)dx\pm\int g(x)dx \quad , \quad \int x^n\,dx=\frac{x^{n+1}}{n+1}+C \quad , \quad \int dx=x+C.$$

$$\int f(x)dx=F(x)+C \text{ jer je } \left(F(x)+C\right)'=f(x).$$

Zakon distribucije množenja prema zbrajanju.

$$a\cdot(b+c)=a\cdot b+a\cdot c \quad , \quad a\cdot b+a\cdot c=a\cdot(b+c).$$

Skratiti razlomak znači brojnik i nazivnik tog razlomka podijeliti istim brojem različitim od nule i jedinice

$$\frac{a\cdot n}{b\cdot n}=\frac{a}{b} \ , \ n\ne 0 \ , \ n\ne 1.$$

1.inačica

$$\int \frac{x-\sqrt{x}}{\sqrt{x}}\,dx = \int \frac{\left(\sqrt{x}\right)^2-\sqrt{x}}{\sqrt{x}}\,dx = \int \frac{\sqrt{x}\cdot\left(\sqrt{x}-1\right)}{\sqrt{x}}\,dx = \int \frac{\sqrt{x}\cdot\left(\sqrt{x}-1\right)}{\sqrt{x}}\,dx = \int\left(\sqrt{x}-1\right)dx =$$

$$= \int \sqrt{x}\,dx - \int dx = \int x^{\frac{1}{2}}\,dx - \int dx = \frac{x^{\frac{1}{2}+1}}{\frac{1}{2}+1} - x + C = \frac{x^{\frac{3}{2}}}{\frac{3}{2}} - x + C = \frac{\sqrt{x^3}}{\frac{3}{2}} - x + C =$$

$$= \frac{\frac{\sqrt{x^3}}{1}}{\frac{3}{2}} - x + C = \frac{2\cdot\sqrt{x^3}}{3} - x + C = \frac{2\cdot\sqrt{x^2\cdot x^1}}{3} - x + C = \frac{2\cdot\sqrt{x^2\cdot x}}{3} - x + C =$$

$$= \frac{2\cdot\sqrt{x^2}\cdot\sqrt{x}}{3} - x + C = \frac{2\cdot x\cdot\sqrt{x}}{3} - x + C.$$

2.inačica

$$\int \frac{x-\sqrt{x}}{\sqrt{x}}\,dx = \int\left(\frac{x}{\sqrt{x}} - \frac{\sqrt{x}}{\sqrt{x}}\right)dx = \int\left(\frac{\left(\sqrt{x}\right)^2}{\sqrt{x}} - \frac{\sqrt{x}}{\sqrt{x}}\right)dx = \int\left(\frac{\left(\sqrt{x}\right)^2}{\sqrt{x}} - \frac{\sqrt{x}}{\sqrt{x}}\right)dx = \int\left(\sqrt{x}-1\right)dx =$$

$$= \int \sqrt{x}\,dx - \int dx = \int x^{\frac{1}{2}}\,dx - \int dx = \frac{x^{\frac{1}{2}+1}}{\frac{1}{2}+1} - x + C = \frac{x^{\frac{3}{2}}}{\frac{3}{2}} - x + C = \frac{\sqrt{x^3}}{\frac{3}{2}} - x + C =$$

$$= \frac{\frac{\sqrt{x^3}}{1}}{\frac{3}{2}} - x + C = \frac{2\cdot\sqrt{x^3}}{3} - x + C = \frac{2\cdot\sqrt{x^2\cdot x^1}}{3} - x + C = \frac{2\cdot\sqrt{x^2\cdot x}}{3} - x + C =$$

$$= \frac{2\cdot\sqrt{x^2}\cdot\sqrt{x}}{3} - x + C = \frac{2\cdot x\cdot\sqrt{x}}{3} - x + C.$$

Vježba 057

Izračunaj integral $\int \frac{\sqrt{x}-x}{\sqrt{x}}\,dx.$

Rezultat: $x - \frac{2\cdot x\cdot\sqrt{x}}{3} + C.$

Zadatak 058 (Sanja, viša škola)

Uporabom metode zamjene ili supstitucije izračunajte $\int \frac{x^2}{x^3+1}\,dx.$

Rješenje 058

Ponovimo!

Neka su f i g derivabilne funkcije na istom intervalu.

Derivacija zbroja : $\left(f+g\right)' = f' + g'.$

Tablično deriviranje	
Funkcija	**Derivacija**
c	0
x	1
x^n	$n \cdot x^{n-1}$

Neka je y = f(x) derivabilna funkcija na nekom intervalu. Diferencijal funkcije y = f(x) jednak je

$$dy = f'(x) \cdot dx.$$

Diferencijal funkcije jednak je umnošku (produktu) derivacije te funkcije i diferencijala nezavisne varijable.

Skratiti razlomak znači brojnik i nazivnik tog razlomka podijeliti istim brojem različitim od nule i jedinice

$$\frac{a \cdot n}{b \cdot n} = \frac{a}{b} \; , \; n \neq 0 \; , \; n \neq 1.$$

$$\int C \cdot f(x)\, dx = C \cdot \int f(x)\, dx \text{ gdje je } C \text{ konstanta } (C \neq 0).$$

$$\int \frac{dx}{x} = \ln|x| + C.$$

Zadani integral riješit ćemo uvođenjem zamjene

$$x^3 + 1 = t.$$

Relaciju diferenciramo i izračunamo dx.

$$x^3 + 1 = t \;\Rightarrow\; d\left(x^3 + 1\right) = d(t) \;\Rightarrow\; \left(x^3 + 1\right)' \cdot dx = t' \cdot dt \;\Rightarrow\; \left(\left(x^3\right)' + 1'\right) \cdot dx = 1 \cdot dt \;\Rightarrow$$

$$\Rightarrow \left(3 \cdot x^2 + 0\right) \cdot dx = dt \;\Rightarrow\; 3 \cdot x^2 \cdot dx = dt \;\Rightarrow\; 3 \cdot x^2 \cdot dx = dt \;/ \cdot \frac{1}{3 \cdot x^2} \;\Rightarrow\; dx = \frac{dt}{3 \cdot x^2}.$$

Ako u postavljenom integralu zamijenimo $x^3 + 1$ sa t, a dx sa $\frac{dt}{3 \cdot x^2}$ dobije se:

$$\int \frac{x^2}{x^3 + 1} dx = \int \frac{x^2}{t} \cdot \frac{dt}{3 \cdot x^2} = \int \frac{x^2}{t} \cdot \frac{dt}{3 \cdot x^2} = \int \frac{1}{t} \cdot \frac{dt}{3} = \int \frac{dt}{3 \cdot t} = \frac{1}{3} \cdot \int \frac{dt}{t} = \frac{1}{3} \cdot \ln|t| + C.$$

Umjesto t sada ponovno stavimo $x^3 + 1$ pa je konačno rješenje

$$\int \frac{x^2}{x^3 + 1} dx = \frac{1}{3} \cdot \ln\left|x^3 + 1\right| + C.$$

Prilikom rješavanja integrala metodom zamjene ili supstitucije koristimo kraći put zbog konciznosti i preglednosti postupka.

$$\int \frac{x^2}{x^3 + 1} dx = \left| \begin{array}{l} x^3 + 1 = t \\ 3 \cdot x^2 \, dx = dt \\ dx = \dfrac{dt}{3 \cdot x^2} \end{array} \right| = \int \frac{x^2}{t} \cdot \frac{dt}{3 \cdot x^2} = \int \frac{x^2}{t} \cdot \frac{dt}{3 \cdot x^2} = \int \frac{1}{t} \cdot \frac{dt}{3} = \int \frac{dt}{3 \cdot t} = \frac{1}{3} \cdot \int \frac{dt}{t} = \frac{1}{3} \cdot \ln|t| + C =$$

$$= \frac{1}{3} \cdot \ln\left|x^3 + 1\right| + C.$$

Izrazi između dviju uspravnih crta znače vezu između stare i nove varijable i diferencijala stare varijable dx izraženog pomoću diferencijala nove varijable dt.

Vježba 058

Uporabom metode zamjene ili supstitucije izračunajte $\int \frac{x}{x^2+1} dx.$

Rezultat: $\frac{1}{2} \cdot \ln \left| x^2 + 1 \right| + C.$

Zadatak 059 (Mario, gimnazija)

Uporabom metode zamjene ili supstitucije izračunajte $\int \frac{x}{1-x^2} dx.$

Rješenje 059

Ponovimo!

Neka su f i g derivabilne funkcije na istom intervalu.

$$\text{Derivacija razlike: } (f-g)' = f' - g'.$$

Tablično deriviranje	
Funkcija	**Derivacija**
c	0
x^n	$n \cdot x^{n-1}$

Neka je y = f(x) derivabilna funkcija na nekom intervalu. Diferencijal funkcije y = f(x) jednak je

$$\mathbf{dy = f'(x) \cdot dx}.$$

Diferencijal funkcije jednak je umnošku (produktu) derivacije te funkcije i diferencijala nezavisne varijable.

$$\int C \cdot f(x) dx = C \cdot \int f(x) dx \text{ gdje je } C \text{ konstanta } (C \neq 0).$$

$$\int \frac{dx}{x} = \ln |x| + C.$$

Skratiti razlomak znači brojnik i nazivnik tog razlomka podijeliti istim brojem različitim od nule i jedinice

$$\frac{a \cdot n}{b \cdot n} = \frac{a}{b}, \quad n \neq 0, \quad n \neq 1.$$

Množenje razlomaka

$$\frac{a}{b} \cdot \frac{c}{d} = \frac{a \cdot c}{b \cdot d}.$$

Zadani integral riješit ćemo uvođenjem zamjene

$$1 - x^2 = t.$$

Relaciju diferenciramo i izračunamo dx.

$$1 - x^2 = t \Rightarrow d\left(1 - x^2\right) = d(t) \Rightarrow \left(1 - x^2\right)' \cdot dx = t' \cdot dt \Rightarrow \left(1' - \left(x^2\right)'\right) \cdot dx = 1 \cdot dt \Rightarrow$$

$$\Rightarrow (0 - 2 \cdot x) \cdot dx = dt \Rightarrow -2 \cdot x \cdot dx = dt \Rightarrow -2 \cdot x \cdot dx = dt \;/ \cdot \left(-\frac{1}{2 \cdot x}\right) \Rightarrow dx = -\frac{1}{2} \cdot \frac{dt}{x}.$$

Ako u postavljenom integralu zamijenimo $1 - x^2$ sa t, a dx sa $-\frac{1}{2} \cdot \frac{dt}{x}$ dobije se:

$$\int \frac{x}{1-x^2}\,dx=\int \frac{x}{t}\cdot\left(-\frac{1}{2}\cdot\frac{dt}{x}\right)=\int \frac{x}{t}\cdot\left(-\frac{1}{2}\cdot\frac{dt}{x}\right)=\int\left(-\frac{1}{2}\right)\cdot\frac{dt}{t}=-\frac{1}{2}\cdot\int\frac{dt}{t}=-\frac{1}{2}\cdot\ln|t|+C.$$

Umjesto t sada ponovno stavimo $1 - x^2$ pa je konačno rješenje

$$\int \frac{x}{1-x^2}\,dx=-\frac{1}{2}\cdot\ln\left|1-x^2\right|+C.$$

Prilikom rješavanja integrala metodom zamjene ili supstitucije koristimo kraći put zbog konciznosti i preglednosti postupka.

$$\int \frac{x}{1-x^2}\,dx=\left|\begin{array}{l}1-x^2=t\\ -2\cdot x\cdot dx=dt\ \ /:(-2\cdot x)\\ dx=\dfrac{dt}{-2\cdot x}\end{array}\right|=\int\frac{x}{t}\cdot\frac{dt}{-2\cdot x}=\int\frac{x}{t}\cdot\frac{dt}{-2\cdot x}=\int\frac{1}{t}\cdot\frac{dt}{-2}=\int\frac{dt}{-2\cdot t}=$$

$$=-\frac{1}{2}\cdot\int\frac{dt}{t}=-\frac{1}{2}\cdot\ln|t|+C=-\frac{1}{2}\cdot\ln\left|1-x^2\right|+C.$$

Izrazi između dviju uspravnih crta znače vezu između stare i nove varijable i diferencijala stare varijable dx izraženog pomoću diferencijala nove varijable dt.

Vježba 059

Uporabom metode zamjene ili supstitucije izračunajte $\int \frac{x}{1+x^2}\,dx.$

Rezultat: $\frac{1}{2}\cdot\ln\left|x^2+1\right|+C.$

Zadatak 060 (Mario, gimnazija)

Uporabom metode zamjene ili supstitucije izračunajte $\int (9+3\cdot x)^3\,dx.$

Rješenje 060

Ponovimo!

Neka su f i g derivabilne funkcije na istom intervalu.

$$\text{Derivacija zbroja}: (f+g)'=f'+g'.$$

Tablično deriviranje	
Funkcija	**Derivacija**
c	0
x	1

Neka je y = f(x) derivabilna funkcija na nekom intervalu. Diferencijal funkcije y = f(x) jednak je

dy = f '(x) · dx.

Diferencijal funkcije jednak je umnošku (produktu) derivacije te funkcije i diferencijala nezavisne varijable.

$$\int C\cdot f(x)\,dx=C\cdot\int f(x)\,dx \text{ gdje je } C \text{ konstanta } (C\neq 0).$$

$$\int x^n\,dx=\frac{x^{n+1}}{n+1}+C.$$

Množenje razlomaka

$$\frac{a}{b}\cdot\frac{c}{d}=\frac{a\cdot c}{b\cdot d}.$$

Zadani integral riješit ćemo uvođenjem zamjene

$$9+3\cdot x=t.$$

Relaciju diferenciramo i izračunamo dx.

$$9+3\cdot x=t \;\Rightarrow\; d(9+3\cdot x)=d(t) \;\Rightarrow\; (9+3\cdot x)'\cdot dx=t'\cdot dt \;\Rightarrow\; \left(9'+3\cdot x'\right)\cdot dx=1\cdot dt \;\Rightarrow$$

$$\Rightarrow\; (0+3\cdot 1)\cdot dx=dt \;\Rightarrow\; 3\cdot dx=dt \;\Rightarrow\; 3\cdot dx=dt \;/\cdot\frac{1}{3} \;\Rightarrow\; dx=\frac{dt}{3}.$$

Ako u postavljenom integralu zamijenimo 9 + 3 · x sa t, a dx sa $\frac{dt}{3}$ dobije se:

$$\int(9+3\cdot x)^3\,dx=\int t^3\cdot\frac{dt}{3}=\frac{1}{3}\cdot\int t^3\cdot dt=\frac{1}{3}\cdot\frac{t^4}{4}+C=\frac{1}{12}\cdot t^4+C.$$

Umjesto t sada ponovno stavimo 9 + 3 · x pa je konačno rješenje

$$\int(9+3\cdot x)^3\,dx=\frac{1}{12}\cdot(9+3\cdot x)^4+C.$$

Prilikom rješavanja integrala metodom zamjene ili supstitucije koristimo kraći put zbog konciznosti i preglednosti postupka.

$$\int(9+3\cdot x)^3\,dx=\left|\begin{array}{l}9+3\cdot x=t\\ 3\cdot dx=dt \;/:3\\ dx=\frac{dt}{3}\end{array}\right|=\int t^3\cdot\frac{dt}{3}=\frac{1}{3}\cdot\int t^3\cdot dt=\frac{1}{3}\cdot\frac{t^4}{4}+C=$$

$$=\frac{1}{12}\cdot(9+3\cdot x)^4+C.$$

Izrazi između dviju uspravnih crta znače vezu između stare i nove varijable i diferencijala stare varijable dx izraženog pomoću diferencijala nove varijable dt.

Vježba 060

Uporabom metode zamjene ili supstitucije izračunajte $\int(1+x)^3\,dx.$

Rezultat: $\frac{1}{4}\cdot(1+x)^4+C.$