Zadatak 021 (Alen, gimnazija)

Izračunaj integral:

$$\int \left(x-\sqrt{a}\right)^2 \cdot \left(x+\sqrt{a}\right)^2 dx.$$

Rješenje 021

Ponovimo!

Množenje potencija istih eksponenata: $a^n \cdot b^n = (a \cdot b)^n$.

Razlika kvadrata: $(a-b)\cdot(a+b) = a^2 - b^2$.

Kvadrat razlike: $(a-b)^2 = a^2 - 2\cdot a\cdot b + b^2$.

Najprije podintegralnu funkciju pretvorimo (transformiramo) u podesniji oblik za integriranje:

$$\int \left(x-\sqrt{a}\right)^2 \cdot \left(x+\sqrt{a}\right)^2 dx = \int \left(\left(x-\sqrt{a}\right)\cdot\left(x+\sqrt{a}\right)\right)^2 dx = \int \left(x^2 - \left(\sqrt{a}\right)^2\right)^2 dx = \int \left(x^2 - a\right)^2 dx =$$

$$= \int \left(x^4 - 2\cdot a\cdot x^2 + a^2\right) dx = \int x^4\, dx - 2\cdot a\cdot \int x^2\, dx + a^2 \cdot \int dx = \frac{x^5}{5} - 2\cdot a\cdot \frac{x^3}{3} + a^2\cdot x + C =$$

$$= \frac{1}{5}\cdot x^5 - \frac{2}{3}\cdot a\cdot x^3 + a^2\cdot x + C.$$

Vježba 021

Izračunaj integral:

$$\int (x-1)\cdot(x+1)\, dx.$$

Rezultat: $\frac{1}{3}\cdot x^3 - x + C.$

Zadatak 022 (Sanja, informatika)

Izračunaj integral:

$$\int x\cdot arctg\, x\, dx.$$

Rješenje 022

Ponovimo!

Metoda parcijalne integracije: $\int u\, dv = u\cdot v - \int v\, du.$

$$\int x\cdot arctg\, x\, dx = \begin{bmatrix} u = arctg\, x \Rightarrow du = \frac{1}{1+x^2} dx \\ dv = x\, dx \Rightarrow v = \int x\, dx = \frac{x^2}{2} \\ \text{parcijalna integracija} \end{bmatrix} = \frac{x^2}{2}\cdot arctg\, x - \int \frac{x^2}{2}\cdot \frac{1}{1+x^2} dx =$$

$$= \frac{1}{2}\cdot x^2 \cdot arctg\, x - \frac{1}{2}\cdot \int \frac{x^2}{1+x^2} dx.$$

(Pogledati Polinomi (5), Zadatak 001)

Ako je kod racionalne funkcije $\frac{P(x)}{Q(x)}$, gdje su P(x) i Q(x) cijeli polinomi, stupanj brojnika P(x) veći ili jednak stupnju nazivnika Q(x), moramo te polinome podijeliti:

$$\frac{x^2}{x^2+1} = \begin{array}{l} x^2 \\ \underline{\pm\ x^2 \pm 1} \\ \quad\ \ -1 \end{array} : \left(x^2+1\right) = 1 \Rightarrow \frac{x^2}{x^2+1} = 1 - \frac{1}{1+x^2}.$$

Nastavljamo integrirati:

$$\int x\cdot arctg\,x\,dx=\frac{1}{2}\cdot x^2\cdot arctg\,x-\frac{1}{2}\cdot\int\left(1-\frac{1}{1+x^2}\right)dx=\frac{1}{2}\cdot x^2\cdot arctg\,x-\frac{1}{2}\cdot\left[\int dx-\int\frac{dx}{1+x^2}\right]=$$

$$=\frac{1}{2}\cdot x^2\cdot arctg\,x-\frac{1}{2}\cdot\left[x-arctg\,x\right]+C=\frac{1}{2}\cdot x^2\cdot arctg\,x-\frac{1}{2}\cdot x+\frac{1}{2}\cdot arctg\,x+C=$$

$$=\frac{1}{2}\cdot x^2\cdot arctg\,x+\frac{1}{2}\cdot arctg\,x-\frac{x}{2}+C=\frac{x^2+1}{2}\cdot arctg\,x-\frac{x}{2}+C.$$

Vježba 022

Izračunaj integral:

$$\int arctg\,x\,dx.$$

Rezultat: $x\cdot arctg\,x-\frac{1}{2}\cdot\ln\left(1+x^2\right)+C.$

Zadatak 023 (Iva, ekonomija)

Izračunaj integral:

$$\int tg^2\,x\,dx.$$

Rješenje 023

Ponovimo!

$$tg\,x=\frac{\sin x}{\cos x}\quad,\quad\cos^2 x+\sin^2 x=1\quad,\quad\frac{a-b}{c}=\frac{a}{c}-\frac{b}{c}.$$

Integral razlike: $\int\left(f\left(x\right)-g\left(x\right)\right)dx=\int f\left(x\right)dx-\int g\left(x\right)dx.$

Računamo integral:

$$\int tg^2\,x\,dx=\int\frac{\sin^2 x}{\cos^2 x}dx=\int\frac{1-\cos^2 x}{\cos^2 x}dx=\int\left(\frac{1}{\cos^2 x}-\frac{\cos^2 x}{\cos^2 x}\right)dx=\int\left(\frac{1}{\cos^2 x}-1\right)dx=$$

$$=\int\frac{dx}{\cos^2 x}-\int dx=tg\,x-x+C.$$

Vježba 023

Izračunaj integral: $\int ctg^2\,x\,dx.$

Rezultat: $-ctg\,x-x+C.$

Zadatak 024 (Ivana, gimnazija)

Izračunaj integral:

$$\int\sin^2 x\,dx.$$

Rješenje 024

Ponovimo!

Funkcija polovičnog kuta:

$$\sin\frac{\alpha}{2}=\sqrt{\frac{1}{2}\cdot\left(1-\cos\alpha\right)}\ \Rightarrow\ \sin\frac{\alpha}{2}=\sqrt{\frac{1}{2}\cdot\left(1-\cos\alpha\right)}\ /^2\ \Rightarrow\ \sin^2\frac{\alpha}{2}=\frac{1}{2}\cdot\left(1-\cos\alpha\right)\ \Rightarrow\ \sin^2 x=\frac{1}{2}\cdot\left(1-\cos 2x\right).$$

Računamo integral:

$$\int\sin^2 x\,dx=\int\frac{1}{2}\cdot\left(1-\cos 2x\right)dx=\frac{1}{2}\cdot\int\left(1-\cos 2x\right)dx=\frac{1}{2}\cdot\left[\int dx-\int\cos 2x\,dx\right]=$$

$$=\frac{1}{2}\cdot\left[\int dx-\left[\begin{array}{c}\text{supstitucija}\\ t=2x\ \Rightarrow\ dt=2\cdot dx\ \Rightarrow\ dx=\frac{1}{2}\cdot dt\end{array}\right]\right]=\frac{1}{2}\cdot\left[\int dx-\int\cos t\cdot\frac{1}{2}\cdot dt\right]=\frac{1}{2}\cdot\left[\int dx-\frac{1}{2}\cdot\int\cos t\,dt\right]=$$

$$=\frac{1}{2}\cdot\left[x-\frac{1}{2}\cdot\sin t\right]=\frac{1}{2}\cdot\left[x-\frac{1}{2}\cdot\sin 2x\right]+C=\frac{1}{2}\cdot x-\frac{1}{4}\cdot\sin 2x+C=\frac{x}{2}-\frac{\sin 2x}{4}+C.$$

Vježba 024

Izračunaj integral: $\int \cos^2 x\,dx.$

Rezultat: $\frac{x}{2}+\frac{\sin 2x}{4}+C.$

Zadatak 025 (Ivana, gimnazija)

Izračunaj integral:

$$\int \sin 5x\cdot\sin 3x\,dx.$$

Rješenje 025

Ponovimo!

Formula za pretvorbu produkta u sumu trigonometrijskih funkcija:

$$\sin\alpha\cdot\sin\beta=\frac{1}{2}\cdot\left[\cos(\alpha-\beta)-\cos(\alpha+\beta)\right].$$

Računamo integral:

$$\int \sin 5x\cdot\sin 3x\,dx=\int\frac{1}{2}\cdot\left[\cos(5x-3x)-\cos(5x+3x)\right]dx=\frac{1}{2}\cdot\int\left[\cos 2x-\cos 8x\right]dx=$$

$$=\frac{1}{2}\cdot\int\cos 2x\,dx-\frac{1}{2}\cdot\int\cos 8x\,dx=\frac{1}{2}\cdot\left[\begin{array}{l}\text{supstitucija}\\ t=2x\\ dt=2\cdot dx\ \Rightarrow\ dx=\frac{1}{2}\cdot dt\end{array}\right]-\frac{1}{2}\cdot\left[\begin{array}{l}\text{supstitucija}\\ u=8x\\ du=8\cdot dx\ \Rightarrow\ dx=\frac{1}{8}\cdot du\end{array}\right]=$$

$$=\frac{1}{2}\cdot\int\cos t\cdot\frac{1}{2}\cdot dt-\frac{1}{2}\cdot\int\cos u\cdot\frac{1}{8}\cdot du=\frac{1}{4}\cdot\int\cos t\,dt-\frac{1}{16}\cdot\int\cos u\,du=\frac{1}{4}\cdot\sin t-\frac{1}{16}\cdot\sin u+C=$$

$$=\frac{1}{4}\cdot\sin 2x-\frac{1}{16}\cdot\sin 8x+C=\frac{\sin 2x}{4}-\frac{\sin 8x}{16}+C.$$

Vježba 025

Izračunaj integral:

$$\int \sin 10x\cdot\sin 15x\,dx.$$

Rezultat: $\frac{\sin 5x}{10}-\frac{\sin 25x}{50}+C.$

Zadatak 026 (Sanja, informatika)

Izračunaj integral:

$$\int e^{2x}\cdot\sin 3x\,dx.$$

Rješenje 026

Ponovimo!

Parcijalna integracija:

Ako su u = u(x) i v = v(x) neprekinuto derivabilne funkcije, tada je:

$$\int u\ dv=u\cdot v-\int v\,du.$$

Važni integrali:

$$\int\sin ax\,dx=-\frac{1}{a}\cdot\cos ax\quad,\quad\int\cos ax\,dx=\frac{1}{a}\cdot\sin ax\quad,\quad\int e^{ax}\,dx=\frac{1}{a}\cdot e^{ax}.$$

Računamo integral:

$$\int e^{2x}\cdot\sin 3x\,dx=\left[\begin{array}{c}\text{parcijalna integracija}\\ u=\sin 3x\ \Rightarrow\ du=(\sin 3x)'\ dx=\cos 3x\cdot 3\cdot dx=3\cdot\cos 3x\ dx\\ dv=e^{2x}\,dx\ \Rightarrow\ v=\int e^{2x}\,dx=\frac{1}{2}\cdot e^{2x}\end{array}\right]=$$

$$=\sin 3x\cdot\frac{1}{2}\cdot e^{2x}-\int\frac{1}{2}\cdot e^{2x}\cdot 3\cdot\cos 3x\,dx=\frac{1}{2}\cdot e^{2x}\cdot\sin 3x\cdot-\frac{3}{2}\cdot\int e^{2x}\cdot\cos 3x\,dx=$$

$$=\frac{1}{2}\cdot e^{2x}\cdot\sin 3x-\frac{3}{2}\cdot\left[\begin{array}{c}\text{opet parcijalna integracija}\\ u=\cos 3x\ \Rightarrow\ du=(\cos 3x)'\ dx=-\sin 3x\cdot 3\cdot dx=-3\cdot\sin 3x\ dx\\ dv=e^{2x}\,dx\ \Rightarrow\ v=\int e^{2x}\,dx=\frac{1}{2}\cdot e^{2x}\end{array}\right]=$$

$$=\frac{1}{2}\cdot e^{2x}\cdot\sin 3x-\frac{3}{2}\cdot\left(\cos 3x\cdot\frac{1}{2}\cdot e^{2x}-\int\frac{1}{2}\cdot e^{2x}\cdot(-3\cdot\sin 3x)\,dx\right)=$$

$$=\frac{1}{2}\cdot e^{2x}\cdot\sin 3x-\frac{3}{2}\cdot\left(\frac{1}{2}\cdot e^{2x}\cdot\cos 3x+\frac{3}{2}\cdot\int e^{2x}\cdot\sin 3x\,dx\right)=$$

$$=\frac{1}{2}\cdot e^{2x}\cdot\sin 3x-\frac{3}{4}\cdot e^{2x}\cdot\cos 3x-\frac{9}{4}\cdot\int e^{2x}\cdot\sin 3x\,dx.$$

Vidimo da smo opet dobili početni integral. Zbog toga je

$$\int e^{2x}\cdot\sin 3x\,dx=\frac{1}{2}\cdot e^{2x}\cdot\sin 3x-\frac{3}{4}\cdot e^{2x}\cdot\cos 3x-\frac{9}{4}\cdot\int e^{2x}\cdot\sin 3x\,dx,$$

odakle slijedi (integral s lijeve strane prebacimo na desnu stranu)

$$\int e^{2x}\cdot\sin 3x\,dx=\frac{1}{2}\cdot e^{2x}\cdot\sin 3x-\frac{3}{4}\cdot e^{2x}\cdot\cos 3x-\frac{9}{4}\cdot\int e^{2x}\cdot\sin 3x\,dx\ \Rightarrow$$

$$\Rightarrow\ \int e^{2x}\cdot\sin 3x\,dx+\frac{9}{4}\cdot\int e^{2x}\cdot\sin 3x\,dx=\frac{1}{2}\cdot e^{2x}\cdot\sin 3x-\frac{3}{4}\cdot e^{2x}\cdot\cos 3x\ \Rightarrow$$

$$\Rightarrow\ \int e^{2x}\cdot\sin 3x\,dx\cdot\left(1+\frac{9}{4}\right)=\frac{1}{2}\cdot e^{2x}\cdot\left(\sin 3x-\frac{3}{2}\cdot\cos 3x\right)\ \Rightarrow$$

$$\Rightarrow\ \frac{13}{4}\cdot\int e^{2x}\cdot\sin 3x\,dx=\frac{1}{2}\cdot e^{2x}\cdot\left(\sin 3x-\frac{3}{2}\cdot\cos 3x\right)\ /\cdot\frac{4}{13}\ \Rightarrow$$

$$\Rightarrow\ \int e^{2x}\cdot\sin 3x\,dx=\frac{2}{13}\cdot e^{2x}\cdot\left(\sin 3x-\frac{3}{2}\cdot\cos 3x\right)+C.$$

Vježba 026

Izračunaj integral:

$$\int x\cdot\sin x\,dx.$$

Rezultat: $\sin x-x\cdot\cos x+C.$

Zadatak 027 (Sanja, informatika)

Izračunaj integral:

$$\int x\cdot\sin x\cdot\cos x\,dx.$$

Rješenje 027

Ponovimo!

Parcijalna integracija:

Ako su u = u(x) i v = v(x) neprekinuto derivabilne funkcije, tada je:

$$\int u\ dv = u \cdot v - \int v\,du.$$

Važni integrali:

$$\int \sin ax\,dx = -\frac{1}{a}\cdot\cos ax \quad , \quad \int \cos ax\,dx = \frac{1}{a}\cdot\sin ax.$$

Sinus dvostrukog kuta: $2\cdot\sin x\cdot\cos x = \sin 2x.$

Računamo integral:

$$\int x\cdot\sin x\cdot\cos x\,dx = \int x\cdot\frac{1}{2}\cdot 2\cdot\sin x\cdot\cos x\,dx = \frac{1}{2}\cdot\int x\cdot 2\cdot\sin x\cdot\cos x\,dx = \frac{1}{2}\cdot\int x\cdot\sin 2x\,dx =$$

$$= \frac{1}{2}\cdot\left[\begin{array}{l} \quad\quad\quad \text{parcijalna integracija} \\ u = x \ \Rightarrow\ du = dx \\ dv = \sin 2x\,dx \ \Rightarrow\ v = \int \sin 2x\,dx = -\frac{1}{2}\cdot\cos 2x \end{array}\right] = \frac{1}{2}\cdot\left(-\frac{1}{2}\cdot x\cdot\cos 2x - \int\left(-\frac{1}{2}\right)\cdot\cos 2x\,dx\right) =$$

$$= \frac{1}{2}\cdot\left(-\frac{x\cdot\cos 2x}{2} + \frac{1}{2}\cdot\int\cos 2x\,dx\right) = -\frac{x\cdot\cos 2x}{4} + \frac{1}{4}\cdot\int\cos 2x\,dx = -\frac{x\cdot\cos 2x}{4} + \frac{1}{4}\cdot\frac{1}{2}\cdot\sin 2x + C =$$

$$= -\frac{x\cdot\cos 2x}{4} + \frac{\sin 2x}{8} + C.$$

Vježba 027

Izračunaj integral:

$$8\cdot\int x\cdot\sin x\cdot\cos x\,dx.$$

Rezultat: $-2\cdot x\cdot\cos 2x + \sin 2x + C.$

Zadatak 028 (Marina, ekonomija)

Izračunaj integral:

$$\int \sin(\ln x)\,dx.$$

Rješenje 028

Ponovimo!

Parcijalna integracija:

Ako su u = u(x) i v = v(x) neprekinuto derivabilne funkcije, tada je:

$$\int u\ dv = u \cdot v - \int v\,du.$$

Računamo integral:

$$\int\sin(\ln x)\,dx = \left[\begin{array}{l} \quad\quad\quad \text{parcijalna integracija} \\ u = \sin(\ln x) \ \Rightarrow\ du = \cos(\ln x)\cdot\frac{1}{x}\ dx \\ dv = dx \ \Rightarrow\ v = \int dx = x \end{array}\right] = x\cdot\sin(\ln x) - \int x\cdot\cos(\ln x)\cdot\frac{1}{x}\ dx =$$

$$= x\cdot\sin(\ln x) - \int\cos(\ln x)\ dx = x\cdot\sin(\ln x) - \left[\begin{array}{l} \quad\quad\quad \text{opet parcijalna integracija} \\ u = \cos(\ln x) \ \Rightarrow\ du = -\sin(\ln x)\cdot\frac{1}{x}\ dx \\ dv = dx \ \Rightarrow\ v = \int dx = x \end{array}\right] =$$

$$= x\cdot\sin(\ln x) - \left(x\cdot\cos(\ln x) - \int x\cdot(-\sin(\ln x))\cdot\frac{1}{x}\ dx\right) = x\cdot\sin(\ln x) - \left(x\cdot\cos(\ln x) + \int\sin(\ln x)\,dx\right) =$$

$$= x\cdot\sin(\ln x) - x\cdot\cos(\ln x) - \int\sin(\ln x)\,dx.$$

Vidimo da smo opet dobili početni integral. Zbog toga je

$$\int \sin(\ln x)\,dx = x\cdot\sin(\ln x) - x\cdot\cos(\ln x) - \int \sin(\ln x)\,dx,$$

odakle slijedi (integral s lijeve strane prebacimo na desnu stranu)

$$\int \sin(\ln x)\,dx + \int \sin(\ln x)\,dx = x\cdot\sin(\ln x) - x\cdot\cos(\ln x) \Rightarrow 2\cdot\int \sin(\ln x)\,dx = x\cdot(\sin(\ln x) - \cos(\ln x)) \;/:2 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \int \sin(\ln x)\,dx = \frac{x}{2}\cdot(\sin(\ln x) - \cos(\ln x)) + C.$$

Vježba 028

Izračunaj integral:

$$\int e^{ax}\cdot\sin bx\,dx.$$

Rezultat: $\dfrac{e^{ax}\cdot(a\cdot\sin bx - b\cdot\cos bx)}{a^2+b^2} + C.$

Zadatak 029 (Sanja, informatika)

Izračunaj integral:

$$\int \ln\left(x+\sqrt{1+x^2}\right)dx.$$

Rješenje 029

Ponovimo!

Parcijalna integracija:

Ako su u = u(x) i v = v(x) neprekinuto derivabilne funkcije, tada je:

$$\int u\,dv = u\cdot v - \int v\,du.$$

Računamo integral:

$$\int \ln\left(x+\sqrt{1+x^2}\right)dx =$$

$$= \left[\begin{array}{l} \text{parcijalna integracija} \\ u = \ln\left(x+\sqrt{1+x^2}\right) \Rightarrow du = \dfrac{1}{x+\sqrt{1+x^2}}\cdot\left(1+\dfrac{1}{2\cdot\sqrt{1+x^2}}\cdot 2\cdot x\right)dx = \\ = \dfrac{1}{x+\sqrt{1+x^2}}\cdot\left(1+\dfrac{x}{\sqrt{1+x^2}}\right)dx = \dfrac{1}{x+\sqrt{1+x^2}}\cdot\dfrac{\sqrt{1+x^2}+x}{\sqrt{1+x^2}}\,dx = \dfrac{dx}{\sqrt{1+x^2}} \\ dv = dx \Rightarrow v = \int dx = x \end{array}\right] =$$

$$= x\cdot\ln\left(x+\sqrt{1+x^2}\right) - \int x\cdot\frac{dx}{\sqrt{1+x^2}} = x\cdot\ln\left(x+\sqrt{1+x^2}\right) - \int \frac{x\,dx}{\sqrt{1+x^2}} =$$

$$= x\cdot\ln\left(x+\sqrt{1+x^2}\right) - \left[\begin{array}{l} \text{supstitucija} \\ t^2 = 1+x^2 \Rightarrow t = \sqrt{1+x^2} \\ 2\cdot t\,dt = 2\cdot x\,dx \;/:2 \Rightarrow t\,dt = x\,dx \end{array}\right] = x\cdot\ln\left(x+\sqrt{1+x^2}\right) - \int \frac{t\,dt}{\sqrt{t^2}} =$$

$$= x\cdot\ln\left(x+\sqrt{1+x^2}\right) - \int \frac{t\,dt}{t} = x\cdot\ln\left(x+\sqrt{1+x^2}\right) - \int dt = x\cdot\ln\left(x+\sqrt{1+x^2}\right) - t =$$

$$= x\cdot\ln\left(x+\sqrt{1+x^2}\right) - \sqrt{1+x^2} + C.$$

Vježba 029

Izračunaj integral:

$$\int x\cdot e^{-x}\,dx.$$

Rezultat: $-\dfrac{x+1}{e^{x}}+C.$

Zadatak 030 (Sanja, informatika)

Izračunaj integral:

$$\int \frac{x\cdot\cos x}{\sin^2 x}\,dx.$$

Rješenje 030

Ponovimo!

Parcijalna integracija:

Ako su u = u(x) i v = v(x) neprekinuto derivabilne funkcije, tada je:

$$\int u\,dv=u\cdot v-\int v\,du.$$

Računamo integral:

$$\int \frac{x\cdot\cos x}{\sin^2 x}\,dx=$$

$$=\left[\begin{array}{l}\text{parcijalna integracija}\\ u=x\ \Rightarrow\ du=dx\\ dv=\dfrac{\cos x}{\sin^2 x}dx\ \Rightarrow\ v=\displaystyle\int\frac{\cos x}{\sin^2 x}dx=\left[\begin{array}{c}\text{supstitucija}\\ t=\sin x\ \Rightarrow\ dt=\cos x\,dx\end{array}\right]=\int\frac{dt}{t^2}=-\frac{1}{t}=-\frac{1}{\sin x}\end{array}\right]=$$

$$=-\frac{x}{\sin x}-\int\left(-\frac{1}{\sin x}\right)dx=-\frac{x}{\sin x}+\int\frac{dx}{\sin x}=-\frac{x}{\sin x}+\ln\left|tg\frac{x}{2}\right|+C.$$

Vježba 030

Izračunaj integral:

$$\int \arcsin x\,dx.$$

Rezultat: $x\cdot\arcsin x+\sqrt{1+x^2}+C.$

Zadatak 031 (Sanja, informatika)

Izračunajte integral:

$$\int \frac{x^2}{(x+1)\cdot(x-1)^2}\,dx.$$

Rješenje 031

Ponovimo!

$$\int\frac{dx}{x\pm a}=\ln|x\pm a| \quad , \quad \int\frac{dx}{(x\pm a)^2}=-\frac{1}{x\pm a}.$$

Kvadrat razlike: $(a-b)^2=a^2-2\cdot a\cdot b+b^2.$ Razlika kvadrata: $(a+b)\cdot(a-b)=a^2-b^2.$

Kratak opis integriranja racionalne funkcije (racionalnog razlomka):

① Ako je zadan nepravi racionalni razlomak, tj. ako je stupanj polinoma u brojniku veći ili jednak od stupnja polinoma u nazivniku, treba brojnik podijeliti s nazivnikom (dijeljenje polinoma!)

② Integriranje racionalne funkcije nakon odvajanja cijelog dijela svodimo na integriranje pravog racionalnog razlomka $\frac{P(x)}{Q(x)}$, gdje su P(x) i Q(x) cijeli polinomi, pri čemu je stupanj polinoma P(x) niži od stupnja polinoma nazivnika Q(x).

③ Ako je Q(x) polinom u nazivniku oblika

$$Q(x) = (x - a) \cdot (x - b) \cdot (x - c),$$

gdje su a, b i c različiti realni korijeni polinoma Q(x), onda je moguće rastaviti razlomak $\frac{P(x)}{Q(x)}$ na parcijalne razlomke:

$$\frac{P(x)}{Q(x)} = \frac{A}{x-a} + \frac{B}{x-b} + \frac{C}{x-c}.$$

④ Za izračunavanje neodređenih koeficijenata A, B i C uvijek množimo taj identitet s nazivnikom lijeve strane da se riješimo svih nazivnika:

$$\frac{P(x)}{Q(x)} = \frac{A}{x-a} + \frac{B}{x-b} + \frac{C}{x-c} \Rightarrow \frac{P(x)}{(x-a)\cdot(x-b)\cdot(x-c)} = \frac{A}{x-a} + \frac{B}{x-b} + \frac{C}{x-c} \;/\cdot(x-a)\cdot(x-b)\cdot(x-c) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow P(x) = A\cdot(x-b)\cdot(x-c) + B\cdot(x-a)\cdot(x-c) + C\cdot(x-a)\cdot(x-b).$$

⑤ Izmnožimo sve zagrade na desnoj strani pa skupimo zajedno članove istih potencija baze x, poredavši te skupine po padajućim potencijama baze x, a lijevu stranu identiteta uvijek prepisujemo.

⑥ Ako su dva polinoma identički jednaki, tada su jednaki koeficijenti istih potencija baze x.

⑦ Dobije se sustav linearnih jednadžbi iz kojeg odredimo vrijednosti koeficijenata A, B i C.

Kratak opis integriranja racionalne funkcije (racionalnog razlomka):

① Ako je zadan nepravi racionalni razlomak, tj. ako je stupanj polinoma u brojniku veći ili jednak od stupnja polinoma u nazivniku, treba brojnik podijeliti s nazivnikom (dijeljenje polinoma!)

② Integriranje racionalne funkcije nakon odvajanja cijelog dijela svodimo na integriranje pravog racionalnog razlomka $\frac{P(x)}{Q(x)}$, gdje su P(x) i Q(x) cijeli polinomi, pri čemu je stupanj polinoma P(x) niži od stupnja polinoma nazivnika Q(x).

③ Ako je Q(x) polinom u nazivniku oblika

$$Q(x) = (x - a) \cdot (x - b)^2 \cdot (x - c)^3,$$

gdje su a, b i c različiti realni korijeni polinoma Q(x), pri čemu je b korijen višestrukosti 2, a c korijen višestrukosti 3, onda je moguće rastaviti razlomak $\frac{P(x)}{Q(x)}$ na parcijalne razlomke:

$$\frac{P(x)}{Q(x)} = \frac{A}{x-a} + \frac{B}{x-b} + \frac{C}{(x-b)^2} + \frac{D}{x-c} + \frac{E}{(x-c)^2} + \frac{F}{(x-c)^3}.$$

④ Za izračunavanje neodređenih koeficijenata A, B, C, D, E i F uvijek množimo taj identitet s nazivnikom lijeve strane da se riješimo svih nazivnika:

$$\frac{P(x)}{Q(x)} = \frac{A}{x-a} + \frac{B}{x-b} + \frac{C}{(x-b)^2} + \frac{D}{x-c} + \frac{E}{(x-c)^2} + \frac{F}{(x-c)^3} \Rightarrow$$

$$\frac{P(x)}{(x-a)\cdot(x-b)^2\cdot(x-c)^3} = \frac{A}{x-a} + \frac{B}{x-b} + \frac{C}{(x-b)^2} + \frac{D}{x-c} + \frac{E}{(x-c)^2} + \frac{F}{(x-c)^3} \;/\cdot(x-a)\cdot(x-b)^2\cdot(x-c)^3 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow P(x) = A\cdot(x-b)^2\cdot(x-c)^3 + B\cdot(x-a)\cdot(x-b)\cdot(x-c)^3 + C\cdot(x-a)\cdot(x-c)^3 +$$

$$+ D\cdot(x-a)\cdot(x-b)^2\cdot(x-c)^2 + E\cdot(x-a)\cdot(x-b)^2\cdot(x-c) + F\cdot(x-a)\cdot(x-b)^2.$$

⑤ Nakon kvadriranja i kubiranja izmnožimo sve zagrade na desnoj strani pa skupimo zajedno članove istih potencija baze x, poredavši te skupine po padajućim potencijama baze x, a lijevu stranu identiteta uvijek prepisujemo.

⑥ Ako su dva polinoma identički jednaki, tada su jednaki koeficijenti istih potencija baze x.

⑦ Dobije se sustav linearnih jednadžbi iz kojeg odredimo tražene vrijednosti koeficijenata A, B, C, D, E i F.

Zato ćemo najprije izračunati neodređene koeficijente:

$$\frac{x^2}{(x+1)\cdot(x-1)^2}=\frac{A}{x+1}+\frac{B}{x-1}+\frac{C}{(x-1)^2} \Rightarrow \frac{x^2}{(x+1)\cdot(x-1)^2}=\frac{A}{x+1}+\frac{B}{x-1}+\frac{C}{(x-1)^2} \;/\cdot(x+1)\cdot(x-1)^2 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow x^2=A\cdot(x-1)^2+B\cdot(x+1)\cdot(x-1)+C\cdot(x+1) \Rightarrow x^2=A\cdot\left(x^2-2\cdot x+1\right)+B\cdot\left(x^2-1\right)+C\cdot(x+1) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow x^2=A\cdot x^2-2\cdot A\cdot x+A+B\cdot x^2-B+C\cdot x+C \Rightarrow x^2=(A+B)\cdot x^2+(-2\cdot A+C)\cdot x+(A-B+C) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 1\cdot x^2+0\cdot x+0=(A+B)\cdot x^2+(-2\cdot A+C)\cdot x+(A-B+C) \Rightarrow \left[\begin{matrix}\text{jednakost polinoma}\\ ⑥\end{matrix}\right] \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \left.\begin{matrix}A+B=1\\ -2\cdot A+C=0\\ A-B+C=0\end{matrix}\right\} \Rightarrow \left.\begin{matrix}A+B=1\\ C=2\cdot A\\ A-B+C=0\end{matrix}\right\} \Rightarrow \left[\begin{matrix}\text{uvrstimo C iz druge jednadžbe}\\ \text{u treću jednadžbu}\end{matrix}\right] \Rightarrow \left.\begin{matrix}A+B=1\\ A-B+2\cdot A=0\end{matrix}\right\} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \left.\begin{matrix}A+B=1\\ 3\cdot A-B=0\end{matrix}\right\} \Rightarrow \left[\begin{matrix}\text{metoda suprotnih koeficijenata,}\\ \text{zbrojimo jednadžbe}\end{matrix}\right] \Rightarrow 4\cdot A=1 \;/:4 \Rightarrow A=\frac{1}{4} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \left.\begin{matrix}A=\frac{1}{4}\\ A+B=1\\ C=2\cdot A\end{matrix}\right\} \Rightarrow \Rightarrow \left.\begin{matrix}\frac{1}{4}+B=1\\ C=2\cdot\frac{1}{4}\end{matrix}\right\} \Rightarrow \left.\begin{matrix}B=1-\frac{1}{4}\\ C=\frac{2}{4}\end{matrix}\right\} \Rightarrow \left.\begin{matrix}B=\frac{3}{4}\\ C=\frac{1}{2}\end{matrix}\right\}.$$

Sada računamo integral:

$$\int\frac{x^2}{(x+1)\cdot(x-1)^2}\,dx=\int\left(\frac{\frac{1}{4}}{x+1}+\frac{\frac{3}{4}}{x-1}+\frac{\frac{1}{2}}{(x-1)^2}\right)dx=$$

$$=\frac{1}{4}\cdot\int\frac{dx}{x+1}+\frac{3}{4}\cdot\int\frac{dx}{x-1}+\frac{1}{2}\cdot\int\frac{dx}{(x-1)^2}=\frac{1}{4}\cdot\ln|x+1|+\frac{3}{4}\cdot\ln|x-1|+\frac{1}{2}\cdot\left(-\frac{1}{x-1}\right)=$$

$$=\frac{1}{4}\cdot\ln|x+1|+\frac{3}{4}\cdot\ln|x-1|-\frac{1}{2\cdot(x-1)}+C.$$

Vježba 031

Izračunajte integral:

$$\int\frac{dx}{(x-1)\cdot(x+1)^2}.$$

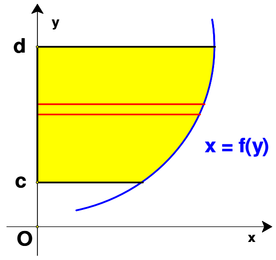
Rezultat: $\frac{1}{4}\cdot\ln|x-1|-\frac{1}{4}\cdot\ln|x+1|-\frac{1}{2\cdot(x+1)}+C=-\frac{1}{2\cdot(x+1)}+\frac{1}{4}\cdot\ln\left|\frac{x-1}{x+1}\right|+C.$

Zadatak 032 (Sanja, informatika)

Odredite površinu lika omeđenog krivuljom $x = f(y) = y^2 - 2\cdot y - 3$ i ordinatnom osi.

Rješenje 032

Ponovimo!



Ako je neprekinuta krivulja zadana u pravokutnim koordinatama jednadžbom x = f(y), onda se površina krivocrtnog trapeza omeđenog tom krivuljom, dvjema horizontalama u točkama y = c i y = d te odsječkom osi ordinate $c \le y \le d$ određuje formulom:

$$S = \int_c^d f(y)\,dy.$$

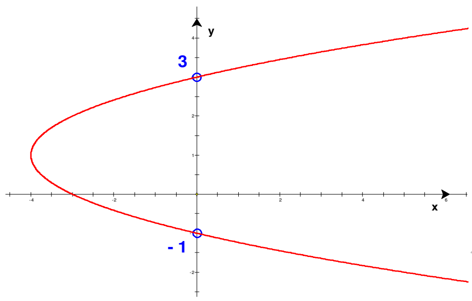
Najprije odredimo ordinate točaka u kojima zadana krivulja siječe ordinatnu os:

$$\left.\begin{array}{l} x = 0 \\ x = f(y) = y^2 - 2 \cdot y - 3 \end{array}\right\} \Rightarrow y^2 - 2 \cdot y - 3 = 0 \Rightarrow \left.\begin{array}{l} a = 1 \\ b = -2 \\ c = -3 \end{array}\right\} \Rightarrow y_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4 \cdot a \cdot c}}{2 \cdot a} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow y_{1,2} = \frac{2 \pm \sqrt{4 - 4 \cdot 1 \cdot (-3)}}{2 \cdot 1} \Rightarrow y_{1,2} = \frac{2 \pm \sqrt{4 + 12}}{2} \Rightarrow y_{1,2} = \frac{2 \pm \sqrt{16}}{2} \Rightarrow y_{1,2} = \frac{2 \pm 4}{2} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \left.\begin{array}{l} y_1 = \frac{2+4}{2} \\ y_2 = \frac{2-4}{2} \end{array}\right\} \Rightarrow \left.\begin{array}{l} y_1 = \frac{6}{2} = 3 \\ y_2 = \frac{-2}{2} = -1 \end{array}\right\}.$$

Sa slike vidi se:



$$S = \int_3^{-1} \left(y^2 - 2 \cdot y - 3\right) dy = \int_3^{-1} y^2\,dy - 2 \cdot \int_3^{-1} y\,dy - 3 \cdot \int_3^{-1} dy =$$

$$= \frac{y^3}{3} \Big|_3^{-1} - 2 \cdot \frac{y^2}{2} \Big|_3^{-1} - 3 \cdot y \Big|_3^{-1} =$$

$$= \frac{1}{3} \cdot \left((-1)^3 - 3^3\right) - \left((-1)^2 - 3^2\right) - 3 \cdot (-1 - 3) =$$

$$= \frac{1}{3} \cdot (-1 - 27) - (1 - 9) - 3 \cdot (-4) = -\frac{28}{3} + 8 + 12 = \frac{-28 + 24 + 36}{3} = \frac{32}{3} = 10\frac{2}{3}.$$

Vježba 032

Odredite površinu lika omeđenog krivuljom $x = f(y) = 2 - y - y^2$ i ordinatnom osi.

Rezultat: 4.5.

Zadatak 033 (Sanja, informatika)

Odredite površinu lika omeđenog krivuljama $y = f_1(x) = x^2 + 2 \cdot x + 1$ i $y = f_2(x) = -x^2 + \frac{5}{2}$.

Rješenje 033

Ponovimo!

Kada je površina S omeđena sa dvije neprekinute krivulje $y = f_1(x)$ i $y = f_2(x)$ i sa dvije vertikale x = a i x = b, gdje je $f_1(x) \le f_2(x)$ za $a \le x \le b$ vrijedi formula:

$$S = \int_a^b \left[f_2(x) - f_1(x)\right] dx.$$

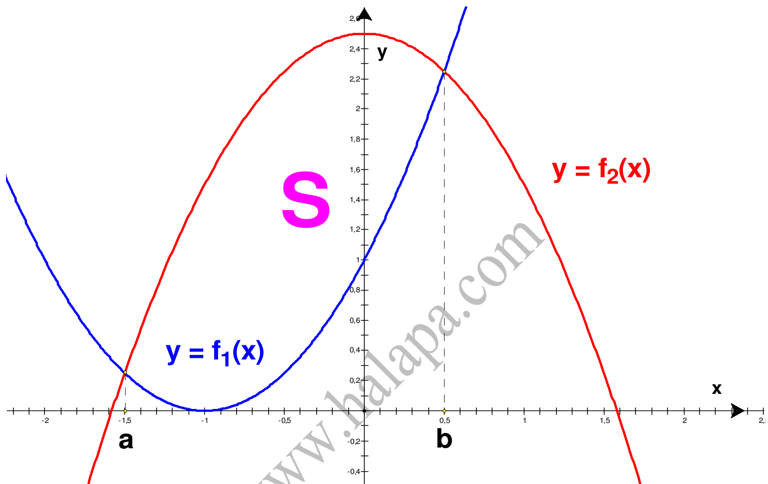
Najprije odredimo granice integriranja tako što riješimo sustav jednadžbi, tj. nađemo sjecišta zadanih krivulja (parabola):

$$\left.\begin{array}{l} y = x^2 + 2\cdot x + 1 \\ y = -x^2 + \frac{5}{2} \end{array}\right\} \Rightarrow x^2 + 2\cdot x + 1 = -x^2 + \frac{5}{2} \Rightarrow x^2 + 2\cdot x + 1 + x^2 - \frac{5}{2} = 0 \Rightarrow 2\cdot x^2 + 2\cdot x + 1 - \frac{5}{2} = 0 \ /\cdot 2 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 4\cdot x^2 + 4\cdot x + 2 - 5 = 0 \Rightarrow 4\cdot x^2 + 4\cdot x - 3 = 0 \Rightarrow \left.\begin{array}{l} a = 4 \\ b = 4 \\ c = -3 \end{array}\right\} \Rightarrow x_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4\cdot a\cdot c}}{2\cdot a} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow x_{1,2} = \frac{-4 \pm \sqrt{16 - 4\cdot 4\cdot(-3)}}{2\cdot 4} \Rightarrow x_{1,2} = \frac{-4 \pm \sqrt{16 + 48}}{8} \Rightarrow x_{1,2} = \frac{-4 \pm \sqrt{64}}{8} \Rightarrow x_{1,2} = \frac{-4 \pm 8}{8} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \left.\begin{array}{l} x_1 = \frac{-4+8}{8} \\ x_2 = \frac{-4-8}{8} \end{array}\right\} \Rightarrow \left.\begin{array}{l} x_1 = \frac{4}{8} = \frac{1}{2} \\ x_2 = \frac{-12}{8} = -\frac{3}{2} \end{array}\right\}.$$



Sa slike vidi se:

$$S = \int_{-\frac{3}{2}}^{\frac{1}{2}} \left(-x^2 + \frac{5}{2} - x^2 - 2\cdot x - 1\right) dx = \int_{-\frac{3}{2}}^{\frac{1}{2}} \left(-2\cdot x^2 - 2\cdot x + \frac{3}{2}\right) dx = -2\cdot \int_{-\frac{3}{2}}^{\frac{1}{2}} x^2\, dx - 2\cdot \int_{-\frac{3}{2}}^{\frac{1}{2}} x\, dx + \frac{3}{2}\cdot \int_{-\frac{3}{2}}^{\frac{1}{2}} dx =$$

$$= -2\cdot \frac{x^3}{3} \Big|_{-\frac{3}{2}}^{\frac{1}{2}} - 2\cdot \frac{x^2}{2} \Big|_{-\frac{3}{2}}^{\frac{1}{2}} + \frac{3}{2}\cdot x \Big|_{-\frac{3}{2}}^{\frac{1}{2}} = -\frac{2}{3}\cdot x^3 \Big|_{-\frac{3}{2}}^{\frac{1}{2}} - x^2 \Big|_{-\frac{3}{2}}^{\frac{1}{2}} + \frac{3}{2}\cdot x \Big|_{-\frac{3}{2}}^{\frac{1}{2}} =$$

$$= -\frac{2}{3}\cdot\left(\left(\frac{1}{2}\right)^3 - \left(-\frac{3}{2}\right)^3\right) - \left(\left(\frac{1}{2}\right)^2 - \left(-\frac{3}{2}\right)^2\right) + \frac{3}{2}\cdot\left(\frac{1}{2} - \left(-\frac{3}{2}\right)\right) = -\frac{2}{3}\cdot\left(\frac{1}{8} + \frac{27}{8}\right) - \left(\frac{1}{4} - \frac{9}{4}\right) + \frac{3}{2}\cdot\left(\frac{1}{2} + \frac{3}{2}\right) =$$

$$= -\frac{2}{3}\cdot\frac{28}{8} - \left(-\frac{8}{4}\right) + \frac{3}{2}\cdot\frac{4}{2} = -\frac{2}{3}\cdot\frac{28}{8} + \frac{8}{4} + \frac{12}{4} = -\frac{1}{3}\cdot\frac{28}{4} + \frac{20}{4} = -\frac{1}{3}\cdot 7 + \frac{20}{4} = -\frac{7}{3} + 5 = \frac{8}{3}.$$

Vježba 033

Izračunajte površinu lika omeđenog krivuljama (parabolama): $y = \frac{1}{4}\cdot x^2$ i $y = 3\cdot x - \frac{1}{2}\cdot x^2$.

Rezultat: 8.

Zadatak 034 (Sanja, informatika)

Kolika je površina lika omeđenoga krivuljom f(x) = 2 · x^3 – x^2 + x + 10 i tangentom na krivulju f(x) = 2 · x^3 – x^2 + x + 10 u njezinoj točki s apscisom 1.

Rješenje 034

Ponovimo!

Kada je površina S omeđena sa dvije neprekinute krivulje y = $f_1(x)$ i y = $f_2(x)$ i sa dvije vertikale x = a i x = b, gdje je $f_1(x) \le f_2(x)$ za $a \le x \le b$ vrijedi formula:

$$S=\int_a^b\left[f_2(x)-f_1(x)\right]dx.$$

Jednadžba tangente u točki D(x_0, y_0) krivulje y = f(x) glasi:

$$y - y_0 = f'(x_0)\cdot(x - x_0).$$

Budući da je zadana apscisa tražene točke D, njezina ordinata iznosi:

$$\left.\begin{array}{l} x=1 \\ y=f(x)=2\cdot x^3-x^2+x+10 \end{array}\right\} \Rightarrow y=f(1)=2\cdot 1^3-1^2+1+10 \Rightarrow y=f(1)=2-1+1+10 \Rightarrow y=12 \Rightarrow D(1,12).$$

Sada tražimo tangentu na krivulju f(x) = 2 · x^3 – x^2 + x + 10 u njezinoj točki D(x_0, y_0) = D(1, 12):

$$f'(x)=6\cdot x^2-2\cdot x+1 \Rightarrow \left.\begin{array}{l} x_0=1 \\ f'(x_0)=6\cdot x_0^2-2\cdot x_0+1 \end{array}\right\} \Rightarrow f'(1)=6\cdot 1^2-2\cdot 1+1 \Rightarrow f'(1)=6-2+1 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow f'(1)=5 \Rightarrow \left.\begin{array}{l} D(x_0,y_0)=D(1,12) \\ y-y_0=f'(x_0)\cdot(x-x_0) \\ f'(x_0)=f'(1)=5 \end{array}\right\} \Rightarrow y-12=5\cdot(x-1) \Rightarrow y-12=5\cdot x-5 \Rightarrow y=5\cdot x-5+12 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow y=5\cdot x+7.$$

Površina traženog lika omeđena je krivuljom f(x) = 2 · x^3 – x^2 + x + 10 i tangentom y = 5 · x + 7.

Da bismo odredili granice integriranja, vertikale x = a i y = b, moramo naći presjek krivulja, tj. riješiti sustav jednadžbi:

$$\left.\begin{array}{l} y=2\cdot x^3-x^2+x+10 \\ y=5\cdot x+7 \end{array}\right\} \Rightarrow 2\cdot x^3-x^2+x+10=5\cdot x+7 \Rightarrow 2\cdot x^3-x^2+x+10-5\cdot x-7=0 \Rightarrow$$

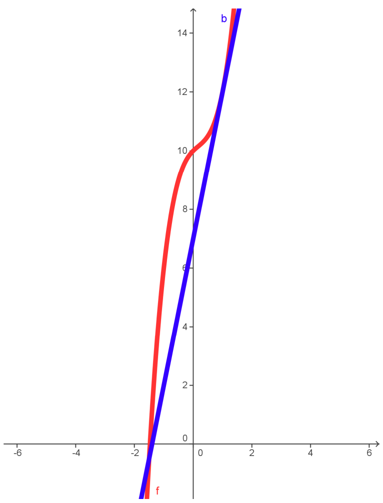
$$\Rightarrow 2\cdot x^3-x^2-4\cdot x+3=0 \Rightarrow \left[\begin{array}{l} \text{rastavljamo} \\ \text{na faktore} \end{array}\right] \Rightarrow 2\cdot x^3-2\cdot x^2+x^2-x-3\cdot x+3=0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 2\cdot x^2\cdot(x-1)+x\cdot(x-1)-3\cdot(x-1)=0 \Rightarrow (x-1)\cdot\left(2\cdot x^2+x-3\right)=0 \Rightarrow \left[\begin{array}{l} a\cdot b=0 \Rightarrow a=0 \text{ ili} \\ b=0 \text{ ili } a=b=0 \end{array}\right] \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \left.\begin{array}{l} x-1=0 \\ 2\cdot x^2+x-3=0 \end{array}\right\} \Rightarrow \left.\begin{array}{l} x_1=1 \\ x_{2,3}=\dfrac{-b\pm\sqrt{b^2-4\cdot a\cdot c}}{2\cdot a} \\ a=2\ ,\ b=1\ ,\ c=-3 \end{array}\right\} \Rightarrow \left.\begin{array}{l} x_1=1 \\ x_{2,3}=\dfrac{-1\pm\sqrt{1-4\cdot 2\cdot(-3)}}{2\cdot 2} \end{array}\right\} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \left.\begin{array}{l} x_1=1 \\ x_{2,3}=\dfrac{-1\pm\sqrt{1+24}}{4} \end{array}\right\} \Rightarrow \left.\begin{array}{l} x_1=1 \\ x_{2,3}=\dfrac{-1\pm\sqrt{25}}{4} \end{array}\right\} \Rightarrow \left.\begin{array}{l} x_1=1 \\ x_{2,3}=\dfrac{-1\pm 5}{4} \end{array}\right\} \Rightarrow$$

$$\left.\begin{array}{l} x_1 = 1 \\ \Rightarrow x_2 = \dfrac{-1+5}{4} = \dfrac{4}{4} = 1 \\ x_3 = \dfrac{-1-5}{4} = -\dfrac{6}{4} = -\dfrac{3}{2} \end{array}\right\} \Rightarrow \left.\begin{array}{l} a = -\dfrac{3}{2} \\ b = 1 \end{array}\right\}.$$



Znači moramo integrirati u granicama od $a = -\frac{3}{2}$ do b = 1. Sa slike vidi se:

$$S = \int_{-\frac{3}{2}}^{1} \left(2 \cdot x^3 - x^2 + x + 10 - 5 \cdot x - 7\right) dx = \int_{-\frac{3}{2}}^{1} \left(2 \cdot x^3 - x^2 - 4 \cdot x + 3\right) dx =$$

$$= 2 \cdot \int_{-\frac{3}{2}}^{1} x^3 \, dx - \int_{-\frac{3}{2}}^{1} x^2 \, dx - 4 \cdot \int_{-\frac{3}{2}}^{1} x \, dx + 3 \cdot \int_{-\frac{3}{2}}^{1} dx =$$

$$= 2 \cdot \frac{x^4}{4} \Big|_{-\frac{3}{2}}^{1} - \frac{x^3}{3} \Big|_{-\frac{3}{2}}^{1} - 4 \cdot \frac{x^2}{2} \Big|_{-\frac{3}{2}}^{1} + 3 \cdot x \Big|_{-\frac{3}{2}}^{1} =$$

$$= \frac{1}{2} \cdot x^4 \Big|_{-\frac{3}{2}}^{1} - \frac{1}{3} \cdot x^3 \Big|_{-\frac{3}{2}}^{1} - 2 \cdot x^2 \Big|_{-\frac{3}{2}}^{1} + 3 \cdot x \Big|_{-\frac{3}{2}}^{1} =$$

$$= \frac{1}{2} \cdot \left(1^4 - \left(-\frac{3}{2}\right)^4\right) - \frac{1}{3} \cdot \left(1^3 - \left(-\frac{3}{2}\right)^3\right) - 2 \cdot \left(1^2 - \left(-\frac{3}{2}\right)^2\right) + 3 \cdot \left(1 - \left(-\frac{3}{2}\right)\right) =$$

$$= \frac{1}{2} \cdot \left(1 - \frac{81}{16}\right) - \frac{1}{3} \cdot \left(1 + \frac{27}{8}\right) - 2 \cdot \left(1 - \frac{9}{4}\right) + 3 \cdot \left(1 + \frac{3}{2}\right) = \frac{1}{2} \cdot \left(-\frac{65}{16}\right) - \frac{1}{3} \cdot \frac{35}{8} - 2 \cdot \left(-\frac{5}{4}\right) + 3 \cdot \frac{5}{2} =$$

$$= -\frac{65}{32} - \frac{35}{24} + \frac{5}{2} + \frac{15}{2} = -\frac{65}{32} - \frac{35}{24} + \frac{20}{2} = -\frac{65}{32} - \frac{35}{24} + 10 = \frac{-195 - 140 + 960}{96} = \frac{625}{96} = 6\frac{49}{96}.$$

Vježba 034

Izračunajte površinu lika omeđenog parabolom $y^2 = 4x$ i pravcem $4x - 5y + 4 = 0$.

Rezultat: $\frac{9}{8} = 1\frac{1}{8}.$

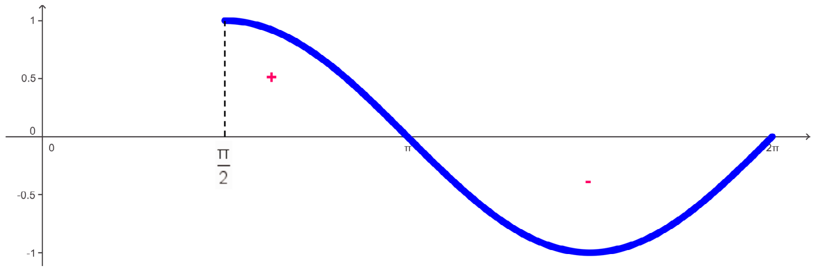
Zadatak 035 (Sanja, informatika)

Izračunajte površinu lika omeđenog sinusoidom f(x) = sin x, pravcima $x = \frac{\pi}{2}$, $x = 2 \cdot \pi$ i apscisnom osi.

Rješenje 035

Sa slike vidi se:

- površina lika u intervalu od $\frac{\pi}{2}$ do π je pozitivna
- površina lika u intervalu od π do $2 \cdot \pi$ je negativna pa ćemo uzeti njezinu apsolutnu vrijednost (ili obrnuti granice integriranja):



$$S=\int_{\frac{\pi}{2}}^{2\pi}\sin x\,dx=\int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi}\sin x\,dx+\left|\int_{\pi}^{2\pi}\sin x\,dx\right|=\left(-\cos x\right)\Big|_{\frac{\pi}{2}}^{\pi}+\left|\left(-\cos x\right)\Big|_{\pi}^{2\pi}\right|=$$

$$=\left(-\cos\pi\right)-\left(-\cos\frac{\pi}{2}\right)+\left|\left(-\cos 2\pi\right)-\left(-\cos\pi\right)\right|=1-0+\left|-1-1\right|=1+\left|-2\right|=1+2=3\ \left(\text{kvadratne jedinice}\right).$$

Napomena!
Budući da određeni integral (kao površina) može biti i negativan, tada govorimo o relativnoj površini. To je površina dijela područja iznad osi x umanjena za površinu dijela područja ispod osi x. Tada bi rješenje zadatka iznosilo:

$$S=\int_{\frac{\pi}{2}}^{2\pi}\sin x\,dx=\left(-\cos x\right)\Big|_{\frac{\pi}{2}}^{2\pi}=\left(-\cos 2\pi\right)-\left(-\cos\frac{\pi}{2}\right)=-1-0=-1.$$

Vježba 035

Izračunajte površinu lika omeđenog sinusoidom f(x) = sin x, pravcima $x=\frac{\pi}{3}$, $x=\frac{\pi}{2}$ i apscisnom osi.

Rezultat: $\frac{1}{2}\ \left(\text{kvadratnih jedinica}\right).$

Zadatak 036 (Tony, informatika)

Izračunajte površinu omeđenu krivuljama f(x) = e^x, f(x) = e^{-x} i x = 1.

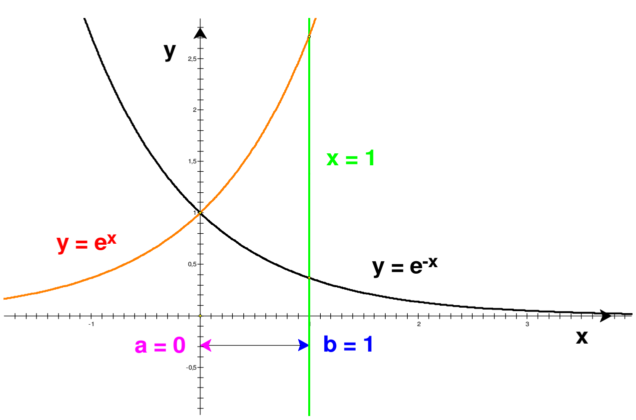
Rješenje 036

Ponovimo!

Kada je površina P omeđena sa dvije neprekinute krivulje y = $f_1(x)$ i y = $f_2(x)$ i sa dvije vertikale x = a i x = b, gdje je $f_1(x) \le f_2(x)$ za $a \le x \le b$ vrijedi:

$$P=\int_a^b\left[f_2(x)-f_1(x)\right]dx.$$

Grafovi funkcija f(x) = e^x i f(x) = e^{-x} su eksponencijalne krivulje, a x = 1 je pravac okomit na x os.



Sa slike vidi se da moramo izračunati površinu omeđenu eksponencijalnim krivuljama y = e^x i y = e^{-x} i pravcima x = 0 i x = 1. Tražena površina izražena je integralom:

$$P=\int_0^1\left[e^x-e^{-x}\right]dx=\int_0^1 e^x\,dx-\int_0^1 e^{-x}\,dx=$$

$$=e^x\Big|_0^1-\left(-e^{-x}\right)\Big|_0^1=e^x\Big|_0^1+e^{-x}\Big|_0^1=$$

$$=e^1-e^0+e^{-1}-e^0=e-1+\frac{1}{e}-1=e+\frac{1}{e}-2.$$

Vježba 036

Izračunajte površinu omeđenu krivuljama $f(x) = e^x$, $f(x) = e^{-x}$ i $x = -1$.

Rezultat: $2 - e - \frac{1}{e}.$

Zadatak 037 (Tony, informatika)

Kolika je površina lika omeđenog krivuljom $y = e^{3x}$, pravcem $x = 3$ i tangentom na krivulju $y = e^{3x}$ u njezinoj točki s apscisom 0?

Rješenje 037

Ponovimo!

Kada je površina P omeđena sa dvije neprekinute krivulje $y = f_1(x)$ i $y = f_2(x)$ i sa dvije vertikale $x = a$ i $x = b$, gdje je $f_1(x) \le f_2(x)$ za $a \le x \le b$ vrijedi:

$$P = \int_a^b \left[f_2(x) - f_1(x) \right] dx.$$

Jednadžba tangente na krivulju $y = f(x)$ u točki $D(x_0, y_0)$ glasi:

$$y - y_0 = f'(x_0) \cdot (x - x_0).$$

Najprije nađemo ordinatu točke D:

$$\left. \begin{array}{l} x = 0 \\ f(x) = e^{3x} \end{array} \right\} \Rightarrow f(0) = e^{3 \cdot 0} \Rightarrow f(0) = e^0 \Rightarrow f(0) = 1 \Rightarrow D(0, 1).$$

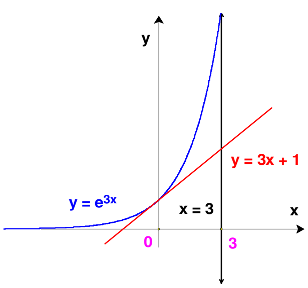
Tangenta na krivulju $y = e^{3x}$ u točki D(0, 1) ima jednadžbu:

$$f(x) = e^{3x} \Rightarrow f'(x) = 3 \cdot e^{3x} \Rightarrow f'(0) = 3 \cdot e^{3 \cdot 0} \Rightarrow f'(0) = 3 \cdot e^0 \Rightarrow f'(0) = 3 \cdot 1 \Rightarrow f'(0) = 3.$$

$$\left. \begin{array}{l} D(x_0, y_0) = D(0, 1) \ , \ f'(x_0) = 3 \\ y - y_0 = f'(x_0) \cdot (x - x_0) \end{array} \right\} \Rightarrow y - 1 = 3 \cdot (x - 0) \Rightarrow y - 1 = 3 \cdot x \Rightarrow y = 3 \cdot x + 1.$$

Graf funkcije $f(x) = e^{3x}$ je eksponencijalna krivulja. Graf funkcije $f(x) = 3 \cdot x + 1$ je pravac, a $x = 3$ je pravac okomit na x os.

Sa slike vidi se da moramo izračunati površinu omeđenu eksponencijalnom krivuljom $y = e^{3x}$ i pravcima $y = 3 \cdot x + 1$ i $x = 3$. Tražena površina izražena je integralom:



$$P = \int_0^3 \left[e^{3x} - (3 \cdot x + 1) \right] dx = \int_0^3 \left[e^{3x} - 3 \cdot x - 1 \right] dx =$$

$$= \int_0^3 e^{3x}\, dx - 3 \cdot \int_0^3 x\, dx - \int_0^3 dx = \frac{1}{3} \cdot e^{3x} \Big|_0^3 - 3 \cdot \frac{x^2}{2} \Big|_0^3 - x \Big|_0^3 =$$

$$= \frac{1}{3} \cdot e^{3x} \Big|_0^3 - \frac{3}{2} \cdot x^2 \Big|_0^3 - x \Big|_0^3 = \frac{1}{3} \cdot \left(e^{3 \cdot 3} - e^{3 \cdot 0} \right) - \frac{3}{2} \cdot \left(3^2 - 0^2 \right) - (3 - 0) =$$

$$= \frac{1}{3} \cdot \left(e^9 - e^0 \right) - \frac{3}{2} \cdot (9 - 0) - 3 = \frac{1}{3} \cdot \left(e^9 - 1 \right) - \frac{27}{2} - 3 = \frac{1}{3} \cdot e^9 - \frac{1}{3} - \frac{27}{2} - 3 = \frac{2 \cdot e^9 - 2 - 81 - 18}{6} = \frac{2 \cdot e^9 - 101}{6}.$$

Vježba 037

Kolika je površina lika omeđenog krivuljom $y = e^{3x}$, pravcem $x = 3$ i tangentom na krivulju $y = e^{3x}$ u njezinoj točki s ordinatom 1?

Rezultat: $\frac{2 \cdot e^9 - 101}{6}.$

Zadatak 038 (Tanja, studentica)

Izračunajte integral: $\int x \cdot e^{x}\, dx.$

Rješenje 038

Ponovimo!

Ako su u = u(x) i v = v(x) neprekinuto derivabilne funkcije, tada je:

$$\int u\, dv = u \cdot v - \int v\, du.$$

Računamo integral:

$$\int x \cdot e^{x}\, dx = \left[\begin{array}{l} \text{parcijalna integracija} \\ u = x \Rightarrow du = dx \\ dv = e^{x}\, dx \Rightarrow v = \int e^{x}\, dx = e^{x} \end{array} \right] = x \cdot e^{x} - \int e^{x}\, dx = x \cdot e^{x} - e^{x} + C.$$

Vježba 038

Izračunajte integral: $\int x \cdot \ln x\, dx.$

Rezultat: $\frac{x^{2}}{2} \cdot \ln x - \frac{x^{2}}{4} + C.$

Zadatak 039 (Alex, Visoka škola za sigurnost)

Izračunajte integral: $\int (2 \cdot x + 1)\, dx.$

Rješenje 039

Ponovimo!

$\int C \cdot f(x)\, dx = C \cdot \int f(x)\, dx$ gdje je C konstanta $(C \neq 0)$, $\int (f(x) \pm g(x))\, dx = \int f(x)\, dx \pm \int g(x)\, dx$

$$\int x^{n}\, dx = \frac{x^{n+1}}{n+1} + C, \quad \int dx = x + C.$$

Računamo integral:

$$\int (2 \cdot x + 1)\, dx = \int 2 \cdot x\, dx + \int dx = 2 \cdot \int x\, dx + \int dx = 2 \cdot \frac{x^{2}}{2} + x + C = x^{2} + x + C.$$

Vježba 039

Izračunajte integral: $\int (4 \cdot x + 1)\, dx.$

Rezultat: $2 \cdot x^{2} + x + C.$

Zadatak 040 (Alex, Visoka škola za sigurnost)

Izračunajte određeni integral: $\int_{1}^{2} (x - 1)\, dx.$

Rješenje 040

Ponovimo!

Newton-Leibnizova formula: Ako je F ' (x) = f(x), onda je $\int_{a}^{b} f(x)\, dx = F(x) \Big|_{a}^{b} = F(b) - F(a).$

Računamo određeni integral:

$$\int_{1}^{2} (x - 1)\, dx = \int_{1}^{2} x\, dx - \int_{1}^{2} dx = \frac{x^{2}}{2} \Big|_{1}^{2} - x \Big|_{1}^{2} = \left(\frac{2^{2}}{2} - \frac{1^{2}}{2} \right) - (2 - 1) = \left(\frac{4}{2} - \frac{1}{2} \right) - (2 - 1) = \frac{3}{2} - 1 = \frac{1}{2}.$$

Vježba 040

Izračunajte određeni integral: $\int_{2}^{3} (x - 1)\, dx.$

Rezultat: $\frac{3}{2}.$