Zadatak 001 (Tomislav, gimnazija)

Izračunaj integral: $\int (3\cdot x+2)^2\,dx.$

Rješenje 001

Osnovna pravila integriranja:

Ako je F'(x) = f(x), onda je

$$\int f(x)dx = F(x)+c, \text{ c je proizvoljna konstanta}$$

Konstantni faktor

Konstantni faktor možemo izlučiti pred znak integrala. Broj c je konstantni faktor.

$$\int c\cdot f(x)dx = c\cdot\int f(x)dx$$

$$\int dx = x+C$$

Integral sume i razlike

Integral sume (razlike) jednak je sumi (razlici) pojedinih članova.

$$\int (f(x)\pm g(x))dx = \int f(x)dx+\int g(x)dx.$$

Parcijalno integriranje

$$\int f(x)\cdot g'(x)dx = f(x)\cdot g(x)-\int g(x)\cdot f'(x)dx$$

$$\left[\int udv = uv-\int vdu\right]$$

Tablica osnovnih integrala

potencije

$$\int x^n dx = \frac{x^{n+1}}{n+1}+C\ ,\ n\neq -1 \qquad \int \frac{dx}{x} = \ln|x|+C$$

eksponencijalne funkcije

$$\int e^x dx = e^x + C$$

$$\int a^x dx = \frac{a^x}{\ln a}+C$$

trigonometrijske funkcije

$$\int \sin x\,dx = -\cos x+C \qquad \int \cos x\,dx = \sin x+C \qquad \int \tan x\,dx = -\ln|\cos x|+C$$

$$\int \cot x\,dx = \ln|\sin x|+C$$

$$\int \frac{dx}{\cos^2 x} = \tan x+C \qquad \int \frac{dx}{\sin^2 x} = -\cot x+C \qquad \int \frac{dx}{\sin x} = \ln\left|\tan\frac{x}{2}\right|+C$$

$$\int \frac{dx}{\cos x} = \ln\left|\tan\left(\frac{x}{2}+\frac{\pi}{4}\right)\right|+C$$

razlomljene racionalne funkcije

$$\int \frac{dx}{a^2+x^2} = \frac{1}{a}\cdot\arctan\frac{x}{a}+C,\ a\neq 0 \qquad \int \frac{dx}{a^2-x^2} = \frac{1}{2a}\cdot\ln\left|\frac{a+x}{a-x}\right|+C,\ a\neq 0$$

$$\int \frac{dx}{x^2-a^2} = \frac{1}{2a}\cdot\ln\left|\frac{x-a}{x+a}\right|+C,\ a\neq 0$$

iracionalne funkcije

$$\int \frac{dx}{\sqrt{a^2 - x^2}} = \arcsin \frac{x}{a} + C \qquad \int \frac{dx}{\sqrt{a^2 + x^2}} = \ln \left| x + \sqrt{x^2 + a^2} \right| + C$$

$$\int \frac{dx}{\sqrt{x^2 - a^2}} = \ln \left| x + \sqrt{x^2 - a^2} \right| + C$$

hiperboličke funkcije

$$\int \sinh x \, dx = cosh \, x + C$$

$$\left(\int \mathrm{sh} \, x \, dx = ch \, x + C \right)$$

$$\int \cosh x \, dx = \sin h \, x + C$$

$$\left(\int c \, \mathrm{h} \, x \, dx = sh \, x + C \right)$$

$$\int \tanh x \, dx = \ln \left| \cosh x \right| + C$$

$$\left(\int t \, \mathrm{h} \, x \, dx = \ln \left| \mathrm{ch} \, x \right| + C \right)$$

$$\int \coth x \, dx = \ln \left| \sinh x \right| + C$$

$$\left(\int \mathrm{cth} \, x \, dx = \ln \left| \mathrm{sh} \, x \right| + C \right)$$

$$\int \frac{dx}{\cosh^2 x} = \tanh x + C$$

$$\left(\int \frac{dx}{\mathrm{ch}^2 \, x} = \mathrm{th} \, x + C \right)$$

$$\int \frac{dx}{\sinh^2 x} = -\coth x + C$$

$$\left(\int \frac{dx}{\mathrm{sh}^2 \, x} = -\mathrm{cth} \, x + C \right).$$

Računamo integral:

$$\int (3x+2)^2 \, dx = [\text{kvadriramo binom}] =$$

$$\int \left(9x^2 + 12x + 4 \right) dx = [\text{integral sume}] = \int 9x^2 dx + \int 12x dx + \int 4 dx = [\text{konstantni faktor}] =$$

$$= 9 \cdot \int x^2 dx + 12 \cdot \int x dx + 4 \cdot \int dx = 9 \cdot \frac{x^3}{3} + 12 \cdot \frac{x^2}{2} + 4x + C = 3x^3 + 6x^2 + 4x + C$$

Vježba 001

Izračunaj integral:

$$\int (5x^4 - 3x^2 + 2x) dx.$$

Rezultat: $x^5 - x^3 + x^2 + C$.

Zadatak 002 (Tatjana, gimnazija)

Izračunaj integral:

$$\int x \cdot e^{\frac{3x^2}{2}} \, dx.$$

Rješenje 002

Uvedemo supstituciju

$$t=\frac{3x^2}{2}.$$

Neka je y = f(x) derivabilna funkcija na nekom intervalu. Diferencijal funkcije y = f(x) jednak je

dy = f '(x) · dx.

Diferencijal funkcije jednak je umnošku (produktu) derivacije te funkcije i diferencijala nezavisne varijable.

Tada je diferencijal jednak

$$dt=\frac{6x}{2}dx=3xdx.$$

Sada možemo pisati

$$I=\int xe^{\frac{3x^2}{2}}dx=\begin{bmatrix} t=\frac{3x^2}{2} \\ dt=3xdx \\ xdx=\frac{1}{3}dt \end{bmatrix}=\int e^t\cdot\frac{1}{3}dt=\frac{1}{3}\cdot\int e^t dt=\frac{1}{3}\cdot e^t+C=\frac{1}{3}\cdot e^{\frac{3x^2}{2}}+C.$$

Vježba 002

Izračunaj integral:

$$\int 2x\cdot e^{x^2}dx.$$

Rezultat: $e^{x^2}+C$.

Zadatak 003 (Matea, gimnazija)

Izračunaj integral:

$$\int\frac{2x+3}{2x+1}dx.$$

Rješenje 003

Brojnik 2x + 3 rastavimo na sljedeći način: 2x + 1 + 2.

$$\int\frac{2x+3}{2x+1}dx=\int\frac{2x+1+2}{2x+1}dx=\int\left(\frac{2x+1}{2x+1}+\frac{2}{2x+1}\right)dx=\int\left(1+\frac{2}{2x+1}\right)dx=\int dx+\int\frac{2dx}{2x+1}=$$

$$=x+\begin{bmatrix}\text{uvodimo supstituciju} \\ \text{t=2x+1} \\ \text{dt=2dx}\end{bmatrix}=x+\int\frac{dt}{t}=x+\ln t+C=x+\ln(2x+1)+C.$$

Vježba 003

Izračunaj integral:

$$\int\frac{x+2}{x+1}dx.$$

Rezultat: x + ln(x + 1) + C.

Zadatak 004 (Ivana, gimnazija)

Izračunaj integral:

$$\int(x+3)^2\,dx.$$

Rješenje 004

Podsjetimo se sljedećih pravila integriranja!

Ako je k konstanta, f = f(x), g = g(x):

- $\int k\cdot f\,dx=k\cdot\int f\,dx$

- $\int (f \pm g)\,dx = \int f\,dx \pm \int g\,dx$
- $\int dx = x + C$
- $\int x^n\,dx = \dfrac{x^{n+1}}{n+1} + C, \ \ n \neq -1.$

Sada je:

$$\int (x+3)^2\,dx = \int \left(x^2+6x+9\right)dx = \int x^2\,dx + \int 6x\,dx + \int 9dx = \int x^2\,dx + 6\cdot\int x\,dx + 9\cdot\int dx =$$

$$= \frac{x^3}{3} + 6\cdot\frac{x^2}{2} + 9x + C = \frac{1}{3}x^3 + 3x^2 + 9x + C.$$

Vježba 004

Izračunaj integral:

$$\int (x+2)^2\,dx.$$

Rezultat: $\dfrac{1}{3}x^3 + 2x^2 + 4x + C.$

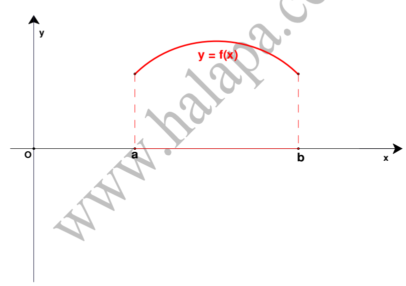
Zadatak 005 (Ivana, Zoran, Ana, Nina, Sandra, gimnazija)

Izvedi formulu za obujam krnjeg stošca pomoću integrala.

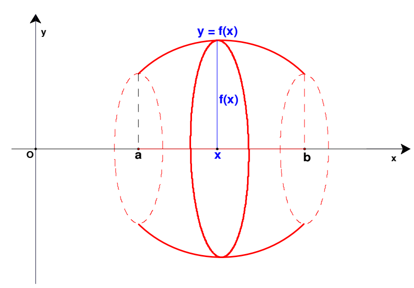
Rješenje 005

1.inačica

Za tijelo kažemo da je **rotacijsko** ako je dobiveno vrtnjom ravninskog lika oko pravca koji ne siječe taj lik. Postavimo koordinatni sustav tako da je os vrtnje x – os. Neka je y = f(x) jednadžba krivulje koja opisuje lik. Gledaj sliku!



Rotacijom krivocrtnog trapeza dobijemo rotacijsko tijelo. Njegov poprečni presjek s ravninom okomitom na x – os je krug, polumjera f(x).



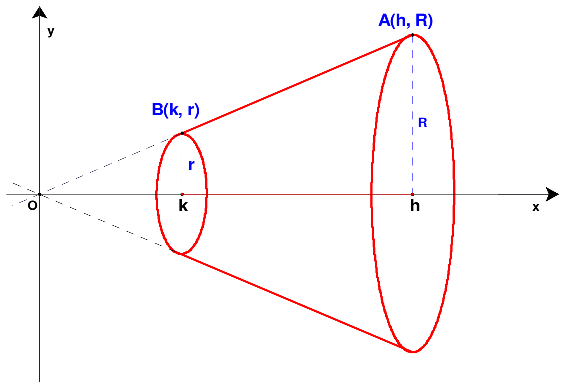
Zato je površina poprečnog presjeka:

$$P(x) = f(x)^2 \cdot \pi = y^2 \cdot \pi,$$

a obujam tijela:

$$V = \pi \cdot \int_a^b y^2 \cdot dx.$$

Krnji stožac tako postavimo da mu x – os (apscisa) bude os simetrije stošca, a izvodnica leži na pravcu koji prolazi ishodištem koordinatnog sustava.



Visinu krnjeg stošca označimo slovom v i za nju vrijedi:

$$v = h - k. \tag{1}$$

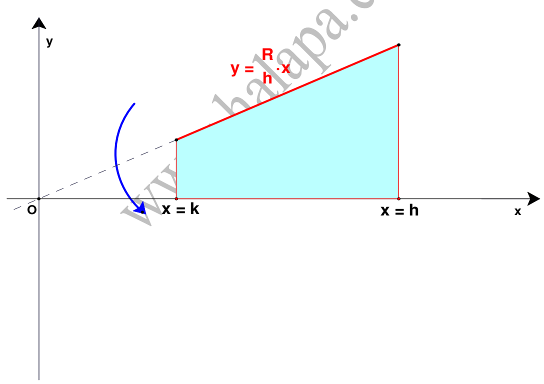
Jednadžba pravca koji prolazi ishodištem (0, 0) i točkom (h, R) je

$$y = \frac{R}{h} \cdot x.$$

Krnji stožac nastaje rotacijom trapeza, što ga određuje pravac (izvodnica stošca)

$$y = \frac{R}{h} \cdot x,$$

os x i pravci x = k i x = h, oko osi x.



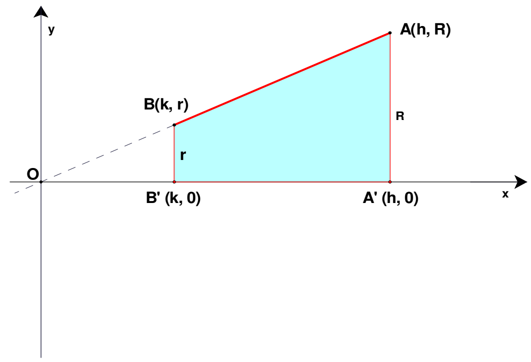
Integriranjem dobijemo obujam krnjeg stošca:

$$V = \pi \cdot \int_k^h y^2 \cdot dx = \pi \cdot \int_k^h \left(\frac{R}{h} \cdot x\right)^2 \cdot dx = \pi \cdot \int_k^h \frac{R^2}{h^2} \cdot x^2 \cdot dx = \pi \cdot \frac{R^2}{h^2} \cdot \int_k^h x^2 \cdot dx = \pi \cdot \frac{R^2}{h^2} \cdot \frac{x^3}{3} \Big|_k^h =$$

$$= \pi \cdot \frac{R^2}{h^2} \cdot \left(\frac{h^3}{3} - \frac{k^3}{3}\right) = \frac{\pi}{3} \cdot \frac{R^2}{h^2} \cdot \left(h^3 - k^3\right) = \frac{\pi}{3} \cdot \frac{R^2}{h^2} \cdot (h - k) \cdot \left(h^2 + hk + k^2\right) = [\text{zbog } (1)] =$$

$$= \frac{\pi}{3} \cdot \frac{R^2}{h^2} \cdot v \cdot \left(h^2 + hk + k^2\right) = \frac{\pi \cdot v}{3} \cdot \left(\frac{R^2}{h^2} \cdot h^2 + \frac{R^2}{h^2} \cdot hk + \frac{R^2}{h^2} \cdot k^2\right) = \frac{\pi \cdot v}{3} \cdot \left(R^2 + R^2 \cdot \frac{k}{h} + R^2 \cdot \left(\frac{k}{h}\right)^2\right).$$

Gledaj sliku!



Budući da su trokuti OA'A i OB'B slični, vrijedi razmjer:

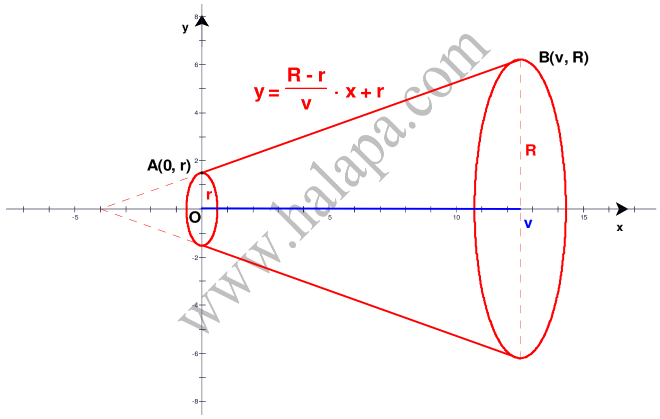
$$\frac{k}{h}=\frac{r}{R}.$$

Zato je

$$V=\frac{\pi\cdot v}{3}\cdot\left(R^2+R^2\cdot\frac{r}{R}+R^2\cdot\left(\frac{r}{R}\right)^2\right)=\frac{\pi\cdot v}{3}\cdot\left(R^2+R\cdot r+r^2\right).$$

2.inačica

Gledaj sliku!



Odaberemo točke A(0, r) i B(v, R). Pravac kroz točke A i B je izvodnica krnjeg štošca. Njegova jednadžba glasi:

$$\left.\begin{array}{l}A(0,\ r)\\ B(v,\ R\end{array}\right\}\Rightarrow\ y-y_1=\frac{y_2-y_1}{x_2-x_1}\cdot\left(x-x_1\right)\ \Rightarrow\ y-r=\frac{R-r}{v-0}\cdot(x-0)\ \Rightarrow\ y=\frac{R-r}{v}\cdot x+r.$$

Sada računamo obujam krnjeg stošca:

$$V=\pi\cdot\int_0^v y^2\cdot dx=\pi\cdot\int_0^v\left(\frac{R-r}{v}\cdot x+r\right)^2\cdot dx=\pi\cdot\int_0^v\left[\left(\frac{R-r}{v}\right)^2\cdot x^2+2\cdot\frac{R-r}{v}\cdot x\cdot r+r^2\right]\cdot dx=$$

$$=\pi\cdot\int_0^v\left(\frac{R-r}{v}\right)^2\cdot x^2\cdot dx+\pi\cdot\int_0^v 2\cdot\frac{R-r}{v}\cdot r\cdot x\cdot dx+\pi\cdot\int_0^v r^2\cdot dx=$$

$$=\pi\cdot\left(\frac{R-r}{v}\right)^2\cdot\int_0^v x^2\cdot dx+\pi\cdot2\cdot\frac{R-r}{v}\cdot r\cdot\int_0^v x\cdot dx+\pi\cdot r^2\cdot\int_0^v dx=$$

$$=\pi\cdot\left(\frac{R-r}{v}\right)^2\cdot\frac{x^3}{3}\Big|_0^v+\pi\cdot2\cdot\frac{R-r}{v}\cdot r\cdot\frac{x^2}{2}\Big|_0^v+\pi\cdot r^2\cdot x\Big|_0^v=$$

$$= \pi \cdot \left(\frac{R-r}{v} \right)^2 \cdot \frac{v^3}{3} + \pi \cdot 2 \cdot \frac{R-r}{v} \cdot r \cdot \frac{v^2}{2} + \pi \cdot r^2 \cdot v =$$

$$= \pi \cdot \frac{(R-r)^2}{v^2} \cdot \frac{v^3}{3} + \pi \cdot (R-r) \cdot r \cdot v + \pi \cdot r^2 \cdot v =$$

$$= \pi \cdot \frac{(R-r)^2}{3} \cdot v + \pi \cdot R \cdot r \cdot v - \pi \cdot r^2 \cdot v + \pi \cdot r^2 \cdot v =$$

$$= \pi \cdot \frac{R^2 - 2Rr + r^2}{3} \cdot v + \pi \cdot R \cdot r \cdot v = \pi \cdot v \cdot \left[\frac{R^2 - 2Rr + r^2}{3} + Rr \right] =$$

$$= \pi \cdot v \cdot \frac{R^2 - 2Rr + r^2 + 3Rr}{3} = \pi \cdot v \cdot \frac{R^2 + Rr + r^2}{3} = \frac{\pi \cdot v}{3} \cdot \left(R^2 + Rr + r^2 \right).$$

Vježba 005

Izvedi formulu za obujam stošca polumjera R i visine v pomoću integrala.

Rezultat: $V = \frac{1}{3} \cdot R^2 \cdot \pi \cdot v.$

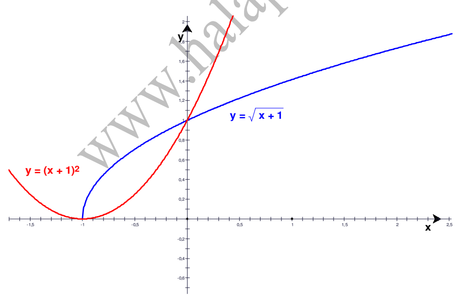
Zadatak 006 (Slavica, gimnazija)

Odredite obujam (volumen) tijela dobivenog rotacijom područja $(x+1)^2 \le y \le \sqrt{x+1}$ oko pravca x = 0.

Rješenje 006

Prikažimo grafove zadanih krivulja:

y = (x + 1)² i $y = \sqrt{x+1}$.



Volumen tijela nastalog rotacijom oko y osi lika omeđenog krivuljom x = g(y) i s dvije paralele y = c i y = d (c < d), možemo odrediti pomoću formule:

$$V_y = \pi \cdot \int_c^d x^2 \cdot dy.$$

Zato ćemo jednadžbe krivulja napisati kao funkcije varijable y:

- $y = (x+1)^2 \Rightarrow \sqrt{y} = x+1 \Rightarrow x = \sqrt{y} - 1,$
- $y = \sqrt{x+1} \Rightarrow y^2 = x+1 \Rightarrow x = y^2 - 1.$

Odredimo područje integracije. Iz slike se vidi da se obujam dobivenog tijela računa:

$$V_y = \pi \cdot \int_0^1 \left(y^2 - 1\right)^2 \cdot dy - \pi \cdot \int_0^1 \left(\sqrt{y} - 1\right)^2 \cdot dy = \pi \cdot \int_0^1 \cdot \left[\left(y^2 - 1\right)^2 - \left(\sqrt{y} - 1\right)^2 \right] \cdot dy =$$

$$= \pi \cdot \int_0^1 \cdot \left[y^4 - 2y^2 + 1 - y + 2\sqrt{y} - 1 \right] \cdot dy = \pi \cdot \int_0^1 \cdot \left[y^4 - 2y^2 - y + 2\sqrt{y} \right] \cdot dy =$$

$$= \pi \cdot \left[\frac{y^5}{5} - 2 \cdot \frac{y^3}{3} - \frac{y^2}{2} + 2 \cdot \frac{2}{3} \sqrt{y^3} \right] \Big|_0^1 = \pi \cdot \left[\frac{1^5}{5} - 2 \cdot \frac{1^3}{3} - \frac{1^2}{2} + 2 \cdot \frac{2}{3} \sqrt{1^3} \right] \Big|_0^1 =$$

$$= \pi \cdot \left[\frac{1}{5} - \frac{2}{3} - \frac{1}{2} + \frac{4}{3} \right] = \pi \cdot \frac{6 - 20 - 15 + 40}{30} = \frac{11}{30} \cdot \pi.$$

Vježba 006

Izračunajmo volumen tijela nastalog rotacijom lika omeđenog jednim poluvalom sinusoide y = sin x i odsječkom $0 \le x \le \pi$ osi x, oko x osi.

Rezultat: $\frac{\pi^2}{2}.$

Zadatak 007 (Željko, gimnazija)

Nađite integral: $\int \sqrt{x} \cdot \cos \sqrt{x} \, dx.$

Rješenje 007

Da bismo se riješili korijena uvodimo supstituciju:

$$\int \sqrt{x} \cdot \cos \sqrt{x} \, dx = \left[\begin{array}{l} \text{supstitucija} \\ t^2 = x \Rightarrow t = \sqrt{x} \\ 2t \, dt = dx \end{array} \right] = \int \sqrt{t^2} \cdot \cos \sqrt{t^2} \cdot 2t \, dt = \int t \cdot \cos t \cdot 2t \, dt = 2 \cdot \int t^2 \cdot \cos t \, dt.$$

Dalje koristimo metodu parcijalne integracije: $\int u \, dv = u \cdot v - \int v \, du.$

$$2 \cdot \int t^2 \cdot \cos t \, dt = 2 \cdot \left[\begin{array}{l} u = t^2 \\ dv = \cos t \, dt \\ du = 2t \, dt \\ v = \int \cos t \, dt = \sin t \\ \text{parcijalna integracija} \end{array} \right] = 2 \cdot \left(t^2 \cdot \sin t - \int \sin t \cdot 2t \, dt \right) = 2 \cdot \left(t^2 \cdot \sin t - 2 \cdot \int t \cdot \sin t \, dt \right) =$$

$$= 2 \cdot t^2 \cdot \sin t - 4 \cdot \int t \cdot \sin t \, dt = 2 \cdot t^2 \cdot \sin t - 4 \cdot \left[\begin{array}{l} u = t \\ dv = \sin t \, dt \\ du = dt \\ v = \int \sin t \, dt = -\cos t \\ \text{parcijalna integracija} \end{array} \right] =$$

$$= 2 \cdot t^2 \cdot \sin t - 4 \cdot \left(-t \cdot \cos t - \int (-\cos t) \, dt \right) = 2 \cdot t^2 \cdot \sin t - 4 \cdot \left(-t \cdot \cos t + \int \cos t \, dt \right) =$$

$$= 2 \cdot t^2 \cdot \sin t + 4 \cdot t \cdot \cos t - 4 \cdot \int \cos t \, dt = 2 \cdot t^2 \cdot \sin t + 4 \cdot t \cdot \cos t - 4 \cdot \sin t + C =$$

$$= \left[t = \sqrt{x} \right] = 2 \cdot x \cdot \sin \sqrt{x} + 4 \cdot \sqrt{x} \cdot \cos \sqrt{x} - 4 \cdot \sin \sqrt{x} + C.$$

Vježba 007

Nađite integral: $\int \frac{\cos \sqrt{x}}{2\sqrt{x}} dx.$

Rezultat: $\sin \sqrt{x}.$

Zadatak 008 (Lijepa Nana, Ružica, Sonja, Bojan, Marko, hotelijerska škola)

Izračunaj integral: $\int \frac{dx}{x \cdot \ln x}.$

Rješenje 008

$$\int \frac{dx}{x \cdot \ln x} = \left[\begin{array}{c} \text{supstitucija} \\ t = \ln x \;\Rightarrow\; dt = \frac{1}{x} \cdot dx \end{array} \right] = \int \frac{dt}{t} = \ln t + C = \ln(\ln x) + C.$$

Vježba 008

Izračunaj integral: $\int \frac{\ln x \cdot dx}{x}$.

Rezultat: $\frac{\ln^2 x}{2} + C.$

Zadatak 009 (Lijepa Nana, Ružica, Sonja, Bojan, Marko, hotelijerska škola)

Izračunaj integral: $\int \frac{e^x \cdot dx}{e^x + 1}$.

Rješenje 009

$$\int \frac{e^x \cdot dx}{e^x + 1} = \left[\begin{array}{c} \text{supstitucija} \\ t = e^x + 1 \;\Rightarrow\; dt = e^x \cdot dx \end{array} \right] = \int \frac{dt}{t} = \ln t + C = \ln\left(e^x + 1\right) + C.$$

Vježba 009

Izračunaj integral: $\int \frac{e^x \cdot dx}{e^x + 7}$.

Rezultat: $\ln\left(e^x + 7\right) + C.$

Zadatak 010 (Vesele cure s faksa, studentice)

Izračunajte $\int\limits_1^e \left(1 - \frac{1}{\sqrt{\ln x}}\right) \frac{dx}{x}$.

Rješenje 010

Derivacija funkcije ln x jednaka je $\frac{1}{x}$. Budući da je ln x pod drugim korijenom, prirodno je uzeti supstituciju $t^2 = \ln x$:

$$\int\limits_1^e \left(1 - \frac{1}{\sqrt{\ln x}}\right) \cdot \frac{dx}{x} = \left[\begin{array}{l} t^2 = \ln x \;\Rightarrow\; 2 \cdot t \cdot dt = \frac{1}{x} \cdot dx \\ x = 1 \;\Rightarrow\; t^2 = \ln 1 \;\Rightarrow\; t^2 = 0 \;\Rightarrow\; t = 0 \\ x = e \;\Rightarrow\; t^2 = \ln e \;\Rightarrow\; t^2 = 1 \;\Rightarrow\; t = 1 \end{array} \right] = \int\limits_0^1 \left(1 - \frac{1}{\sqrt{t^2}}\right) \cdot 2 \cdot t \cdot dt = 2 \cdot \int\limits_0^1 \left(1 - \frac{1}{t}\right) \cdot t \cdot dt =$$

$$= 2 \cdot \int\limits_0^1 (t - 1) \cdot dt = 2 \cdot \int\limits_0^1 t \cdot dt - 2 \cdot \int\limits_0^1 dt = 2 \cdot \frac{t^2}{2} \Big|_0^1 - 2 \cdot t \Big|_0^1 = t^2 \Big|_0^1 - 2 \cdot t \Big|_0^1 = \left(1^2 - 0^2\right) - 2 \cdot (1 - 0) = 1 - 2 = -1.$$

Vježba 010

Izračunajte $\int\limits_1^e \left(1 + \sqrt{\ln x}\right) \frac{dx}{x}$.

Rezultat: $\frac{5}{3}$.

$$= 2 \cdot \int\limits_0^1 (t - 1) \cdot dt = 2 \cdot \int\limits_0^1 t \cdot dt - 2 \cdot \int\limits_0^1 dt = 2 \cdot \frac{t^2}{2} \Big|_0^1 - 2 \cdot t \Big|_0^1 = t^2 \Big|_0^1 - 2 \cdot t \Big|_0^1 = \left(1^2 - 0^2\right) - 2 \cdot (1 - 0) = 1 - 2 = -1.$$

Vježba 010

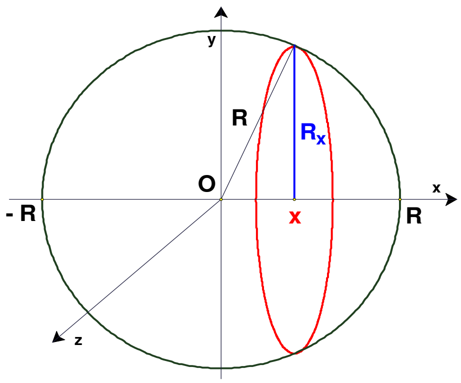
Izračunajte $\int_1^e \left(1+\sqrt{\ln x}\right)\frac{dx}{x}.$

Rezultat: $\frac{5}{3}.$

Zadatak 011 (Ivana, gimnazija)

Izračunajte obujam (volumen) kugle polumjera R.

Rješenje 011



Neka je zadana kugla sa središtem u ishodištu koordinatnog sustava Oxyz. Ako kuglu presiječemo ravninom okomitom na os Ox (apscisom) na mjestu x ($-R \le x \le R$), u presjeku s kuglom dobit ćemo krug polumjera R_x. Iz Pitagorina poučka slijedi:

$$R_x^2 = R^2 - x^2$$

pa je površina tog kruga:

$$P(x) = \pi \cdot R_x^2 = \pi \cdot \left(R^2 - x^2\right).$$

Zato je obujam (volumen) kugle:

$$V = \int_{-R}^{R} P(x)\,dx = \int_{-R}^{R} \pi \cdot \left(R^2 - x^2\right)dx = \pi \cdot \int_{-R}^{R} \left(R^2 - x^2\right)dx =$$

$$= \pi \cdot \left[\int_{-R}^{R} R^2\,dx - \int_{-R}^{R} x^2\,dx\right] = \pi \cdot \left[R^2 \cdot \int_{-R}^{R} dx - \int_{-R}^{R} x^2\,dx\right] = \pi \cdot \left[R^2 \cdot x \Big|_{-R}^{R} - \frac{x^3}{3}\Big|_{-R}^{R}\right] =$$

$$= \pi \cdot \left[R^2 \cdot \left(R - (-R)\right) - \frac{1}{3}\left(R^3 - \left(-R^3\right)\right)\right] = \pi \cdot \left[R^2 \cdot 2 \cdot R - \frac{1}{3} \cdot 2 \cdot R^3\right] = \pi \cdot \left[2 \cdot R^3 - \frac{2}{3} \cdot R^3\right] = \frac{4}{3} \cdot R^3 \cdot \pi.$$

Vježba 011

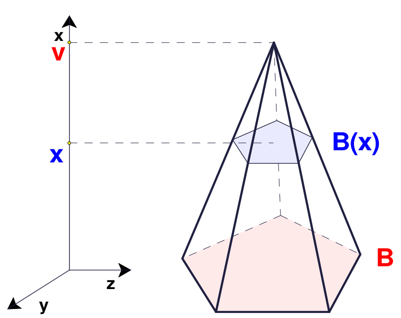
Izračunajte poluobujam kugle polumjera R.

Rezultat: $\frac{2}{3} \cdot R^3 \cdot \pi.$

Zadatak 012 (Ivana, gimnazija)

Izračunajte obujam (volumen) piramide koja ima zadanu površinu osnovke jednaku B, a visinu jednaku v.

Rješenje 012



Postavimo li osnovku piramide u yz–ravninu trodimenzionalnog koordinatnog sustava Oxyz, onda je vrh piramide na visini v. Ako piramidu presiječemo ravninom paralelnom s ravninom osnovke na visini x, $0 \le x \le v$, u presjeku dobit ćemo sličan poligon osnovki površine B(x). Iz sličnosti tada slijedi:

$$B(x) : B = (v-x)^2 : v^2 \Rightarrow B(x) \cdot v^2 = B \cdot (v-x)^2 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow B(x) = \frac{B}{v^2} \cdot (v-x)^2.$$

Računamo obujam (volumen) piramide:

$$V = \int_0^v B(x)\,dx = \int_0^v \frac{B}{v^2} \cdot (v-x)^2\,dx = \frac{B}{v^2} \cdot \int_0^v (v-x)^2\,dx = \frac{B}{v^2} \cdot \int_0^v \left(v^2 - 2 \cdot v \cdot x + x^2\right)dx =$$

$$= \frac{B}{v^2} \cdot \left[\int_0^v v^2\,dx - \int_0^v 2 \cdot v \cdot x\,dx + \int_0^v x^2\,dx\right] = \frac{B}{v^2} \cdot \left[v^2 \cdot \int_0^v dx - 2 \cdot v \cdot \int_0^v x\,dx + \int_0^v x^2\,dx\right] =$$

$$= \frac{B}{v^2} \cdot \left[v^2 \cdot x \Big|_0^v - 2 \cdot v \cdot \frac{x^2}{2} \Big|_0^v + \frac{x^3}{3} \Big|_0^v \right] = \frac{B}{v^2} \cdot \left[v^2 \cdot (v-0) - v \cdot \left(v^2 - 0^2 \right) + \frac{1}{3} \cdot \left(v^3 - 0^3 \right) \right] =$$

$$= \frac{B}{v^2} \cdot \left[v^3 - v^3 + \frac{1}{3} \cdot v^3 \right] = \frac{B}{v^2} \cdot \frac{1}{3} \cdot v^3 = \frac{1}{3} \cdot B \cdot v.$$

Vježba 012

Izračunajte obujam stošca koji ima zadanu površinu osnovke jednaku B, a visinu jednaku v.

Rezultat: Dokazuje se analogno: $V = \frac{1}{3} \cdot B \cdot v.$

Zadatak 013 (Student, strojarska škola)

Izračunaj integral $\int_0^1 \left(x + x^3 \right) \cdot e^{x^2} \, dx.$

Rješenje 013

Zbog jednostavnosti pisanja najprije ćemo izračunati neodređeni integral:

$$\int \left(x + x^3 \right) \cdot e^{x^2} \, dx.$$

$$\int \left(x + x^3 \right) \cdot e^{x^2} \, dx = \int x \cdot e^{x^2} \, dx + \int x^3 \cdot e^{x^2} \, dx.$$

Integral $\int x \cdot e^{x^2} \, dx$ riješimo metodom supstitucije:

$$\int x \cdot e^{x^2} \, dx = \left[\begin{array}{l} t = x^2 \\ dt = 2 \cdot x \cdot dx \; /:2 \\ \frac{1}{2} \cdot dt = x \cdot dx \end{array} \right] = \int \frac{1}{2} \cdot e^t \cdot dt = \frac{1}{2} \cdot \int e^t \cdot dt = \frac{1}{2} e^t = \frac{1}{2} \cdot e^{x^2}.$$

Integral $\int x^3 \cdot e^{x^2} \, dx$ riješimo metodom parcijalne integracije:

$$\int x^3 \cdot e^{x^2} \, dx = \left[\begin{array}{l} u = x^2 \\ dv = x \cdot e^{x^2} \cdot dx \\ du = 2 \cdot x \cdot dx \\ v = \int x \cdot e^{x^2} \cdot dx = \frac{1}{2} \cdot e^{x^2} \end{array} \right] = \frac{1}{2} \cdot x^2 \cdot e^{x^2} - \int \frac{1}{2} \cdot e^{x^2} \cdot 2 \cdot x \cdot dx = \frac{1}{2} \cdot x^2 \cdot e^{x^2} - \int x \cdot e^{x^2} \cdot dx =$$

$$= \frac{1}{2} \cdot x^2 \cdot e^{x^2} - \frac{1}{2} \cdot e^{x^2}.$$

Dakle, integral iznosi:

$$\int \left(x + x^3 \right) \cdot e^{x^2} \, dx = \int x \cdot e^{x^2} \, dx + \int x^3 \cdot e^{x^2} \, dx = \frac{1}{2} \cdot e^{x^2} + \frac{1}{2} \cdot x^2 \cdot e^{x^2} - \frac{1}{2} \cdot e^{x^2} = \frac{1}{2} \cdot x^2 \cdot e^{x^2}.$$

Sada je određeni integral jednak:

$$\int_0^1 \left(x + x^3 \right) \cdot e^{x^2} \, dx = \frac{1}{2} \cdot x^2 \cdot e^{x^2} \Big|_0^1 = \frac{1}{2} \cdot 1^2 \cdot e^{1^2} - \frac{1}{2} \cdot 0^2 \cdot e^0 = \frac{1}{2} \cdot e.$$

Vježba 013

Izračunaj integral $\int_0^1 x \cdot e^{x^2} \, dx.$

Rezultat: $\frac{1}{2} \cdot (e - 1).$

Zadatak 014 (Ivana, Jelena, Goran, Edita, ekonomski fakultet)

Dokažite formulu za parcijalnu integraciju: $\int u \cdot dv = u \cdot v - \int v \cdot du$.

Rješenje 014

Parcijalna integracija je posljedica pravila derivacije produkta. Neka su u(x) i v(x) funkcije od x koje imaju neprekidne derivacije, onda je:

$$d(u \cdot v) = u \cdot dv + v \cdot du \Rightarrow u \cdot dv = d(u \cdot v) - v \cdot du \Rightarrow [\text{integriramo}] \Rightarrow \int u \cdot dv = \int d(u \cdot v) - \int v \cdot du \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \int u \cdot dv = u \cdot v - \int v \cdot du \ - \text{ formula za parcijalnu integraciju.}$$

Vježba 014

Izračunaj integral metodom parcijalne integracije $\int x \cdot e^x dx$.

Rezultat: $$\int x \cdot e^x\, dx = \begin{bmatrix} u = x \\ dv = e^x \cdot dx \\ du = dx \\ v = \int e^x \cdot dx = e^x \end{bmatrix} = x \cdot e^x - \int e^x \cdot dx = x \cdot e^x - e^x + C.$$

Zadatak 015 (Anamarijina sestra, studentica)

Izračunajte: $\int_1^e x^2 \cdot \ln x \cdot dx$.

Rješenje 015

Ponovimo!

Formula za parcijalnu integraciju : $\int u \cdot dv = u \cdot v - \int v \cdot du$, $\ln e = 1$, $\ln 1 = 0$.

Najprije riješimo neodređeni integral metodom parcijalne integracije:

$$\int x^2 \cdot \ln x \cdot dx = \begin{bmatrix} u = \ln x \ , \ dv = x^2 \cdot dx \\ du = \frac{1}{x} \cdot dx \ , \ v = \int x^2 \cdot dx = \frac{x^3}{3} \end{bmatrix} = \frac{x^3}{3} \cdot \ln x - \int \frac{x^3}{3} \cdot \frac{1}{x} \cdot dx = \frac{x^3}{3} \cdot \ln x - \int \frac{x^2}{3} \cdot dx =$$

$$= \frac{x^3}{3} \cdot \ln x - \frac{1}{3} \cdot \int x^2 \cdot dx = \frac{x^3}{3} \cdot \ln x - \frac{1}{3} \cdot \frac{x^3}{3} = \frac{x^3}{3} \cdot \ln x - \frac{x^3}{9}.$$

Vrijednost određenog integrala iznosi:

$$\int_1^e x^2 \cdot \ln x \cdot dx = \left(\frac{x^3}{3} \cdot \ln x - \frac{x^3}{9} \right) \Big|_1^e = \left(\frac{e^3}{3} \cdot \ln e - \frac{e^3}{9} \right) - \left(\frac{1^3}{3} \cdot \ln 1 - \frac{1^3}{9} \right) = \left(\frac{e^3}{3} \cdot 1 - \frac{e^3}{9} \right) - \left(\frac{1}{3} \cdot 0 - \frac{1}{9} \right) =$$

$$= \frac{e^3}{3} - \frac{e^3}{9} + \frac{1}{9} = \frac{3 \cdot e^3 - e^3 + 1}{9} = \frac{2 \cdot e^3 + 1}{9}.$$

Vježba 015

Izračunajte: $\int_1^e x \cdot \ln x \cdot dx$.

Rezultat: $\frac{e^2 + 1}{4}$.

Zadatak 016 (Mario, student)

U integralu $\int_0^3 \left(3 \cdot x^2 + m \cdot x + 5\right) \cdot dx$ odredite m tako da vrijednost integrala iznosi 60.

Rješenje 016

$$\int_0^3 \left(3 \cdot x^2 + m \cdot x + 5\right) \cdot dx = 60 \Rightarrow \int_0^3 3 \cdot x^2 \cdot dx + \int_0^3 m \cdot x \cdot dx + \int_0^3 5 \cdot dx = 60 \Rightarrow 3 \cdot \int_0^3 x^2 \cdot dx + m \cdot \int_0^3 x \cdot dx + 5 \cdot \int_0^3 dx = 60 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 3\cdot\frac{x^3}{3}\Big|_0^3 + m\cdot\frac{x^2}{2}\Big|_0^3 + 5\cdot x\Big|_0^3 = 60 \Rightarrow x^3\Big|_0^3 + \frac{m}{2}\cdot x^2\Big|_0^3 + 5\cdot x\Big|_0^3 = 60 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \left(3^3 - 0^3\right) + \frac{m}{2}\cdot\left(3^2 - 0^2\right) + 5\cdot(3-0) = 60 \Rightarrow 27 + \frac{m}{2}\cdot 9 + 15 = 60 \Rightarrow 27 + 9\cdot\frac{m}{2} + 15 = 60 \;/\cdot 2 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 54 + 9\cdot m + 30 = 120 \Rightarrow 9\cdot m = 120 - 54 - 30 \Rightarrow 9\cdot m = 36 \;/:9 \Rightarrow m = 4.$$

Vježba 016

U integralu $\int_0^2 \left(3\cdot x^2 + m\cdot x + 5\right)\cdot dx$ odredite m tako da vrijednost integrala iznosi 60.

Rezultat: m = 21.

Zadatak 017 (Sanja, informatika)

Izračunajte integral: $\int \frac{x\cdot dx}{\sqrt{1+x^4}}.$

Rješenje 017

Uvedemo supstituciju

$$t = x^2.$$

Neka je y = f(x) derivabilna funkcija na nekom intervalu. Diferencijal funkcije y = f(x) jednak je

dy = f '(x) · dx.

Diferencijal funkcije jednak je umnošku (produktu) derivacije te funkcije i diferencijala nezavisne varijable.

Tada je diferencijal jednak

$$dt = 2\cdot x\cdot dx.$$

Sada možemo pisati:

$$\int \frac{x\cdot dx}{\sqrt{1+x^4}} = \left[\begin{array}{c} \text{supstitucija} \\ t = x^2 \Rightarrow t^2 = x^4 \\ dt = 2\cdot x\cdot dx \Rightarrow x\cdot dx = \frac{1}{2}\cdot dt \end{array}\right] = \int \frac{\frac{1}{2}\cdot dt}{\sqrt{1+t^2}} = \frac{1}{2}\cdot\int \frac{dt}{\sqrt{1+t^2}} = \left[\begin{array}{c} \text{tablični} \\ \text{integral} \end{array}\right] =$$

$$= \frac{1}{2}\cdot\ln\left(t + \sqrt{1+t^2}\right) + C = \frac{1}{2}\cdot\ln\left(x^2 + \sqrt{1+x^4}\right) + C.$$

Vježba 017

Izračunajte integral: $\int \frac{2\cdot x\cdot dx}{\sqrt{1+x^4}}.$

Rezultat: $\ln\left(x^2 + \sqrt{1+x^4}\right) + C.$

Zadatak 018 (Sanja, informatika)

Izračunajte integral: $\int x^5\cdot 5^{x^3}\,dx.$

Rješenje 018

Ponovimo!

Tablični integral: $\int a^x\,dx = \frac{a^x}{\ln a} + C.$

Da bismo pojednostavnili zadatak uvodimo supstituciju (zamjenu):

$$\int x^5 \cdot 5^{x^3} dx = \int x^3 \cdot x^2 \cdot 5^{x^3} dx = \left[\begin{array}{l} \quad\text{supstitucija} \\ t = x^3 \Rightarrow dt = 3 \cdot x^2\, dx \\ x^2\, dx = \frac{1}{3} dt \end{array}\right] = \int t \cdot 5^t \cdot \frac{1}{3} dt = \frac{1}{3} \cdot \int t \cdot 5^t\, dt.$$

Dalje koristimo metodu parcijalne integracije: $\int u\, dv = u \cdot v - \int v\, du.$

$$\frac{1}{3} \cdot \int t \cdot 5^t\, dt = \frac{1}{3} \cdot \left[\begin{array}{l} u = t \Rightarrow du = dt \\ dv = 5^t\, dt \Rightarrow v = \int 5^t\, dt = \frac{5^t}{\ln 5} \\ \quad\text{parcijalna integracija} \end{array}\right] = \frac{1}{3} \cdot \left(t \cdot \frac{5^t}{\ln 5} - \int \frac{5^t}{\ln 5} dt\right) = \frac{1}{3} \cdot \left(t \cdot \frac{5^t}{\ln 5} - \frac{1}{\ln 5} \cdot \int 5^t\, dt\right) =$$

$$= \frac{1}{3} \cdot \left(t \cdot \frac{5^t}{\ln 5} - \frac{1}{\ln 5} \cdot \frac{5^t}{\ln 5}\right) = \frac{1}{3} \cdot \left(t \cdot \frac{5^t}{\ln 5} - \frac{5^t}{\ln^2 5}\right) = \frac{1}{3} \cdot 5^t \cdot \left(\frac{t}{\ln 5} - \frac{1}{\ln^2 5}\right) = \frac{1}{3} \cdot 5^{x^3} \cdot \left(\frac{x^3}{\ln 5} - \frac{1}{\ln^2 5}\right) + C.$$

Vježba 018

Izračunajte integral: $\int \frac{x}{e^x} dx.$

Rezultat: $-\frac{x+1}{e^x} + C.$

Zadatak 019 (Ivan, gimnazija)

Izračunajte integral: $\int (2 \cdot x - 3)^5\, dx.$

Rješenje 019

Ponovimo!

Neka je y = f(x) derivabilna funkcija na nekom intervalu. Diferencijal funkcije y = f(x) jednak je **dy = f '(x) · dx**.

Diferencijal funkcije jednak je umnošku (produktu) derivacije te funkcije i diferencijala nezavisne varijable.

Uvedemo supstituciju (zamjenu varijabli):

$$t = 2 \cdot x - 3.$$

Ako sada na obje strane računamo diferencijal (na lijevoj strani računamo diferencijal po varijabli t, a na desnoj po varijabli x), dobivamo:

$$t'\, dt = (2 \cdot x - 3)'\, dx \Rightarrow 1 dt = 2 dx \Rightarrow dt = 2 dx \Rightarrow dx = \frac{1}{2} dt.$$

Računamo integral:

$$\int (2 \cdot x - 3)^5\, dx = \left[\begin{array}{l} \quad\text{supstitucija} \\ t = 2 \cdot x - 3 \\ dt = 2 dx \Rightarrow dx = \frac{1}{2} dt \end{array}\right] = \int t^5 \cdot \frac{1}{2} dt = \frac{1}{2} \cdot \int t^5\, dt = \frac{1}{2} \cdot \frac{t^6}{6} = \frac{1}{12} \cdot t^6 = \frac{1}{12} \cdot (2 \cdot x - 3)^6 + C.$$

Vježba 019

Izračunajte integral: $\int e^{\frac{x}{4}}\, dx.$

Rezultat: $4 \cdot e^{\frac{x}{4}} + C.$

Zadatak 020 (Marina, ekonomija)

Izračunajte integral: $\int (x+1) \cdot (x-3)^7\, dx.$

Rješenje 020

Ponovimo!
Neka je y = f(x) derivabilna funkcija na nekom intervalu. Diferencijal funkcije y = f(x) jednak je

dy = f '(x) · dx.

Diferencijal funkcije jednak je umnošku (produktu) derivacije te funkcije i diferencijala nezavisne varijable.

Uvedemo supstituciju (zamjenu varijabli):

$$t = x - 3.$$

Ako sada na obje strane računamo diferencijal (na lijevoj strani računamo diferencijal po varijabli t, a na desnoj po varijabli x), dobivamo:

$$t' \, dt = (x-3)' \, dx \Rightarrow 1dt = 1dx \Rightarrow dt = dx.$$

Računamo integral:

$$\int (x+1)\cdot(x-3)^7 \, dx = \begin{bmatrix} \text{supstitucija} \\ t = x-3 \Rightarrow x = t+3 \\ dt = dx \end{bmatrix} = \int (t+3+1)\cdot t^7 \, dt = \int (t+4)\cdot t^7 \, dt = \int \left(t^8 + 4\cdot t^7\right) dt =$$

$$= \int t^8 \, dt + \int 4\cdot t^7 \, dt = \int t^8 \, dt + 4\cdot\int t^7 \, dt = \frac{t^9}{9} + 4\cdot\frac{t^8}{8} = \frac{1}{9}\cdot t^9 + \frac{1}{2}\cdot t^8 = t^8\cdot\left(\frac{1}{9}\cdot t + \frac{1}{2}\right) = t^8\cdot\frac{1}{18}\cdot(2\cdot t+9) =$$

$$= \frac{1}{18}\cdot t^8\cdot(2\cdot t+9) = \frac{1}{18}\cdot(x-3)^8\cdot(2\cdot(x-3)+9) = \frac{1}{18}\cdot(x-3)^8\cdot(2\cdot x-6+9) = \frac{1}{18}\cdot(x-3)^8\cdot(2\cdot x+3) + C.$$

Vježba 020

Izračunajte integral: $\int (x+1)\cdot(3\cdot x-5)^7 \, dx.$

Rezultat: $\frac{1}{81}\cdot(3\cdot x-5)^8\cdot(3\cdot x+4)+C.$