Zadatak 081 (Ana, strukovna škola)

Koliko je $g'(6)$, ako je $g(x)=\sqrt{(2\cdot x-3)^3}$?

Rješenje 081

Ponovimo!

$$\sqrt[n]{a^m}=a^{\frac{m}{n}} \quad , \quad n=\frac{n}{1} \quad , \quad \frac{a}{b}-\frac{c}{d}=\frac{a\cdot d-b\cdot c}{b\cdot d}.$$

Oznake za derivaciju su:

$$y'=\frac{dy}{dx}=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta y}{\Delta x}=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{f(x+\Delta x)-f(x)}{\Delta x}=f'(x).$$

Tablično deriviranje	
Funkcija	**Derivacija**
c	0
x	1
x^n	$n\cdot x^{n-1}$

Ako je c konstanta, a u = f(x), v = g(x) su funkcije koje imaju derivacije, onda je

$$(c\cdot f(x))'=c\cdot(f(x))' \quad , \quad (f(x)\pm g(x))'=(f(x))'\pm(g(x))'.$$

Derivacija složene funkcije: $\frac{dy}{dx}=\frac{dy}{du}\cdot\frac{du}{dx}$ ili $y'(x)=y'(u)\cdot u'(x)$.

Složena funkcija derivira se tako da se najprije derivira po posrednoj funkciji kao argumentu i dobiveni rezultat pomnoži derivacijom posredne funkcije.

$$g(x)=\sqrt{(2\cdot x-3)^3} \Rightarrow g(x)=(2\cdot x-3)^{\frac{3}{2}} \Rightarrow g'(x)=\left((2\cdot x-3)^{\frac{3}{2}}\right)' \Rightarrow$$

$$\Rightarrow g'(x)=\frac{3}{2}\cdot(2\cdot x-3)^{\frac{3}{2}-1}\cdot(2\cdot x-3)' \Rightarrow g'(x)=\frac{3}{2}\cdot(2\cdot x-3)^{\frac{3}{2}-\frac{1}{1}}\cdot\left((2\cdot x)'-3'\right) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow g'(x)=\frac{3}{2}\cdot(2\cdot x-3)^{\frac{3-2}{2}}\cdot\left(2\cdot x'-0\right) \Rightarrow g'(x)=\frac{3}{2}\cdot(2\cdot x-3)^{\frac{1}{2}}\cdot(2\cdot 1-0) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow g'(x)=\frac{3}{2}\cdot\sqrt{2\cdot x-3}\cdot 2 \Rightarrow g'(x)=\frac{3}{2}\cdot\sqrt{2\cdot x-3}\cdot 2 \Rightarrow g'(x)=3\cdot\sqrt{2\cdot x-3}.$$

Tada je:

$$\left.\begin{array}{l} x=6 \\ g'(x)=3\cdot\sqrt{2\cdot x-3} \end{array}\right\} \Rightarrow g'(6)=3\cdot\sqrt{2\cdot 6-3} \Rightarrow g'(6)=3\cdot\sqrt{12-3} \Rightarrow g'(6)=3\cdot\sqrt{9} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow g'(6)=3\cdot 3 \Rightarrow g'(6)=9.$$

Vježba 081

Koliko je $g'(2)$, ako je $g(x)=\sqrt{(2\cdot x-3)^3}$?

Rezultat: 3.

Zadatak 082 (Martina, Kornelija, bivše maturantice ☺)

Odredi derivaciju funkcije $f(x)=\ln\left(x+\sqrt{x^2-1}\right)-\frac{x}{\sqrt{x^2-1}}$.

Rješenje 082

Ponovimo!

$$n=\frac{n}{1}\quad,\quad \frac{a}{b}+\frac{c}{d}=\frac{a\cdot d+b\cdot c}{b\cdot d}\quad,\quad \left(\sqrt{a}\right)^2=a\quad,\quad \frac{a}{b}-\frac{c}{d}=\frac{a\cdot d-b\cdot c}{b\cdot d}.$$

$$a\cdot\frac{b}{c}=\frac{a\cdot b}{c}\quad,\quad \sqrt[n]{a^m}=a^{\frac{m}{n}}\quad,\quad a^1=a\quad,\quad a^n\cdot a^m=a^{n+m}\quad,\quad \frac{\frac{a}{b}}{\frac{c}{d}}=\frac{a\cdot d}{b\cdot c}.$$

Skratiti razlomak znači brojnik i nazivnik tog razlomka podijeliti istim brojem različitim od nule i jedinice

$$\frac{a\cdot n}{b\cdot n}=\frac{a}{b}\ ,\ n\neq 0\ ,\ n\neq 1.$$

Oznake za derivaciju su:

$$y'=\frac{dy}{dx}=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta y}{\Delta x}=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{f(x+\Delta x)-f(x)}{\Delta x}=f'(x).$$

Tablično deriviranje	
Funkcija	**Derivacija**
c	0
x	1
x^n	$n\cdot x^{n-1}$
$\ln x$	$\frac{1}{x}$
$\sqrt{x}$	$\frac{1}{2\cdot\sqrt{x}}$

Derivacija zbroja: $(f+g)'=f'+g'.$

Derivacija razlike: $(f-g)'=f'-g'.$

Derivacija kvocijenta:

$$\left(\frac{f(x)}{g(x)}\right)'=\frac{f'(x)\cdot g(x)-f(x)\cdot g'(x)}{\left(g(x)\right)^2},\ g(x)\neq 0.$$

Derivacija složene funkcije: $\frac{dy}{dx}=\frac{dy}{du}\cdot\frac{du}{dx}$ ili $y'(x)=y'(u)\cdot u'(x).$

Složena funkcija derivira se tako da se najprije derivira po posrednoj funkciji kao argumentu i dobiveni rezultat pomnoži derivacijom posredne funkcije.

$$f(x)=\ln\left(x+\sqrt{x^2-1}\right)-\frac{x}{\sqrt{x^2-1}}\ \Rightarrow\ f'(x)=\left(\ln\left(x+\sqrt{x^2-1}\right)-\frac{x}{\sqrt{x^2-1}}\right)'\ \Rightarrow$$

$$\Rightarrow\ f'(x)=\left(\ln\left(x+\sqrt{x^2-1}\right)\right)'-\left(\frac{x}{\sqrt{x^2-1}}\right)'\ \Rightarrow$$

$$\Rightarrow f'(x)=\frac{1}{x+\sqrt{x^2-1}}\cdot\left(x+\sqrt{x^2-1}\right)'-\frac{x'\cdot\sqrt{x^2-1}-x\cdot\left(\sqrt{x^2-1}\right)'}{\left(\sqrt{x^2-1}\right)^2}\Rightarrow$$

$$\Rightarrow f'(x)=\frac{1}{x+\sqrt{x^2-1}}\cdot\left(x'+\left(\sqrt{x^2-1}\right)'\right)-\frac{1\cdot\sqrt{x^2-1}-x\cdot\frac{1}{2\cdot\sqrt{x^2-1}}\cdot\left(x^2-1\right)'}{x^2-1}\Rightarrow$$

$$\Rightarrow f'(x)=\frac{1}{x+\sqrt{x^2-1}}\cdot\left(1+\frac{1}{2\cdot\sqrt{x^2-1}}\cdot\left(x^2-1\right)'\right)-\frac{\sqrt{x^2-1}-x\cdot\frac{1}{2\cdot\sqrt{x^2-1}}\cdot 2\cdot x}{x^2-1}\Rightarrow$$

$$\Rightarrow f'(x)=\frac{1}{x+\sqrt{x^2-1}}\cdot\left(1+\frac{1}{2\cdot\sqrt{x^2-1}}\cdot 2\cdot x\right)-\frac{\sqrt{x^2-1}-x\cdot\frac{1}{2\cdot\sqrt{x^2-1}}\cdot 2\cdot x}{x^2-1}\Rightarrow$$

$$\Rightarrow f'(x)=\frac{1}{x+\sqrt{x^2-1}}\cdot\left(1+\frac{1}{2\cdot\sqrt{x^2-1}}\cdot 2\cdot x\right)-\frac{\sqrt{x^2-1}-x\cdot\frac{1}{2\cdot\sqrt{x^2-1}}\cdot 2\cdot x}{x^2-1}\Rightarrow$$

$$\Rightarrow f'(x)=\frac{1}{x+\sqrt{x^2-1}}\cdot\left(1+\frac{1}{\sqrt{x^2-1}}\cdot x\right)-\frac{\sqrt{x^2-1}-x\cdot\frac{1}{\sqrt{x^2-1}}\cdot x}{x^2-1}\Rightarrow$$

$$\Rightarrow f'(x)=\frac{1}{x+\sqrt{x^2-1}}\cdot\left(1+\frac{x}{\sqrt{x^2-1}}\right)-\frac{\sqrt{x^2-1}-\frac{x^2}{\sqrt{x^2-1}}}{x^2-1}\Rightarrow$$

$$\Rightarrow f'(x)=\frac{1}{x+\sqrt{x^2-1}}\cdot\left(\frac{1}{1}+\frac{x}{\sqrt{x^2-1}}\right)-\frac{\frac{\sqrt{x^2-1}}{1}-\frac{x^2}{\sqrt{x^2-1}}}{x^2-1}\Rightarrow$$

$$\Rightarrow f'(x)=\frac{1}{x+\sqrt{x^2-1}}\cdot\frac{\sqrt{x^2-1}+x}{\sqrt{x^2-1}}-\frac{\frac{\left(\sqrt{x^2-1}\right)^2-x^2}{\sqrt{x^2-1}}}{x^2-1}\Rightarrow$$

$$\Rightarrow f'(x)=\frac{1}{x+\sqrt{x^2-1}}\cdot\frac{x+\sqrt{x^2-1}}{\sqrt{x^2-1}}-\frac{\frac{x^2-1-x^2}{\sqrt{x^2-1}}}{x^2-1}\Rightarrow$$

$$\Rightarrow f'(x)=\frac{1}{x+\sqrt{x^2-1}}\cdot\frac{x+\sqrt{x^2-1}}{\sqrt{x^2-1}}-\frac{\frac{x^2-1-x^2}{\sqrt{x^2-1}}}{x^2-1}\Rightarrow f'(x)=\frac{1}{1}\cdot\frac{1}{\sqrt{x^2-1}}-\frac{\frac{-1}{\sqrt{x^2-1}}}{x^2-1}\Rightarrow$$

$$\Rightarrow f'(x)=\frac{1}{\sqrt{x^2-1}}-\frac{\frac{-1}{\sqrt{x^2-1}}}{\frac{x^2-1}{1}}\Rightarrow f'(x)=\frac{1}{\sqrt{x^2-1}}-\frac{-1}{\left(x^2-1\right)\cdot\sqrt{x^2-1}}\Rightarrow$$

$$\Rightarrow f'(x)=\frac{1}{\sqrt{x^2-1}}+\frac{1}{\left(x^2-1\right)\cdot\sqrt{x^2-1}}\Rightarrow f'(x)=\frac{x^2-1+1}{\left(x^2-1\right)\cdot\sqrt{x^2-1}}\Rightarrow$$

$$\Rightarrow f'(x)=\frac{x^2-1+1}{\left(x^2-1\right)\cdot\sqrt{x^2-1}}\Rightarrow f'(x)=\frac{x^2}{\left(x^2-1\right)^1\cdot\left(x^2-1\right)^{\frac{1}{2}}}\Rightarrow f'(x)=\frac{x^2}{\left(x^2-1\right)^{1+\frac{1}{2}}}\Rightarrow$$

$$\Rightarrow f'(x)=\frac{x^2}{\left(x^2-1\right)^{\frac{3}{2}}}\Rightarrow f'(x)=\frac{x^2}{\sqrt{\left(x^2-1\right)^3}}.$$

Vježba 082

Odredi derivaciju funkcije $f(x)=\ln\left(x-\sqrt{x^2+1}\right)$.

Rezultat: $\frac{-1}{\sqrt{x^2+1}}$.

Zadatak 083 (Petra, gimnazija)

Odredi derivaciju funkcije $f(x)=\frac{\cos x}{1+\cos^2 x}$.

Rješenje 083

Ponovimo!

Ako je f realna funkcija definirana u točki x i u okolini točke x te ako postoji granična vrijednost (limes)

$$\lim_{\Delta x\to 0}\frac{f(x+\Delta x)-f(x)}{\Delta x}=f'(x),$$

onda se broj

$$f'(x)$$

zove derivacija funkcije f u točki x. Veličina Δx zove se prirast argumenta i ona pokazuje razliku (diferenciju) argumenta funkcije f, dok se $\Delta y = f(x + \Delta x) - f(x)$ naziva prirast funkcije i vidi se da Δy pokazuje razliku (diferenciju) odgovarajućih funkcijskih vrijednosti. Izraz

$$\frac{\Delta y}{\Delta x}$$

naziva se kvocijentom razlika funkcije f u točki x pa se može pisati

$$\lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = f'(x).$$

Tablično deriviranje	
Funkcija	**Derivacija**
c	0
x^n	$n \cdot x^{n-1}$
$\cos x$	$-\sin x$

Derivacija složene funkcije: $\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{du} \cdot \frac{du}{dx}$ ili $y'(x) = y'(u) \cdot u'(x)$.

Složena funkcija derivira se tako da se najprije derivira po posrednoj funkciji kao argumentu i dobiveni rezultat pomnoži derivacijom posredne funkcije.

Derivacija zbroja:

$$(f + g)' = f' + g'.$$

Derivacija kvocijenta:

$$\left(\frac{f(x)}{g(x)}\right)' = \frac{f'(x) \cdot g(x) - f(x) \cdot g'(x)}{(g(x))^2}, \; g(x) \neq 0.$$

$$\cos^2 x + \sin^2 x = 1 \quad , \quad a^1 = a \quad , \quad a^n \cdot a^m = a^{n+m}.$$

Zakon distribucije množenja prema zbrajanju.

$$a \cdot (b + c) = a \cdot b + a \cdot c \quad , \quad a \cdot b + a \cdot c = a \cdot (b + c).$$

$$f(x) = \frac{\cos x}{1 + \cos^2 x} \Rightarrow f'(x) = \left(\frac{\cos x}{1 + \cos^2 x}\right)' \Rightarrow$$

$$\Rightarrow f'(x) = \frac{(\cos x)' \cdot (1 + \cos^2 x) - \cos x \cdot (1 + \cos^2 x)'}{(1 + \cos^2 x)^2} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow f'(x) = \frac{-\sin x \cdot (1 + \cos^2 x) - \cos x \cdot \left(1' + (\cos^2 x)'\right)}{(1 + \cos^2 x)^2} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow f'(x) = \frac{-\sin x \cdot (1 + \cos^2 x) - \cos x \cdot \left(0 + 2 \cdot \cos x \cdot (\cos x)'\right)}{(1 + \cos^2 x)^2} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow f'(x)=\frac{-\sin x\cdot\left(1+\cos^2 x\right)-\cos x\cdot\left(0+2\cdot\cos x\cdot(-\sin x)\right)}{\left(1+\cos^2 x\right)^2}\Rightarrow$$

$$\Rightarrow f'(x)=\frac{-\sin x\cdot\left(1+\cos^2 x\right)-\cos x\cdot 2\cdot\cos x\cdot(-\sin x)}{\left(1+\cos^2 x\right)^2}\Rightarrow$$

$$\Rightarrow f'(x)=\frac{-\sin x-\sin x\cdot\cos^2 x+2\cdot\sin x\cdot\cos^2 x}{\left(1+\cos^2 x\right)^2}\Rightarrow f'(x)=\frac{-\sin x+\sin x\cdot\cos^2 x}{\left(1+\cos^2 x\right)^2}\Rightarrow$$

$$\Rightarrow f'(x)=\frac{-\sin x\cdot\left(1-\cos^2 x\right)}{\left(1+\cos^2 x\right)^2}\Rightarrow f'(x)=\frac{-\sin x\cdot\sin^2 x}{\left(1+\cos^2 x\right)^2}\Rightarrow f'(x)=\frac{-\sin^3 x}{\left(1+\cos^2 x\right)^2}.$$

Vježba 083

Odredi derivaciju funkcije $f(x)=\frac{1}{1+\cos^2 x}$.

Rezultat: $2\cdot\sin x\cdot\cos x=\sin 2x$, $\frac{\sin 2x}{\left(1+\cos^2 x\right)^2}$.

Zadatak 084 (Mario, gimnazija)

Odredi derivaciju funkcije $f(x)=\frac{x^2-4}{x^2+4}$.

Rješenje 084

Ponovimo!

Ako je f realna funkcija definirana u točki x i u okolini točke x te ako postoji granična vrijednost (limes)

$$\lim_{\Delta x\to 0}\frac{f(x+\Delta x)-f(x)}{\Delta x}=f'(x),$$

onda se broj

$$f'(x)$$

zove derivacija funkcije f u točki x. Veličina Δx zove se prirast argumenta i ona pokazuje razliku (diferenciju) argumenta funkcije f, dok se Δy = f(x + Δx) – f(x) naziva prirast funkcije i vidi se da Δy pokazuje razliku (diferenciju) odgovarajućih funkcijskih vrijednosti. Izraz

$$\frac{\Delta y}{\Delta x}$$

naziva se kvocijentom razlika funkcije f u točki x pa se može pisati

$$\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta y}{\Delta x}=f'(x).$$

Tablično deriviranje	
Funkcija	**Derivacija**
c	0
x^n	$n\cdot x^{n-1}$

Derivacija zbroja:

$$(f+g)'=f'+g'.$$

Derivacija razlike:

$$(f-g)'=f'-g'.$$

Derivacija kvocijenta:

$$\left(\frac{f(x)}{g(x)}\right)'=\frac{f'(x)\cdot g(x)-f(x)\cdot g'(x)}{(g(x))^2},\ g(x)\neq 0.$$

Zakon distribucije množenja prema zbrajanju.

$$a\cdot(b+c)=a\cdot b+a\cdot c \quad , \quad a\cdot b+a\cdot c=a\cdot(b+c).$$

$$a^1=a \quad , \quad a^n\cdot a^m=a^{n+m}.$$

$$f(x)=\frac{x^2-4}{x^2+4} \Rightarrow f'(x)=\left(\frac{x^2-4}{x^2+4}\right)' \Rightarrow$$

$$\Rightarrow f'(x)=\frac{\left(x^2-4\right)'\cdot\left(x^2+4\right)-\left(x^2-4\right)\cdot\left(x^2+4\right)'}{\left(x^2+4\right)^2} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow f'(x)=\frac{\left(\left(x^2\right)'-4'\right)\cdot\left(x^2+4\right)-\left(x^2-4\right)\cdot\left(\left(x^2\right)'+4'\right)}{\left(x^2+4\right)^2} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow f'(x)=\frac{(2\cdot x-0)\cdot\left(x^2+4\right)-\left(x^2-4\right)\cdot(2\cdot x+0)}{\left(x^2+4\right)^2} \Rightarrow f'(x)=\frac{2\cdot x\cdot\left(x^2+4\right)-\left(x^2-4\right)\cdot 2\cdot x}{\left(x^2+4\right)^2} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow f'(x)=\frac{2\cdot x^3+8\cdot x-2\cdot x^3+8\cdot x}{\left(x^2+4\right)^2} \Rightarrow f'(x)=\frac{2\cdot x^3+8\cdot x-2\cdot x^3+8\cdot x}{\left(x^2+4\right)^2} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow f'(x)=\frac{8\cdot x+8\cdot x}{\left(x^2+4\right)^2} \Rightarrow f'(x)=\frac{16\cdot x}{\left(x^2+4\right)^2}.$$

Vježba 084

Odredi derivaciju funkcije $f(x)=\frac{x^2+1}{x^2-1}$.

Rezultat: $\frac{-4\cdot x}{\left(x^2-1\right)^2}.$

Zadatak 085 (Marin, veleučilište)

Ispitajte lokalne ekstreme funkcije $f(x)=\frac{x^2+8}{x-1}$.

Rješenje 085

Ponovimo!

Određivanje maksimuma i minimuma funkcije y = f(x)

I. Nađe se prva derivacija funkcije

$$y' = f'(x)$$

II. Prva derivacija funkcije izjednači se s nulom

$$f'(x)=0$$

III. Riješi se dobivena jednadžba

$$f'(x)=0 \Rightarrow x_1, x_2, x_3, \ldots, x_i \text{ su rješenja jednadžbe,}$$

to su vrijednosti apscise za koje zadana funkcija može imati ekstrem, te se točke zovu stacionarne točke

IV. Nađe se druga derivacija funkcije tako da se derivira prva derivacija funkcije

$$y'' = f''(x)=\left(f'(x)\right)'$$

V. Svaka stacionarna točka $x_1, x_2, x_3, \ldots, x_i$ uvrsti se u drugu derivaciju funkcije. Pri tome vrijedi:

- za $f''(x_i)>0$ u x_i je minimum
- za $f''(x_i)<0$ u x_i je maksimum.

Ako je $f''(x_i)=0$, dalje slijedi:

VI. Nađe se treća derivacija funkcije tako da se derivira druga derivacija funkcije

$$y''' = f'''(x)=\left(f''(x)\right)'$$

VII. Svaka stacionarna točka $x_1, x_2, x_3, \ldots, x_i$ uvrsti se u treću derivaciju funkcije. Pri tome vrijedi:

- za $f'''(x_i)\neq 0$ u x_i funkcija ima točku infleksije

Ako je $f'''(x_i)=0$, dalje slijedi:

VIII. Nađe se četvrta derivacija funkcije tako da se derivira treća derivacija funkcije

$$y^{(4)} = f^{(4)}(x)=\left(f'''(x)\right)'$$

IX. Svaka stacionarna točka $x_1, x_2, x_3, \ldots, x_i$ uvrsti se u četvrtu derivaciju funkcije. Pri tome vrijedi:

- za $f^{(4)}(x_i)>0$ u x_i je minimum
- za $f^{(4)}(x_i)<0$ u x_i je maksimum.

Ako je $f^{(4)}(x_i)=0$, slijede daljnja istraživanja.

Derivacija kvocijenta:

$$\left(\frac{f(x)}{g(x)}\right)'=\frac{f'(x)\cdot g(x)-f(x)\cdot g'(x)}{\left(g(x)\right)^2},\ g(x)\neq 0.$$

Ako je c konstanta, a u = f(x), v = g(x) su funkcije koje imaju derivacije, onda je

$$\left(c\cdot f(x)\right)' = c\cdot\left(f(x)\right)' \quad , \quad \left(f(x)\pm g(x)\right)' = \left(f(x)\right)' \pm \left(g(x)\right)'.$$

Tablično deriviranje	
Funkcija	**Derivacija**
c, konstanta	0
x	1
x^n	$n\cdot x^{n-1}$

Derivacija složene funkcije: $\frac{dy}{dx}=\frac{dy}{du}\cdot\frac{du}{dx}$ ili $y'(x)=y'(u)\cdot u'(x)$.

Složena funkcija derivira se tako da se najprije derivira po posrednoj funkciji kao argumentu i dobiveni rezultat pomnoži derivacijom posredne funkcije.

$$a^1=a \quad , \quad a^n : a^m = a^{n-m} \quad , \quad \frac{a}{b}=0 \ , \ b\neq 0 \ \Rightarrow \ a=0.$$

$$(a-b)^2=a^2-2\cdot a\cdot b+b^2.$$

Zakon distribucije množenja prema zbrajanju.

$$a\cdot(b+c)=a\cdot b+a\cdot c \quad , \quad a\cdot b+a\cdot c=a\cdot(b+c).$$

Skratiti razlomak znači brojnik i nazivnik tog razlomka podijeliti istim brojem različitim od nule i jedinice

$$\frac{a\cdot n}{b\cdot n}=\frac{a}{b} \ , \ n\neq 0 \ , \ n\neq 1.$$

Računamo prvu derivaciju zadane funkcije:

$$f(x)=\frac{x^2+8}{x-1} \Rightarrow f'(x)=\left(\frac{x^2+8}{x-1}\right)' \Rightarrow f'(x)=\frac{\left(x^2+8\right)'\cdot(x-1)-\left(x^2+8\right)\cdot(x-1)'}{(x-1)^2} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow f'(x)=\frac{\left(\left(x^2\right)'+8'\right)\cdot(x-1)-\left(x^2+8\right)\cdot\left(x'-1'\right)}{(x-1)^2} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow f'(x)=\frac{(2\cdot x+0)\cdot(x-1)-\left(x^2+8\right)\cdot(1-0)}{(x-1)^2} \Rightarrow f'(x)=\frac{2\cdot x\cdot(x-1)-\left(x^2+8\right)\cdot 1}{(x-1)^2} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow f'(x)=\frac{2\cdot x^2-2\cdot x-x^2-8}{(x-1)^2} \Rightarrow f'(x)=\frac{x^2-2\cdot x-8}{(x-1)^2}.$$

Prvu derivaciju funkcije izjednačimo s nulom i riješimo dobivenu jednadžbu (tražimo stacionarne točke).

$$f'(x)=0 \Rightarrow \frac{x^2-2\cdot x-8}{(x-1)^2}=0 \Rightarrow \left[\begin{array}{c}\text{razlomak je jednak nuli} \\ \text{ako je brojnik jednak nuli,} \\ \text{nazivnik mora biti različit od nule} \\ x-1\neq 0 \Rightarrow x\neq 1\end{array}\right] \Rightarrow x^2-2\cdot x-8=0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \left.\begin{matrix} x^2 - 2\cdot x - 8 = 0 \\ a = 1\ ,\ b = -2\ ,\ c = -8 \end{matrix}\right\} \Rightarrow \left.\begin{matrix} a = 1\ ,\ b = -2\ ,\ c = -8 \\ x_{1,2} = \dfrac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4\cdot a\cdot c}}{2\cdot a} \end{matrix}\right\} \Rightarrow x_{1,2} = \frac{-(-2) \pm \sqrt{(-2)^2 - 4\cdot 1\cdot(-8)}}{2\cdot 1} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow x_{1,2} = \frac{2 \pm \sqrt{4+32}}{2} \Rightarrow x_{1,2} = \frac{2 \pm \sqrt{36}}{2} \Rightarrow x_{1,2} = \frac{2 \pm 6}{2} \Rightarrow \left.\begin{matrix} x_1 = \dfrac{2+6}{2} \\ x_2 = \dfrac{2-6}{2} \end{matrix}\right\} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \left.\begin{matrix} x_1 = \dfrac{8}{2} \\ x_2 = -\dfrac{4}{2} \end{matrix}\right\} \Rightarrow \left.\begin{matrix} x_1 = \dfrac{8}{2} \\ x_2 = -\dfrac{4}{2} \end{matrix}\right\} \Rightarrow \left.\begin{matrix} x_1 = 4 \\ x_2 = -2 \end{matrix}\right\} - \text{stacionarne točke.}$$

Tražimo drugu derivaciju tako da deriviramo prvu derivaciju zadane funkcije.

$$f''(x) = \left(f'(x)\right)' = \left(\frac{x^2 - 2\cdot x - 8}{(x-1)^2}\right)' = \frac{\left(x^2 - 2\cdot x - 8\right)'\cdot(x-1)^2 - \left(x^2 - 2\cdot x - 8\right)\cdot\left((x-1)^2\right)'}{\left((x-1)^2\right)^2} =$$

$$= \frac{\left(\left(x^2\right)' - (2\cdot x)' - 8'\right)\cdot(x-1)^2 - \left(x^2 - 2\cdot x - 8\right)\cdot 2\cdot(x-1)\cdot(x-1)'}{(x-1)^4} =$$

$$= \frac{\left(2\cdot x - 2\cdot x' - 0\right)\cdot(x-1)^2 - \left(x^2 - 2\cdot x - 8\right)\cdot 2\cdot(x-1)\cdot\left(x' - 1'\right)}{(x-1)^4} =$$

$$= \frac{(2\cdot x - 2\cdot 1)\cdot(x-1)^2 - \left(x^2 - 2\cdot x - 8\right)\cdot 2\cdot(x-1)\cdot(1-0)}{(x-1)^4} =$$

$$= \frac{(2\cdot x - 2)\cdot(x-1)^2 - \left(x^2 - 2\cdot x - 8\right)\cdot 2\cdot(x-1)\cdot 1}{(x-1)^4} = \frac{(2\cdot x - 2)\cdot(x-1)^2 - \left(x^2 - 2\cdot x - 8\right)\cdot 2\cdot(x-1)}{(x-1)^4} =$$

$$= \frac{2\cdot(x-1)\cdot(x-1)^2 - \left(x^2 - 2\cdot x - 8\right)\cdot 2\cdot(x-1)}{(x-1)^4} = \frac{2\cdot(x-1)\cdot\left[(x-1)^2 - \left(x^2 - 2\cdot x - 8\right)\right]}{(x-1)^4} =$$

$$= \frac{2\cdot(x-1)\cdot\left[x^2 - 2\cdot x + 1 - x^2 + 2\cdot x + 8\right]}{(x-1)^4} = \frac{2\cdot(x-1)\cdot\left[x^2 - 2\cdot x + 1 - x^2 + 2\cdot x + 8\right]}{(x-1)^4} =$$

$$= \frac{2\cdot(x-1)\cdot 9}{(x-1)^4} = \frac{18\cdot(x-1)}{(x-1)^4} = \frac{18\cdot(x-1)}{(x-1)^4} = \frac{18}{(x-1)^3}.$$

Sada određujemo vrstu ekstrema (maksimum ili minimum) koje zadana funkcija ima u stacionarnim točkama.

- $$\left.\begin{matrix} f''(x) = \dfrac{18}{(x-1)^3} \\ x = 4 \end{matrix}\right\} \Rightarrow f''(4) = \frac{18}{(4-1)^3} \Rightarrow f''(4) = \frac{18}{3^3} > 0.$$

Funkcija ima minimum u točki x = 4 koji iznosi:

$$\left.\begin{array}{l} f(x)=\dfrac{x^2+8}{x-1} \\ x=4 \end{array}\right\} \Rightarrow f(4)=\frac{4^2+8}{4-1} \Rightarrow f(4)=\frac{16+8}{3} \Rightarrow f(4)=\frac{24}{3} \Rightarrow f(4)=\frac{24}{3} \Rightarrow f(4)=8 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow m(4,\,8).$$

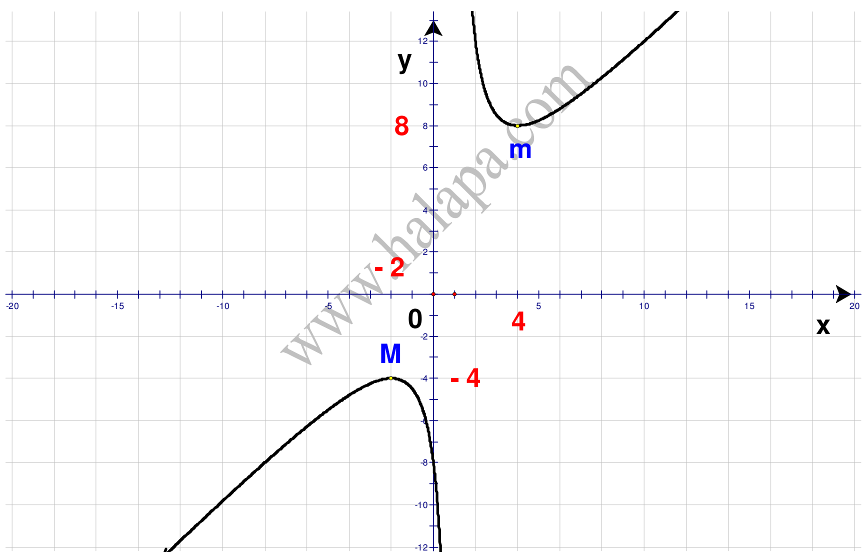
- $$\left.\begin{array}{l} f''(x)=\dfrac{18}{(x-1)^3} \\ x=-2 \end{array}\right\} \Rightarrow f''(-2)=\frac{18}{(-2-1)^3} \Rightarrow f''(-2)=\frac{18}{(-3)^3} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow f''(-2)=\frac{18}{-27} \Rightarrow f''(-2)=-\frac{18}{27}<0.$$

Funkcija ima maksimum u točki x = – 2 koji iznosi:

$$\left.\begin{array}{l} f(x)=\dfrac{x^2+8}{x-1} \\ x=-2 \end{array}\right\} \Rightarrow f(-2)=\frac{(-2)^2+8}{-2-1} \Rightarrow f(-2)=\frac{4+8}{-3} \Rightarrow f(-2)=\frac{12}{-3} \Rightarrow f(-2)=\frac{12}{-3} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow f(-2)=-4 \Rightarrow M(-2,\,-4).$$



Vježba 085

Ispitajte lokalne ekstreme funkcije $f(x)=\dfrac{x^2-2\cdot x+2}{x-1}$.

Rezultat: $M(0,\,-2)$, $m(2,\,2)$.

Zadatak 086 (Paula, maturantica)

Za koje vrijednosti koeficijenta a funkcija $f(x)=a\cdot x^3+x^2+2\cdot x+2$ monotono raste na cijelom području definicije?

$$A.\ a<\frac{1}{6} \qquad B.\ a>0 \qquad C.\ a<-1 \qquad D.\ a>\frac{1}{6}$$

Rješenje 086

Ponovimo!

$$a < b \ , \ c < 0 \Rightarrow \frac{a}{c} > \frac{b}{c}.$$

Tablično deriviranje	
Funkcija	**Derivacija**
c, konstanta	0
x	1
x^n	$n \cdot x^{n-1}$

Neka su f i g derivabilne na istom intervalu $\langle a, b \rangle$. Tada vrijedi da je funkcija f + g derivabilna pa slijedi:

$$(c \cdot f(x))' = c \cdot (f(x))' \ , \ c \text{ je konstanta} \quad , \quad (f(x) + g(x))' = (f(x))' + (g(x))'.$$

Ako je funkcija f diferencijabilna na intervalu $\langle a, b \rangle$ i $f'(x) > 0$ u svakoj točki intervala $\langle a, b \rangle$ tada funkcija raste na $\langle a, b \rangle$.

Polinom drugog stupnja (kvadratna funkcija) ima oblik

$$f(x) = a \cdot x^2 + b \cdot x + c,$$

gdje su a ≠ 0, b i c realni brojevi. Broj a naziva se vodeći koeficijent polinoma drugog stupnja, b linearni koeficijent, a c slobodni koeficijent polinoma.

Graf kvadratne funkcije

$$f(x) = a \cdot x^2 + b \cdot x + c,$$

je parabola

$$y = a \cdot x^2 + b \cdot x + c.$$

Tjeme T najniža je točka parabole i parabola je otvorena prema gore ako je a > 0.
Tjeme T najviša je točka parabole i parabola je otvorena prema dolje ako je a < 0.

Diskriminanta kvadratne jednadžbe $a \cdot x^2 + b \cdot x + c = 0$ je broj $D = b^2 - 4 \cdot a \cdot c$.

- Ako je D > 0, jednadžba ima dva realna rješenja (korijena), tj. parabola siječe os x u dvije točke.
- Ako je D = 0, jednadžba ima jedno dvostruko realno rješenje (korijen), tj. parabola dira os x u jednoj točki.
- Ako je D < 0, jednadžba ima kompleksno – konjugirana rješenja (korijene), tj. parabola ne siječe os x.

Skratiti razlomak znači brojnik i nazivnik tog razlomka podijeliti istim brojem različitim od nule i jedinice

$$\frac{a \cdot n}{b \cdot n} = \frac{a}{b} \ , \ n \neq 0 \ , \ n \neq 1.$$

Odredimo derivaciju funkcije.

$$f(x) = a \cdot x^3 + x^2 + 2 \cdot x + 2 \Rightarrow f'(x) = \left(a \cdot x^3 + x^2 + 2 \cdot x + 2\right)' \Rightarrow$$

$$\Rightarrow f'(x) = \left(a \cdot x^3\right)' + \left(x^2\right)' + (2 \cdot x)' + 2' \Rightarrow f'(x) = a \cdot \left(x^3\right)' + 2 \cdot x + 2 \cdot x' + 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow f'(x) = 3 \cdot a \cdot x^2 + 2 \cdot x + 2 \cdot 1 \Rightarrow f'(x) = 3 \cdot a \cdot x^2 + 2 \cdot x + 2.$$

Budući da funkcija mora monotono rasti na cijelom području definicije, slijedi:

$$f'(x) > 0 \Rightarrow 3 \cdot a \cdot x^2 + 2 \cdot x + 2 > 0.$$

Uočimo da je f ' (x) kvadratna funkcija koja mora biti pozitivna za svaki x. Vodeći je koeficijent funkcije f ' (x) 3 · a i a mora biti pozitivan (inače je parabola okrenuta prema dolje). Nadalje, njezine nultočke ne smiju biti realne pa mora biti D < 0.

$$f'(x)=3\cdot a\cdot x^2+2\cdot x+2 \;\Rightarrow\; \left.\begin{array}{l} f'(x)=3\cdot a\cdot x^2+2\cdot x+2 \\ a=3\cdot a \;\;,\;\; b=2 \;\;,\;\; c=2 \end{array}\right\} \Rightarrow \left[b^2-4\cdot a\cdot c<0\right] \Rightarrow$$

$$\Rightarrow\; 2^2-4\cdot 3\cdot a\cdot 2<0 \;\Rightarrow\; 4-24\cdot a<0 \;\Rightarrow\; -24\cdot a<-4 \;\Rightarrow\; -24\cdot a<-4 \;/:(-24) \;\Rightarrow$$

$$\Rightarrow\; a>\frac{4}{24} \;\Rightarrow\; a>\frac{4}{24} \;\Rightarrow\; a>\frac{1}{6}.$$

Odgovor je pod D.

Vježba 086

Za koje vrijednosti koeficijenta a funkcija $f(x)=a\cdot x^3+x^2+2\cdot x+2$ monotono pada na cijelom području definicije?

$$A.\; a<\frac{1}{6} \qquad B.\; a>0 \qquad C.\; a<-1 \qquad D.\; a>\frac{1}{6}$$

Rezultat: A.

Zadatak 087 (Paula, Ante, maturantica, tehnička škola)

Zatvorena limenka u obliku valjka izrađena je od materijala čija je cijena 70 kn / m^2. Kolika je cijena materijala potrebnoga za izradu jedne limenke čiji je obujam 0.35 L, ako je za njezinu izradu potrebno najmanje materijala? Napomena: Debljinu materijala i otpad treba zanemariti.

$$1\;L=1\;dm^3$$

Rješenje 087

Ponovimo!

$$1\;m^2=100\;dm^2 \quad,\quad 1\;dm^2=\frac{1}{100}\,m^2 \quad,\quad 1\;L=1\;dm^3 \quad,\quad a\cdot\frac{b}{c}=\frac{a\cdot b}{c}.$$

Skratiti razlomak znači brojnik i nazivnik tog razlomka podijeliti istim brojem različitim od nule i jedinice

$$\frac{a\cdot n}{b\cdot n}=\frac{a}{b} \;\;,\;\; n\neq 0 \;\;,\;\; n\neq 1.$$

Obujam valjka

Uspravni i kosi valjak polumjera osnovke (baze) r i visine h imaju jednake obujmove. Taj obujam iznosi:

$$V=r^2\cdot\pi\cdot h.$$

Oplošje uspravnog valjka polumjera r i visine h računa se formulom

$$O=2\cdot r^2\cdot\pi+2\cdot r\cdot\pi\cdot h.$$

Tablično deriviranje	
Funkcija	**Derivacija**
x^n	$n\cdot x^{n-1}$
$\frac{1}{x}$	$-\frac{1}{x^2}$
$\frac{1}{x^n}$	$\frac{-n}{x^{n+1}}$

Neka su f i g derivabilne na istom intervalu $\langle a, b\rangle$. Tada vrijedi da je funkcija f + g derivabilna pa slijedi:

$$\left(c\cdot f(x)\right)'=c\cdot\left(f(x)\right)' \text{ , } c \text{ je konstanta} \quad , \quad \left(f(x)+g(x)\right)'=\left(f(x)\right)'+\left(g(x)\right)'.$$

$$\left(f(x)-g(x)\right)'=\left(f(x)\right)'-\left(g(x)\right)'.$$

Određivanje maksimuma i minimuma funkcije y = f(x)

I. Nađe se prva derivacija funkcije

$$y'=f'(x)$$

II. Prva derivacija funkcije izjednači se s nulom

$$f'(x)=0$$

III. Riješi se dobivena jednadžba

$$f'(x)=0 \;\Rightarrow\; x_1,\ x_2,\ x_3,\ \dots,\ x_i \text{ su rješenja jednadžbe,}$$

to su vrijednosti apscise za koje zadana funkcija može imati ekstrem, te se točke zovu stacionarne točke

IV. Nađe se druga derivacija funkcije tako da se derivira prva derivacija funkcije

$$y''=f''(x)=\left(f'(x)\right)'$$

V. Svaka stacionarna točka x_1, x_2, x_3, ... , x_i uvrsti se u drugu derivaciju funkcije. Pri tome vrijedi:

- za $f''(x_i)>0$ u x_i je minimum
- za $f''(x_i)<0$ u x_i je maksimum.

Ako je $f''(x_i)=0$, dalje slijedi:

VI. Nađe se treća derivacija funkcije tako da se derivira druga derivacija funkcije

$$y'''=f'''(x)=\left(f''(x)\right)'$$

VII. Svaka stacionarna točka x_1, x_2, x_3, ... , x_i uvrsti se u treću derivaciju funkcije. Pri tome vrijedi:

- za $f'''(x_i)\neq 0$ u x_i funkcija ima točku infleksije

Ako je $f'''(x_i)=0$, dalje slijedi:

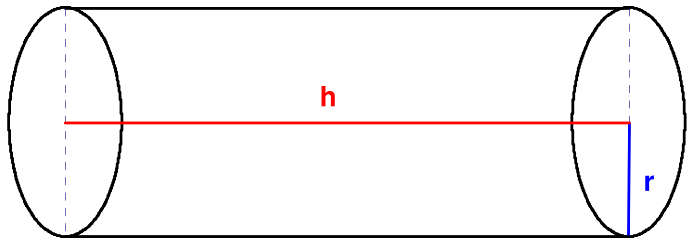
VIII. Nađe se četvrta derivacija funkcije tako da se derivira treća derivacija funkcije

$$y^{(4)}=f^{(4)}(x)=\left(f'''(x)\right)'$$

IX. Svaka stacionarna točka x_1, x_2, x_3, ... , x_i uvrsti se u četvrtu derivaciju funkcije. Pri tome vrijedi:

- za $f^{(4)}(x_i)>0$ u x_i je minimum
- za $f^{(4)}(x_i)<0$ u x_i je maksimum.

Ako je $f^{(4)}(x_i)=0$, slijede daljnja istraživanja.



Moramo naći dimenzije konzerve zadanoga obujma koje će određivati najmanje oplošje. Trebamo izraziti oplošje kao funkciju polumjera r.

$$\left.\begin{array}{l} V=r^2\cdot\pi\cdot h \\ O=2\cdot r^2\cdot\pi+2\cdot r\cdot\pi\cdot h \end{array}\right\} \Rightarrow \left.\begin{array}{l} r^2\cdot\pi\cdot h=V \\ O=2\cdot r^2\cdot\pi+2\cdot r\cdot\pi\cdot h \end{array}\right\} \Rightarrow \left.\begin{array}{l} r^2\cdot\pi\cdot h=V \;/\cdot\dfrac{1}{r^2\cdot\pi} \\ O=2\cdot r^2\cdot\pi+2\cdot r\cdot\pi\cdot h \end{array}\right\} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \left.\begin{array}{l} h=\dfrac{V}{r^2\cdot\pi} \\ O=2\cdot r^2\cdot\pi+2\cdot r\cdot\pi\cdot h \end{array}\right\} \Rightarrow O=2\cdot r^2\cdot\pi+2\cdot r\cdot\pi\cdot\frac{V}{r^2\cdot\pi} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow O=2\cdot r^2\cdot\pi+2\cdot r\cdot\pi\cdot\frac{V}{r^2\cdot\pi} \Rightarrow O=2\cdot r^2\cdot\pi+\frac{2\cdot V}{r}.$$

Zahtjev za najmanjim oplošjem konzerve ekvivalentan je nalaženju minimuma funkcije

$$O(r)=2\cdot r^2\cdot\pi+\frac{2\cdot V}{r}.$$

Nađimo prvu derivaciju funkcije!

$$O(r)=2\cdot r^2\cdot\pi+\frac{2\cdot V}{r} \Rightarrow O'(r)=\left(2\cdot r^2\cdot\pi+\frac{2\cdot V}{r}\right)' \Rightarrow O'(r)=\left(2\cdot r^2\cdot\pi\right)'+\left(\frac{2\cdot V}{r}\right)' \Rightarrow$$

$$\Rightarrow O'(r)=2\cdot\pi\cdot\left(r^2\right)'+2\cdot V\cdot\left(\frac{1}{r}\right)' \Rightarrow O'(r)=2\cdot\pi\cdot 2\cdot r+2\cdot V\cdot\left(-\frac{1}{r^2}\right) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow O'(r)=4\cdot r\cdot\pi-\frac{2\cdot V}{r^2}.$$

Tražimo stacionarnu točku. Iz uvjeta

$$O'(r)=0$$

dobije se:

$$O'(r)=0 \Rightarrow 4\cdot r\cdot\pi-\frac{2\cdot V}{r^2}=0 \Rightarrow 4\cdot r\cdot\pi-\frac{2\cdot V}{r^2}=0 \;/\cdot r^2 \Rightarrow 4\cdot r^3\cdot\pi-2\cdot V=0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 4\cdot r^3\cdot\pi=2\cdot V \Rightarrow 4\cdot r^3\cdot\pi=2\cdot V \;/\cdot\frac{1}{4\cdot\pi} \Rightarrow r^3=\frac{V}{2\cdot\pi} \Rightarrow r^3=\frac{V}{2\cdot\pi} \;/\sqrt[3]{\;} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow r=\sqrt[3]{\frac{V}{2\cdot\pi}}.$$

Stacionarna točka je

$$r=\sqrt[3]{\frac{V}{2\cdot\pi}}.$$

Provjerimo je li riječ o minimumu tako da nađemo drugu derivaciju.

$$O''(r)=\left(O'(r)\right)' \Rightarrow O''(r)=\left(4\cdot r\cdot\pi-\frac{2\cdot V}{r^2}\right)' \Rightarrow O''(r)=\left(4\cdot r\cdot\pi\right)'-\left(\frac{2\cdot V}{r^2}\right)' \Rightarrow$$

$$\Rightarrow O''(r)=4\cdot\pi\cdot r'-2\cdot V\cdot\left(\frac{1}{r^2}\right)' \Rightarrow O''(r)=4\cdot\pi\cdot 1+4\cdot V\cdot\frac{1}{r^3} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow O''(r)=4\cdot\pi+\frac{4\cdot V}{r^3} \Rightarrow O''(r)>0.$$

Dakle, minimum se postiže za

$$r=\sqrt[3]{\frac{V}{2\cdot\pi}} \Rightarrow r=\sqrt[3]{\frac{0.35\ dm^3}{2\cdot\pi}} \Rightarrow r=0.3819\ dm.$$

Oplošje konzerve iznosi:

$$O=2\cdot r^2\cdot\pi+\frac{2\cdot V}{r} \Rightarrow O=2\cdot\left(0.3819\ dm\right)^2\cdot\pi+\frac{2\cdot 0.35\ dm^3}{0.3819\ dm} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow O=2.7493\ dm^2 \Rightarrow O=0.027493\ m^2.$$

Budući da je cijena materijala 70 kn / m^2, za izradu jedne limenke platit će se

$$0.027493\ m^2\cdot 70\ \frac{kn}{m^2}=1.92\ kn.$$

Vježba 087

Zatvorena limenka u obliku valjka izrađena je od materijala čija je cijena 70 kn / m^2. Kolika je cijena materijala potrebnoga za izradu jedne limenke čiji je obujam 350 cm^3, ako je za njezinu izradu potrebno najmanje materijala? Napomena: Debljinu materijala i otpad treba zanemariti.

$$1\ L=1\ dm^3$$

Rezultat: 1.92 kn.

Zadatak 088 (Bojana, gimnazija)

Odredite jednadžbu tangente krivulje y = x^3 + 3 · x^2 – 5 okomite na pravac 2 · x – 6 · y + 1 = 0.

Rješenje 088

Ponovimo!

$$a^2+2\cdot a\cdot b+b^2=\left(a+b\right)^2 \quad , \quad a^2=0 \Rightarrow a=0.$$

Tablično deriviranje	
Funkcija	**Derivacija**
x^n	$n\cdot x^{n-1}$
c konstanta	0

Neka su f i g derivabilne na istom intervalu $\langle a,\ b\rangle$. Tada vrijedi da je funkcija f + g derivabilna pa slijedi:

$$\left(c\cdot f(x)\right)'=c\cdot\left(f(x)\right)',\ c \text{ je konstanta} \quad , \quad \left(f(x)+g(x)\right)'=\left(f(x)\right)'+\left(g(x)\right)'.$$

Jednadžba pravca oblika

$$A\cdot x+B\cdot y+C=0$$

naziva se implicitni oblik jednadžbe pravca ili kraće, opći oblik jednadžbe pravca.
Jednadžba pravca oblika

$$y=k\cdot x+l$$

naziva se eksplicitni oblik jednadžbe pravca ili kraće, eksplicitna jednadžba pravca. Broj k naziva se koeficijent smjera pravca. Broj l nazivamo odsječak pravca na osi y.
Jednadžba pravca zadanog koeficijentom smjera k i točkom $T(x_1, y_1)$ glasi

$$y - y_1 = k \cdot (x - x_1).$$

Uvjet okomitosti:
Ako su pravci dani eksplicitnim jednadžbama $y = k_1 \cdot x + l_1$, $y = k_2 \cdot x + l_2$, $k_1, k_2 \neq 0$, tada su okomiti ako i samo ako je

$$k_1 \cdot k_2 = -1 \Rightarrow k_1 = -\frac{1}{k_2} \Rightarrow k_2 = -\frac{1}{k_1}.$$

Koeficijenti, dakle, moraju imati suprotne predznake i moraju biti međusobno recipročni.
Tangenta (dodirnica) je pravac koji dodiruje krivulju u jednoj točki.
Jednadžba tangente u točki $D(x_0, y_0)$ krivulje $y = f(x)$ glasi:

$$y - y_0 = f\,'(x_0) \cdot (x - x_0).$$

Implicitni oblik jednadžbe zadanog pravca preoblikujemo u eksplicitni oblik kako bismo odredili koeficijent smjera k_1 pravca.

$$2 \cdot x - 6 \cdot y + 1 = 0 \Rightarrow -6 \cdot y = -2 \cdot x - 1 \Rightarrow -6 \cdot y = -2 \cdot x - 1 \; /:(-6) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow y = \frac{2}{6} \cdot x + \frac{1}{6} \Rightarrow y = \frac{2}{6} \cdot x + \frac{1}{6} \Rightarrow y = \frac{1}{3} \cdot x + \frac{1}{6} \Rightarrow k_1 = \frac{1}{3}.$$

Budući da je tražena tangenta okomita na pravac, njezin koeficijent smjera k_2 iznosi:

$$k_1 \cdot k_2 = -1 \Rightarrow \left[k_1 = \frac{1}{3} \right] \Rightarrow \frac{1}{3} \cdot k_2 = -1 \Rightarrow \frac{1}{3} \cdot k_2 = -1 \; / \cdot 3 \Rightarrow k_2 = -3.$$

Odredimo derivaciju funkcije

$$f(x) = x^3 + 3 \cdot x^2 - 5.$$

$$f\,'(x) = \left(x^3 + 3 \cdot x^2 - 5\right)' \Rightarrow f\,'(x) = \left(x^3\right)' + \left(3 \cdot x^2\right)' - 5' \Rightarrow f\,'(x) = 3 \cdot x^2 + 3 \cdot \left(x^2\right)' - 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow f\,'(x) = 3 \cdot x^2 + 3 \cdot 2 \cdot x \Rightarrow f\,'(x) = 3 \cdot x^2 + 6 \cdot x.$$

Budući da je $f\,'(x_\circ) = k_2$, izračunat ćemo koordinate točke $D(x_0, y_0)$ u kojoj tangenta dodiruje krivulju.

$$f\,'(x_\circ) = k_2 \Rightarrow \left[k_2 = -3 \right] \Rightarrow 3 \cdot x_\circ^2 + 6 \cdot x_\circ = -3 \Rightarrow 3 \cdot x_\circ^2 + 6 \cdot x_\circ + 3 = 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 3 \cdot x_\circ^2 + 6 \cdot x_\circ + 3 = 0 \; /:3 \Rightarrow x_\circ^2 + 2 \cdot x_\circ + 1 = 0 \Rightarrow (x_\circ + 1)^2 = 0 \Rightarrow x_\circ + 1 = 0 \Rightarrow x_\circ = -1.$$

Računamo y_0.

$$y_\circ = f(x_\circ) = x_\circ^3 + 3 \cdot x_\circ^2 - 5 \Rightarrow y_\circ = f(-1) = (-1)^3 + 3 \cdot (-1)^2 - 5 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow y_\circ = -1 + 3 \cdot 1 - 5 \Rightarrow y_\circ = -1 + 3 - 5 \Rightarrow y_\circ = -3.$$

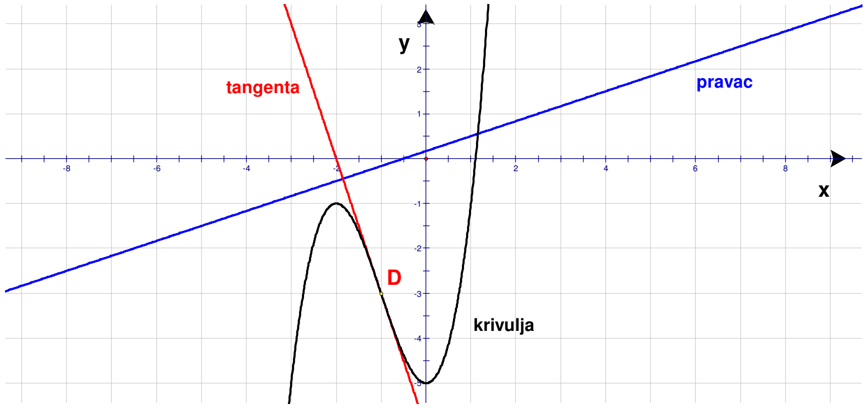
Koordinate točke D glase:

$$D(x_\circ,\, y_\circ) = D(-1,\, -3).$$

Jednadžba tangente je:

$$\left.\begin{array}{l} k_2 = -3 \\ D(x_\circ,\, y_\circ) = D(-1,\, -3) \end{array}\right\} \Rightarrow \left[y - y_\circ = k_2 \cdot (x - x_\circ) \right] \Rightarrow y - (-3) = -3 \cdot (x - (-1)) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow y + 3 = -3 \cdot (x + 1) \Rightarrow y + 3 = -3 \cdot x - 3 \Rightarrow y = -3 \cdot x - 3 - 3 \Rightarrow y = -3 \cdot x - 6.$$



Vježba 088

Odredite jednadžbu tangente krivulje $y = x^3 + 3 \cdot x^2 - 5$ okomite na pravac $x - 3 \cdot y + 0.5 = 0$.

Rezultat: $y = -3 \cdot x - 6.$

Zadatak 089 (Asterix, gimnazija)

U kojoj točki krivulje $y = x^3 + 2 \cdot x - 1$ treba položiti tangentu tako da bude okomita na pravac $x + y = 0$?

Rješenje 089

Ponovimo!

$$\sqrt{\frac{a}{b}} = \frac{\sqrt{a}}{\sqrt{b}} \quad , \quad \frac{a}{b} \cdot \frac{c}{d} = \frac{a \cdot c}{b \cdot d} \quad , \quad a^1 = a \quad , \quad a^n \cdot a^m = a^{n+m} \quad , \quad \left(\sqrt{a}\right)^2 = a.$$

Tablično deriviranje	
Funkcija	**Derivacija**
x^n	$n \cdot x^{n-1}$
x	1
c konstanta	0

Neka su f i g derivabilne na istom intervalu $\langle a, b \rangle$. Tada vrijedi da su funkcije f + g i f – g derivabilne pa slijedi:

$$\left(c \cdot f(x)\right)' = c \cdot \left(f(x)\right)' \text{ , } c \text{ je konstanta} \quad , \quad \left(f(x) + g(x)\right)' = \left(f(x)\right)' + \left(g(x)\right)'.$$

$$\left(f(x) - g(x)\right)' = \left(f(x)\right)' - \left(g(x)\right)'.$$

Jednadžba pravca oblika

$$y = k \cdot x + l$$

naziva se eksplicitni oblik jednadžbe pravca ili kraće, eksplicitna jednadžba pravca. Broj k naziva se koeficijent smjera pravca. Broj l nazivamo odsječak pravca na osi y.

Uvjet okomitosti:

Ako su pravci dani eksplicitnim jednadžbama $y = k_1 \cdot x + l_1$, $y = k_2 \cdot x + l_2$, $k_1, k_2 \neq 0$, tada su okomiti ako i samo ako je

$$k_1 \cdot k_2 = -1 \;\Rightarrow\; k_1 = -\frac{1}{k_2} \;\Rightarrow\; k_2 = -\frac{1}{k_1}.$$

Koeficijenti, dakle, moraju imati suprotne predznake i moraju biti međusobno recipročni.

Kada je pravac tangenta na graf funkcije f, onda je njegov koeficijent smjera jednak derivaciji funkcije u točki x_0:

$$k = f'(x_\circ).$$

Tangenta (dodirnica) je pravac koji dodiruje krivulju u jednoj točki.

Jednadžba tangente u točki $D(x_0, y_0)$ krivulje $y = f(x)$ glasi:

$$y - y_\circ = f'(x_\circ) \cdot (x - x_\circ).$$

Imaginarni brojevi imaju oblik

$$b \cdot i,$$

gdje je *b* realni broj koji nije jednak nuli, a ***i*** je imaginarna jedinica za koju vrijedi:

$$i = \sqrt{-1}.$$

Jednadžbu zadanog pravca preoblikujemo u eksplicitni oblik kako bismo odredili koeficijent smjera.

$$x + y = 0 \;\Rightarrow\; y = -x \;\Rightarrow\; k_1 = -1.$$

Tangenta je okomita na taj pravac pa njezin koeficijent smjera iznosi:

$$k_2 = -\frac{1}{k_1} \;\Rightarrow\; k_2 = -\frac{1}{-1} \;\Rightarrow\; k_2 = 1.$$

Odredimo derivaciju funkcije

$$f(x) = x^3 + 2 \cdot x - 1.$$

$$f'(x) = \left(x^3 + 2 \cdot x - 1\right)' \;\Rightarrow\; f'(x) = \left(x^3\right)' + (2 \cdot x)' - 1' \;\Rightarrow\; f'(x) = 3 \cdot x^2 + 2.$$

Zato je

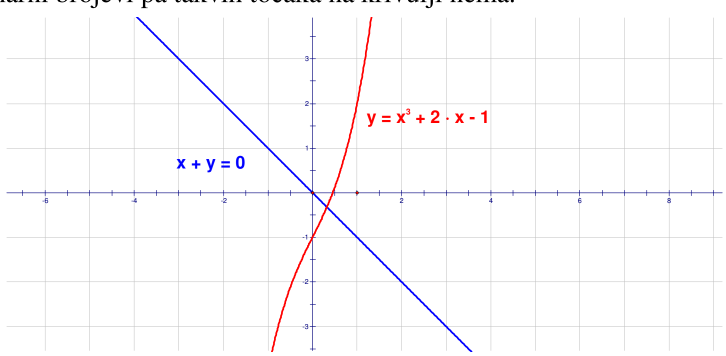
$$f'(x) = k_2 \;\Rightarrow\; \left[\begin{array}{l} f'(x) = 3 \cdot x^2 + 2 \\ k_2 = 1 \end{array}\right] \;\Rightarrow\; 3 \cdot x^2 + 2 = 1 \;\Rightarrow\; 3 \cdot x^2 = 1 - 2 \;\Rightarrow\; 3 \cdot x^2 = -1 \;\Rightarrow$$

$$\Rightarrow\; 3 \cdot x^2 = -1 \;/ : 3 \;\Rightarrow$$

$$\Rightarrow\; x^2 = -\frac{1}{3} \;\Rightarrow\; x^2 = -\frac{1}{3} \;/ \sqrt{} \;\Rightarrow\; x_{1,2} = \pm\sqrt{-\frac{1}{3}} \;\Rightarrow\; x_{1,2} = \pm\, i \cdot \sqrt{\frac{1}{3}} \;\Rightarrow\; x_{1,2} = \pm\, i \cdot \frac{1}{\sqrt{3}} \;\Rightarrow$$

$$\Rightarrow\; \left[\begin{array}{l} \text{racionalizacija} \\ \text{nazivnika} \end{array}\right] \;\Rightarrow\; x_{1,2} = \pm\, i \cdot \frac{1}{\sqrt{3}} \cdot \frac{\sqrt{3}}{\sqrt{3}} \;\Rightarrow\; x_{1,2} = \pm\, i \cdot \frac{\sqrt{3}}{\left(\sqrt{3}\right)^2} \;\Rightarrow\; x_{1,2} = \pm\, i \cdot \frac{\sqrt{3}}{3}.$$

Rješenja su imaginarni brojevi pa takvih točaka na krivulji nema.



Vježba 089

U kojoj točki krivulje $y = x^3 + 2 \cdot x - 3$ treba položiti tangentu tako da bude okomita na pravac $x + y = 0$?

Rezultat: Nema ih!