Zadatak 081 (Ana, strukovna škola)

Koliko je $g'(6)$, ako je $g(x)=\sqrt{(2\cdot x-3)^3}$?

Rješenje 081

Ponovimo!

$$\sqrt[n]{a^m}=a^{\frac{m}{n}} \quad , \quad n=\frac{n}{1} \quad , \quad \frac{a}{b}-\frac{c}{d}=\frac{a\cdot d-b\cdot c}{b\cdot d}.$$

Oznake za derivaciju su:

$$y'=\frac{dy}{dx}=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta y}{\Delta x}=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{f(x+\Delta x)-f(x)}{\Delta x}=f'(x).$$

Tablično deriviranje	
Funkcija	**Derivacija**
c	0
x	1
x^n	$n\cdot x^{n-1}$

Ako je c konstanta, a u = f(x), v = g(x) su funkcije koje imaju derivacije, onda je

$$(c\cdot f(x))'=c\cdot(f(x))' \quad , \quad (f(x)\pm g(x))'=(f(x))'\pm(g(x))'.$$

Derivacija složene funkcije: $\frac{dy}{dx}=\frac{dy}{du}\cdot\frac{du}{dx}$ ili $y'(x)=y'(u)\cdot u'(x)$.

Složena funkcija derivira se tako da se najprije derivira po posrednoj funkciji kao argumentu i dobiveni rezultat pomnoži derivacijom posredne funkcije.

$$g(x)=\sqrt{(2\cdot x-3)^3} \Rightarrow g(x)=(2\cdot x-3)^{\frac{3}{2}} \Rightarrow g'(x)=\left((2\cdot x-3)^{\frac{3}{2}}\right)' \Rightarrow$$

$$\Rightarrow g'(x)=\frac{3}{2}\cdot(2\cdot x-3)^{\frac{3}{2}-1}\cdot(2\cdot x-3)' \Rightarrow g'(x)=\frac{3}{2}\cdot(2\cdot x-3)^{\frac{3}{2}-\frac{1}{1}}\cdot\left((2\cdot x)'-3'\right) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow g'(x)=\frac{3}{2}\cdot(2\cdot x-3)^{\frac{3-2}{2}}\cdot\left(2\cdot x'-0\right) \Rightarrow g'(x)=\frac{3}{2}\cdot(2\cdot x-3)^{\frac{1}{2}}\cdot(2\cdot 1-0) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow g'(x)=\frac{3}{2}\cdot\sqrt{2\cdot x-3}\cdot 2 \Rightarrow g'(x)=\frac{3}{2}\cdot\sqrt{2\cdot x-3}\cdot 2 \Rightarrow g'(x)=3\cdot\sqrt{2\cdot x-3}.$$

Tada je:

$$\left.\begin{array}{l} x=6 \\ g'(x)=3\cdot\sqrt{2\cdot x-3} \end{array}\right\} \Rightarrow g'(6)=3\cdot\sqrt{2\cdot 6-3} \Rightarrow g'(6)=3\cdot\sqrt{12-3} \Rightarrow g'(6)=3\cdot\sqrt{9} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow g'(6)=3\cdot 3 \Rightarrow g'(6)=9.$$

Vježba 081

Koliko je $g'(2)$, ako je $g(x)=\sqrt{(2\cdot x-3)^3}$?

Rezultat: 3.

Zadatak 082 (Martina, Kornelija, bivše maturantice ☺)

Odredi derivaciju funkcije $f(x)=\ln\left(x+\sqrt{x^2-1}\right)-\frac{x}{\sqrt{x^2-1}}$.

Rješenje 082

Ponovimo!

$$n=\frac{n}{1}\quad,\quad \frac{a}{b}+\frac{c}{d}=\frac{a\cdot d+b\cdot c}{b\cdot d}\quad,\quad \left(\sqrt{a}\right)^2=a\quad,\quad \frac{a}{b}-\frac{c}{d}=\frac{a\cdot d-b\cdot c}{b\cdot d}.$$

$$a\cdot\frac{b}{c}=\frac{a\cdot b}{c}\quad,\quad \sqrt[n]{a^m}=a^{\frac{m}{n}}\quad,\quad a^1=a\quad,\quad a^n\cdot a^m=a^{n+m}\quad,\quad \frac{\frac{a}{b}}{\frac{c}{d}}=\frac{a\cdot d}{b\cdot c}.$$

Skratiti razlomak znači brojnik i nazivnik tog razlomka podijeliti istim brojem različitim od nule i jedinice

$$\frac{a\cdot n}{b\cdot n}=\frac{a}{b}\ ,\ n\neq 0\ ,\ n\neq 1.$$

Oznake za derivaciju su:

$$y'=\frac{dy}{dx}=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta y}{\Delta x}=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{f(x+\Delta x)-f(x)}{\Delta x}=f'(x).$$

Tablično deriviranje	
Funkcija	**Derivacija**
c	0
x	1
x^n	$n\cdot x^{n-1}$
$\ln x$	$\frac{1}{x}$
$\sqrt{x}$	$\frac{1}{2\cdot\sqrt{x}}$

$$\text{Derivacija zbroja}:\ (f+g)'=f'+g'.$$

$$\text{Derivacija razlike}:\ (f-g)'=f'-g'.$$

Derivacija kvocijenta:

$$\left(\frac{f(x)}{g(x)}\right)'=\frac{f'(x)\cdot g(x)-f(x)\cdot g'(x)}{\left(g(x)\right)^2},\ g(x)\neq 0.$$

Derivacija složene funkcije: $\frac{dy}{dx}=\frac{dy}{du}\cdot\frac{du}{dx}$ ili $y'(x)=y'(u)\cdot u'(x)$.

Složena funkcija derivira se tako da se najprije derivira po posrednoj funkciji kao argumentu i dobiveni rezultat pomnoži derivacijom posredne funkcije.

$$f(x)=\ln\left(x+\sqrt{x^2-1}\right)-\frac{x}{\sqrt{x^2-1}}\ \Rightarrow\ f'(x)=\left(\ln\left(x+\sqrt{x^2-1}\right)-\frac{x}{\sqrt{x^2-1}}\right)'\ \Rightarrow$$

$$\Rightarrow\ f'(x)=\left(\ln\left(x+\sqrt{x^2-1}\right)\right)'-\left(\frac{x}{\sqrt{x^2-1}}\right)'\ \Rightarrow$$

$$\Rightarrow\ f'(x)=\frac{1}{x+\sqrt{x^2-1}}\cdot\left(x+\sqrt{x^2-1}\right)'-\frac{x'\cdot\sqrt{x^2-1}-x\cdot\left(\sqrt{x^2-1}\right)'}{\left(\sqrt{x^2-1}\right)^2}\ \Rightarrow$$

$$\Rightarrow\ f'(x)=\frac{1}{x+\sqrt{x^2-1}}\cdot\left(x'+\left(\sqrt{x^2-1}\right)'\right)-\frac{1\cdot\sqrt{x^2-1}-x\cdot\frac{1}{2\cdot\sqrt{x^2-1}}\cdot\left(x^2-1\right)'}{x^2-1}\ \Rightarrow$$

$$\Rightarrow\ f'(x)=\frac{1}{x+\sqrt{x^2-1}}\cdot\left(1+\frac{1}{2\cdot\sqrt{x^2-1}}\cdot\left(x^2-1\right)'\right)-\frac{\sqrt{x^2-1}-x\cdot\frac{1}{2\cdot\sqrt{x^2-1}}\cdot 2\cdot x}{x^2-1}\ \Rightarrow$$

$$\Rightarrow\ f'(x)=\frac{1}{x+\sqrt{x^2-1}}\cdot\left(1+\frac{1}{2\cdot\sqrt{x^2-1}}\cdot 2\cdot x\right)-\frac{\sqrt{x^2-1}-x\cdot\frac{1}{2\cdot\sqrt{x^2-1}}\cdot 2\cdot x}{x^2-1}\ \Rightarrow$$

$$\Rightarrow\ f'(x)=\frac{1}{x+\sqrt{x^2-1}}\cdot\left(1+\frac{1}{2\cdot\sqrt{x^2-1}}\cdot 2\cdot x\right)-\frac{\sqrt{x^2-1}-x\cdot\frac{1}{2\cdot\sqrt{x^2-1}}\cdot 2\cdot x}{x^2-1}\ \Rightarrow$$

$$\Rightarrow\ f'(x)=\frac{1}{x+\sqrt{x^2-1}}\cdot\left(1+\frac{1}{\sqrt{x^2-1}}\cdot x\right)-\frac{\sqrt{x^2-1}-x\cdot\frac{1}{\sqrt{x^2-1}}\cdot x}{x^2-1}\ \Rightarrow$$

$$\Rightarrow\ f'(x)=\frac{1}{x+\sqrt{x^2-1}}\cdot\left(1+\frac{x}{\sqrt{x^2-1}}\right)-\frac{\sqrt{x^2-1}-\frac{x^2}{\sqrt{x^2-1}}}{x^2-1}\ \Rightarrow$$

$$\Rightarrow\ f'(x)=\frac{1}{x+\sqrt{x^2-1}}\cdot\left(\frac{1}{1}+\frac{x}{\sqrt{x^2-1}}\right)-\frac{\frac{\sqrt{x^2-1}}{1}-\frac{x^2}{\sqrt{x^2-1}}}{x^2-1}\ \Rightarrow$$

$$\Rightarrow\ f'(x)=\frac{1}{x+\sqrt{x^2-1}}\cdot\frac{\sqrt{x^2-1}+x}{\sqrt{x^2-1}}-\frac{\frac{\left(\sqrt{x^2-1}\right)^2-x^2}{\sqrt{x^2-1}}}{x^2-1}\ \Rightarrow$$

$$\Rightarrow f'(x)=\frac{1}{x+\sqrt{x^2-1}}\cdot\frac{x+\sqrt{x^2-1}}{\sqrt{x^2-1}}-\frac{\frac{x^2-1-x^2}{\sqrt{x^2-1}}}{x^2-1}\Rightarrow$$

$$\Rightarrow f'(x)=\frac{1}{x+\sqrt{x^2-1}}\cdot\frac{x+\sqrt{x^2-1}}{\sqrt{x^2-1}}-\frac{\frac{x^2-1-x^2}{\sqrt{x^2-1}}}{x^2-1}\Rightarrow f'(x)=\frac{1}{1}\cdot\frac{1}{\sqrt{x^2-1}}-\frac{\frac{-1}{\sqrt{x^2-1}}}{x^2-1}\Rightarrow$$

$$\Rightarrow f'(x)=\frac{1}{\sqrt{x^2-1}}-\frac{\frac{-1}{\sqrt{x^2-1}}}{\frac{x^2-1}{1}}\Rightarrow f'(x)=\frac{1}{\sqrt{x^2-1}}-\frac{-1}{\left(x^2-1\right)\cdot\sqrt{x^2-1}}\Rightarrow$$

$$\Rightarrow f'(x)=\frac{1}{\sqrt{x^2-1}}+\frac{1}{\left(x^2-1\right)\cdot\sqrt{x^2-1}}\Rightarrow f'(x)=\frac{x^2-1+1}{\left(x^2-1\right)\cdot\sqrt{x^2-1}}\Rightarrow$$

$$\Rightarrow f'(x)=\frac{x^2-1+1}{\left(x^2-1\right)\cdot\sqrt{x^2-1}}\Rightarrow f'(x)=\frac{x^2}{\left(x^2-1\right)^1\cdot\left(x^2-1\right)^{\frac{1}{2}}}\Rightarrow f'(x)=\frac{x^2}{\left(x^2-1\right)^{1+\frac{1}{2}}}\Rightarrow$$

$$\Rightarrow f'(x)=\frac{x^2}{\left(x^2-1\right)^{\frac{3}{2}}}\Rightarrow f'(x)=\frac{x^2}{\sqrt{\left(x^2-1\right)^3}}.$$

Vježba 082

Odredi derivaciju funkcije $f(x)=\ln\left(x-\sqrt{x^2+1}\right)$.

Rezultat: $\frac{-1}{\sqrt{x^2+1}}$.

Zadatak 083 (Petra, gimnazija)

Odredi derivaciju funkcije $f(x)=\frac{\cos x}{1+\cos^2 x}$.

Rješenje 083

Ponovimo!

Ako je f realna funkcija definirana u točki x i u okolini točke x te ako postoji granična vrijednost (limes)

$$\lim_{\Delta x\to 0}\frac{f(x+\Delta x)-f(x)}{\Delta x}=f'(x),$$

onda se broj

$$f'(x)$$

zove derivacija funkcije f u točki x. Veličina Δx zove se prirast argumenta i ona pokazuje razliku (diferenciju) argumenta funkcije f, dok se Δy = f(x + Δx) – f(x) naziva prirast funkcije i vidi se da Δy pokazuje razliku (diferenciju) odgovarajućih funkcijskih vrijednosti. Izraz

$$\frac{\Delta y}{\Delta x}$$

naziva se kvocijentom razlika funkcije f u točki x pa se može pisati

$$\lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = f'(x).$$

Tablično deriviranje	
Funkcija	**Derivacija**
c	0
x^n	$n \cdot x^{n-1}$
$\cos x$	$-\sin x$

Derivacija složene funkcije: $\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{du} \cdot \frac{du}{dx}$ ili $y'(x) = y'(u) \cdot u'(x)$.

Složena funkcija derivira se tako da se najprije derivira po posrednoj funkciji kao argumentu i dobiveni rezultat pomnoži derivacijom posredne funkcije.

Derivacija zbroja:

$$(f + g)' = f' + g'.$$

Derivacija kvocijenta:

$$\left(\frac{f(x)}{g(x)}\right)' = \frac{f'(x) \cdot g(x) - f(x) \cdot g'(x)}{(g(x))^2}, \; g(x) \neq 0.$$

$$\cos^2 x + \sin^2 x = 1 \quad , \quad a^1 = a \quad , \quad a^n \cdot a^m = a^{n+m}.$$

Zakon distribucije množenja prema zbrajanju.

$$a \cdot (b + c) = a \cdot b + a \cdot c \quad , \quad a \cdot b + a \cdot c = a \cdot (b + c).$$

$$f(x) = \frac{\cos x}{1 + \cos^2 x} \Rightarrow f'(x) = \left(\frac{\cos x}{1 + \cos^2 x}\right)' \Rightarrow$$

$$\Rightarrow f'(x) = \frac{(\cos x)' \cdot \left(1 + \cos^2 x\right) - \cos x \cdot \left(1 + \cos^2 x\right)'}{\left(1 + \cos^2 x\right)^2} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow f'(x) = \frac{-\sin x \cdot \left(1 + \cos^2 x\right) - \cos x \cdot \left(1' + \left(\cos^2 x\right)'\right)}{\left(1 + \cos^2 x\right)^2} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow f'(x) = \frac{-\sin x \cdot \left(1 + \cos^2 x\right) - \cos x \cdot \left(0 + 2 \cdot \cos x \cdot (\cos x)'\right)}{\left(1 + \cos^2 x\right)^2} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow f'(x)=\frac{-\sin x\cdot\left(1+\cos^2 x\right)-\cos x\cdot\left(0+2\cdot\cos x\cdot(-\sin x)\right)}{\left(1+\cos^2 x\right)^2}\Rightarrow$$

$$\Rightarrow f'(x)=\frac{-\sin x\cdot\left(1+\cos^2 x\right)-\cos x\cdot 2\cdot\cos x\cdot(-\sin x)}{\left(1+\cos^2 x\right)^2}\Rightarrow$$

$$\Rightarrow f'(x)=\frac{-\sin x-\sin x\cdot\cos^2 x+2\cdot\sin x\cdot\cos^2 x}{\left(1+\cos^2 x\right)^2}\Rightarrow f'(x)=\frac{-\sin x+\sin x\cdot\cos^2 x}{\left(1+\cos^2 x\right)^2}\Rightarrow$$

$$\Rightarrow f'(x)=\frac{-\sin x\cdot\left(1-\cos^2 x\right)}{\left(1+\cos^2 x\right)^2}\Rightarrow f'(x)=\frac{-\sin x\cdot\sin^2 x}{\left(1+\cos^2 x\right)^2}\Rightarrow f'(x)=\frac{-\sin^3 x}{\left(1+\cos^2 x\right)^2}.$$

Vježba 083

Odredi derivaciju funkcije $f(x)=\frac{1}{1+\cos^2 x}$.

Rezultat: $2\cdot\sin x\cdot\cos x=\sin 2x$, $\frac{\sin 2x}{\left(1+\cos^2 x\right)^2}$.

Zadatak 084 (Mario, gimnazija)

Odredi derivaciju funkcije $f(x)=\frac{x^2-4}{x^2+4}$.

Rješenje 084

Ponovimo!

Ako je f realna funkcija definirana u točki x i u okolini točke x te ako postoji granična vrijednost (limes)

$$\lim_{\Delta x\to 0}\frac{f(x+\Delta x)-f(x)}{\Delta x}=f'(x),$$

onda se broj

$$f'(x)$$

zove derivacija funkcije f u točki x. Veličina Δx zove se prirast argumenta i ona pokazuje razliku (diferenciju) argumenta funkcije f, dok se Δy = f(x + Δx) – f(x) naziva prirast funkcije i vidi se da Δy pokazuje razliku (diferenciju) odgovarajućih funkcijskih vrijednosti. Izraz

$$\frac{\Delta y}{\Delta x}$$

naziva se kvocijentom razlika funkcije f u točki x pa se može pisati

$$\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta y}{\Delta x}=f'(x).$$

Tablično deriviranje	
Funkcija	**Derivacija**
c	0
x^n	$n\cdot x^{n-1}$

Derivacija zbroja:

$$(f+g)'=f'+g'.$$

Derivacija razlike:

$$(f-g)'=f'-g'.$$

Derivacija kvocijenta:

$$\left(\frac{f(x)}{g(x)}\right)'=\frac{f'(x)\cdot g(x)-f(x)\cdot g'(x)}{\left(g(x)\right)^2},\ g(x)\neq 0.$$

Zakon distribucije množenja prema zbrajanju.

$$a\cdot(b+c)=a\cdot b+a\cdot c \quad , \quad a\cdot b+a\cdot c=a\cdot(b+c).$$

$$a^1=a \quad , \quad a^n\cdot a^m=a^{n+m}.$$

$$f(x)=\frac{x^2-4}{x^2+4} \Rightarrow f'(x)=\left(\frac{x^2-4}{x^2+4}\right)' \Rightarrow$$

$$\Rightarrow f'(x)=\frac{\left(x^2-4\right)'\cdot\left(x^2+4\right)-\left(x^2-4\right)\cdot\left(x^2+4\right)'}{\left(x^2+4\right)^2} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow f'(x)=\frac{\left(\left(x^2\right)'-4'\right)\cdot\left(x^2+4\right)-\left(x^2-4\right)\cdot\left(\left(x^2\right)'+4'\right)}{\left(x^2+4\right)^2} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow f'(x)=\frac{(2\cdot x-0)\cdot\left(x^2+4\right)-\left(x^2-4\right)\cdot(2\cdot x+0)}{\left(x^2+4\right)^2} \Rightarrow f'(x)=\frac{2\cdot x\cdot\left(x^2+4\right)-\left(x^2-4\right)\cdot 2\cdot x}{\left(x^2+4\right)^2} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow f'(x)=\frac{2\cdot x^3+8\cdot x-2\cdot x^3+8\cdot x}{\left(x^2+4\right)^2} \Rightarrow f'(x)=\frac{2\cdot x^3+8\cdot x-2\cdot x^3+8\cdot x}{\left(x^2+4\right)^2} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow f'(x)=\frac{8\cdot x+8\cdot x}{\left(x^2+4\right)^2} \Rightarrow f'(x)=\frac{16\cdot x}{\left(x^2+4\right)^2}.$$

Vježba 084

Odredi derivaciju funkcije $f(x)=\frac{x^2+1}{x^2-1}$.

Rezultat: $\frac{-4\cdot x}{\left(x^2-1\right)^2}$.

Zadatak 085 (Marin, veleučilište)

Ispitajte lokalne ekstreme funkcije $f(x)=\frac{x^2+8}{x-1}$.

Rješenje 085

Ponovimo!

Određivanje maksimuma i minimuma funkcije y = f(x)

I. Nađe se prva derivacija funkcije

$$y'=f'(x)$$

II. Prva derivacija funkcije izjednači se s nulom

$$f'(x)=0$$

III. Riješi se dobivena jednadžba

$$f'(x)=0 \Rightarrow x_1, x_2, x_3, \dots, x_i \text{ su rješenja jednadžbe,}$$

to su vrijednosti apscise za koje zadana funkcija može imati ekstrem, te se točke zovu stacionarne točke

IV. Nađe se druga derivacija funkcije tako da se derivira prva derivacija funkcije

$$y''=f''(x)=\left(f'(x)\right)'$$

V. Svaka stacionarna točka $x_1, x_2, x_3, \dots, x_i$ uvrsti se u drugu derivaciju funkcije. Pri tome vrijedi:

- za $f''(x_i)>0$ u x_i je minimum
- za $f''(x_i)<0$ u x_i je maksimum.

Ako je $f''(x_i)=0$, dalje slijedi:

VI. Nađe se treća derivacija funkcije tako da se derivira druga derivacija funkcije

$$y'''=f'''(x)=\left(f''(x)\right)'$$

VII. Svaka stacionarna točka $x_1, x_2, x_3, \dots, x_i$ uvrsti se u treću derivaciju funkcije. Pri tome vrijedi:

- za $f'''(x_i)\neq 0$ u x_i funkcija ima točku infleksije

Ako je $f'''(x_i)=0$, dalje slijedi:

VIII. Nađe se četvrta derivacija funkcije tako da se derivira treća derivacija funkcije

$$y^{(4)}=f^{(4)}(x)=\left(f'''(x)\right)'$$

IX. Svaka stacionarna točka $x_1, x_2, x_3, \dots, x_i$ uvrsti se u četvrtu derivaciju funkcije. Pri tome vrijedi:

- za $f^{(4)}(x_i)>0$ u x_i je minimum
- za $f^{(4)}(x_i)<0$ u x_i je maksimum.

Ako je $f^{(4)}(x_i)=0$, slijede daljnja istraživanja.

Derivacija kvocijenta:

$$\left(\frac{f(x)}{g(x)}\right)'=\frac{f'(x)\cdot g(x)-f(x)\cdot g'(x)}{\left(g(x)\right)^2},\ g(x)\neq 0.$$

Ako je c konstanta, a u = f(x), v = g(x) su funkcije koje imaju derivacije, onda je

$$(c\cdot f(x))' = c\cdot (f(x))' \quad , \quad (f(x)\pm g(x))' = (f(x))' \pm (g(x))'.$$

Tablično deriviranje	
Funkcija	**Derivacija**
c, konstanta	0
x	1
x^n	$n\cdot x^{n-1}$

Derivacija složene funkcije: $\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{du}\cdot\frac{du}{dx}$ ili $y'(x) = y'(u)\cdot u'(x)$.

Složena funkcija derivira se tako da se najprije derivira po posrednoj funkciji kao argumentu i dobiveni rezultat pomnoži derivacijom posredne funkcije.

$$a^1 = a \quad , \quad a^n : a^m = a^{n-m} \quad , \quad \frac{a}{b} = 0 \ , \ b \neq 0 \ \Rightarrow \ a = 0.$$

$$(a-b)^2 = a^2 - 2\cdot a\cdot b + b^2.$$

Zakon distribucije množenja prema zbrajanju.

$$a\cdot (b+c) = a\cdot b + a\cdot c \quad , \quad a\cdot b + a\cdot c = a\cdot (b+c).$$

Skratiti razlomak znači brojnik i nazivnik tog razlomka podijeliti istim brojem različitim od nule i jedinice

$$\frac{a\cdot n}{b\cdot n} = \frac{a}{b} \ , \ n\neq 0 \ , \ n\neq 1.$$

Računamo prvu derivaciju zadane funkcije:

$$f(x) = \frac{x^2+8}{x-1} \Rightarrow f'(x) = \left(\frac{x^2+8}{x-1}\right)' \Rightarrow f'(x) = \frac{\left(x^2+8\right)'\cdot (x-1) - \left(x^2+8\right)\cdot (x-1)'}{(x-1)^2} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow f'(x) = \frac{\left(\left(x^2\right)' + 8'\right)\cdot (x-1) - \left(x^2+8\right)\cdot \left(x' - 1'\right)}{(x-1)^2} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow f'(x) = \frac{(2\cdot x+0)\cdot (x-1) - \left(x^2+8\right)\cdot (1-0)}{(x-1)^2} \Rightarrow f'(x) = \frac{2\cdot x\cdot (x-1) - \left(x^2+8\right)\cdot 1}{(x-1)^2} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow f'(x) = \frac{2\cdot x^2 - 2\cdot x - x^2 - 8}{(x-1)^2} \Rightarrow f'(x) = \frac{x^2 - 2\cdot x - 8}{(x-1)^2}.$$

Prvu derivaciju funkcije izjednačimo s nulom i riješimo dobivenu jednadžbu (tražimo stacionarne točke).

$$f'(x) = 0 \Rightarrow \frac{x^2-2\cdot x-8}{(x-1)^2} = 0 \Rightarrow \left[\begin{array}{l} \text{razlomak je jednak nuli} \\ \text{ako je brojnik jednak nuli,} \\ \text{nazivnik mora biti različit od nule} \\ \qquad x-1\neq 0 \ \Rightarrow \ x\neq 1 \end{array}\right] \Rightarrow x^2 - 2\cdot x - 8 = 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \left.\begin{matrix} x^2-2\cdot x-8=0 \\ a=1\ ,\ b=-2\ ,\ c=-8 \end{matrix}\right\} \Rightarrow \left.\begin{matrix} a=1\ ,\ b=-2\ ,\ c=-8 \\ x_{1,2}=\dfrac{-b\pm\sqrt{b^2-4\cdot a\cdot c}}{2\cdot a} \end{matrix}\right\} \Rightarrow x_{1,2}=\frac{-(-2)\pm\sqrt{(-2)^2-4\cdot 1\cdot(-8)}}{2\cdot 1} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow x_{1,2}=\frac{2\pm\sqrt{4+32}}{2} \Rightarrow x_{1,2}=\frac{2\pm\sqrt{36}}{2} \Rightarrow x_{1,2}=\frac{2\pm 6}{2} \Rightarrow \left.\begin{matrix} x_1=\dfrac{2+6}{2} \\ x_2=\dfrac{2-6}{2} \end{matrix}\right\} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \left.\begin{matrix} x_1=\dfrac{8}{2} \\ x_2=-\dfrac{4}{2} \end{matrix}\right\} \Rightarrow \left.\begin{matrix} x_1=\dfrac{8}{2} \\ x_2=-\dfrac{4}{2} \end{matrix}\right\} \Rightarrow \left.\begin{matrix} x_1=4 \\ x_2=-2 \end{matrix}\right\} - \text{stacionarne točke.}$$

Tražimo drugu derivaciju tako da deriviramo prvu derivaciju zadane funkcije.

$$f''(x)=\left(f'(x)\right)'=\left(\frac{x^2-2\cdot x-8}{(x-1)^2}\right)'=\frac{\left(x^2-2\cdot x-8\right)'\cdot(x-1)^2-\left(x^2-2\cdot x-8\right)\cdot\left((x-1)^2\right)'}{\left((x-1)^2\right)^2}=$$

$$=\frac{\left(\left(x^2\right)'-(2\cdot x)'-8'\right)\cdot(x-1)^2-\left(x^2-2\cdot x-8\right)\cdot 2\cdot(x-1)\cdot(x-1)'}{(x-1)^4}=$$

$$=\frac{\left(2\cdot x-2\cdot x'-0\right)\cdot(x-1)^2-\left(x^2-2\cdot x-8\right)\cdot 2\cdot(x-1)\cdot\left(x'-1'\right)}{(x-1)^4}=$$

$$=\frac{(2\cdot x-2\cdot 1)\cdot(x-1)^2-\left(x^2-2\cdot x-8\right)\cdot 2\cdot(x-1)\cdot(1-0)}{(x-1)^4}=$$

$$=\frac{(2\cdot x-2)\cdot(x-1)^2-\left(x^2-2\cdot x-8\right)\cdot 2\cdot(x-1)\cdot 1}{(x-1)^4}=\frac{(2\cdot x-2)\cdot(x-1)^2-\left(x^2-2\cdot x-8\right)\cdot 2\cdot(x-1)}{(x-1)^4}=$$

$$=\frac{2\cdot(x-1)\cdot(x-1)^2-\left(x^2-2\cdot x-8\right)\cdot 2\cdot(x-1)}{(x-1)^4}=\frac{2\cdot(x-1)\cdot\left[(x-1)^2-\left(x^2-2\cdot x-8\right)\right]}{(x-1)^4}=$$

$$=\frac{2\cdot(x-1)\cdot\left[x^2-2\cdot x+1-x^2+2\cdot x+8\right]}{(x-1)^4}=\frac{2\cdot(x-1)\cdot\left[x^2-2\cdot x+1-x^2+2\cdot x+8\right]}{(x-1)^4}=$$

$$=\frac{2\cdot(x-1)\cdot 9}{(x-1)^4}=\frac{18\cdot(x-1)}{(x-1)^4}=\frac{18\cdot(x-1)}{(x-1)^4}=\frac{18}{(x-1)^3}.$$

Sada određujemo vrstu ekstrema (maksimum ili minimum) koje zadana funkcija ima u stacionarnim točkama.

- $$\left.\begin{matrix} f''(x)=\dfrac{18}{(x-1)^3} \\ x=4 \end{matrix}\right\} \Rightarrow f''(4)=\frac{18}{(4-1)^3} \Rightarrow f''(4)=\frac{18}{3^3}>0.$$

Funkcija ima minimum u točki x = 4 koji iznosi:

$$\left.\begin{array}{l} f(x)=\dfrac{x^2+8}{x-1} \\ x=4 \end{array}\right\} \Rightarrow f(4)=\frac{4^2+8}{4-1} \Rightarrow f(4)=\frac{16+8}{3} \Rightarrow f(4)=\frac{24}{3} \Rightarrow f(4)=\frac{24}{3} \Rightarrow f(4)=8 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow m(4, 8).$$

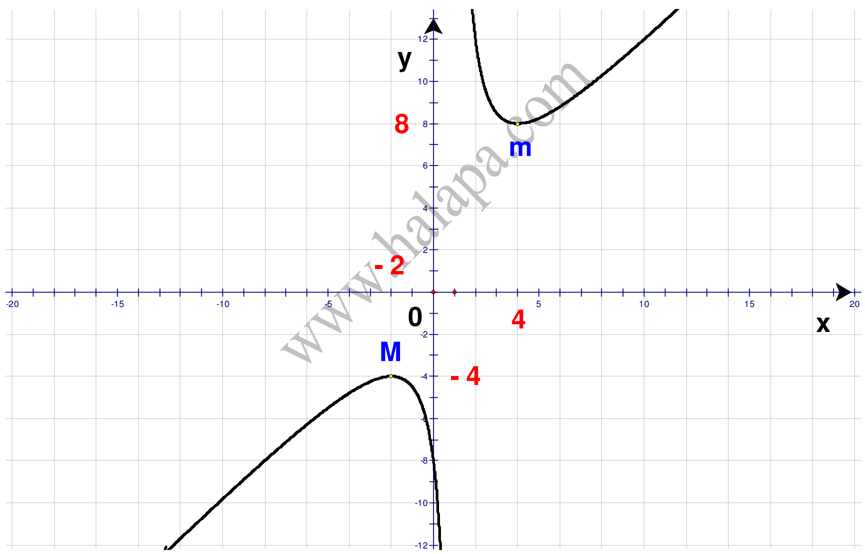
- $$\left.\begin{array}{l} f''(x)=\dfrac{18}{(x-1)^3} \\ x=-2 \end{array}\right\} \Rightarrow f''(-2)=\frac{18}{(-2-1)^3} \Rightarrow f''(-2)=\frac{18}{(-3)^3} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow f''(-2)=\frac{18}{-27} \Rightarrow f''(-2)=-\frac{18}{27}<0.$$

Funkcija ima maksimum u točki x = – 2 koji iznosi:

$$\left.\begin{array}{l} f(x)=\dfrac{x^2+8}{x-1} \\ x=-2 \end{array}\right\} \Rightarrow f(-2)=\frac{(-2)^2+8}{-2-1} \Rightarrow f(-2)=\frac{4+8}{-3} \Rightarrow f(-2)=\frac{12}{-3} \Rightarrow f(-2)=\frac{12}{-3} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow f(-2)=-4 \Rightarrow M(-2, -4).$$



Vježba 085

Ispitajte lokalne ekstreme funkcije $f(x)=\dfrac{x^2-2\cdot x+2}{x-1}$.

Rezultat: $M(0, -2)$, $m(2, 2)$.

Zadatak 086 (Paula, maturantica)

Za koje vrijednosti koeficijenta a funkcija $f(x)=a\cdot x^3+x^2+2\cdot x+2$ monotono raste na cijelom području definicije?

$$A.\ a<\frac{1}{6} \qquad B.\ a>0 \qquad C.\ a<-1 \qquad D.\ a>\frac{1}{6}$$

Rješenje 086

Ponovimo!

$$a < b \ , \ c < 0 \ \Rightarrow \ \frac{a}{c} > \frac{b}{c}.$$

Tablično deriviranje	
Funkcija	**Derivacija**
c, konstanta	0
x	1
x^n	$n \cdot x^{n-1}$

Neka su f i g derivabilne na istom intervalu $\langle a, b \rangle$. Tada vrijedi da je funkcija f + g derivabilna pa slijedi:

$$\left(c \cdot f(x)\right)' = c \cdot \left(f(x)\right)' \ , \ c \text{ je konstanta} \quad , \quad \left(f(x) + g(x)\right)' = \left(f(x)\right)' + \left(g(x)\right)'.$$

Ako je funkcija f diferencijabilna na intervalu $\langle a, b \rangle$ i $f'(x) > 0$ u svakoj točki intervala $\langle a, b \rangle$ tada funkcija raste na $\langle a, b \rangle$.

Polinom drugog stupnja (kvadratna funkcija) ima oblik

$$f(x) = a \cdot x^2 + b \cdot x + c,$$

gdje su a ≠ 0, b i c realni brojevi. Broj a naziva se vodeći koeficijent polinoma drugog stupnja, b linearni koeficijent, a c slobodni koeficijent polinoma.

Graf kvadratne funkcije

$$f(x) = a \cdot x^2 + b \cdot x + c,$$

je parabola

$$y = a \cdot x^2 + b \cdot x + c.$$

Tjeme T najniža je točka parabole i parabola je otvorena prema gore ako je a > 0.
Tjeme T najviša je točka parabole i parabola je otvorena prema dolje ako je a < 0.

Diskriminanta kvadratne jednadžbe $a \cdot x^2 + b \cdot x + c = 0$ je broj $D = b^2 - 4 \cdot a \cdot c$.

- Ako je D > 0, jednadžba ima dva realna rješenja (korijena), tj. parabola siječe os x u dvije točke.
- Ako je D = 0, jednadžba ima jedno dvostruko realno rješenje (korijen), tj. parabola dira os x u jednoj točki.
- Ako je D < 0, jednadžba ima kompleksno – konjugirana rješenja (korijene), tj. parabola ne siječe os x.

Skratiti razlomak znači brojnik i nazivnik tog razlomka podijeliti istim brojem različitim od nule i jedinice

$$\frac{a \cdot n}{b \cdot n} = \frac{a}{b} \ , \ n \neq 0 \ , \ n \neq 1.$$

Odredimo derivaciju funkcije.

$$f(x) = a \cdot x^3 + x^2 + 2 \cdot x + 2 \ \Rightarrow \ f'(x) = \left(a \cdot x^3 + x^2 + 2 \cdot x + 2\right)' \ \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \ f'(x) = \left(a \cdot x^3\right)' + \left(x^2\right)' + (2 \cdot x)' + 2' \ \Rightarrow \ f'(x) = a \cdot \left(x^3\right)' + 2 \cdot x + 2 \cdot x' + 0 \ \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \ f'(x) = 3 \cdot a \cdot x^2 + 2 \cdot x + 2 \cdot 1 \ \Rightarrow \ f'(x) = 3 \cdot a \cdot x^2 + 2 \cdot x + 2.$$

Budući da funkcija mora monotono rasti na cijelom području definicije, slijedi:

$$f'(x) > 0 \ \Rightarrow \ 3 \cdot a \cdot x^2 + 2 \cdot x + 2 > 0.$$

Uočimo da je f ' (x) kvadratna funkcija koja mora biti pozitivna za svaki x. Vodeći je koeficijent funkcije f ' (x) 3 · a i a mora biti pozitivan (inače je parabola okrenuta prema dolje). Nadalje, njezine nultočke ne smiju biti realne pa mora biti D < 0.

$$f'(x)=3\cdot a\cdot x^2+2\cdot x+2 \Rightarrow \left.\begin{array}{l} f'(x)=3\cdot a\cdot x^2+2\cdot x+2 \\ a=3\cdot a \;,\; b=2 \;,\; c=2 \end{array}\right\} \Rightarrow \left[b^2-4\cdot a\cdot c<0\right] \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 2^2-4\cdot 3\cdot a\cdot 2<0 \Rightarrow 4-24\cdot a<0 \Rightarrow -24\cdot a<-4 \Rightarrow -24\cdot a<-4 \;/:(-24) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow a>\frac{4}{24} \Rightarrow a>\frac{4}{24} \Rightarrow a>\frac{1}{6}.$$

Odgovor je pod D.

Vježba 086

Za koje vrijednosti koeficijenta a funkcija $f(x)=a\cdot x^3+x^2+2\cdot x+2$ monotono pada na cijelom području definicije?

$$A.\ a<\frac{1}{6} \qquad B.\ a>0 \qquad C.\ a<-1 \qquad D.\ a>\frac{1}{6}$$

Rezultat: A.

Zadatak 087 (Paula, Ante, maturantica, tehnička škola)

Zatvorena limenka u obliku valjka izrađena je od materijala čija je cijena 70 kn / m^2. Kolika je cijena materijala potrebnoga za izradu jedne limenke čiji je obujam 0.35 L, ako je za njezinu izradu potrebno najmanje materijala? Napomena: Debljinu materijala i otpad treba zanemariti.

$$1\ L=1\ dm^3$$

Rješenje 087

Ponovimo!

$$1\ m^2=100\ dm^2 \quad , \quad 1\ dm^2=\frac{1}{100}\ m^2 \quad , \quad 1\ L=1\ dm^3 \quad , \quad a\cdot\frac{b}{c}=\frac{a\cdot b}{c}.$$

Skratiti razlomak znači brojnik i nazivnik tog razlomka podijeliti istim brojem različitim od nule i jedinice

$$\frac{a\cdot n}{b\cdot n}=\frac{a}{b} \;,\; n\neq 0 \;,\; n\neq 1.$$

Obujam valjka

Uspravni i kosi valjak polumjera osnovke (baze) r i visine h imaju jednake obujmove. Taj obujam iznosi:

$$V=r^2\cdot\pi\cdot h.$$

Oplošje uspravnog valjka polumjera r i visine h računa se formulom

$$O=2\cdot r^2\cdot\pi+2\cdot r\cdot\pi\cdot h.$$

Tablično deriviranje	
Funkcija	**Derivacija**
x^n	$n\cdot x^{n-1}$
$\frac{1}{x}$	$-\frac{1}{x^2}$
$\frac{1}{x^n}$	$\frac{-n}{x^{n+1}}$

Neka su f i g derivabilne na istom intervalu $\langle a, b\rangle$. Tada vrijedi da je funkcija f + g derivabilna pa slijedi:

$$(c \cdot f(x))' = c \cdot (f(x))' \ , \ c \text{ je konstanta} \quad , \quad (f(x) + g(x))' = (f(x))' + (g(x))'.$$

$$(f(x) - g(x))' = (f(x))' - (g(x))'.$$

Određivanje maksimuma i minimuma funkcije y = f(x)

I. Nađe se prva derivacija funkcije

$$y' = f'(x)$$

II. Prva derivacija funkcije izjednači se s nulom

$$f'(x) = 0$$

III. Riješi se dobivena jednadžba

$$f'(x) = 0 \ \Rightarrow \ x_1, x_2, x_3, \ldots, x_i \ \text{ su rješenja jednadžbe,}$$

to su vrijednosti apscise za koje zadana funkcija može imati ekstrem, te se točke zovu stacionarne točke

IV. Nađe se druga derivacija funkcije tako da se derivira prva derivacija funkcije

$$y'' = f''(x) = (f'(x))'$$

V. Svaka stacionarna točka x_1, x_2, x_3, ... , x_i uvrsti se u drugu derivaciju funkcije. Pri tome vrijedi:

- za $f''(x_i) > 0$ u x_i je minimum
- za $f''(x_i) < 0$ u x_i je maksimum.

Ako je $f''(x_i) = 0$, dalje slijedi:

VI. Nađe se treća derivacija funkcije tako da se derivira druga derivacija funkcije

$$y''' = f'''(x) = (f''(x))'$$

VII. Svaka stacionarna točka x_1, x_2, x_3, ... , x_i uvrsti se u treću derivaciju funkcije. Pri tome vrijedi:

- za $f'''(x_i) \neq 0$ u x_i funkcija ima točku infleksije

Ako je $f'''(x_i) = 0$, dalje slijedi:

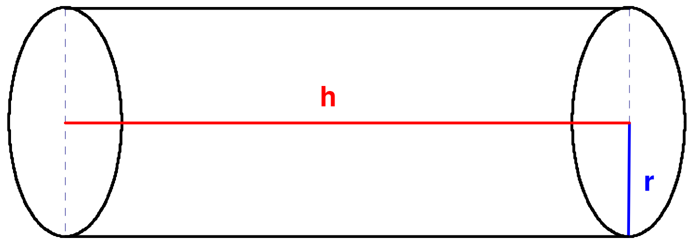
VIII. Nađe se četvrta derivacija funkcije tako da se derivira treća derivacija funkcije

$$y^{(4)} = f^{(4)}(x) = (f'''(x))'$$

IX. Svaka stacionarna točka x_1, x_2, x_3, ... , x_i uvrsti se u četvrtu derivaciju funkcije. Pri tome vrijedi:

- za $f^{(4)}(x_i) > 0$ u x_i je minimum
- za $f^{(4)}(x_i) < 0$ u x_i je maksimum.

Ako je $f^{(4)}(x_i) = 0$, slijede daljnja istraživanja.



Moramo naći dimenzije konzerve zadanoga obujma koje će određivati najmanje oplošje. Trebamo izraziti oplošje kao funkciju polumjera r.

$$\left.\begin{array}{l} V=r^2\cdot\pi\cdot h \\ O=2\cdot r^2\cdot\pi+2\cdot r\cdot\pi\cdot h \end{array}\right\} \Rightarrow \left.\begin{array}{l} r^2\cdot\pi\cdot h=V \\ O=2\cdot r^2\cdot\pi+2\cdot r\cdot\pi\cdot h \end{array}\right\} \Rightarrow \left.\begin{array}{l} r^2\cdot\pi\cdot h=V \;/\cdot\dfrac{1}{r^2\cdot\pi} \\ O=2\cdot r^2\cdot\pi+2\cdot r\cdot\pi\cdot h \end{array}\right\} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \left.\begin{array}{l} h=\dfrac{V}{r^2\cdot\pi} \\ O=2\cdot r^2\cdot\pi+2\cdot r\cdot\pi\cdot h \end{array}\right\} \Rightarrow O=2\cdot r^2\cdot\pi+2\cdot r\cdot\pi\cdot\frac{V}{r^2\cdot\pi} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow O=2\cdot r^2\cdot\pi+2\cdot r\cdot\pi\cdot\frac{V}{r^2\cdot\pi} \Rightarrow O=2\cdot r^2\cdot\pi+\frac{2\cdot V}{r}.$$

Zahtjev za najmanjim oplošjem konzerve ekvivalentan je nalaženju minimuma funkcije

$$O(r)=2\cdot r^2\cdot\pi+\frac{2\cdot V}{r}.$$

Nađimo prvu derivaciju funkcije!

$$O(r)=2\cdot r^2\cdot\pi+\frac{2\cdot V}{r} \Rightarrow O'(r)=\left(2\cdot r^2\cdot\pi+\frac{2\cdot V}{r}\right)' \Rightarrow O'(r)=\left(2\cdot r^2\cdot\pi\right)'+\left(\frac{2\cdot V}{r}\right)' \Rightarrow$$

$$\Rightarrow O'(r)=2\cdot\pi\cdot\left(r^2\right)'+2\cdot V\cdot\left(\frac{1}{r}\right)' \Rightarrow O'(r)=2\cdot\pi\cdot 2\cdot r+2\cdot V\cdot\left(-\frac{1}{r^2}\right) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow O'(r)=4\cdot r\cdot\pi-\frac{2\cdot V}{r^2}.$$

Tražimo stacionarnu točku. Iz uvjeta

$$O'(r)=0$$

dobije se:

$$O'(r)=0 \Rightarrow 4\cdot r\cdot\pi-\frac{2\cdot V}{r^2}=0 \Rightarrow 4\cdot r\cdot\pi-\frac{2\cdot V}{r^2}=0 \;/\cdot r^2 \Rightarrow 4\cdot r^3\cdot\pi-2\cdot V=0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 4\cdot r^3\cdot\pi=2\cdot V \Rightarrow 4\cdot r^3\cdot\pi=2\cdot V \;/\cdot\frac{1}{4\cdot\pi} \Rightarrow r^3=\frac{V}{2\cdot\pi} \Rightarrow r^3=\frac{V}{2\cdot\pi} \;/\sqrt[3]{} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow r=\sqrt[3]{\frac{V}{2\cdot\pi}}.$$

Stacionarna točka je

$$r=\sqrt[3]{\frac{V}{2\cdot\pi}}.$$

Provjerimo je li riječ o minimumu tako da nađemo drugu derivaciju.

$$O''(r) = \left(O'(r)\right)' \Rightarrow O''(r) = \left(4 \cdot r \cdot \pi - \frac{2 \cdot V}{r^2}\right)' \Rightarrow O''(r) = (4 \cdot r \cdot \pi)' - \left(\frac{2 \cdot V}{r^2}\right)' \Rightarrow$$

$$\Rightarrow O''(r) = 4 \cdot \pi \cdot r' - 2 \cdot V \cdot \left(\frac{1}{r^2}\right)' \Rightarrow O''(r) = 4 \cdot \pi \cdot 1 + 4 \cdot V \cdot \frac{1}{r^3} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow O''(r) = 4 \cdot \pi + \frac{4 \cdot V}{r^3} \Rightarrow O''(r) > 0.$$

Dakle, minimum se postiže za

$$r = \sqrt[3]{\frac{V}{2 \cdot \pi}} \Rightarrow r = \sqrt[3]{\frac{0.35\ dm^3}{2 \cdot \pi}} \Rightarrow r = 0.3819\ dm.$$

Oplošje konzerve iznosi:

$$O = 2 \cdot r^2 \cdot \pi + \frac{2 \cdot V}{r} \Rightarrow O = 2 \cdot (0.3819\ dm)^2 \cdot \pi + \frac{2 \cdot 0.35\ dm^3}{0.3819\ dm} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow O = 2.7493\ dm^2 \Rightarrow O = 0.027493\ m^2.$$

Budući da je cijena materijala 70 kn / m^2, za izradu jedne limenke platit će se

$$0.027493\ m^2 \cdot 70\ \frac{kn}{m^2} = 1.92\ kn.$$

Vježba 087

Zatvorena limenka u obliku valjka izrađena je od materijala čija je cijena 70 kn / m^2. Kolika je cijena materijala potrebnoga za izradu jedne limenke čiji je obujam 350 cm^3, ako je za njezinu izradu potrebno najmanje materijala? Napomena: Debljinu materijala i otpad treba zanemariti.

$$1\ L = 1\ dm^3$$

Rezultat: 1.92 kn.

Zadatak 088 (Bojana, gimnazija)

Odredite jednadžbu tangente krivulje y = x^3 + 3 · x^2 – 5 okomite na pravac 2 · x – 6 · y + 1 = 0.

Rješenje 088

Ponovimo!

$$a^2 + 2 \cdot a \cdot b + b^2 = (a + b)^2 \quad , \quad a^2 = 0 \Rightarrow a = 0.$$

Tablično deriviranje	
Funkcija	**Derivacija**
x^n	$n \cdot x^{n-1}$
c konstanta	0

Neka su f i g derivabilne na istom intervalu $\langle a, b \rangle$. Tada vrijedi da je funkcija f + g derivabilna pa slijedi:

$$\left(c \cdot f(x)\right)' = c \cdot \left(f(x)\right)', \ c \text{ je konstanta} \quad , \quad \left(f(x) + g(x)\right)' = \left(f(x)\right)' + \left(g(x)\right)'.$$

Jednadžba pravca oblika

$$A \cdot x + B \cdot y + C = 0$$

naziva se implicitni oblik jednadžbe pravca ili kraće, opći oblik jednadžbe pravca.
Jednadžba pravca oblika

$$y = k \cdot x + l$$

naziva se eksplicitni oblik jednadžbe pravca ili kraće, eksplicitna jednadžba pravca. Broj k naziva se koeficijent smjera pravca. Broj l nazivamo odsječak pravca na osi y.
Jednadžba pravca zadanog koeficijentom smjera k i točkom $T(x_1, y_1)$ glasi

$$y - y_1 = k \cdot (x - x_1).$$

Uvjet okomitosti:
Ako su pravci dani eksplicitnim jednadžbama $y = k_1 \cdot x + l_1$, $y = k_2 \cdot x + l_2$, $k_1, k_2 \neq 0$, tada su okomiti ako i samo ako je

$$k_1 \cdot k_2 = -1 \Rightarrow k_1 = -\frac{1}{k_2} \Rightarrow k_2 = -\frac{1}{k_1}.$$

Koeficijenti, dakle, moraju imati suprotne predznake i moraju biti međusobno recipročni.
Tangenta (dodirnica) je pravac koji dodiruje krivulju u jednoj točki.
Jednadžba tangente u točki $D(x_0, y_0)$ krivulje $y = f(x)$ glasi:

$$y - y_0 = f\,'(x_0) \cdot (x - x_0).$$

Implicitni oblik jednadžbe zadanog pravca preoblikujemo u eksplicitni oblik kako bismo odredili koeficijent smjera k_1 pravca.

$$2 \cdot x - 6 \cdot y + 1 = 0 \Rightarrow -6 \cdot y = -2 \cdot x - 1 \Rightarrow -6 \cdot y = -2 \cdot x - 1 \;/ : (-6) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow y = \frac{2}{6} \cdot x + \frac{1}{6} \Rightarrow y = \frac{2}{6} \cdot x + \frac{1}{6} \Rightarrow y = \frac{1}{3} \cdot x + \frac{1}{6} \Rightarrow k_1 = \frac{1}{3}.$$

Budući da je tražena tangenta okomita na pravac, njezin koeficijent smjera k_2 iznosi:

$$k_1 \cdot k_2 = -1 \Rightarrow \left[k_1 = \frac{1}{3} \right] \Rightarrow \frac{1}{3} \cdot k_2 = -1 \Rightarrow \frac{1}{3} \cdot k_2 = -1 \;/ \cdot 3 \Rightarrow k_2 = -3.$$

Odredimo derivaciju funkcije

$$f(x) = x^3 + 3 \cdot x^2 - 5.$$

$$f\,'(x) = \left(x^3 + 3 \cdot x^2 - 5\right)' \Rightarrow f\,'(x) = \left(x^3\right)' + \left(3 \cdot x^2\right)' - 5' \Rightarrow f\,'(x) = 3 \cdot x^2 + 3 \cdot \left(x^2\right)' - 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow f\,'(x) = 3 \cdot x^2 + 3 \cdot 2 \cdot x \Rightarrow f\,'(x) = 3 \cdot x^2 + 6 \cdot x.$$

Budući da je $f\,'(x_0) = k_2$, izračunat ćemo koordinate točke $D(x_0, y_0)$ u kojoj tangenta dodiruje krivulju.

$$f\,'(x_0) = k_2 \Rightarrow \left[k_2 = -3 \right] \Rightarrow 3 \cdot x_0^2 + 6 \cdot x_0 = -3 \Rightarrow 3 \cdot x_0^2 + 6 \cdot x_0 + 3 = 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 3 \cdot x_0^2 + 6 \cdot x_0 + 3 = 0 \;/ : 3 \Rightarrow x_0^2 + 2 \cdot x_0 + 1 = 0 \Rightarrow (x_0 + 1)^2 = 0 \Rightarrow x_0 + 1 = 0 \Rightarrow x_0 = -1.$$

Računamo y_0.

$$y_0 = f(x_0) = x_0^3 + 3 \cdot x_0^2 - 5 \Rightarrow y_0 = f(-1) = (-1)^3 + 3 \cdot (-1)^2 - 5 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow y_0 = -1 + 3 \cdot 1 - 5 \Rightarrow y_0 = -1 + 3 - 5 \Rightarrow y_0 = -3.$$

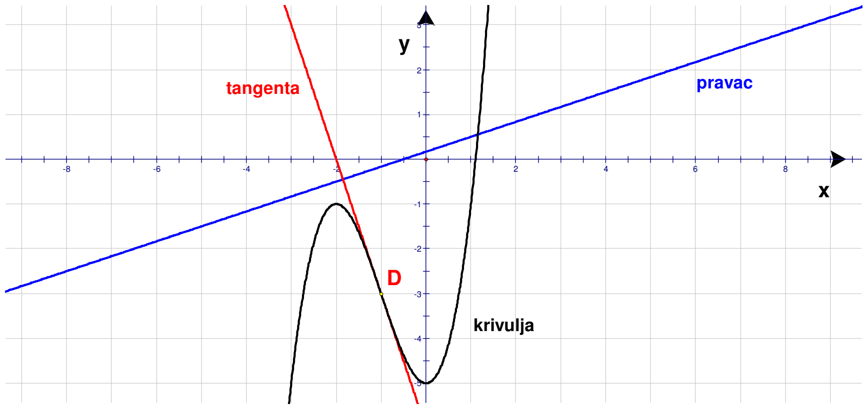
Koordinate točke D glase:

$$D(x_0, y_0) = D(-1, -3).$$

Jednadžba tangente je:

$$\left.\begin{array}{l} k_2 = -3 \\ D(x_0, y_0) = D(-1, -3) \end{array}\right\} \Rightarrow \left[y - y_0 = k_2 \cdot (x - x_0) \right] \Rightarrow y - (-3) = -3 \cdot (x - (-1)) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow y + 3 = -3 \cdot (x + 1) \Rightarrow y + 3 = -3 \cdot x - 3 \Rightarrow y = -3 \cdot x - 3 - 3 \Rightarrow y = -3 \cdot x - 6.$$



Vježba 088

Odredite jednadžbu tangente krivulje $y = x^3 + 3 \cdot x^2 - 5$ okomite na pravac $x - 3 \cdot y + 0.5 = 0$.

Rezultat: $y = -3 \cdot x - 6.$

Zadatak 089 (Asterix, gimnazija)

U kojoj točki krivulje $y = x^3 + 2 \cdot x - 1$ treba položiti tangentu tako da bude okomita na pravac $x + y = 0$?

Rješenje 089

Ponovimo!

$$\sqrt{\frac{a}{b}} = \frac{\sqrt{a}}{\sqrt{b}} \quad , \quad \frac{a}{b} \cdot \frac{c}{d} = \frac{a \cdot c}{b \cdot d} \quad , \quad a^1 = a \quad , \quad a^n \cdot a^m = a^{n+m} \quad , \quad \left(\sqrt{a}\right)^2 = a.$$

Tablično deriviranje	
Funkcija	**Derivacija**
x^n	$n \cdot x^{n-1}$
x	1
c konstanta	0

Neka su f i g derivabilne na istom intervalu $\langle a, b \rangle$. Tada vrijedi da su funkcije f + g i f – g derivabilne pa slijedi:

$$\left(c \cdot f(x)\right)' = c \cdot \left(f(x)\right)' \text{ , } c \text{ je konstanta} \quad , \quad \left(f(x) + g(x)\right)' = \left(f(x)\right)' + \left(g(x)\right)'.$$

$$\left(f(x) - g(x)\right)' = \left(f(x)\right)' - \left(g(x)\right)'.$$

Jednadžba pravca oblika

$$y = k \cdot x + l$$

naziva se eksplicitni oblik jednadžbe pravca ili kraće, eksplicitna jednadžba pravca. Broj k naziva se koeficijent smjera pravca. Broj l nazivamo odsječak pravca na osi y.

Uvjet okomitosti:

Ako su pravci dani eksplicitnim jednadžbama $y = k_1 \cdot x + l_1$, $y = k_2 \cdot x + l_2$, $k_1, k_2 \neq 0$, tada su okomiti ako i samo ako je

$$k_1 \cdot k_2 = -1 \;\Rightarrow\; k_1 = -\frac{1}{k_2} \;\Rightarrow\; k_2 = -\frac{1}{k_1}.$$

Koeficijenti, dakle, moraju imati suprotne predznake i moraju biti međusobno recipročni.

Kada je pravac tangenta na graf funkcije f, onda je njegov koeficijent smjera jednak derivaciji funkcije u točki x_0:

$$k = f'(x_0).$$

Tangenta (dodirnica) je pravac koji dodiruje krivulju u jednoj točki.

Jednadžba tangente u točki $D(x_0, y_0)$ krivulje $y = f(x)$ glasi:

$$y - y_\circ = f'(x_\circ) \cdot (x - x_\circ).$$

Imaginarni brojevi imaju oblik

$$b \cdot i,$$

gdje je *b* realni broj koji nije jednak nuli, a *i* je imaginarna jedinica za koju vrijedi:

$$i = \sqrt{-1}.$$

Jednadžbu zadanog pravca preoblikujemo u eksplicitni oblik kako bismo odredili koeficijent smjera.

$$x + y = 0 \;\Rightarrow\; y = -x \;\Rightarrow\; k_1 = -1.$$

Tangenta je okomita na taj pravac pa njezin koeficijent smjera iznosi:

$$k_2 = -\frac{1}{k_1} \;\Rightarrow\; k_2 = -\frac{1}{-1} \;\Rightarrow\; k_2 = 1.$$

Odredimo derivaciju funkcije

$$f(x) = x^3 + 2 \cdot x - 1.$$

$$f'(x) = \left(x^3 + 2 \cdot x - 1\right)' \;\Rightarrow\; f'(x) = \left(x^3\right)' + (2 \cdot x)' - 1' \;\Rightarrow\; f'(x) = 3 \cdot x^2 + 2.$$

Zato je

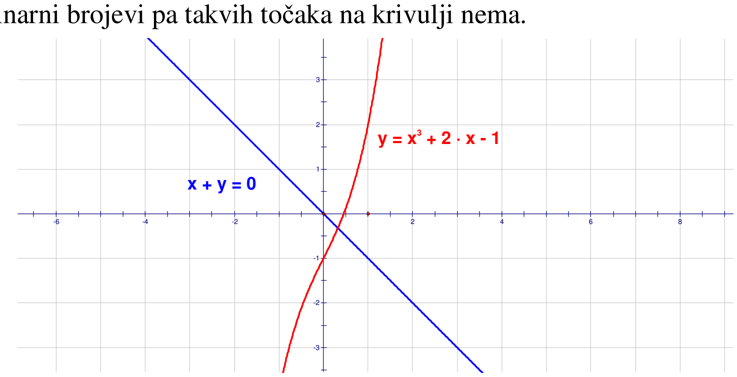
$$f'(x) = k_2 \;\Rightarrow\; \begin{bmatrix} f'(x) = 3 \cdot x^2 + 2 \\ k_2 = 1 \end{bmatrix} \;\Rightarrow\; 3 \cdot x^2 + 2 = 1 \;\Rightarrow\; 3 \cdot x^2 = 1 - 2 \;\Rightarrow\; 3 \cdot x^2 = -1 \;\Rightarrow$$

$$\Rightarrow\; 3 \cdot x^2 = -1 \;/ : 3 \;\Rightarrow$$

$$\Rightarrow\; x^2 = -\frac{1}{3} \;\Rightarrow\; x^2 = -\frac{1}{3} \;/\sqrt{} \;\Rightarrow\; x_{1,2} = \pm\sqrt{-\frac{1}{3}} \;\Rightarrow\; x_{1,2} = \pm\, i \cdot \sqrt{\frac{1}{3}} \;\Rightarrow\; x_{1,2} = \pm\, i \cdot \frac{1}{\sqrt{3}} \;\Rightarrow$$

$$\Rightarrow\; \begin{bmatrix} \text{racionalizacija} \\ \text{nazivnika} \end{bmatrix} \;\Rightarrow\; x_{1,2} = \pm\, i \cdot \frac{1}{\sqrt{3}} \cdot \frac{\sqrt{3}}{\sqrt{3}} \;\Rightarrow\; x_{1,2} = \pm\, i \cdot \frac{\sqrt{3}}{\left(\sqrt{3}\right)^2} \;\Rightarrow\; x_{1,2} = \pm\, i \cdot \frac{\sqrt{3}}{3}.$$

Rješenja su imaginarni brojevi pa takvih točaka na krivulji nema.



Vježba 089

U kojoj točki krivulje $y = x^3 + 2 \cdot x - 3$ treba položiti tangentu tako da bude okomita na pravac $x + y = 0$?

Rezultat: Nema ih!

Zadatak 090 (Asterix, gimnazija)

U kojoj točki krivulje $y = x^2 - 4$ treba položiti tangentu tako da bude usporedna s pravcem $y = 6 \cdot x$?

Rješenje 090

Ponovimo!

Tablično deriviranje	
Funkcija	**Derivacija**
x^n	$n \cdot x^{n-1}$
c konstanta	0

Neka su f i g derivabilne na istom intervalu $\langle a, b \rangle$. Tada vrijedi da je funkcija f – g derivabilna pa slijedi:

$$(f(x) - g(x))' = (f(x))' - (g(x))'.$$

Jednadžba pravca oblika

$$y = k \cdot x + l$$

naziva se eksplicitni oblik jednadžbe pravca ili kraće, eksplicitna jednadžba pravca. Broj k naziva se koeficijent smjera pravca. Broj l nazivamo odsječak pravca na osi y.

Uvjet usporednosti (paralelnosti):

Ako su pravci dani eksplicitnim jednadžbama $y = k_1 \cdot x + l_1$, $y = k_2 \cdot x + l_2$, tada su usporedni ako i samo ako je

$$k_1 = k_2.$$

Kada je pravac tangenta na graf funkcije f, onda je njegov koeficijent smjera jednak derivaciji funkcije u točki x_0:

$$k = f'(x_\circ).$$

Tangenta (dodirnica) je pravac koji dodiruje krivulju u jednoj točki.

Jednadžba tangente u točki $D(x_0, y_0)$ krivulje $y = f(x)$ glasi:

$$y - y_\circ = f'(x_\circ) \cdot (x - x_\circ).$$

Iz zadanog pravca odredimo koeficijent smjera.

$$y = 6 \cdot x \Rightarrow k_1 = 6.$$

Tangenta je usporedna s tim pravcem pa njezin koeficijent smjera iznosi:

$$k_2 = k_1 \Rightarrow k_2 = 6.$$

Odredimo derivaciju funkcije

$$f(x) = x^2 - 4.$$

$$f'(x) = \left(x^2 - 4\right)' \Rightarrow f'(x) = \left(x^2\right)' - 4' \Rightarrow f'(x) = 2 \cdot x.$$

Zato je

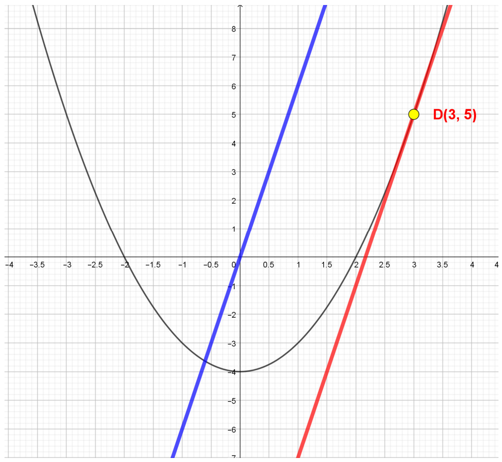
$$f'(x) = k_2 \Rightarrow \begin{bmatrix} f'(x) = 2 \cdot x \\ k_2 = 6 \end{bmatrix} \Rightarrow 2 \cdot x = 6 \Rightarrow 2 \cdot x = 6 \;/:2 \Rightarrow x = 3.$$

Izračunali smo apscisu x točke D u kojoj tangenta dira graf funkcije f. Računamo ordinatu y.

$$\left.\begin{array}{l} f(x) = x^2 - 4 \\ x = 3 \end{array}\right\} \Rightarrow f(3) = 3^2 - 4 \Rightarrow f(3) = 9 - 4 \Rightarrow f(x) = 5 \Rightarrow y = 5.$$

Tangentu treba položiti u točki D:

$$D(x, y) = D(3, 5).$$



Vježba 090

U kojoj točki krivulje y = x^2 – 4 treba položiti tangentu tako da bude usporedna s pravcem 6 · x – y = 0?

Rezultat: D(3, 5).

Zadatak 091 (Tomo, elektrostrojarska škola)

Od kartona pravokutnog oblika sa stranicama duljine 1 m i 1.2 m treba napraviti otvorenu kutiju što je moguće većeg volumena. Koliki je taj volumen?

Rješenje 091

Ponovimo!

$$a^1 = a \quad , \quad a^n \cdot a^m = a^{n+m} .$$

Tablično deriviranje	
Funkcija	**Derivacija**
x	1
x^n	$n \cdot x^{n-1}$
c konstanta	0

Neka su funkcije f i g derivabilne na istom intervalu $\langle a, b \rangle$. Tada vrijedi da su funkcije f + g i f – g derivabilne pa slijedi:

$$(c \cdot f(x))' = c \cdot (f(x))' \text{ , } c \text{ je konstanta} \quad , \quad (f(x)+g(x))' = (f(x))' + (g(x))' .$$

$$(f(x)-g(x))' = (f(x))' - (g(x))' .$$

Određivanje maksimuma i minimuma funkcije y = f(x)

I. Nađe se prva derivacija funkcije

$$y' = f'(x)$$

II. Prva derivacija funkcije izjednači se s nulom

$$f'(x) = 0$$

III. Riješi se dobivena jednadžba

$$f'(x) = 0 \Rightarrow x_1, x_2, x_3, \ldots, x_i \text{ su rješenja jednadžbe,}$$

to su vrijednosti apscise za koje zadana funkcija može imati ekstrem, te se točke zovu stacionarne točke

IV. Nađe se druga derivacija funkcije tako da se derivira prva derivacija funkcije

$$y'' = f''(x) = \left(f'(x)\right)'$$

V. Svaka stacionarna točka $x_1, x_2, x_3, \ldots, x_i$ uvrsti se u drugu derivaciju funkcije. Pri tome vrijedi:

- za $f''(x_i) > 0$ u x_i je minimum
- za $f''(x_i) < 0$ u x_i je maksimum.

Ako je $f''(x_i) = 0$, dalje slijedi:

VI. Nađe se treća derivacija funkcije tako da se derivira druga derivacija funkcije

$$y''' = f'''(x) = \left(f''(x)\right)'$$

VII. Svaka stacionarna točka $x_1, x_2, x_3, \ldots, x_i$ uvrsti se u treću derivaciju funkcije. Pri tome vrijedi:

- za $f'''(x_i) \neq 0$ u x_i funkcija ima točku infleksije

Ako je $f'''(x_i) = 0$, dalje slijedi:

VIII. Nađe se četvrta derivacija funkcije tako da se derivira treća derivacija funkcije

$$y^{(4)} = f^{(4)}(x) = \left(f'''(x)\right)'$$

IX. Svaka stacionarna točka $x_1, x_2, x_3, \ldots, x_i$ uvrsti se u četvrtu derivaciju funkcije. Pri tome vrijedi:

- za $f^{(4)}(x_i) > 0$ u x_i je minimum
- za $f^{(4)}(x_i) < 0$ u x_i je maksimum.

Ako je $f^{(4)}(x_i) = 0$, slijede daljnja istraživanja.

Četverokut je dio ravnine omeđen sa četiri dužine. Konveksni četverokuti su četverokuti kojima su svi kutovi manji od 180°. Paralelogrami su četverokuti kojima su po dvije nasuprotne stranice usporedne (paralelne). Pravokutnik je paralelogram koji ima barem jedan pravi kut (pravi kut ima 90º).
Površina pravokutnika je jednaka produktu njegove duljine a i širine b.

$$P = a \cdot b.$$

Obujam (volumen) prizme s bazom (osnovkom) ploštine B i visinom v iznosi:

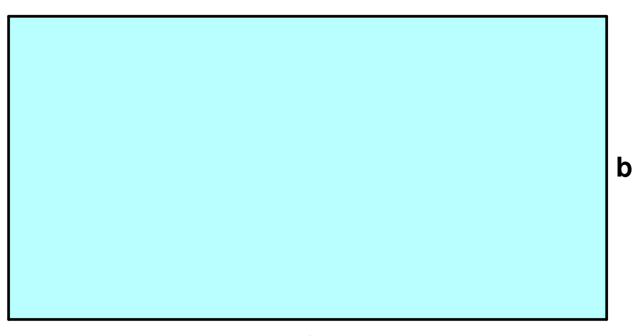
$$V = B \cdot v.$$

Zakon distribucije množenja prema zbrajanju.

$$a \cdot (b + c) = a \cdot b + a \cdot c \quad , \quad a \cdot b + a \cdot c = a \cdot (b + c).$$

Množenje zagrada

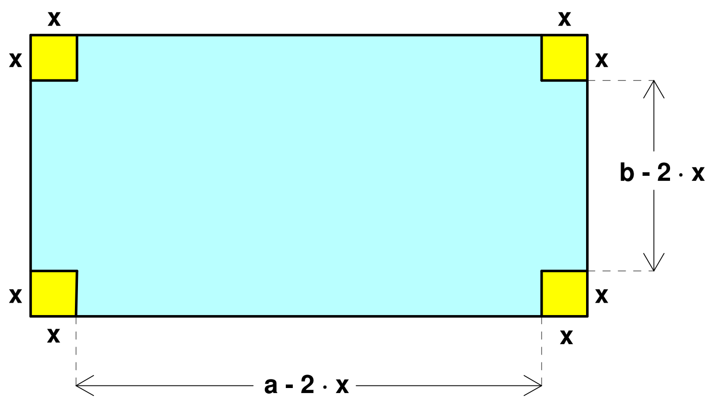
$$(a + b) \cdot (c + d) = a \cdot c + a \cdot d + b \cdot c + b \cdot d.$$



$$a = 1.2\ m = 12\ dm \quad , \quad b = 1\ m = 10\ dm$$

Kad odrežemo kvadrate duljine stranice x, dimenzije baze kutije su:

$$a - 2 \cdot x = 12 - 2 \cdot x \quad , \quad b - 2 \cdot x = 10 - 2 \cdot x$$



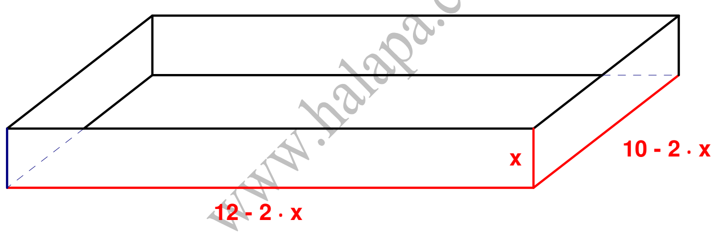
Ploština je baze

$$B = (a - 2 \cdot x) \cdot (b - 2 \cdot x) \Rightarrow B = (12 - 2 \cdot x) \cdot (10 - 2 \cdot x) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow B = 120 - 24 \cdot x - 20 \cdot x + 4 \cdot x^2 \Rightarrow B = 4 \cdot x^2 - 44 \cdot x + 120.$$

Budući da je visina kutije x, volumen će biti:

$$V = B \cdot x \Rightarrow V = \left(4 \cdot x^2 - 44 \cdot x + 120\right) \cdot x \Rightarrow V = 4 \cdot x^3 - 44 \cdot x^2 + 120 \cdot x.$$



Potrebno je odrediti vrijednost visine x za koju volumen V ima maksimalnu vrijednost. Slijedi:

$$V(x) = 4 \cdot x^3 - 44 \cdot x^2 + 120 \cdot x \Rightarrow V'(x) = 12 \cdot x^2 - 88 \cdot x + 120.$$

Iz

$$V'(x) = 0,$$

to jest

$$12 \cdot x^2 - 88 \cdot x + 120 = 0$$

dobivamo stacionarne točke.

$$12 \cdot x^2 - 88 \cdot x + 120 = 0 \Rightarrow 12 \cdot x^2 - 88 \cdot x + 120 = 0 \ /:4 \Rightarrow 3 \cdot x^2 - 22 \cdot x + 30 = 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \left.\begin{array}{l} 3 \cdot x^2 - 22 \cdot x + 30 = 0 \\ a = 3 \ , \ b = -22 \ , \ c = 30 \end{array}\right\} \Rightarrow \left.\begin{array}{l} a = 3 \ , \ b = -22 \ , \ c = 30 \\ x_{1,2} = \dfrac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4 \cdot a \cdot c}}{2 \cdot a} \end{array}\right\} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow x_{1,2} = \frac{-(-22) \pm \sqrt{(-22)^2 - 4 \cdot 3 \cdot 30}}{2 \cdot 3} \Rightarrow x_{1,2} = \frac{22 \pm \sqrt{484 - 360}}{6} \Rightarrow x_{1,2} = \frac{22 \pm \sqrt{124}}{6} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow x_{1,2}=\frac{22\pm 11.14}{6} \Rightarrow \left.\begin{matrix} x_{1,2}=\frac{22\pm 11.14}{6} \\ x_{1,2}=\frac{22\pm 11.14}{6} \end{matrix}\right\} \Rightarrow \left.\begin{matrix} x_1=\frac{22+11.14}{6} \\ x_2=\frac{22-11.14}{6} \end{matrix}\right\} \Rightarrow \left.\begin{matrix} x_1=5.52 \\ x_2=1.81 \end{matrix}\right\}.$$

Iz

$$V''(x)=24\cdot x-88$$

dobije se:

- $V''(5.52)=24\cdot 5.52-88=44.48>0$
- $V''(1.81)=24\cdot 1.81-88=-44.56<0.$

Budući da je

$$V''(1.81)=-44.56<0,$$

znači da je $V(1.81)$ maksimalna vrijednost funkcije V(x). Dakle, za x = 1.81 kutija ima najveći mogući obujam koji iznosi:

$$\left.\begin{matrix} V(x)=4\cdot x^3-44\cdot x^2+120\cdot x \\ x=1.81 \end{matrix}\right\} \Rightarrow V(1.81)=4\cdot 1.81^3-44\cdot 1.81^2+120\cdot 1.81 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow V(1.81)=96.77\ dm^3.$$

Uočimo da za x = 5.52 dobivamo

$$V''(5.52)=44.48>0,$$

što odgovara minimumu. Ovaj drugi ekstrem funkcije V(x) ne može se primijeniti u našem zadatku jer bi kod širine od 10 dm trebalo sa svake stranice odrezati

$$2\cdot x=2\cdot 5.52=11.04\ dm,$$

što nije moguće.

Vježba 091

Napisali ste da je ovo težak zadatak pa da biste dobro uvježbali evo Vam dva slična zadatka. Od kartona pravokutnog oblika sa stranicama duljine 32 cm i 20 cm (16 cm i 10 cm) treba napraviti otvorenu kutiju što je moguće većeg volumena. Koliki je taj volumen?

Rezultat: 1152 cm^3, 144 cm^3.

Zadatak 092 (Miroslav, srednja škola)

Odredite broj koji je od svog kvadrata što veći.

Rješenje 092

Ponovimo!

$$\left(\frac{a}{b}\right)^n=\frac{a^n}{b^n} \quad , \quad \frac{a}{b}-\frac{c}{d}=\frac{a\cdot d-b\cdot c}{b\cdot d}.$$

Tablično deriviranje	
Funkcija	**Derivacija**
x	1
x^n	$n\cdot x^{n-1}$
c konstanta	0

Neka su funkcije f i g derivabilne na istom intervalu $\langle a, b\rangle$. Tada vrijedi da je funkcija f – g derivabilne pa slijedi:

$$(c\cdot f(x))' = c\cdot(f(x))' \text{ , } c \text{ je konstanta} \quad , \quad (f(x)-g(x))' = (f(x))' - (g(x))'.$$

Određivanje maksimuma i minimuma funkcije y = f(x)

I. Nađe se prva derivacija funkcije

$$y' = f'(x)$$

II. Prva derivacija funkcije izjednači se s nulom

$$f'(x) = 0$$

III. Riješi se dobivena jednadžba

$$f'(x) = 0 \Rightarrow x_1, x_2, x_3, \ldots, x_i \text{ su rješenja jednadžbe,}$$

to su vrijednosti apscise za koje zadana funkcija može imati ekstrem, te se točke zovu stacionarne točke

IV. Nađe se druga derivacija funkcije tako da se derivira prva derivacija funkcije

$$y'' = f''(x) = \left(f'(x)\right)'$$

V. Svaka stacionarna točka $x_1, x_2, x_3, \ldots, x_i$ uvrsti se u drugu derivaciju funkcije. Pri tome vrijedi:

- za $f''(x_i) > 0$ u x_i je minimum
- za $f''(x_i) < 0$ u x_i je maksimum.

Ako je $f''(x_i) = 0$, dalje slijedi:

VI. Nađe se treća derivacija funkcije tako da se derivira druga derivacija funkcije

$$y''' = f'''(x) = \left(f''(x)\right)'$$

VII. Svaka stacionarna točka $x_1, x_2, x_3, \ldots, x_i$ uvrsti se u treću derivaciju funkcije. Pri tome vrijedi:

- za $f'''(x_i) \neq 0$ u x_i funkcija ima točku infleksije

Ako je $f'''(x_i) = 0$, dalje slijedi:

VIII. Nađe se četvrta derivacija funkcije tako da se derivira treća derivacija funkcije

$$y^{(4)} = f^{(4)}(x) = \left(f'''(x)\right)'$$

IX. Svaka stacionarna točka $x_1, x_2, x_3, \ldots, x_i$ uvrsti se u četvrtu derivaciju funkcije. Pri tome vrijedi:

- za $f^{(4)}(x_i) > 0$ u x_i je minimum
- za $f^{(4)}(x_i) < 0$ u x_i je maksimum.

Ako je $f^{(4)}(x_i) = 0$, slijede daljnja istraživanja.

Kako ispitati za koliko je broj a veći od broja b?

$$a - b.$$

Neka je x traženi broj. Tada promatramo funkciju $f(x) = x - x^2$ i njezinu maksimalnu vrijednost. Potrebno je odrediti vrijednost od x za koju f ima najveću vrijednost. Slijedi:

$$f(x) = x - x^2 \Rightarrow f'(x) = 1 - 2\cdot x.$$

Iz

$$f'(x) = 0,$$

to jest

$$1-2\cdot x=0$$

dobivamo stacionarnu točku.

$$1-2\cdot x=0\ \Rightarrow\ -2\cdot x=-1\ \Rightarrow\ -2\cdot x=-1\ /:(-2)\ \Rightarrow\ x=\frac{1}{2}.$$

Iz

$$f''(x)=-2$$

dobije se:

$$f''\left(\frac{1}{2}\right)=-2<0$$

Budući da je

$$f''\left(\frac{1}{2}\right)=-2<0$$

znači da je $f\left(\frac{1}{2}\right)$ maksimalna vrijednost funkcije f(x). Dakle, $x=\frac{1}{2}$ je broj koji je od svog kvadrata što veći. Maksimalna vrijednost iznosi

$$\left.\begin{array}{l} f(x)=x-x^2 \\ x=\frac{1}{2} \end{array}\right\}\ \Rightarrow\ f\left(\frac{1}{2}\right)=\frac{1}{2}-\left(\frac{1}{2}\right)^2\ \Rightarrow\ f\left(\frac{1}{2}\right)=\frac{1}{2}-\frac{1}{4}\ \Rightarrow\ f\left(\frac{1}{2}\right)=\frac{2-1}{4}\ \Rightarrow\ f\left(\frac{1}{2}\right)=\frac{1}{4}.$$

Vježba 092

Odmor!

Rezultat: ...

Zadatak 093 (Katarina, maturantica)

Ana je ukrasila kutiju za nakit bez poklopca. Izvana ju je oblijepila papirom i na vanjske rubove zalijepila ukrasnu nit. Kutija je u obliku kvadra kojemu je duljina dvostruko veća od širine. Za ukrašavanje svih vanjskih rubova kutije upotrijebila je točno 108 cm ukrasne niti koja se nigdje ne preklapa. Kutija ima maksimalno moguć obujam i papiri kojima je oblijepljena se ne preklapaju. Kolika je površina papira kojim je Ana oblijepila tu kutiju?

Rješenje 093

Ponovimo!

$$a^1=a\quad,\quad a^n\cdot a^m=a^{n+m}\quad,\quad a^n:a^m=a^{n-m}.$$

Tablično deriviranje	
Funkcija	**Derivacija**
x^n	$n\cdot x^{n-1}$
x	1

Neka su funkcije f i g derivabilne na istom intervalu $\langle a, b\rangle$. Tada vrijedi da su funkcije f + g i f – g derivabilne pa slijedi:

$$(c\cdot f(x))'=c\cdot(f(x))'\ ,\ c \text{ je konstanta}\quad,\quad (f(x)+g(x))'=(f(x))'+(g(x))'.$$

Određivanje maksimuma i minimuma funkcije y = f(x)

I. Nađe se prva derivacija funkcije

$$y'=f'(x)$$

II. Prva derivacija funkcije izjednači se s nulom

$$f^{'}(x)=0$$

III. Riješi se dobivena jednadžba

$$f^{'}(x)=0 \Rightarrow x_1, x_2, x_3, \ldots, x_i \text{ su rješenja jednadžbe,}$$

to su vrijednosti apscise za koje zadana funkcija može imati ekstrem, te se točke zovu stacionarne točke

IV. Nađe se druga derivacija funkcije tako da se derivira prva derivacija funkcije

$$y^{''}=f^{''}(x)=\left(f^{'}(x)\right)^{'}$$

V. Svaka stacionarna točka $x_1, x_2, x_3, \ldots, x_i$ uvrsti se u drugu derivaciju funkcije. Pri tome vrijedi:

- za $f^{''}(x_i)>0$ u x_i je minimum
- za $f^{''}(x_i)<0$ u x_i je maksimum.

Ako je $f^{''}(x_i)=0$, dalje slijedi:

VI. Nađe se treća derivacija funkcije tako da se derivira druga derivacija funkcije

$$y^{'''}=f^{'''}(x)=\left(f^{''}(x)\right)^{'}$$

VII. Svaka stacionarna točka $x_1, x_2, x_3, \ldots, x_i$ uvrsti se u treću derivaciju funkcije. Pri tome vrijedi:

- za $f^{'''}(x_i)\neq 0$ u x_i funkcija ima točku infleksije

Ako je $f^{'''}(x_i)=0$, dalje slijedi:

VIII. Nađe se četvrta derivacija funkcije tako da se derivira treća derivacija funkcije

$$y^{(4)}=f^{(4)}(x)=\left(f^{'''}(x)\right)^{'}$$

IX. Svaka stacionarna točka $x_1, x_2, x_3, \ldots, x_i$ uvrsti se u četvrtu derivaciju funkcije. Pri tome vrijedi:

- za $f^{(4)}(x_i)>0$ u x_i je minimum
- za $f^{(4)}(x_i)<0$ u x_i je maksimum.

Ako je $f^{(4)}(x_i)=0$, slijede daljnja istraživanja.

Zakon distribucije množenja prema zbrajanju.

$$a\cdot(b+c)=a\cdot b+a\cdot c \quad , \quad a\cdot b+a\cdot c=a\cdot(b+c).$$

Kako zapisati da je broj b n – terostruko veći od broja a?

$$b=n\cdot a \quad , \quad \frac{b}{n}=a \quad , \quad \frac{b}{a}=n.$$

Da bi umnožak bio jednak nuli, dovoljno je da jedan faktor bude jednak nuli.

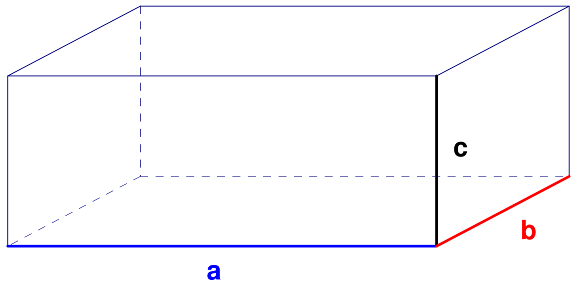
$$a\cdot b=0 \Leftrightarrow a=0 \text{ ili } b=0 \text{ ili } a=b=0.$$

Kvadar ili pravokutni paralelopiped je uspravna četverostrana prizma kojoj je baza pravokutnik. Neka su a, b i c duljine bridova kvadra.
Obujam kvadra izračunava se po formuli:

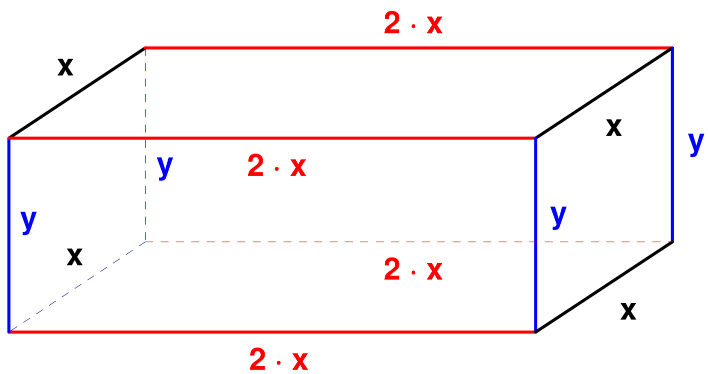
$$V=a\cdot b\cdot c.$$

Oplošje kvadra izračunava se po formuli:

$$O=2\cdot a\cdot b+2\cdot a\cdot c+2\cdot b\cdot c.$$



Neka je x širina kutije. Duljina je dvostruko veća od širine pa iznosi 2 · x. Neka je y visina kutije.



Za ukrašavanje svih vanjskih rubova kutije uporabljeno je 108 cm ukrasne niti pa vrijedi jednadžba:

$$4\cdot 2\cdot x+4\cdot x+4\cdot y=108 \Rightarrow 8\cdot x+4\cdot x+4\cdot y=108 \Rightarrow 12\cdot x+4\cdot y=108 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 12\cdot x+4\cdot y=108 \;/:4 \Rightarrow 3\cdot x+y=27.$$

Obujam kvadra je

$$V=2\cdot x\cdot x\cdot y \Rightarrow V=2\cdot x^2\cdot y.$$

Izrazimo obujam kao funkciju varijable x.

$$\left.\begin{array}{l} 3\cdot x+y=27 \\ V=2\cdot x^2\cdot y \end{array}\right\} \Rightarrow \left.\begin{array}{l} y=27-3\cdot x \\ V=2\cdot x^2\cdot y \end{array}\right\} \Rightarrow \left[\begin{array}{c} \text{metoda} \\ \text{zamjene} \end{array}\right] \Rightarrow V=2\cdot x^2\cdot(27-3\cdot x) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow V=54\cdot x^2-6\cdot x^3 \Rightarrow V=-6\cdot x^3+54\cdot x^2 \Rightarrow V(x)=-6\cdot x^3+54\cdot x^2.$$

Potrebno je odrediti vrijednost varijable x za koju volumen V ima maksimalnu vrijednost. Slijedi:

$$V(x)=-6\cdot x^3+54\cdot x^2 \Rightarrow V'(x)=\left(-6\cdot x^3+54\cdot x^2\right)' \Rightarrow$$

$$\Rightarrow V'(x)=\left(-6\cdot x^3\right)'+\left(54\cdot x^2\right)' \Rightarrow V'(x)=-6\cdot\left(x^3\right)'+54\cdot\left(x^2\right)' \Rightarrow$$

$$\Rightarrow V'(x)=-6\cdot 3\cdot x^2+54\cdot 2\cdot x \Rightarrow V'(x)=-18\cdot x^2+108\cdot x.$$

Iz

$$V'(x)=0,$$

to jest

$$-18\cdot x^2+108\cdot x=0$$

dobivamo stacionarne točke.

$$-18\cdot x^2+108\cdot x=0 \Rightarrow x\cdot(-18\cdot x+108)=0 \Rightarrow \left.\begin{array}{l} x=0 \text{ nema smisla} \\ -18\cdot x+108=0 \end{array}\right\} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow -18\cdot x+108=0 \Rightarrow -18\cdot x=-108 \Rightarrow -18\cdot x=-108 \;/:(-18) \Rightarrow x=6.$$

Iz

$$V''(x)=\left(-18\cdot x^2+108\cdot x\right)' \Rightarrow V''(x)=\left(-18\cdot x^2\right)'+(108\cdot x)' \Rightarrow$$

$$\Rightarrow V''(x)=-18\cdot\left(x^2\right)'+108\cdot x' \Rightarrow V''(x)=-18\cdot 2\cdot x+108\cdot 1 \Rightarrow V''(x)=-36\cdot x+108.$$

dobije se:

- $V''(6)=-36\cdot 6+108=-206+108=-108<0.$

Budući da je

$$V''(6)=-108<0,$$

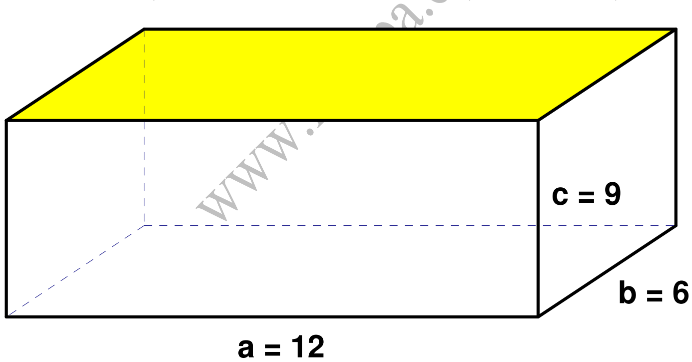
znači da je $V(6)$ maksimalna vrijednost funkcije V(x). Dakle, za x = 6 kutija ima najveći mogući obujam.

Računamo y.

$$\left.\begin{array}{l} x=6 \\ y=27-3\cdot x \end{array}\right\} \Rightarrow y=27-3\cdot 6 \Rightarrow y=27-18 \Rightarrow y=9.$$

Duljine rubova Anine kutije su:

$$\left.\begin{array}{l} a=2\cdot x \\ b=x \\ c=y \end{array}\right\} \Rightarrow \left[\begin{array}{l} x=6 \\ y=9 \end{array}\right] \Rightarrow \left.\begin{array}{l} a=2\cdot 6 \\ b=6 \\ c=9 \end{array}\right\} \Rightarrow \left.\begin{array}{l} a=12 \\ b=6 \\ c=9 \end{array}\right\}.$$



Površina papira kojim je Ana oblijepila kutiju jednaka je oplošju kvadra umanjena za površinu poklopca.

$$P=O-a\cdot b \Rightarrow P=2\cdot a\cdot b+2\cdot a\cdot c+2\cdot b\cdot c-a\cdot b \Rightarrow P=a\cdot b+2\cdot a\cdot c+2\cdot b\cdot c \Rightarrow$$

$$\Rightarrow P=a\cdot b+2\cdot c\cdot(a+b) \Rightarrow P=12\cdot 6+2\cdot 9\cdot(12+6) \Rightarrow P=72+18\cdot 18 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow P=72+324 \Rightarrow P=396\ cm^2.$$

Vježba 093

Ana je ukrasila kutiju za nakit bez poklopca. Izvana ju je oblijepila papirom i na vanjske rubove zalijepila ukrasnu nit. Kutija je u obliku kvadra kojemu je duljina dvostruko veća od širine. Za ukrašavanje svih vanjskih rubova kutije upotrijebila je točno 1.08 m ukrasne niti koja se nigdje ne preklapa. Kutija ima maksimalno moguć obujam i papiri kojima je oblijepljena se ne preklapaju. Kolika je površina papira kojim je Ana oblijepila tu kutiju?

Rezultat: 396 cm^2.

Zadatak 094 (Stela, maturantica)

Odredite točku pravca y = 7 · x – 15 koja je najbliža grafu funkcije $f(x)=\frac{1}{8}\cdot x^4+3\cdot x-4.$

Rješenje 094

Ponovimo!

$$n=\frac{n}{1} \quad , \quad \frac{a}{b}-\frac{c}{d}=\frac{a\cdot d-b\cdot c}{b\cdot d} \quad , \quad a\cdot\frac{b}{c}=\frac{a\cdot b}{c}.$$

Tablično deriviranje	
Funkcija	**Derivacija**
x^n	$n\cdot x^{n-1}$
x	1
c konstanta	0

Neka su funkcije f i g derivabilne na istom intervalu $\langle a, b\rangle$. Tada vrijedi da su funkcije f + g i f – g derivabilne pa slijedi:

$$\left(c\cdot f(x)\right)'=c\cdot\left(f(x)\right)' \text{ , } c \text{ je konstanta} \quad , \quad \left(f(x)\pm g(x)\right)'=\left(f(x)\right)'\pm\left(g(x)\right)'.$$

Jednadžba tangente u točki D(x_0, y_0) krivulje y = f(x) glasi:

$$y-y_0=f'(x_0)\cdot(x-x_0)$$

Koeficijent smjera tangente je:

$$k=f'(x_0).$$

Jednadžba normale u točki D(x_0, y_0) krivulje y = f(x) glasi:

$$y-y_0=-\frac{1}{f'(x_0)}\cdot(x-x_0).$$

Jednadžba pravca oblika

$$y=k\cdot x+l$$

naziva se eksplicitni oblik jednadžbe pravca ili kraće, eksplicitna jednadžba pravca. Broj k naziva se koeficijent smjera pravca. Broj l nazivamo odsječak pravca na osi y.

Uvjet usporednosti (paralelnosti):
Ako su pravci dani eksplicitnim jednadžbama y = k_1 · x + l_1, y = k_2 · x + l_2, tada su usporedni ako i samo ako je

$$k_1=k_2.$$

Uvjet okomitosti:
Ako su pravci dani eksplicitnim jednadžbama y = k_1 · x + l_1, y = k_2 · x + l_2, k_1, $k_2 \neq 0$, tada su okomiti ako i samo ako je

$$k_1\cdot k_2=-1 \Rightarrow k_1=-\frac{1}{k_2} \Rightarrow k_2=-\frac{1}{k_1}.$$

Jednadžba pravca zadanog koeficijentom smjera k i točkom T(x_1, y_1) glasi

$$y-y_1=k\cdot(x-x_1).$$

Zakon distribucije množenja prema zbrajanju.

$$a\cdot(b+c)=a\cdot b+a\cdot c \quad , \quad a\cdot b+a\cdot c=a\cdot(b+c).$$

Skratiti razlomak znači brojnik i nazivnik tog razlomka podijeliti istim brojem različitim od nule i jedinice

$$\frac{a\cdot n}{b\cdot n}=\frac{a}{b} \text{ , } n\neq 0 \text{ , } n\neq 1.$$

Najprije odredimo koeficijent smjera tangente na graf funkcije f koja je usporedna (paralelna) s pravcem y = 7 · x – 15.

$$f(x)=\frac{1}{8}\cdot x^4+3\cdot x-4 \Rightarrow f'(x)=\left(\frac{1}{8}\cdot x^4+3\cdot x-4\right)' \Rightarrow f'(x)=\left(\frac{1}{8}\cdot x^4\right)'+(3\cdot x)'-4' \Rightarrow$$

$$\Rightarrow f'(x)=\frac{1}{8}\cdot\left(x^4\right)'+3\cdot x'-0 \Rightarrow f'(x)=\frac{1}{8}\cdot 4\cdot x^3+3\cdot 1 \Rightarrow f'(x)=\frac{1}{8}\cdot 4\cdot x^3+3 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow f'(x)=\frac{1}{2}\cdot x^3+3.$$

Trebamo naći koordinate dirališta D u kojem tangenta povučena na graf funkcije f ima koeficijent smjera jednak 7.

$$f'(x)=7 \Rightarrow \frac{1}{2}\cdot x^3+3=7 \Rightarrow \frac{1}{2}\cdot x^3=7-3 \Rightarrow \frac{1}{2}\cdot x^3=4 \Rightarrow \frac{1}{2}\cdot x^3=4 \,/\cdot 2 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow x^3=8 \Rightarrow x^3=8 \,/\sqrt[3]{\ } \Rightarrow x=\sqrt[3]{8} \Rightarrow x=2.$$

Računamo ordinatu y dirališta D.

$$\left.\begin{array}{l} x=2 \\ f(x)=\frac{1}{8}\cdot x^4+3\cdot x-4 \end{array}\right\} \Rightarrow f(2)=\frac{1}{8}\cdot 2^4+3\cdot 2-4 \Rightarrow f(2)=\frac{1}{8}\cdot 16+6-4 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow f(2)=\frac{1}{8}\cdot 16+6-4 \Rightarrow f(2)=2+6-4 \Rightarrow f(2)=4.$$

Dirālište ima koordinate:

$$D(x,\ y)=D(2,\ 4).$$

Konstruiramo okomicu iz točke D na pravac y = 7 · x – 15.
Koeficijent smjera pravca y = 7 · x – 15 je k = 7 pa je koeficijent smjera okomice na nj

$$k_1=-\frac{1}{7}.$$

Tada jednadžba okomice (pravca) glasi:

$$\left.\begin{array}{l} D(x_1,\ y_1)=D(2,\ 4) \\ k_1=-\frac{1}{7} \end{array}\right\} \Rightarrow \left[\ y-y_1=k_1\cdot(x-x_1)\ \right] \Rightarrow y-4=-\frac{1}{7}\cdot(x-2) \Rightarrow y-4=-\frac{1}{7}\cdot x+\frac{2}{7} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow y-4=-\frac{1}{7}\cdot x+\frac{2}{7} \,/\cdot 7 \Rightarrow 7\cdot y-28=-x+2 \Rightarrow x+7\cdot y=2+28 \Rightarrow x+7\cdot y=30.$$

Jednadžbu normale (okomice) elegantno dobijemo i na ovaj način:

$$\left.\begin{array}{l} D(x_1,\ y_1)=D(2,\ 4) \\ f'(x_1)=7 \end{array}\right\} \Rightarrow \left[\ y-y_1=-\frac{1}{f'(x_1)}\cdot(x-x_1)\ \right] \Rightarrow y-4=-\frac{1}{7}\cdot(x-2) \Rightarrow y-4=-\frac{1}{7}\cdot x+\frac{2}{7} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow y-4=-\frac{1}{7}\cdot x+\frac{2}{7} \,/\cdot 7 \Rightarrow 7\cdot y-28=-x+2 \Rightarrow x+7\cdot y=2+28 \Rightarrow x+7\cdot y=30.$$

Sjecište okomice sa zadanim pravcem bit će tražena točka S. Njezine koordinate rješenja su sustava jednadžba.

$$\left.\begin{array}{l} y=7\cdot x-15 \\ x+7\cdot y=30 \end{array}\right\} \Rightarrow \left.\begin{array}{l} -7\cdot x+y=-15 \\ x+7\cdot y=30 \end{array}\right\} \Rightarrow \left[\begin{array}{l} \text{metoda suprotnih} \\ \text{koeficijenata} \end{array}\right] \Rightarrow \left.\begin{array}{l} -7\cdot x+y=-15 \;/\cdot(-7) \\ x+7\cdot y=30 \end{array}\right\} \Rightarrow$$

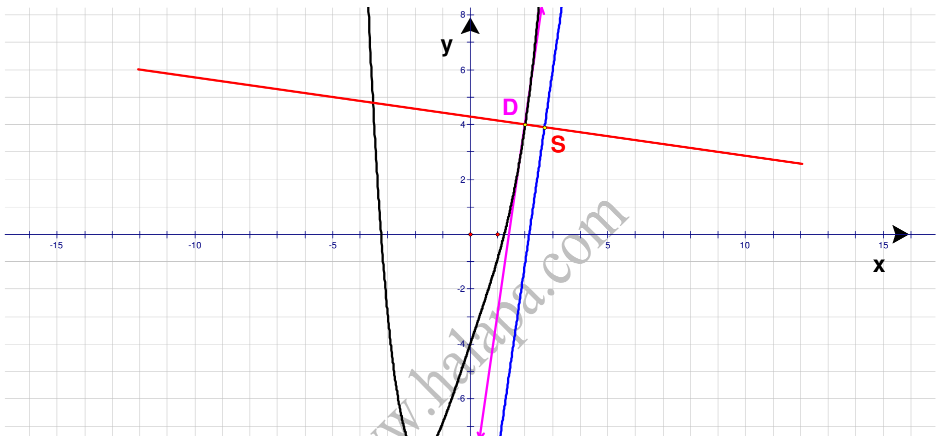
$$\Rightarrow \left.\begin{array}{l} 49\cdot x-7\cdot y=105 \\ x+7\cdot y=30 \end{array}\right\} \Rightarrow 50\cdot x=135 \Rightarrow 50\cdot x=135 \;/:50 \Rightarrow x=\frac{135}{50} \Rightarrow x=\frac{135}{50} \Rightarrow x=\frac{27}{10}.$$

Računamo ordinatu y.

$$\left.\begin{array}{l} x=\frac{27}{10} \\ y=7\cdot x-15 \end{array}\right\} \Rightarrow y=7\cdot\frac{27}{10}-15 \Rightarrow y=\frac{189}{10}-15 \Rightarrow y=\frac{189}{10}-\frac{15}{1} \Rightarrow y=\frac{189-150}{10} \Rightarrow y=\frac{39}{10}.$$

Točka S ima koordinate:

$$S(x,\ y)=S\left(\frac{27}{10},\ \frac{39}{10}\right).$$



Vježba 094

Odmor!

Rezultat: …