Zadatak 061 (Dunja, Ivona, studentice)

Nađite derivaciju funkcije: $y=\frac{e^x}{x^2}$.

Rješenje 061

Ponovimo!

$$a^{-n}=\frac{1}{a^n}.$$

Neka su f i g derivabilne funkcije na istom intervalu I. Funkcija f · g je derivabilna i vrijedi:

(f · g) ' = f ' · g + f · g ' (derivacija umnoška).

Derivacija kvocijenta:

$$\left(\frac{f(x)}{g(x)}\right)'=\frac{f'(x)\cdot g(x)-f(x)\cdot g'(x)}{\left(g(x)\right)^2},\ g(x)\neq 0.$$

1.inačica

$$y'=\left(\frac{e^x}{x^2}\right)' \Rightarrow y'=\frac{\left(e^x\right)'\cdot x^2-e^x\cdot\left(x^2\right)'}{\left(x^2\right)^2} \Rightarrow y'=\frac{e^x\cdot x^2-e^x\cdot 2\cdot x}{x^4} \Rightarrow y'=\frac{e^x\cdot x\cdot(x-2)}{x^4} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow y'=\frac{e^x\cdot(x-2)}{x^3} \Rightarrow y'=e^x\cdot\frac{x-2}{x^3}.$$

2.inačica

$$y=\frac{e^x}{x^2} \Rightarrow y=e^x\cdot x^{-2} \Rightarrow y'=\left(e^x\cdot x^{-2}\right)' \Rightarrow y'=\left(e^x\right)'\cdot x^{-2}+e^x\cdot\left(x^{-2}\right)' \Rightarrow$$

$$\Rightarrow y'=e^x\cdot x^{-2}+e^x\cdot(-2)\cdot x^{-3} \Rightarrow y'=e^x\cdot x^{-2}-2\cdot e^x\cdot x^{-3} \Rightarrow y'=e^x\cdot x^{-3}\cdot(x-2) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow y'=e^x\cdot\frac{x-2}{x^3}.$$

Vježba 061

Nađite derivaciju funkcije: $y=\frac{e^x}{x}$.

Rezultat: $e^x\cdot\frac{x-1}{x^2}$.

Zadatak 062 (Dunja, Ivona, studentice)

Nađite derivaciju funkcije: $y=arctg(\ln x)+\ln(arctg\,x)$.

Rješenje 062

Ponovimo!

Derivacija zbroja : $(f+g)'=f'+g'$.

Derivacija složene funkcije: $\frac{dy}{dx}=\frac{dy}{du}\cdot\frac{du}{dx}$ ili $y'(x)=y'(u)\cdot u'(x)$.

Složena funkcija derivira se tako da se najprije derivira po posrednoj funkciji kao argumentu i dobiveni rezultat pomnoži derivacijom posredne funkcije.

Tablično deriviranje	
Funkcija	**Derivacija**
$arctg\ x$	$\frac{1}{1+x^2}$
$\ln x$	$\frac{1}{x}$

$$y = arctg(\ln x) + \ln(arctg\ x) \Rightarrow y' = (arctg(\ln x) + \ln(arctg\ x))' \Rightarrow y' = (arctg(\ln x))' + (\ln(arctg\ x))' \Rightarrow$$

$$\Rightarrow y' = \frac{1}{1+\ln^2 x} \cdot (\ln x)' + \frac{1}{arctg\ x} \cdot (arctg\ x)' \Rightarrow y' = \frac{1}{1+\ln^2 x} \cdot \frac{1}{x} + \frac{1}{arctg\ x} \cdot \frac{1}{1+x^2} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow y' = \frac{1}{x \cdot (1+\ln^2 x)} + \frac{1}{(1+x^2) \cdot arctg\ x}.$$

Vježba 062

Nađite derivaciju funkcije: $y = arctg\sqrt{x}$.

Rezultat: $\frac{1}{2 \cdot \sqrt{x} \cdot (1+x)}$.

Zadatak 063 (Dunja, Ivona, studentice)

Nađite derivaciju funkcije: $y = \sqrt{\ln x + 1} + \ln(\sqrt{x} + 1)$.

Rješenje 063

Ponovimo!

Derivacija zbroja: $(f+g)' = f' + g'$.

Derivacija složene funkcije: $\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{du} \cdot \frac{du}{dx}$ ili $y'(x) = y'(u) \cdot u'(x)$.

Složena funkcija derivira se tako da se najprije derivira po posrednoj funkciji kao argumentu i dobiveni rezultat pomnoži derivacijom posredne funkcije.

Tablično deriviranje	
Funkcija	**Derivacija**
$\sqrt{x}$	$\frac{1}{2 \cdot \sqrt{x}}$
$\ln x$	$\frac{1}{x}$
c - konstanta	0

$$y = \sqrt{\ln x + 1} + \ln(\sqrt{x}+1) \Rightarrow y' = \left(\sqrt{\ln x + 1} + \ln(\sqrt{x}+1)\right)' \Rightarrow y' = \left(\sqrt{\ln x + 1}\right)' + \left(\ln(\sqrt{x}+1)\right)' \Rightarrow$$

$$\Rightarrow y' = \frac{1}{2 \cdot \sqrt{\ln x + 1}} \cdot (\ln x + 1)' + \frac{1}{\sqrt{x}+1} \cdot (\sqrt{x}+1)' \Rightarrow y' = \frac{1}{2 \cdot \sqrt{\ln x + 1}} \cdot \left(\frac{1}{x} + 0\right) + \frac{1}{\sqrt{x}+1} \cdot \left(\frac{1}{2 \cdot \sqrt{x}} + 0\right) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow y' = \frac{1}{2 \cdot \sqrt{\ln x + 1}} \cdot \frac{1}{x} + \frac{1}{\sqrt{x}+1} \cdot \frac{1}{2 \cdot \sqrt{x}} \Rightarrow y' = \frac{1}{2 \cdot x \cdot \sqrt{\ln x + 1}} + \frac{1}{2 \cdot \sqrt{x} \cdot (\sqrt{x}+1)} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow y' = \frac{1}{2 \cdot x \cdot \sqrt{\ln x + 1}} + \frac{1}{2 \cdot (x + \sqrt{x})}.$$

Vježba 063

Nađite derivaciju funkcije: $y=\ln\left(\sqrt{x+1}\right)$.

Rezultat: $\dfrac{1}{2\cdot(x+1)}$.

Zadatak 064 (Dunja, Ivona, studentice)

Nađite derivaciju funkcije: $y=\ln^2 x-\ln(\ln x)$.

Rješenje 064

Ponovimo!

$$\text{Derivacija razlike: } (f-g)'=f'-g'.$$

$$\text{Derivacija složene funkcije: } \frac{dy}{dx}=\frac{dy}{du}\cdot\frac{du}{dx} \text{ ili } y'(x)=y'(u)\cdot u'(x).$$

Složena funkcija derivira se tako da se najprije derivira po posrednoj funkciji kao argumentu i dobiveni rezultat pomnoži derivacijom posredne funkcije.

Tablično deriviranje	
Funkcija	**Derivacija**
x^n	$n\cdot x^{n-1}$
$\ln x$	$\frac{1}{x}$

$$y=\ln^2 x-\ln(\ln x) \Rightarrow y'=\left(\ln^2 x-\ln(\ln x)\right)' \Rightarrow y'=\left(\ln^2 x\right)'-\left(\ln(\ln x)\right)' \Rightarrow$$

$$\Rightarrow y'=2\cdot\ln x\cdot(\ln x)'-\frac{1}{\ln x}\cdot(\ln x)' \Rightarrow y'=2\cdot\ln x\cdot\frac{1}{x}-\frac{1}{\ln x}\cdot\frac{1}{x} \Rightarrow y'=\frac{2\cdot\ln x}{x}-\frac{1}{x\cdot\ln x}.$$

Vježba 064

Nađite derivaciju funkcije: $y=\ln x-\ln(\ln x)$.

Rezultat: $\dfrac{\ln x-1}{x\cdot\ln x}$.

Zadatak 065 (Ivan, student)

Odredite ekstreme funkcije: $f(x, y) = 20\cdot x^2 - 37\cdot x\cdot y + 31\cdot x + 15\cdot y^2 - 16\cdot y - 7$.

Rješenje 065

Ponovimo!

Najprije nađemo prve parcijalne derivacije funkcije z = f(x, y) i izjednačimo ih s nulom.

$$\left.\begin{matrix}\dfrac{\partial f(x,y)}{\partial x}\\[2ex] \dfrac{\partial f(x,y)}{\partial y}\end{matrix}\right\} \Rightarrow \left[\begin{matrix}\text{prve parcijalne derivacije}\\ \text{izjednačimo s nulom}\end{matrix}\right] \Rightarrow \left.\begin{matrix}\dfrac{\partial f(x,y)}{\partial x}=0\\[2ex] \dfrac{\partial f(x,y)}{\partial y}=0\end{matrix}\right\}.$$

Točke u kojima diferencijabilna funkcija z = f(x, y) može imati ekstreme (tzv. stacionarne točke) nalazimo rješavanjem sustava jednadžbi:

$$\begin{cases}\dfrac{\partial f(x,y)}{\partial x}=0\\[2ex] \dfrac{\partial f(x,y)}{\partial y}=0.\end{cases}$$

Pretpostavimo da sustav jednadžbi ima jedno rješenje:

$$\left.\begin{matrix} x=a \\ y=b \end{matrix}\right\} \Rightarrow T(a,b) - \text{stacionarna točka}$$

Sustav može imati više rješenja ili ni jedno. Neka je T(a, b) stacionarna točka funkcije z = f(x, y). Sada nađemo druge parcijalne derivacije funkcije z = f(x, y) u stacionarnim točkama.

$$\frac{\partial^2 f(x,y)}{\partial x^2} \quad , \quad \frac{\partial^2 f(x,y)}{\partial x \partial y} \quad , \quad \frac{\partial^2 f(x,y)}{\partial y^2}.$$

Odavde za stacionarnu točku T(a, b) je:

$$A = \frac{\partial^2 f(a,b)}{\partial x^2} \quad , \quad B = \frac{\partial^2 f(a,b)}{\partial x \partial y} \quad , \quad C = \frac{\partial^2 f(a,b)}{\partial y^2}.$$

Tvorimo diskriminantu:

$$\Delta = \begin{vmatrix} A & B \\ B & C \end{vmatrix} \Rightarrow \Delta = A \cdot C - B^2.$$

1. Ako je $\Delta > 0$, onda funkcija z = f(x, y) ima ekstrem u točki T(a, b) i to:
   - maksimum ako je A < 0 (ili C < 0)
   - minimum ako je A > 0 (ili C > 0)
2. Ako je $\Delta < 0$, onda funkcija z = f(x, y) nema ekstrem u točki T(a, b)
3. Ako je $\Delta = 0$, potrebna su daljnja ispitivanja.

Maksimum ili minimum dobije se da koordinate stacionarne točke T(a, b) uvrstimo u zadanu funkciju:

$$z_{\max} = f(a,b) \quad \text{ili} \quad z_{\min} = f(a,b).$$

Najprije nađemo prve parcijalne derivacije fukcije z = f(x, y) i izjednačimo ih s nulom:

$$\frac{\partial f(x,y)}{\partial x} = \frac{\partial}{\partial x}\left(20 \cdot x^2 - 37 \cdot x \cdot y + 31 \cdot x + 15 \cdot y^2 - 16 \cdot y - 7\right) = 40 \cdot x - 37 \cdot y + 31,$$

$$\frac{\partial f(x,y)}{\partial y} = \frac{\partial}{\partial y}\left(20 \cdot x^2 - 37 \cdot x \cdot y + 31 \cdot x + 15 \cdot y^2 - 16 \cdot y - 7\right) = -37 \cdot x + 30 \cdot y - 16.$$

Rješavamo sustav jednadžbi:

$$\left.\begin{matrix} 6 \cdot x^2 - 36 \cdot y = 0 \\ 6 \cdot y^2 - 36 \cdot x = 0 \end{matrix}\right\} \Rightarrow \left.\begin{matrix} 6 \cdot x^2 - 36 \cdot y = 0 \;/:6 \\ 6 \cdot y^2 - 36 \cdot x = 0 \;/:6 \end{matrix}\right\} \Rightarrow \left.\begin{matrix} x^2 - 6 \cdot y = 0 \\ y^2 - 6 \cdot x = 0 \end{matrix}\right\} \Rightarrow \left[\begin{matrix} \text{izrazimo y iz prve jednadžbe} \\ \text{i uvrstimo u drugu} \end{matrix}\right] \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \left.\begin{matrix} y = \dfrac{x^2}{6} \\ y^2 - 6 \cdot x = 0 \end{matrix}\right\} \Rightarrow \left(\frac{x^2}{6}\right)^2 - 6 \cdot x = 0 \Rightarrow \frac{x^4}{36} - 6 \cdot x = 0 \;/\cdot 36 \Rightarrow x^4 + 216 \cdot x = 0 \Rightarrow x \cdot \left(x^3 - 216\right) = 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \left.\begin{matrix} x = 0 \\ x^3 - 216 = 0 \end{matrix}\right\} \Rightarrow \left.\begin{matrix} x_1 = 0 \\ x^3 = 216 \;/\sqrt[3]{\;} \end{matrix}\right\} \Rightarrow \left.\begin{matrix} x_1 = 0 \\ x_2 = \sqrt[3]{216} \end{matrix}\right\} \Rightarrow \left.\begin{matrix} x_1 = 0 \\ x_2 = 6 \end{matrix}\right\}.$$

Uvrstimo li ove vrijednosti od x u bilo koju jednadžbu sustava dobije se:

$$\left.\begin{matrix} x_1 = 0 \\ y^2 - 6 \cdot x = 0 \end{matrix}\right\} \Rightarrow y^2 - 6 \cdot 0 = 0 \Rightarrow y^2 = 0 \Rightarrow y_1 = 0 \Rightarrow T_1(0,0) \text{ stacionarna točka},$$

$$\left.\begin{matrix} x_2 = 0 \\ y^2 - 6 \cdot x = 0 \end{matrix}\right\} \Rightarrow y^2 - 6 \cdot 6 = 0 \Rightarrow y^2 - 36 = 0 \Rightarrow y^2 = 36 \;/\sqrt{\;} \Rightarrow y_2 = 6 \Rightarrow T_2(6,6) \text{ stacionarna točka}.$$

Dakle su $T_1(0, 0)$ i $T_2(6, 6)$ stacionarne točke. Sada nađemo druge parcijalne derivacije funkcije $z = f(x, y)$ u stacionarnim točkama. Parcijalnim derivacijama drugog reda funkcije $z = f(x, y)$ nazivamo parcijalne derivacije njezinih parcijalnih derivacija prvog reda:

$$\frac{\partial^2 f(x, y)}{\partial x^2} = \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial f(x, y)}{\partial x}\right) = \frac{\partial}{\partial x}\left(6 \cdot x^2 - 36 \cdot y\right) = 12 \cdot x,$$

$$\frac{\partial^2 f(x, y)}{\partial x \partial y} = \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial f(x, y)}{\partial y}\right) = \frac{\partial}{\partial x}\left(6 \cdot y^2 - 36 \cdot x\right) = -36,$$

$$\frac{\partial^2 f(x, y)}{\partial y^2} = \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial f(x, y)}{\partial y}\right) = \frac{\partial}{\partial y}\left(6 \cdot y^2 - 36 \cdot x\right) = 12 \cdot y.$$

Za stacionarnu točku $T_1(0, 0)$ vrijedi:

$$A = \frac{\partial^2 f(0, 0)}{\partial x^2} = 12 \cdot 0 = 0 \quad , \quad B = \frac{\partial^2 f(0, 0)}{\partial x \partial y} = -36 \quad , \quad C = \frac{\partial^2 f(0, 0)}{\partial y^2} = 12 \cdot 0 = 0$$

te je

$$\Delta = A \cdot C - B^2 \Rightarrow \Delta = 0 \cdot 0 - (-36)^2 \Rightarrow \Delta = -1296 < 0.$$

Funkcija $z = f(x, y)$ u stacionarnoj točki $T_1(0, 0)$ nema ekstrema.
Za stacionarnu točku $T_2(6, 6)$ vrijedi:

$$A = \frac{\partial^2 f(6, 6)}{\partial x^2} = 12 \cdot 6 = 72 \quad , \quad B = \frac{\partial^2 f(6, 6)}{\partial x \partial y} = -36 \quad , \quad C = \frac{\partial^2 f(6, 6)}{\partial y^2} = 12 \cdot 6 = 72$$

te je

$$\Delta = A \cdot C - B^2 \Rightarrow \Delta = 72 \cdot 72 - (-36)^2 \Rightarrow \Delta = 3888 > 0.$$

Funkcija $z = f(x, y)$ u stacionarnoj točki $T_2(6, 6)$ ima ekstrem. Budući da je $A = 72 > 0$, riječ je o minimumu koji iznosi:

$$\left.\begin{array}{l} z = f(x\ y) = 2 \cdot x^3 + 2 \cdot y^3 - 36 \cdot x \cdot y + 100 \\ z_{\min} = f(6\ 6) = 2 \cdot 6^3 + 2 \cdot 6^3 - 36 \cdot 6 \cdot 6 + 100 \end{array}\right\} \Rightarrow z_{\min} = -332.$$

Vježba 065

Ispitaj da li funkcija $f(x, y) = 2 \cdot x^3 + 2 \cdot y^3 - 36 \cdot x \cdot y + 432$ ima ekstreme.

Rezultat: $z_{\min} = 0.$

Zadatak 066 (Kiki, studentica informatike)

Nađi derivaciju funkcije $y = x^{0.6} \cdot \sqrt[5]{x^3}.$

Rješenje 066

Ponovimo!

$$\sqrt[n]{a^m} = a^{\frac{m}{n}} \quad , \quad \frac{a}{n} + \frac{b}{n} = \frac{a+b}{n} \quad , \quad \left(x^n\right)' = n \cdot x^{n-1}.$$

Najprije funkciju pojednostavimo, a zatim deriviramo:

$$y = x^{0.6} \cdot \sqrt[5]{x^3} \Rightarrow y = x^{\frac{6}{10}} \cdot x^{\frac{3}{5}} \Rightarrow y = x^{\frac{3}{5}} \cdot x^{\frac{3}{5}} \Rightarrow y = x^{\frac{3}{5} + \frac{3}{5}} \Rightarrow y = x^{\frac{6}{5}}.$$

Derivacija iznosi:

$$y'=\left(x^{\frac{6}{5}}\right)' \Rightarrow y'=\frac{6}{5}\cdot x^{\frac{6}{5}-1} \Rightarrow y'=\frac{6}{5}\cdot x^{\frac{1}{5}} \Rightarrow y'=\frac{6}{5}\cdot\sqrt[5]{x}.$$

Vježba 066

Nađi derivaciju funkcije $y=\sqrt[3]{x^5}$.

Rezultat: $y'=\frac{5}{3}\cdot\sqrt[3]{x^2}$.

Zadatak 067 (Kiki, studentica informatike)

Nađi derivaciju funkcije $y=\sqrt[3]{x}+3\cdot x^2+x^{-0.3}+x^{0.3}$.

Rješenje 067

Ponovimo!

Derivacija umnoška konstantnog faktora i funkcije: (c · f(x)) ' = c · f ' (x)

$$\text{Derivacija zbroja}: (f+g)'=f'+g'.$$

$$\sqrt[n]{a^m}=a^{\frac{m}{n}} \quad , \quad \left(x^n\right)'=n\cdot x^{n-1} \quad , \quad a^{-n}=\frac{1}{a^n}.$$

$$y=\sqrt[3]{x}+3\cdot x^2+x^{-0.3}+x^{0.3} \Rightarrow y'=\left(\sqrt[3]{x}+3\cdot x^2+x^{-0.3}+x^{0.3}\right)' \Rightarrow$$

$$\Rightarrow y'=\left(\sqrt[3]{x}\right)'+\left(3\cdot x^2\right)'+\left(x^{-0.3}\right)'+\left(x^{0.3}\right)' \Rightarrow y'=\left(x^{\frac{1}{3}}\right)'+\left(3\cdot x^2\right)'+\left(x^{-0.3}\right)'+\left(x^{0.3}\right)' \Rightarrow$$

$$\Rightarrow y'=\frac{1}{3}\cdot x^{\frac{1}{3}-1}+3\cdot\left(x^2\right)'+(-0.3)\cdot x^{-0.3-1}+0.3\cdot x^{0.3-1} \Rightarrow$$

$$y'=\frac{1}{3}\cdot x^{-\frac{2}{3}}+3\cdot 2\cdot x^{2-1}-0.3\cdot x^{-1.3}+0.3\cdot x^{-0.7} \Rightarrow y'=\frac{1}{3}\cdot\frac{1}{x^{\frac{2}{3}}}+6\cdot x-0.3\cdot x^{-1.3}+0.3\cdot x^{-0.7} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow y'=\frac{1}{3}\cdot\frac{1}{\sqrt[3]{x^2}}+6\cdot x-0.3\cdot x^{-1.3}+0.3\cdot x^{-0.7}.$$

Vježba 067

Nađi derivaciju funkcije $y=\sqrt[3]{x^5}$.

Rezultat: $y'=\frac{5}{3}\cdot\sqrt[3]{x^2}$.

Zadatak 068 (Daniel, student)

Odredi prvu derivaciju funkcije $x^3+x^2\cdot y+y^2=0$.

Rješenje 068

Ponovimo!

Ako su u = f(x), v = g(x) funkcije koje imaju derivacije, onda je

$$(u+v)'=u'+v' \quad , \quad (u\cdot v)'=u'\cdot v+u\cdot v'.$$

Ako je zavisnost između x i derivabilne funkcije y zadana u implicitnom obliku F(x, y) = 0, onda je za računanje derivacije y ' u jednostavnijim slučajevima dovoljno:

- izračunati derivaciju po x lijeve strane jednadžbe F(x, y) = 0, smatrajući y funkcijom od x
- izjednačiti tu derivaciju s nulom, tj. staviti da je $\frac{d}{dx}F(x, y)=0$
- riješiti jednadžbu po y '.

Računamo derivaciju lijeve strane zadane jednadžbe i izjednačimo je s nulom:

$$x^3+x^2\cdot y+y^2=0 \Rightarrow \begin{bmatrix}\text{deriviramo lijevu}\\ \text{stranu jednadžbe}\end{bmatrix} \Rightarrow \left(x^3+x^2\cdot y+y^2\right)'=0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \left(x^3\right)'+\left(x^2\cdot y\right)'+\left(y^2\right)'=0 \Rightarrow 3\cdot x^2+\left(x^2\right)'\cdot y+x^2\cdot y'+2\cdot y\cdot y'=0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 3\cdot x^2+2\cdot x\cdot y+x^2\cdot y'+2\cdot y\cdot y'=0 \Rightarrow x^2\cdot y'+2\cdot y\cdot y'=-3\cdot x^2-2\cdot x\cdot y \Rightarrow$$

$$\Rightarrow y'\cdot\left(x^2+2\cdot y\right)=-3\cdot x^2-2\cdot x\cdot y \Rightarrow y'\cdot\left(x^2+2\cdot y\right)=-3\cdot x^2-2\cdot x\cdot y \;/\cdot\frac{1}{x^2+2\cdot y} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow y'=\frac{-3\cdot x^2-2\cdot x\cdot y}{x^2+2\cdot y} \Rightarrow y'=-\frac{x\cdot(3\cdot x+2\cdot y)}{x^2+2\cdot y}.$$

Vježba 068

Odredi prvu derivaciju funkcije $x^3+y^3-3\cdot x\cdot y=0.$

Rezultat: $y'=\frac{x^2-y}{x-y^2}.$

Zadatak 069 (Daniel, student)

Odredi prvu derivaciju funkcije $x+y=e^{x-y}.$

Rješenje 069

Ponovimo!

Ako su u = f(x), v = g(x) funkcije koje imaju derivacije, onda je

$$(u+v)'=u'+v' \quad , \quad (u-v)'=u'-v'.$$

Ako je zavisnost između x i derivabilne funkcije y zadana u implicitnom obliku F(x, y) = 0, onda je za računanje derivacije y ' u jednostavnijim slučajevima dovoljno:

- izračunati derivaciju po x lijeve strane jednadžbe F(x, y) = 0, smatrajući y funkcijom od x
- izjednačiti tu derivaciju s nulom, tj. staviti da je $\frac{d}{dx}F(x, y)=0$
- riješiti jednadžbu po y '.

Ako je y = f(u) i u = g(x), tj. y = f(g(x)), a funkcije y i u imaju derivacije, tada je

$$y'_x=y'_u\cdot u'_x \text{ ili } \frac{dy}{dx}=\frac{dy}{du}\cdot\frac{du}{dx}.$$

$$\text{Derivacija složene funkcije: } \frac{dy}{dx}=\frac{dy}{du}\cdot\frac{du}{dx} \text{ ili } y'(x)=y'(u)\cdot u'(x).$$

Složena funkcija derivira se tako da se najprije derivira po posrednoj funkciji kao argumentu i dobiveni rezultat pomnoži derivacijom posredne funkcije.

Računamo derivaciju lijeve strane zadane jednadžbe i izjednačimo je s nulom:

$$x+y=e^{x-y} \Rightarrow x+y-e^{x-y}=0 \Rightarrow \begin{bmatrix}\text{deriviramo lijevu}\\ \text{stranu jednadžbe}\end{bmatrix} \Rightarrow \left(x+y-e^{x-y}\right)'=0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow x'+y'-\left(e^{x-y}\right)'=0 \Rightarrow 1+y'-e^{x-y}\cdot(x-y)'=0 \Rightarrow 1+y'-e^{x-y}\cdot\left(x'-y'\right)=0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 1+y'-e^{x-y}\cdot\left(1-y'\right)=0 \Rightarrow 1+y'-e^{x\cdot y}+y'\cdot e^{x\cdot y}=0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow y'+y'\cdot e^{x\cdot y}=-1+e^{x\cdot y} \Rightarrow y'\cdot\left(1+e^{x\cdot y}\right)=-1+e^{x\cdot y} \;/\cdot\frac{1}{1+e^{x\cdot y}} \Rightarrow y'=\frac{-1+e^{x\cdot y}}{1+e^{x\cdot y}}.$$

Vježba 069

Odredi prvu derivaciju funkcije $x+y=e^{y}$.

Rezultat: $y'=\frac{1}{e^{y}-1}$ ili $y'=\frac{1}{x+y-1}$.

Zadatak 070 (Zola, studentica)

Odredi drugu derivaciju funkcije $f(x)=x^{2}\cdot\cos^{2}2x^{2}$.

Rješenje 070

Ponovimo!

$$\sin 2\alpha=2\cdot\cos\alpha\cdot\sin\alpha \quad , \quad a^{n}\cdot a^{m}=a^{n+m}.$$

Ako su u = f(x), v = g(x) funkcije koje imaju derivacije, onda je

$$(u-v)'=u'-v' \quad , \quad (u\cdot v)'=u'\cdot v+u\cdot v' \quad , \quad (c\cdot v)'=c\cdot v' \ , \ c \text{ je konstanta}.$$

Ako je y = f(u) i u = g(x), tj. y = f(g(x)), a funkcije y i u imaju derivacije, tada je

$$y_x'=y_u'\cdot u_x' \text{ ili } \frac{dy}{dx}=\frac{dy}{du}\cdot\frac{du}{dx}.$$

$$\text{Derivacija složene funkcije: } \frac{dy}{dx}=\frac{dy}{du}\cdot\frac{du}{dx} \text{ ili } y'(x)=y'(u)\cdot u'(x).$$

Složena funkcija derivira se tako da se najprije derivira po posrednoj funkciji kao argumentu i dobiveni rezultat pomnoži derivacijom posredne funkcije.

Tablično deriviranje	
Funkcija	**Derivacija**
x^{n}	$n\cdot x^{n-1}$
$\sin x$	$\cos x$
$\cos x$	$-\sin x$

Računamo prvu derivaciju:

$$f(x)=x^{2}\cdot\cos^{2}2x^{2} \Rightarrow f'(x)=\left(x^{2}\cdot\cos^{2}2x^{2}\right)'=\left[\text{derivacija produkta}\right]=$$

$$=\left(x^{2}\right)'\cdot\cos^{2}2x^{2}+x^{2}\cdot\left(\cos^{2}2x^{2}\right)'=2\cdot x\cdot\cos^{2}2x^{2}+x^{2}\cdot\begin{bmatrix}\text{derivacija složene}\\ \text{funkcije}\end{bmatrix}=$$

$$=2\cdot x\cdot\cos^{2}2x^{2}+x^{2}\cdot 2\cdot\cos 2x^{2}\cdot\left(\cos 2x^{2}\right)'=2\cdot x\cdot\cos^{2}2x^{2}+x^{2}\cdot 2\cdot\cos 2x^{2}\cdot\left(-\sin 2x^{2}\right)\cdot\left(2x^{2}\right)'=$$

$$=2\cdot x\cdot\cos^{2}2x^{2}+x^{2}\cdot 2\cdot\cos 2x^{2}\cdot\left(-\sin 2x^{2}\right)\cdot 4\cdot x=2\cdot x\cdot\cos^{2}2x^{2}-4\cdot x^{3}\cdot 2\cdot\cos 2x^{2}\cdot\sin 2x^{2}=$$

$$= 2\cdot x\cdot\cos^2 2x^2 + x^2\cdot 2\cdot\cos 2x^2\cdot\left(-\sin 2x^2\right)\cdot 4\cdot x = 2\cdot x\cdot\cos^2 2x^2 - 4\cdot x^3\cdot 2\cdot\cos 2x^2\cdot\sin 2x^2 =$$

$$= 2\cdot x\cdot\cos^2 2x^2 - 4\cdot x^3\cdot\sin 4x^2.$$

Prva derivacija zadane funkcije iznosi:

$$f'(x) == 2\cdot x\cdot\cos^2 2x^2 - 4\cdot x^3\cdot\sin 4x^2.$$

Sada računamo drugu derivaciju (derivaciju prve derivacije).

$$f''(x) = \left(f'(x)\right)' = \left(2\cdot x\cdot\cos^2 2x^2 - 4\cdot x^3\cdot\sin 4x^2\right)' =$$

$$= \left(2\cdot x\cdot\cos^2 2x^2\right)' - \left(4\cdot x^3\cdot\sin 4x^2\right)' = \begin{bmatrix}\text{derivacija}\\ \text{produkta}\end{bmatrix} - \begin{bmatrix}\text{derivacija}\\ \text{produkta}\end{bmatrix} =$$

$$= (2\cdot x)'\cdot\cos^2 2x^2 + 2\cdot x\cdot\left(\cos^2 2x^2\right)' - \left[\left(4\cdot x^3\right)'\cdot\sin 4x^2 + 4\cdot x^3\cdot\left(\sin 4x^2\right)'\right] =$$

$$= 2\cdot\cos^2 2x^2 + 2\cdot x\cdot 2\cdot\cos 2x^2\cdot\left(\cos 2x^2\right)' - \left[12\cdot x^2\cdot\sin 4x^2 + 4\cdot x^3\cdot\cos 4x^2\cdot\left(4x^2\right)'\right] =$$

$$= 2\cdot\cos^2 2x^2 + 2\cdot x\cdot 2\cdot\cos 2x^2\cdot\left(-\sin 2x^2\right)\cdot\left(2x^2\right)' - \left[12\cdot x^2\cdot\sin 4x^2 + 4\cdot x^3\cdot\cos 4x^2\cdot 8\cdot x\right] =$$

$$= 2\cdot\cos^2 2x^2 + 2\cdot x\cdot 2\cdot\cos 2x^2\cdot\left(-\sin 2x^2\right)\cdot 4\cdot x - \left[12\cdot x^2\cdot\sin 4x^2 + 4\cdot x^3\cdot\cos 4x^2\cdot 8\cdot x\right] =$$

$$= 2\cdot\cos^2 2x^2 - 8\cdot x^2\cdot 2\cdot\cos 2x^2\cdot\sin 2x^2 - \left[12\cdot x^2\cdot\sin 4x^2 + 32\cdot x^4\cdot\cos 4x^2\right] =$$

$$= 2\cdot\cos^2 2x^2 - 8\cdot x^2\cdot 2\cdot\cos 2x^2\cdot\sin 2x^2 - 12\cdot x^2\cdot\sin 4x^2 - 32\cdot x^4\cdot\cos 4x^2 =$$

$$= 2\cdot\cos^2 2x^2 - 8\cdot x^2\cdot 2\cdot\cos 2x^2\cdot\sin 2x^2 - 12\cdot x^2\cdot\sin 4x^2 - 32\cdot x^4\cdot\cos 4x^2 =$$

$$= 2\cdot\cos^2 2x^2 - 8\cdot x^2\cdot\sin 4x^2 - 12\cdot x^2\cdot\sin 4x^2 - 32\cdot x^4\cdot\cos 4x^2 =$$

$$= 2\cdot\cos^2 2x^2 - 20\cdot x^2\cdot\sin 4x^2 - 32\cdot x^4\cdot\cos 4x^2.$$

Vježba 070

Odredi drugu derivaciju funkcije $f(x) = x^2\cdot\cos x.$

Rezultat: $2\cdot\cos x - 4\cdot x\cdot\sin x - x^2\cdot\cos x.$

Zadatak 071 (Marija, gimnazija)

Izvedi formulu za derivaciju funkcije $f(x) = x^2.$

Rješenje 071

Ponovimo!

$$(a+b)^2 = a^2 + 2\cdot a\cdot b + b^2.$$

Ako je f realna funkcija definirana u točki x i u okolini točke x te ako postoji granična vrijednost (limes)

$$\lim_{\Delta x\to 0}\frac{f(x+\Delta x) - f(x)}{\Delta x} = f'(x),$$

onda se broj

$$f'(x)$$

zove derivacija funkcije f u točki x. Veličina Δx zove se prirast argumenta i ona pokazuje razliku (diferenciju) argumenta funkcije f, dok se Δy = f(x + Δx) – f(x) naziva prirast funkcije i vidi se da Δy pokazuje razliku (diferenciju) odgovarajućih funkcijskih vrijednosti. Izraz

$$\frac{\Delta y}{\Delta x}$$

naziva se kvocijentom razlika funkcije f u točki x pa se može pisati

$$\lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = f'(x).$$

$$\left.\begin{matrix} f(x) = x^2 \quad , \quad f(x+\Delta x) = (x+\Delta x)^2 \\ f'(x) = \lim\limits_{\Delta x \to 0} \dfrac{f(x+\Delta x) - f(x)}{\Delta x} \end{matrix}\right\} \Rightarrow f'(x) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{(x+\Delta x)^2 - x^2}{\Delta x} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow f'(x) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{x^2 + 2\cdot x\cdot \Delta x + (\Delta x)^2 - x^2}{\Delta x} \Rightarrow f'(x) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{x^2 + 2\cdot x\cdot \Delta x + (\Delta x)^2 - x^2}{\Delta x} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow f'(x) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{2\cdot x\cdot \Delta x + (\Delta x)^2}{\Delta x} \Rightarrow f'(x) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta x\cdot(2\cdot x + \Delta x)}{\Delta x} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow f'(x) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta x\cdot(2\cdot x + \Delta x)}{\Delta x} \Rightarrow f'(x) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{2\cdot x + \Delta x}{1} \Rightarrow f'(x) = \lim_{\Delta x \to 0} (2\cdot x + \Delta x) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow f'(x) = 2\cdot x + 0 \Rightarrow f'(x) = 2\cdot x.$$

Dobili smo da je

$$\left(x^2\right)' = 2\cdot x.$$

Vježba 071

Izvedi formulu za derivaciju funkcije $f(x) = x^3$.

Rezultat: $3\cdot x^2$.

Zadatak 072 (Marija, gimnazija)

Izvedi formulu za derivaciju funkcije $f(x) = a^x$.

Rješenje 072

Ponovimo!

$$a^n \cdot a^m = a^{n+m} \quad , \quad \lim_{x \to 0} \frac{a^x - 1}{x} = \ln a.$$

Ako postoji $\lim\limits_{x \to a} f(x)$, tada vrijedi poučak:

$$\lim_{x \to a} \left[c\cdot f(x)\right] = c\cdot \lim_{x \to a} f(x) \quad , \quad c \text{ je konstanta}.$$

Ako je f realna funkcija definirana u točki x i u okolini točke x te ako postoji granična vrijednost (limes)

$$\lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x+\Delta x) - f(x)}{\Delta x} = f'(x),$$

onda se broj

$$f'(x)$$

zove derivacija funkcije f u točki x. Veličina Δx zove se prirast argumenta i ona pokazuje razliku (diferenciju) argumenta funkcije f, dok se Δy = f(x + Δx) – f(x) naziva prirast funkcije i vidi se da Δy pokazuje razliku (diferenciju) odgovarajućih funkcijskih vrijednosti. Izraz

$$\frac{\Delta y}{\Delta x}$$

naziva se kvocijentom razlika funkcije f u točki x pa se može pisati

$$\lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = f'(x).$$

$$\left.\begin{array}{l} f(x) = a^{x} \quad , \quad f(x+\Delta x) = a^{x+\Delta x} \\ f'(x) = \lim\limits_{\Delta x \to 0} \dfrac{f(x+\Delta x) - f(x)}{\Delta x} \end{array}\right\} \Rightarrow f'(x) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{a^{x+\Delta x} - a^{x}}{\Delta x} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow f'(x) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{a^{x} \cdot a^{\Delta x} - a^{x}}{\Delta x} \Rightarrow f'(x) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{a^{x} \cdot \left(a^{\Delta x} - 1\right)}{\Delta x} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow f'(x) = a^{x} \cdot \lim_{\Delta x \to 0} \frac{a^{\Delta x} - 1}{\Delta x} \Rightarrow \left[\lim_{x \to 0} \frac{a^{x} - 1}{x} = \ln a \right] \Rightarrow f'(x) = a^{x} \cdot \ln a.$$

Dobili smo da je

$$\left(a^{x}\right)' = a^{x} \cdot \ln a.$$

Za a = e dobije se formula:

$$\left(e^{x}\right)' = e^{x} \cdot \ln e = \left[\ln e = 1 \right] = e^{x} \cdot 1 = e^{x}.$$

Prirodna eksponencijalna funkcija jednaka je svojoj derivaciji.

Vježba 072

Izvedi formulu za derivaciju funkcije $f(x) = 2^{x}$.

Rezultat: $2^{x} \cdot \ln 2.$

Zadatak 073 (Marija, gimnazija)

Izvedi formulu za derivaciju funkcije $f(x) = \sin x.$

Rješenje 073

Ponovimo!

$$\sin\alpha - \sin\beta = 2 \cdot \sin\frac{\alpha-\beta}{2} \cdot \cos\frac{\alpha+\beta}{2} \quad , \quad \lim_{x \to 0} \frac{\sin x}{x} = 1 \quad , \quad \lim_{x \to a} c = c \ , \ c \text{ je konstanta}.$$

$$\frac{a+b}{n} = \frac{a}{n} + \frac{b}{n}.$$

Ako postoje $\lim\limits_{x \to a} f(x)$ i $\lim\limits_{x \to a} g(x)$, tada vrijedi poučak:

$$\lim_{x \to a} \left[f(x) \cdot g(x) \right] = \lim_{x \to a} f(x) \cdot \lim_{x \to a} g(x).$$

Ako je funkcija y = f(x) neprekidna u točki a, onda je limes funkcije u točki a jednak funkciji limesa nezavisne varijable x u točki a:

$$\lim_{x\to a} f(x) = f\left(\lim_{x\to a} x\right).$$

Ako je f realna funkcija definirana u točki x i u okolini točke x te ako postoji granična vrijednost (limes)

$$\lim_{\Delta x\to 0}\frac{f(x+\Delta x)-f(x)}{\Delta x} = f'(x),$$

onda se broj

$$f'(x)$$

zove derivacija funkcije f u točki x. Veličina Δx zove se prirast argumenta i ona pokazuje razliku (diferenciju) argumenta funkcije f, dok se Δy = f(x + Δx) – f(x) naziva prirast funkcije i vidi se da Δy pokazuje razliku (diferenciju) odgovarajućih funkcijskih vrijednosti. Izraz

$$\frac{\Delta y}{\Delta x}$$

naziva se kvocijentom razlika funkcije f u točki x pa se može pisati

$$\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta y}{\Delta x} = f'(x).$$

$$\left.\begin{array}{l} f(x)=\sin x \;\;,\;\; f(x+\Delta x)=\sin(x+\Delta x) \\ f'(x)=\lim\limits_{\Delta x\to 0}\dfrac{f(x+\Delta x)-f(x)}{\Delta x}\end{array}\right\} \Rightarrow f'(x)=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\sin(x+\Delta x)-\sin x}{\Delta x} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow f'(x)=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{2\cdot\sin\frac{x+\Delta x-x}{2}\cdot\cos\frac{x+\Delta x+x}{2}}{\Delta x} \Rightarrow f'(x)=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{2\cdot\sin\frac{x+\Delta x-x}{2}\cdot\cos\frac{2\cdot x+\Delta x}{2}}{\Delta x} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow f'(x)=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{2\cdot\sin\frac{\Delta x}{2}\cdot\cos\frac{2\cdot x+\Delta x}{2}}{\Delta x} \Rightarrow f'(x)=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{2\cdot\sin\frac{\Delta x}{2}\cdot\cos\left(\frac{2\cdot x}{2}+\frac{\Delta x}{2}\right)}{\Delta x} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow f'(x)=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{2\cdot\sin\frac{\Delta x}{2}\cdot\cos\left(\frac{2\cdot x}{2}+\frac{\Delta x}{2}\right)}{\Delta x} \Rightarrow f'(x)=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{2\cdot\sin\frac{\Delta x}{2}\cdot\cos\left(x+\frac{\Delta x}{2}\right)}{\Delta x} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow f'(x)=\lim_{\Delta x\to 0}\left[\frac{\sin\frac{\Delta x}{2}}{\frac{\Delta x}{2}}\cdot\cos\left(x+\frac{\Delta x}{2}\right)\right] \Rightarrow \left[\begin{array}{l}\text{limes produkta jednak}\\ \text{je produktu limesa}\end{array}\right] \Rightarrow$$

$$\Rightarrow f'(x)=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\sin\frac{\Delta x}{2}}{\frac{\Delta x}{2}}\cdot\lim_{\Delta x\to 0}\cos\left(x+\frac{\Delta x}{2}\right) \Rightarrow f'(x)=\left[\begin{array}{l}\text{supstitucija (zamjena)}\\ t=\dfrac{\Delta x}{2}\\ \Delta x\to 0 \;\Rightarrow\; t\to 0\end{array}\right]\cdot\lim_{\Delta x\to 0}\cos\left(x+\frac{\Delta x}{2}\right) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow f'(x)=\lim_{t\to 0}\frac{\sin t}{t}\cdot\lim_{\Delta x\to 0}\cos\left(x+\frac{\Delta x}{2}\right) \Rightarrow f'(x)=1\cdot\lim_{\Delta x\to 0}\cos\left(x+\frac{\Delta x}{2}\right) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow f'(x)=\lim_{\Delta x\to 0}\cos\left(x+\frac{\Delta x}{2}\right) \Rightarrow \left[\begin{array}{l}\text{kosinus je neprekidna}\\ \text{funkcija}\end{array}\right] \Rightarrow f'(x)=\cos\left(\lim_{\Delta x\to 0}\left(x+\frac{\Delta x}{2}\right)\right) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow f'(x)=\cos\left(\lim_{\Delta x\to 0} x+\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta x}{2}\right) \Rightarrow f'(x)=\cos\left(x+\frac{0}{2}\right) \Rightarrow f'(x)=\cos(x+0) \Rightarrow f'(x)=\cos x.$$

Dobili smo da je

$$(\sin x)'=\cos x.$$

Vježba 073

Izvedi formulu za derivaciju funkcije $f(x)=\cos x.$

Rezultat: – sin x.

Zadatak 074 (Dijana, studentica)

Odredite ekstreme funkcije: $f(x) = x^4 - 4 \cdot x^3 + 6 \cdot x^2 - 4 \cdot x + 1$.

Rješenje 074

Ponovimo!

Određivanje maksimuma i minimuma funkcije y = f(x)

I. Nađe se prva derivacija funkcije

$$y'=f'(x)$$

II. Prva derivacija funkcije izjednači se s nulom

$$f'(x)=0$$

III. Riješi se dobivena jednadžba

$$f'(x)=0 \Rightarrow x_1, x_2, x_3, \ldots, x_i \text{ su rješenja jednadžbe,}$$

to su vrijednosti apscise za koje zadana funkcija može imati ekstrem, te se točke zovu stacionarne točke

IV. Nađe se druga derivacija funkcije tako da se derivira prva derivacija funkcije

$$y''=f''(x)=\left(f'(x)\right)'$$

V. Svaka stacionarna točka $x_1, x_2, x_3, \ldots, x_i$ uvrsti se u drugu derivaciju funkcije. Pri tome vrijedi:

- za $f''(x_i)>0$ u x_i je minimum
- za $f''(x_i)<0$ u x_i je maksimum.

Ako je $f''(x_i)=0$, dalje slijedi:

VI. Nađe se treća derivacija funkcije tako da se derivira druga derivacija funkcije

$$y'''=f'''(x)=\left(f''(x)\right)'$$

VII. Svaka stacionarna točka $x_1, x_2, x_3, \ldots, x_i$ uvrsti se u treću derivaciju funkcije. Pri tome vrijedi:

- za $f'''(x_i)\neq 0$ u x_i funkcija ima točku infleksije

Ako je $f'''(x_i)=0$, dalje slijedi:

VIII. Nađe se četvrta derivacija funkcije tako da se derivira treća derivacija funkcije

$$y^{(4)}=f^{(4)}(x)=\left(f'''(x)\right)'$$

IX. Svaka stacionarna točka $x_1, x_2, x_3, \ldots, x_i$ uvrsti se u četvrtu derivaciju funkcije. Pri tome vrijedi:

- za $f^{(4)}(x_i)>0$ u x_i je minimum
- za $f^{(4)}(x_i)<0$ u x_i je maksimum.

Ako je $f^{(4)}(x_i)=0$, slijede daljnja istraživanja.

Ako su u = f(x), v = g(x) funkcije koje imaju derivacije, onda je

$$(u+v)'=u'+v' \quad , \quad (u-v)'=u'-v' \quad , \quad (c\cdot v)'=c\cdot v' \text{ , } c \text{ je konstanta.}$$

Tablično deriviranje	
Funkcija	**Derivacija**
x^n	$n\cdot x^{n-1}$
c, konstanta	0

$$(a-b)^3=a^3-3\cdot a^2\cdot b+3\cdot a\cdot b^2-b^3.$$

Računamo prvu derivaciju zadane funkcije:

$$f(x)=x^4-4\cdot x^3+6\cdot x^2-4\cdot x+1 \Rightarrow f'(x)=\left(x^4-4\cdot x^3+6\cdot x^2-4\cdot x+1\right)' \Rightarrow$$

$$\Rightarrow f'(x)=\left(x^4\right)'-\left(4\cdot x^3\right)'+\left(6\cdot x^2\right)'-(4\cdot x)'+1' \Rightarrow f'(x)=\left(x^4\right)'-4\cdot\left(x^3\right)'+6\cdot\left(x^2\right)'-4\cdot x'+1' \Rightarrow$$

$$\Rightarrow f'(x)=4\cdot x^3-4\cdot 3\cdot x^2+6\cdot 2\cdot x-4\cdot 1+0 \Rightarrow f'(x)=4\cdot x^3-12\cdot x^2+12\cdot x-4.$$

Prvu derivaciju funkcije izjednačimo s nulom i riješimo dobivenu jednadžbu.

$$f'(x)=0 \Rightarrow 4\cdot x^3-12\cdot x^2+12\cdot x-4=0 \;/:4 \Rightarrow x^3-3\cdot x^2+3\cdot x-1=0 \Rightarrow (x-1)^3=0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow x-1=0 \Rightarrow x=1.$$

Jednadžba trećeg stupnja ima samo jednu realnu točku, tj. postoji jedna stacionarna točka zadane funkcije.
Tražimo drugu derivaciju tako da deriviramo prvu derivaciju zadane funkcije.

$$f''(x)=\left(f'(x)\right)'=\left(4\cdot x^3-12\cdot x^2+12\cdot x-4\right)'=\left(4\cdot x^3\right)'-\left(12\cdot x^2\right)'+(12\cdot x)'-4'=$$

$$=4\cdot\left(x^3\right)'-12\cdot\left(x^2\right)'+12\cdot x'-4'=4\cdot 3\cdot x^2-12\cdot 2\cdot x+12\cdot 1-0=12\cdot x^2-24\cdot x+12.$$

Za x = 1 druga derivacija iznosi nula pa ne možemo odgovoriti na pitanje ima li funkcija maksimum ili minimum.

$$\left.\begin{array}{l} f''(x)=12\cdot x^2-24\cdot x+12 \\ x=1 \end{array}\right\} \Rightarrow f''(1)=12\cdot 1^2-24\cdot 1+12 \Rightarrow f''(1)=12-24+12 \Rightarrow f''(1)=0.$$

Sada tražimo treću derivaciju tako da deriviramo drugu derivaciju funkcije.

$$f'''(x)=\left(f''(x)\right)'=\left(12\cdot x^2-24\cdot x+12\right)'=\left(12\cdot x^2\right)'-(24\cdot x)'+12'=12\cdot\left(x^2\right)'-24\cdot x'+12'=$$

$$=12\cdot 2\cdot x-24\cdot 1+0=24\cdot x-24.$$

Za x = 1 treća derivacija iznosi nula pa moramo naći četvrtu derivaciju tako da deriviramo treću derivaciju funkcije.

$$\left.\begin{array}{l} f'''(x)=24\cdot x-24 \\ x=1 \end{array}\right\} \Rightarrow f'''(1)=24\cdot 1-24 \Rightarrow f'''(1)=0.$$

$$f^{(4)}(x)=\left(f'''(x)\right)'=(24\cdot x-24)'=(24\cdot x)'-24'=24\cdot x'-24'=24\cdot 1-0=24.$$

Budući da je četvrta derivacija za x = 1 pozitivna

$$f^{(4)}(1)=24>0,$$

funkcija f(x) ima lokalni minimum koji iznosi nula:

$$\left.\begin{array}{l} f(x)=x^4-4\cdot x^3+6\cdot x^2-4\cdot x+1 \\ x=1 \end{array}\right\} \Rightarrow f(1)=1^4-4\cdot 1^3+6\cdot 1^2-4\cdot 1+1 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow f(1)=1-4+6-4+1 \Rightarrow f(1)=0.$$

Vježba 074

Odredite ekstreme funkcije: $f(x) = x^4 - 4 \cdot x^3 + 6 \cdot x^2 - 4 \cdot x + 2$.

Rezultat: Lokalni minimum u točki T(1, 1).

Zadatak 075 (Nikola, srednja škola)

Zadano je $f(x)=\ln(\cos x)$. Koliko iznosi $f'(4)$?

Rješenje 075

Ponovimo!

$$tg\ x=\frac{\sin x}{\cos x}.$$

Oznake za derivaciju su:

$$y'=\frac{dy}{dx}=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta y}{\Delta x}=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{f(x+\Delta x)-f(x)}{\Delta x}=f'(x).$$

Tablično deriviranje	
Funkcija	**Derivacija**
$\ln x$	$\frac{1}{x}$
$\cos x$	$-\sin x$

Derivacija složene funkcije (kompozicija funkcija)

Ako je y = f(u) i u = g(x), tj. y = f(g(x)), a funkcije y i u imaju derivacije, tada je

$$y'_x=y'_u\cdot u'_x \quad \text{ili} \quad \frac{dy}{dx}=\frac{dy}{du}\cdot\frac{du}{dx}.$$

Deriviramo zadanu složenu funkciju.

$$f'(x)=\left(\ln(\cos x)\right)' \Rightarrow f'(x)=\frac{1}{\cos x}\cdot(\cos x)' \Rightarrow f'(x)=\frac{1}{\cos x}\cdot(-\sin x) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow f'(x)=-\frac{\sin x}{\cos x} \Rightarrow f'(x)=-tg\ x.$$

Tada je:

$$f'(4)=-tg\ 4 \Rightarrow \left[\begin{array}{l}\text{računalo postavimo}\\ \text{u stanje RAD}\end{array}\right] \Rightarrow f'(4)=-1.15782.$$

Vježba 075

Zadano je $f(x)=\ln(\cos x)$. Koliko iznosi $f'(0)$?

Rezultat: 0.

Zadatak 076 (Nikola, srednja škola)

Koji je koeficijent nagiba tangente na funkciju $f(x)=x^2\cdot\ln x$ u točki $x_0 = 10$?

Rješenje 076

Ponovimo!

Oznake za derivaciju su:

$$y' = \frac{dy}{dx} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x+\Delta x) - f(x)}{\Delta x} = f'(x).$$

Tablično deriviranje	
Funkcija	**Derivacija**
$\ln x$	$\frac{1}{x}$
x^n	$n \cdot x^{n-1}$

Neka su f i g derivabilne funkcije na istom intervalu I. Funkcija f · g je derivabilna i vrijedi:

$$(f \cdot g)' = f' \cdot g + f \cdot g' \text{ (derivacija umnoška).}$$

Zakon distribucije množenja prema zbrajanju

$$a \cdot (b+c) = a \cdot b + a \cdot c \quad , \quad a \cdot b + a \cdot c = a \cdot (b+c).$$

Ako je pravac tangenta na graf funkcije f(x), onda je njegov koeficijent smjera jednak derivaciji funkcije u točki x_0:

$$k = f'(x_0).$$

Deriviramo zadanu funkciju.

$$f'(x) = \left(x^2 \cdot \ln x\right)' \Rightarrow f'(x) = \left(x^2\right)' \cdot \ln x + x^2 \cdot (\ln x)' \Rightarrow f'(x) = 2 \cdot x \cdot \ln x + x^2 \cdot \frac{1}{x} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow f'(x) = 2 \cdot x \cdot \ln x + x^2 \cdot \frac{1}{x} \Rightarrow f'(x) = 2 \cdot x \cdot \ln x + x \Rightarrow f'(x) = x \cdot (2 \cdot \ln x + 1).$$

Koeficijent nagiba tangente iznosi:

$$\left.\begin{array}{l} f'(x) = x \cdot (2 \cdot \ln x + 1) \\ k = f'(x_0) \\ x_0 = 10 \end{array}\right\} \Rightarrow \left.\begin{array}{l} k = f'(x_0) = x_0 \cdot (2 \cdot \ln x_0 + 1) \\ x_0 = 10 \end{array}\right\} \Rightarrow k = f'(10) = 10 \cdot (2 \cdot \ln 10 + 1) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow k = 56.05.$$

Vježba 076

Koji je koeficijent nagiba tangente na funkciju $f(x) = x^2$ u točki $x_0 = 10$?

Rezultat: 20.

Zadatak 077 (Dado, gimnazija)

Gibanje tijela, mase 3 kg, opisano je kao $s(t) = t^2 + t + 1 \quad ([s] = m \ , \ [t] = s)$. Odredite kinetičku energiju tijela u petoj sekundi nakon početka gibanja.

Rješenje 077

Ponovimo!

Oznake za derivaciju su:

$$y' = \frac{dy}{dx} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x+\Delta x) - f(x)}{\Delta x} = f'(x).$$

Tablično deriviranje	
Funkcija	**Derivacija**
c	0
x	1
x^n	$n \cdot x^{n-1}$

Neka su f i g derivabilne funkcije na istom intervalu I. Tada je:

$$(f + g)' = f' + g' \text{ (derivacija zbroja)}.$$

Trenutnu brzinu definiramo kao derivaciju puta po vremenu.

$$v(t) = s'(t).$$

Tijelo mase m i brzine v ima kinetičku energiju

$$E_k = \frac{1}{2} \cdot m \cdot v^2.$$

Trenutna brzina tijela opisana je kao

$$v(t) = s'(t) = \left(t^2 + t + 1\right)' = \left(t^2\right)' + t' + 1' = 2 \cdot t + 1 + 0 = 2 \cdot t + 1.$$

Kinetička energija tijela mase m u petoj sekundi iznosi:

$$\left.\begin{array}{l} m = 3\ kg \ ,\ v = 2 \cdot t + 1 \ ,\ t = 5\ s \\ E_k = \frac{1}{2} \cdot m \cdot v^2 \end{array}\right\} \Rightarrow E_k = \frac{1}{2} \cdot m \cdot (2 \cdot t + 1)^2 = \frac{1}{2} \cdot 3 \cdot (2 \cdot 5 + 1)^2 = \frac{363}{2}\ J = 181.5\ J.$$

Vježba 077

Gibanje tijela, mase 6 kg, opisano je kao $s(t) = t^2 + t + 2$ $([s] = m\ ,\ [t] = s)$. Odredite kinetičku energiju tijela u petoj sekundi nakon početka gibanja.

Rezultat: 181.5 J.

Zadatak 078 (Pčelica, srednja škola)

Kompanija je ustanovila da je prihod od prodaje x komada proizvoda dan kao

$$P(x) = 220 \cdot x - 4 \cdot x^2,$$

a da su troškovi proizvodnje opisani s

$$T(x) = 900 + 60 \cdot x.$$

Za koji je x marginalni prihod jednak marginalnim troškovima?

Rješenje 078

Ponovimo!

Oznake za derivaciju su:

$$y' = \frac{dy}{dx} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x + \Delta x) - f(x)}{\Delta x} = f'(x).$$

Tablično deriviranje	
Funkcija	**Derivacija**
c	0
x	1
x^n	$n \cdot x^{n-1}$

Ako je c konstanta, a u = f(x), v = g(x) su funkcije koje imaju derivacije, onda je

$$\left(c \cdot f(x)\right)' = c \cdot \left(f(x)\right)' \quad , \quad \left(f(x) \pm g(x)\right)' = \left(f(x)\right)' \pm \left(g(x)\right)'.$$

Marginalni prihod definira se kao derivacija funkcije prihoda:

$$P'(t).$$

Marginalni troškovi definiraju se kao derivacija funkcije troškova:

$$T'(t).$$

Budući da iz uvjeta zadatka marginalni prihodi moraju biti jednaki marginalnim troškovima, slijedi:

$$P'(t)=T'(t) \Rightarrow \left(220\cdot x-4\cdot x^2\right)'=(900+60\cdot x)' \Rightarrow (220\cdot x)'-\left(4\cdot x^2\right)'=900'+(60\cdot x)' \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 220\cdot x'-4\cdot\left(x^2\right)'=900'+60\cdot x' \Rightarrow 220\cdot 1-4\cdot 2\cdot x=0+60\cdot 1 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 220-8\cdot x=60 \Rightarrow -8\cdot x=60-220 \Rightarrow -8\cdot x=-160 \Rightarrow -8\cdot x=-160 \;/:(-8) \Rightarrow x=20.$$

Kod prodaje 20 komada proizvoda marginalni prihod jednak je marginalnim troškovima.

Vježba 078

Kompanija je ustanovila da je prihod od prodaje x komada proizvoda dan kao

$$P(x)=220\cdot x-4\cdot x^2,$$

a da su troškovi proizvodnje opisani s

$$T(x)=700+60\cdot x.$$

Za koji je x marginalni prihod jednak marginalnim troškovima?

Rezultat: 20.

Zadatak 079 (Maturant, gimnazija)

Zadana je funkcija $f(x) = x^3 - 3\cdot x^2$. Odredite jednadžbu tangente na graf funkcije u točki $T(-1, y)$.

Rješenje 079

Ponovimo!

Oznake za derivaciju su:

$$y'=\frac{dy}{dx}=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta y}{\Delta x}=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{f(x+\Delta x)-f(x)}{\Delta x}=f'(x).$$

Tablično deriviranje	
Funkcija	**Derivacija**
x^n	$n\cdot x^{n-1}$

Ako je c konstanta, a u = f(x), v = g(x) su funkcije koje imaju derivacije, onda je

$$(c\cdot f(x))'=c\cdot(f(x))' \quad , \quad (f(x)\pm g(x))'=(f(x))'\pm(g(x))'.$$

Na graf funkcije f(x) u točki $T(x_0, y_0)$ jednadžba:

- tangente glasi $y-y_0=f'(x_0)\cdot(x-x_0)$
- normale glasi $y-y_0=-\frac{1}{f'(x_0)}\cdot(x-x_0).$

Ako je $f'(x_0) = 0$, onda je jednadžba:

- tangente $y-y_0=0 \Rightarrow y=y_0$
- normale $x-x_0=0 \Rightarrow x=x_0.$

Zakon distribucije množenja prema zbrajanju.

$$a\cdot(b+c)=a\cdot b+a\cdot c \quad , \quad a\cdot b+a\cdot c=a\cdot(b+c).$$

Najprije izračunamo ordinatu točke T koja pripada grafu zadane funkcije. Vrijedi:

$$\left.\begin{array}{l} T(x,\ y)=T(-1,\ y) \\ y=x^3-3\cdot x^2 \end{array}\right\} \Rightarrow y=(-1)^3-3\cdot(-1)^2 \Rightarrow y=-1-3\cdot 1 \Rightarrow y=-1-3 \Rightarrow y=-4.$$

Koordinate točke su

$$T(x,\ y)=T(-1,\ -4).$$

Derivacija funkcije je:

$$f(x)=x^3-3\cdot x^2\ \Rightarrow\ f'(x)=\left(x^3-3\cdot x^2\right)'\ \Rightarrow\ f'(x)=\left(x^3\right)'-\left(3\cdot x^2\right)'\ \Rightarrow$$

$$\Rightarrow\ f'(x)=3\cdot x^2-3\cdot\left(x^2\right)'\ \Rightarrow\ f'(x)=3\cdot x^2-3\cdot 2\cdot x\ \Rightarrow\ f'(x)=3\cdot x^2-6\cdot x.$$

Zato je

$$\left.\begin{array}{l} f'(x)=3\cdot x^2-6\cdot x \\ x=-1 \end{array}\right\}\ \Rightarrow\ f'(-1)=3\cdot(-1)^2-6\cdot(-1)\ \Rightarrow\ f'(-1)=3\cdot 1+6\ \Rightarrow\ f'(-1)=9.$$

Jednadžba tangente glasi:

$$\left.\begin{array}{l} T\left(x_0,\ y_0\right)=T(-1,\ -4) \\ f'\left(x_0\right)=f'(-1)=9 \\ y-y_0=f'\left(x_0\right)\cdot\left(x-x_0\right) \end{array}\right\}\ \Rightarrow\ y-(-4)=9\cdot(x-(-1))\ \Rightarrow\ y+4=9\cdot(x+1)\ \Rightarrow\ y+4=9\cdot x+9\ \Rightarrow$$

$$\Rightarrow\ y=9\cdot x+9-4\ \Rightarrow\ y=9\cdot x+5.$$

Vježba 079

Zadana je funkcija f(x) = x^2 + 2 · x. Odredite jednadžbu tangente na graf funkcije u točki T(1, y).

Rezultat: y = 4 · x – 1.

Zadatak 080 (Mala, gimnazija)

Za koji realan broj x funkcija $h(x)=\frac{2}{3}\cdot x^3+\frac{9}{2}\cdot x^2-5\cdot x-\frac{5}{6}$ postiže lokalni maksimum?

Rješenje 080

Ponovimo!

Oznake za derivaciju su:

$$y'=\frac{dy}{dx}=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta y}{\Delta x}=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{f(x+\Delta x)-f(x)}{\Delta x}=f'(x).$$

Tablično deriviranje	
Funkcija	**Derivacija**
x^n	$n\cdot x^{n-1}$
x	1
c, konstanta	0

Ako je c konstanta, a u = f(x), v = g(x) su funkcije koje imaju derivacije, onda je

$$\left(c\cdot f(x)\right)'=c\cdot\left(f(x)\right)'\quad,\quad\left(f(x)\pm g(x)\right)'=\left(f(x)\right)'\pm\left(g(x)\right)'.$$

Određivanje maksimuma i minimuma funkcije y = f(x)

I. Nađe se prva derivacija funkcije

$$y'=f'(x)$$

II. Prva derivacija funkcije izjednači se s nulom

$$f'(x)=0$$

III. Riješi se dobivena jednadžba

$$f'(x)=0 \Rightarrow x_1, x_2, x_3, \dots, x_i \text{ su rješenja jednadžbe,}$$

to su vrijednosti apscise za koje zadana funkcija može imati ekstrem, te se točke zovu stacionarne točke

IV. Nađe se druga derivacija funkcije tako da se derivira prva derivacija funkcije

$$y''=f''(x)=\left(f'(x)\right)'$$

V. Svaka stacionarna točka $x_1, x_2, x_3, \dots, x_i$ uvrsti se u drugu derivaciju funkcije. Pri tome vrijedi:

- za $f''(x_i)>0$ u x_i je minimum
- za $f''(x_i)<0$ u x_i je maksimum.

Ako je $f''(x_i)=0$, dalje slijedi:

VI. Nađe se treća derivacija funkcije tako da se derivira druga derivacija funkcije

$$y'''=f'''(x)=\left(f''(x)\right)'$$

VII. Svaka stacionarna točka $x_1, x_2, x_3, \dots, x_i$ uvrsti se u treću derivaciju funkcije. Pri tome vrijedi:

- za $f'''(x_i)\neq 0$ u x_i funkcija ima točku infleksije

Ako je $f'''(x_i)=0$, dalje slijedi:

VIII. Nađe se četvrta derivacija funkcije tako da se derivira treća derivacija funkcije

$$y^{(4)}=f^{(4)}(x)=\left(f'''(x)\right)'$$

IX. Svaka stacionarna točka $x_1, x_2, x_3, \dots, x_i$ uvrsti se u četvrtu derivaciju funkcije. Pri tome vrijedi:

- za $f^{(4)}(x_i)>0$ u x_i je minimum
- za $f^{(4)}(x_i)<0$ u x_i je maksimum.

Ako je $f^{(4)}(x_i)=0$, slijede daljnja istraživanja.

Računamo prvu derivaciju zadane funkcije:

$$h(x)=\frac{2}{3}\cdot x^3+\frac{9}{2}\cdot x^2-5\cdot x-\frac{5}{6} \Rightarrow h'(x)=\left(\frac{2}{3}\cdot x^3+\frac{9}{2}\cdot x^2-5\cdot x-\frac{5}{6}\right)' \Rightarrow$$

$$\Rightarrow h'(x)=\left(\frac{2}{3}\cdot x^3\right)'+\left(\frac{9}{2}\cdot x^2\right)'-(5\cdot x)'-\left(\frac{5}{6}\right)' \Rightarrow h'(x)=\frac{2}{3}\cdot\left(x^3\right)'+\frac{9}{2}\cdot\left(x^2\right)'-5\cdot x'-\left(\frac{5}{6}\right)' \Rightarrow$$

$$\Rightarrow h'(x)=\frac{2}{3}\cdot 3\cdot x^2+\frac{9}{2}\cdot 2\cdot x-5\cdot 1-0 \Rightarrow h'(x)=\frac{2}{3}\cdot 3\cdot x^2+\frac{9}{2}\cdot 2\cdot x-5\cdot 1-0 \Rightarrow h'(x)=2\cdot x^2+9\cdot x-5.$$

Prvu derivaciju funkcije izjednačimo s nulom i riješimo dobivenu jednadžbu.

$$h'(x)=0 \Rightarrow 2\cdot x^2+9\cdot x-5=0 \Rightarrow \left.\begin{array}{l} 2\cdot x^2+9\cdot x-5=0 \\ a=2\ ,\ b=9\ ,\ c=-5 \end{array}\right\} \Rightarrow \left.\begin{array}{l} a=2\ ,\ b=9\ ,\ c=-5 \\ x_{1,2}=\dfrac{-b\pm\sqrt{b^2-4\cdot a\cdot c}}{2\cdot a} \end{array}\right\} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow x_{1,2}=\frac{-9\pm\sqrt{9^2-4\cdot 2\cdot(-5)}}{2\cdot 2} \Rightarrow x_{1,2}=\frac{-9\pm\sqrt{81+40}}{4} \Rightarrow x_{1,2}=\frac{-9\pm\sqrt{121}}{4} \Rightarrow x_{1,2}=\frac{-9\pm 11}{4} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \left.\begin{array}{l} x_1 = \frac{-9+11}{4} \\ x_2 = \frac{-9-11}{4} \end{array}\right\} \Rightarrow \left.\begin{array}{l} x_1 = \frac{2}{4} \\ x_2 = -\frac{20}{4} \end{array}\right\} \Rightarrow \left.\begin{array}{l} x_1 = \frac{1}{2} \\ x_2 = -5 \end{array}\right\} - \text{stacionarne točke.}$$

Tražimo drugu derivaciju zadane funkcije tako da deriviramo prvu derivaciju funkcije. Druga derivacija funkcije potrebna je kako bismo odredili ima li funkcija u stacionarnim točkama maksimum ili minimum.

$$h''(x) = \left(h'(x)\right)' \Rightarrow h''(x) = \left(2 \cdot x^2 + 9 \cdot x - 5\right)' \Rightarrow h''(x) = \left(2 \cdot x^2\right)' + (9 \cdot x)' - 5' \Rightarrow$$

$$\Rightarrow h''(x) = 2 \cdot \left(x^2\right)' + 9 \cdot x' - 5' \Rightarrow h''(x) = 2 \cdot 2 \cdot x + 9 \cdot 1 - 0 \Rightarrow h''(x) = 4 \cdot x + 9.$$

Određujemo vrstu ekstrema funkcije.

$h''(x) = 4 \cdot x + 9$	
$x = \frac{1}{2}$	$x = -5$
$h''\left(\frac{1}{2}\right) = 4 \cdot \frac{1}{2} + 9$ $h''\left(\frac{1}{2}\right) = 4 \cdot \frac{1}{2} + 9$ $h''\left(\frac{1}{2}\right) = 2 + 9$ $h''\left(\frac{1}{2}\right) = 11 > 0$ Funkcija u toj točki ima minimum.	$h''(-5) = 4 \cdot (-5) + 9$ $h''(-5) = -20 + 9$ $h''(-5) = -11 < 0$ Funkcija u toj točki ima maksimum.

Za realan broj x = – 5 funkcija $h(x) = \frac{2}{3} \cdot x^3 + \frac{9}{2} \cdot x^2 - 5 \cdot x - \frac{5}{6}$ postiže lokalni maksimum.

Vježba 080

Za koji realan broj x funkcija $h(x) = \frac{2}{3} \cdot x^3 + \frac{9}{2} \cdot x^2 - 5 \cdot x + \frac{5}{6}$ postiže lokalni minimum?

Rezultat: $x = \frac{1}{2}.$