Zadatak 041 (Ivana, gimnazija)

Odredite drugu derivaciju funkcije $f(x) = \arccos x.$

Rješenje 041

Ponovimo!

$$\sqrt[n]{a^m} = a^{\frac{m}{n}} \quad , \quad a^{-n} = \frac{1}{a^n} \quad , \quad f''(x) = \left(f'(x)\right)' \quad , \quad \left(x^n\right)' = n \cdot x^{n-1}.$$

Prva derivacija:

$$f'(x) = (\arccos x)' = -\frac{1}{\sqrt{1-x^2}} = -\left(1-x^2\right)^{-\frac{1}{2}}.$$

Druga derivacija:

$$f''(x) = \left(f'(x)\right)' = \left(-\left(1-x^2\right)^{-\frac{1}{2}}\right)' = -\left(-\frac{1}{2}\right) \cdot \left(1-x^2\right)^{-\frac{3}{2}} \cdot \left(1-x^2\right)' = -\left(-\frac{1}{2}\right) \cdot \left(1-x^2\right)^{-\frac{3}{2}} \cdot (-2 \cdot x) =$$

$$= -\frac{x}{\left(1-x^2\right)^{\frac{3}{2}}} = -\frac{x}{\sqrt{\left(1-x^2\right)^3}} = -\frac{x}{\sqrt{\left(1-x^2\right)^2 \cdot \left(1-x^2\right)}} = -\frac{x}{\left(1-x^2\right) \cdot \sqrt{1-x^2}}.$$

Vježba 041

Odredite drugu derivaciju funkcije $f(x) = x^3 + x^2 + x.$

Rezultat: $6 \cdot x + 2.$

Zadatak 042 (Sanja, informatika)

Odredite treću derivaciju funkcije $f(x) = \arccos \sqrt{x}.$

Rješenje 042

Ponovimo!

$$\sqrt[n]{a^m} = a^{\frac{m}{n}} \quad , \quad a^{-n} = \frac{1}{a^n} \quad , \quad \sqrt{a} \cdot \sqrt{b} = \sqrt{a \cdot b}.$$

Derivacija umnoška: $(f \cdot g)' = f' \cdot g + f \cdot g'.$

Prva derivacija:

$$f'(x) = \left(\arccos \sqrt{x}\right)' = -\frac{1}{\sqrt{1-\left(\sqrt{x}\right)^2}} \cdot \frac{1}{2 \cdot \sqrt{x}} = -\frac{1}{2 \cdot \sqrt{x} \cdot \sqrt{1-x}} = -\frac{1}{2 \cdot \sqrt{x-x^2}} = -\frac{1}{2} \cdot \left(x-x^2\right)^{-\frac{1}{2}}.$$

Druga derivacija:

$$f''(x) = \left(f'(x)\right)' = \left(-\frac{1}{2} \cdot \left(x-x^2\right)^{-\frac{1}{2}}\right)' = -\frac{1}{2} \cdot \left(-\frac{1}{2}\right) \cdot \left(x-x^2\right)^{-\frac{3}{2}} \cdot (1-2 \cdot x) = \frac{1}{4} \cdot (1-2 \cdot x) \cdot \left(x-x^2\right)^{-\frac{3}{2}}.$$

Treća derivacija:

$$f'''(x) = \left(f''(x)\right)' = \left(\frac{1}{4} \cdot (1-2 \cdot x) \cdot \left(x-x^2\right)^{-\frac{3}{2}}\right)' = \frac{1}{4} \cdot (1-2 \cdot x)' \cdot \left(x-x^2\right)^{-\frac{3}{2}} + \frac{1}{4} \cdot (1-2 \cdot x) \cdot \left(\left(x-x^2\right)^{-\frac{3}{2}}\right)' =$$

$$= \frac{1}{4} \cdot (-2) \cdot \left(x-x^2\right)^{-\frac{3}{2}} + \frac{1}{4} \cdot (1-2 \cdot x) \cdot \left(-\frac{3}{2}\right) \cdot \left(x-x^2\right)^{-\frac{5}{2}} \cdot (1-2 \cdot x) =$$

$$=-\frac{1}{2}\cdot\left(x-x^2\right)^{-\frac{3}{2}}-\frac{3}{8}\cdot(1-2\cdot x)^2\cdot\left(x-x^2\right)^{-\frac{5}{2}}=-\left(x-x^2\right)^{-\frac{5}{2}}\cdot\left[\frac{1}{2}\cdot\left(x-x^2\right)+\frac{3}{8}\cdot(1-2\cdot x)^2\right]=$$

$$=-\frac{1}{\left(x-x^2\right)^{\frac{5}{2}}}\cdot\left[\frac{1}{2}\cdot\left(x-x^2\right)+\frac{3}{8}\cdot(1-2\cdot x)^2\right]=-\frac{1}{\sqrt{\left(x-x^2\right)^5}}\cdot\frac{4\cdot\left(x-x^2\right)+3\cdot(1-2\cdot x)^2}{8}=$$

$$=-\frac{1}{\sqrt{\left(x-x^2\right)^5}}\cdot\frac{4\cdot x-4\cdot x^2+3\cdot\left(1-4\cdot x+4\cdot x^2\right)}{8}=-\frac{1}{\sqrt{\left(x-x^2\right)^4\cdot\left(x-x^2\right)}}\cdot\frac{4\cdot x-4\cdot x^2+3-12\cdot x+12\cdot x^2}{8}=$$

$$=-\frac{1}{\left(x-x^2\right)^2\cdot\sqrt{x-x^2}}\cdot\frac{8\cdot x^2-8\cdot x+3}{8}=-\frac{8\cdot x^2-8\cdot x+3}{8\cdot\left(x-x^2\right)^2\cdot\sqrt{x-x^2}}.$$

Vježba 042

Odredite treću derivaciju funkcije $f(x)=x^3+x^2+x$.

Rezultat: 6.

Zadatak 043 (Sanja, informatika)

Odredite drugu derivaciju funkcije $f(x)=\left(1+\frac{1}{x}\right)^x$.

Rješenje 043

Ponovimo!

Neka su f i g derivabilne funkcije na istom intervalu I. Funkcija f · g je derivabilna i vrijedi:

$(f\cdot g)'=f'\cdot g+f\cdot g'$ (derivacija umnoška).

Derivacija kvocijenta: $\left(\frac{f(x)}{g(x)}\right)'=\frac{f'(x)\cdot g(x)-f(x)\cdot g'(x)}{\left(g(x)\right)^2},\ g(x)\neq 0$

Logaritamskom derivacijom funkcije y = f(x) nazivamo derivaciju logaritma te funkcije, tj.

$(\ln y)'=\frac{y'}{y}$ jer je y funkcija od x.

Derivacija zbroja i razlike: $(f\pm g)'=f'\pm g'$. $\quad \ln a^n=n\cdot\ln a$, $(a-b)^2=a^2-2\cdot a\cdot b+b^2$.

Prva derivacija:

$$y=\left(1+\frac{1}{x}\right)^x\Rightarrow y=\left(\frac{x+1}{x}\right)^x\Rightarrow y=\left(\frac{x+1}{x}\right)^x\ /\ln\Rightarrow \ln y=x\cdot\ln\frac{x+1}{x}\ /'\Rightarrow(\ln y)'=\left(x\cdot\ln\frac{x+1}{x}\right)'\Rightarrow$$

$$\Rightarrow\frac{y'}{y}=x'\cdot\ln\frac{x+1}{x}+x\cdot\left(\ln\frac{x+1}{x}\right)'\Rightarrow\frac{y'}{y}=1\cdot\ln\frac{x+1}{x}+x\cdot\frac{x}{x+1}\cdot\frac{(x+1)'\cdot x-(x+1)\cdot x'}{x^2}\Rightarrow$$

$$\Rightarrow\frac{y'}{y}=\ln\frac{x+1}{x}+\frac{x^2}{x+1}\cdot\frac{1\cdot x-(x+1)\cdot 1}{x^2}\Rightarrow\frac{y'}{y}=\ln\frac{x+1}{x}+\frac{x^2}{x+1}\cdot\frac{x-x-1}{x^2}\Rightarrow\frac{y'}{y}=\ln\frac{x+1}{x}-\frac{1}{x+1}\ /\cdot y\Rightarrow$$

$$\Rightarrow y'=y\cdot\left[\ln\frac{x+1}{x}-\frac{1}{x+1}\right]\Rightarrow y'=\left(\frac{x+1}{x}\right)^x\cdot\left[\ln\frac{x+1}{x}-\frac{1}{x+1}\right].$$

Druga derivacija:

$$y''=\left(y'\right)'=\left(\left(\frac{x+1}{x}\right)^{x}\cdot\left[\ln\frac{x+1}{x}-\frac{1}{x+1}\right]\right)'=\left(\left(\frac{x+1}{x}\right)^{x}\right)'\cdot\left[\ln\frac{x+1}{x}-\frac{1}{x+1}\right]+\left(\frac{x+1}{x}\right)^{x}\cdot\left(\ln\frac{x+1}{x}-\frac{1}{x+1}\right)'=$$

$$=\left(\frac{x+1}{x}\right)^{x}\cdot\left[\ln\frac{x+1}{x}-\frac{1}{x+1}\right]\cdot\left[\ln\frac{x+1}{x}-\frac{1}{x+1}\right]+\left(\frac{x+1}{x}\right)^{x}\cdot\left(\ln\frac{x+1}{x}-\frac{1}{x+1}\right)'=$$

$$=\left(\frac{x+1}{x}\right)^{x}\cdot\left[\ln\frac{x+1}{x}-\frac{1}{x+1}\right]^{2}+\left(\frac{x+1}{x}\right)^{x}\cdot\left(\frac{x}{x+1}\cdot\frac{(x+1)'\cdot x-(x+1)\cdot x'}{x^{2}}+\frac{1}{(x+1)^{2}}\right)=$$

$$=\left(\frac{x+1}{x}\right)^{x}\cdot\left[\ln\frac{x+1}{x}-\frac{1}{x+1}\right]^{2}+\left(\frac{x+1}{x}\right)^{x}\cdot\left(\frac{x}{x+1}\cdot\frac{1\cdot x-(x+1)\cdot 1}{x^{2}}+\frac{1}{(x+1)^{2}}\right)=$$

$$=\left(\frac{x+1}{x}\right)^{x}\cdot\left[\ln\frac{x+1}{x}-\frac{1}{x+1}\right]^{2}+\left(\frac{x+1}{x}\right)^{x}\cdot\left(\frac{x}{x+1}\cdot\frac{x-x-1}{x^{2}}+\frac{1}{(x+1)^{2}}\right)=$$

$$=\left(\frac{x+1}{x}\right)^{x}\cdot\left[\ln\frac{x+1}{x}-\frac{1}{x+1}\right]^{2}+\left(\frac{x+1}{x}\right)^{x}\cdot\left(\frac{x}{x+1}\cdot\frac{-1}{x^{2}}+\frac{1}{(x+1)^{2}}\right)=$$

$$=\left(\frac{x+1}{x}\right)^{x}\cdot\left[\ln\frac{x+1}{x}-\frac{1}{x+1}\right]^{2}+\left(\frac{x+1}{x}\right)^{x}\cdot\left(-\frac{1}{x\cdot(x+1)}+\frac{1}{(x+1)^{2}}\right)=$$

$$=\left(\frac{x+1}{x}\right)^{x}\cdot\left[\left[\ln\frac{x+1}{x}-\frac{1}{x+1}\right]^{2}-\frac{1}{x\cdot(x+1)}+\frac{1}{(x+1)^{2}}\right]=$$

$$=\left(\frac{x+1}{x}\right)^{x}\cdot\left[\ln^{2}\frac{x+1}{x}-2\cdot\ln\frac{x+1}{x}\cdot\frac{1}{x+1}+\frac{1}{(x+1)^{2}}-\frac{1}{x\cdot(x+1)}+\frac{1}{(x+1)^{2}}\right]=$$

$$=\left(\frac{x+1}{x}\right)^{x}\cdot\left[\ln^{2}\frac{x+1}{x}-\frac{2}{x+1}\cdot\ln\frac{x+1}{x}+\frac{x-(x+1)+x}{x\cdot(x+1)^{2}}\right]=\left(\frac{x+1}{x}\right)^{x}\cdot\left[\ln^{2}\frac{x+1}{x}-\frac{2}{x+1}\cdot\ln\frac{x+1}{x}+\frac{x-x-1+x}{x\cdot(x+1)^{2}}\right]=$$

$$=\left(\frac{x+1}{x}\right)^{x}\cdot\left[\ln^{2}\frac{x+1}{x}-\frac{2}{x+1}\cdot\ln\frac{x+1}{x}+\frac{x-1}{x\cdot(x+1)^{2}}\right]=\left(1+\frac{1}{x}\right)^{x}\cdot\left[\ln^{2}\left(1+\frac{1}{x}\right)-\frac{2}{x+1}\cdot\ln\left(1+\frac{1}{x}\right)+\frac{x-1}{x\cdot(x+1)^{2}}\right].$$

Vježba 043

Odredite drugu derivaciju funkcije $f(x)=\ln x$.

Rezultat: $-\frac{1}{x^{2}}.$

Zadatak 044 (Tony, informatika)

Od svih valjaka sa zadanim oplošjem S odredite onaj koji ima najveći obujam (volumen).

Rješenje 044

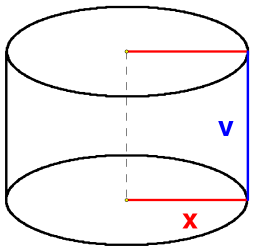
Iz oplošja valjka izračunamo njegovu visinu v:

$$S=2\cdot x^{2}\cdot\pi+2\cdot x\cdot\pi\cdot v\ \Rightarrow\ v=\frac{S-2\cdot x^{2}\cdot\pi}{2\cdot x\cdot\pi}.$$

Volumen valjka izrazimo kao funkciju polumjera x baze:

$$\left.\begin{aligned} V &= x^2 \cdot \pi \cdot \mathrm{v} \\ \mathrm{v} &= \frac{S - 2 \cdot x^2 \cdot \pi}{2 \cdot x \cdot \pi} \end{aligned}\right\} \Rightarrow V(x) = x^2 \cdot \pi \cdot \frac{S - 2 \cdot x^2 \cdot \pi}{2 \cdot x \cdot \pi} \Rightarrow V(x) = \frac{1}{2} \cdot x \cdot \left(S - 2 \cdot x^2 \cdot \pi\right) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow V(x) = \frac{1}{2} \cdot S \cdot x - x^3 \cdot \pi.$$



Nuždan je uvjet za postojanje ekstremne vrijednosti funkcije y = f(x) u nekoj točki, u kojoj je funkcija derivabilna, da u toj točki f ' (x) = 0. Zato je:

$V'(x) = \left(\frac{1}{2} \cdot S \cdot x - x^3 \cdot \pi\right)' \Rightarrow V'(x) = \frac{1}{2} \cdot S - 3 \cdot x^2 \cdot \pi$. Iz V ' (x) = 0 slijedi:

$$\frac{1}{2} \cdot S - 3 \cdot x^2 \cdot \pi = 0 \Rightarrow \frac{1}{2} \cdot S - 3 \cdot x^2 \cdot \pi = 0 \;/ \cdot 2 \Rightarrow S - 6 \cdot x^2 \cdot \pi = 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 6 \cdot x^2 \cdot \pi = S \;/ \cdot \frac{1}{6 \cdot \pi} \Rightarrow x^2 = \frac{S}{6 \cdot \pi} \;/ \sqrt{} \Rightarrow x = \sqrt{\frac{S}{6 \cdot \pi}}.$$

Volumen bi mogao biti ekstreman za $x = \sqrt{\frac{S}{6 \cdot \pi}}$. Dovoljan je uvjet za postojanje maksimuma funkcije u nekoj točki u kojoj je funkcija derivabilna, da u toj točki uz f ' (x) = 0 bude f " (x) < 0.
Druga je derivacija:

$$V''(x) = \left(V'(x)\right)' = \left(\frac{1}{2} \cdot S - 3 \cdot x^2 \cdot \pi\right)' = -6 \cdot x \cdot \pi.$$

Ako se stavi $x = \sqrt{\frac{S}{6 \cdot \pi}}$ u taj izraz, nalazi se $V''\left(\sqrt{\frac{S}{6 \cdot \pi}}\right) = -6 \cdot \pi \cdot \sqrt{\frac{S}{6 \cdot \pi}} < 0$, te se vidi da broju $x = \sqrt{\frac{S}{6 \cdot \pi}}$ odgovara maksimum.

Valjak sa zadanim oplošjem S imat će najveći volumen ako je:

- polumjer baze $x = \sqrt{\frac{S}{6 \cdot \pi}}$
- visina valjka $\mathrm{v} = \frac{S - 2 \cdot x^2 \cdot \pi}{2 \cdot x \cdot \pi} = \frac{S - 2 \cdot \frac{S}{6 \cdot \pi} \cdot \pi}{2 \cdot \pi \cdot \sqrt{\frac{S}{6 \cdot \pi}}} = \frac{S - \frac{1}{3} \cdot S}{2 \cdot \pi \cdot \sqrt{\frac{S}{6 \cdot \pi}}} = \frac{\frac{2}{3} \cdot S}{2 \cdot \pi \cdot \sqrt{\frac{S}{6 \cdot \pi}}} =$

$$= \frac{S}{3 \cdot \pi \cdot \sqrt{\frac{S}{6 \cdot \pi}}} = \sqrt{\frac{S^2}{9 \cdot \pi^2 \cdot \frac{S}{6 \cdot \pi}}} = \sqrt{\frac{S}{\frac{3}{2} \cdot \pi}} = \sqrt{\frac{2 \cdot S}{3 \cdot \pi}}.$$

Vježba 044

Od svih valjaka sa zadanim oplošjem 54π odredite onaj koji ima najveći obujam (volumen).

Rezultat: x = 3, v = 6.

Zadatak 045 (Ivica, student)

Nađite derivaciju funkcije: f(x) = x^2 · cos x.

Rješenje 045

Ponovimo!

Derivacija produkta: $\left[f(x) \cdot g(x)\right]' = f'(x) \cdot g(x) + f(x) \cdot g'(x)$, $\left(x^n\right)' = n \cdot x^{n-1}$, $(\cos x)' = -\sin x$.

$$f(x)=x^2\cdot\cos x \Rightarrow f'(x)=\left(x^2\cdot\cos x\right)'=\left(x^2\right)'\cdot\cos x+x^2\cdot(\cos x)'=2\cdot x\cdot\cos x+x^2\cdot(-\sin x)=$$

$$=2\cdot x\cdot\cos x-x^2\cdot\sin x=x\cdot(2\cdot\cos x-x\cdot\sin x).$$

Vježba 045

Nađite derivaciju funkcije: f(x) = x^2 · sin x.

Rezultat: $x\cdot(2\cdot\sin x+x\cdot\cos x).$

Zadatak 046 (Ivica, student)

Nađite derivaciju funkcije: f(x) = ln (x^2 + x).

Rješenje 046

Ponovimo!

$$(\ln x)'=\frac{1}{x} \quad , \quad \left(x^n\right)'=n\cdot x^{n-1}.$$

Ako je y = f(u) i u = g(x), tj. y = f(g(x)), a funkcije y i u imaju derivacije, tada je

$$y_x'=y_u'\cdot u_x' \quad \text{ili} \quad \frac{dy}{dx}=\frac{dy}{du}\cdot\frac{du}{dx}.$$

$$f(x)=\ln\left(x^2+x\right) \Rightarrow f'(x)=\left(\ln\left(x^2+x\right)\right)'=\frac{1}{x^2+x}\cdot\left(x^2+x\right)'=\frac{1}{x^2+x}\cdot(2\cdot x+1)=\frac{2\cdot x+1}{x^2+x}=\frac{2\cdot x+1}{x\cdot(x+1)}.$$

Vježba 046

Nađite derivaciju funkcije: f(x) = ln (3 · x + 5).

Rezultat: $\dfrac{3}{3\cdot x+5}.$

Zadatak 047 (Ivica, student)

Nađite parcijalne derivacije funkcije z(x, y) = x^2 – x · y + x.

Rješenje 047

Ponovimo!

Ako je z = f(x, y), uz pretpostavku da je, na primjer, y konstantno dobivamo derivaciju

$$\frac{\partial z}{\partial x}=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{f(x+\Delta x,\ y)-f(x,\ y)}{\Delta x}=f_x'(x,\ y)$$

koju nazivamo parcijalnom derivacijom funkcije z po varijabli x.

Ako je z = f(x, y), uz pretpostavku da je, na primjer, x konstantno dobivamo derivaciju

$$\frac{\partial z}{\partial y}=\lim_{\Delta y\to 0}\frac{f(x,\ y+\Delta y)-f(x,\ y)}{\Delta y}=f_y'(x,\ y)$$

koju nazivamo parcijalnom derivacijom funkcije z po varijabli y.

Smatrajući y konstantom dobivamo:

$$\frac{\partial z}{\partial x}=\left(x^2-x\cdot y+x\right)_x'=\left(x^2\right)_x'-(x\cdot y)_x'+(x)_x'=2\cdot x-y+1.$$

Smatrajući x konstantom dobivamo:

$$\frac{\partial z}{\partial y}=\left(x^2-x\cdot y+x\right)_y'=\left(x^2\right)_y'-(x\cdot y)_y'+(x)_y'=0-x+0=-x.$$

Vježba 047

Nađite parcijalne derivacije funkcije z(x, y) = x^2 + y^2 + x – y.

Rezultat: $z_x'=2\cdot x+1 \quad , \quad z_y'=2\cdot y-1.$

Zadatak 048 (Alex, Visoka škola za sigurnost)

Nađite derivaciju funkcije $f(x)=\frac{\cos x}{x}$.

Rješenje 048

Ponovimo!

Ako su u = u(x) i v = v(x) funkcije koje imaju derivacije, onda je

$$\left(\frac{u}{v}\right)'=\frac{u'\cdot v-u\cdot v'}{v^2}.$$

Deriviramo funkciju:

$$f'(x)=\left(\frac{\cos x}{x}\right)' \Rightarrow f'(x)=\frac{(\cos x)'\cdot x-\cos x\cdot x'}{x^2} \Rightarrow f'(x)=\frac{-\sin x\cdot x-\cos x\cdot 1}{x^2} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow f'(x)=\frac{-x\cdot\sin x-\cos x}{x^2} \Rightarrow f'(x)=-\frac{x\cdot\sin x+\cos x}{x^2}.$$

Vježba 048

Nađite derivaciju funkcije $f(x)=\frac{\sin x}{x}$.

Rezultat: $f'(x)=\frac{x\cdot\cos x-\sin x}{x^2}$.

Zadatak 049 (Alex, Visoka škola za sigurnost)

Nađite derivaciju funkcije $f(x)=\sin x^2$.

Rješenje 049

Ponovimo!

Ako je y = f(u) i u = g(x), tj. y = f(g(x)), a funkcije y i u imaju derivacije, tada je

$$y'_x=y'_u\cdot u'_x \quad \text{ili} \quad \frac{dy}{dx}=\frac{dy}{du}\cdot\frac{du}{dx}.$$

Deriviramo funkciju:

$$f'(x)=\left(\sin x^2\right)' \Rightarrow f'(x)=\cos x^2\cdot\left(x^2\right)' \Rightarrow f'(x)=\cos x^2\cdot 2\cdot x \Rightarrow f'(x)=2\cdot x\cdot\cos x^2.$$

Vježba 049

Nađite derivaciju funkcije $f(x)=\sin x^3$.

Rezultat: $f'(x)=3\cdot x^2\cdot\cos x^3$.

Zadatak 050 (Alex, Visoka škola za sigurnost)

Nađite derivaciju funkcije $f(x)=(\sin x)^2$.

Rješenje 050

Ponovimo!

Ako je y = f(u) i u = g(x), tj. y = f(g(x)), a funkcije y i u imaju derivacije, tada je

$$y'_x=y'_u\cdot u'_x \quad \text{ili} \quad \frac{dy}{dx}=\frac{dy}{du}\cdot\frac{du}{dx}.$$

Deriviramo funkciju:

$$f'(x)=\left((\sin x)^2\right)' \Rightarrow f'(x)=2\cdot\sin x\cdot(\sin x)' \Rightarrow f'(x)=2\cdot\sin x\cdot\cos x \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{bmatrix} \text{sinus dvostrukog kuta} \\ 2\cdot\sin\alpha\cdot\cos\alpha=\sin 2\alpha \end{bmatrix} \Rightarrow f'(x)=\sin 2x.$$

Vježba 050

Nađite derivaciju funkcije $f(x)=(\sin x)^3$.

Rezultat: $f'(x)=3\cdot(\sin x)^2\cdot\cos x.$

Zadatak 051 (Alex, Visoka škola za sigurnost)

Nađite derivaciju funkcije $f(x)=\frac{\ln x}{x}$.

Rješenje 051

Ponovimo!

Ako su u = u(x) i v = v(x) funkcije koje imaju derivacije, onda je

$$\left(\frac{u}{v}\right)'=\frac{u'\cdot v-u\cdot v'}{v^2}.$$

Deriviramo funkciju:

$$f'(x)=\left(\frac{\ln x}{x}\right)' \Rightarrow f'(x)=\frac{(\ln x)'\cdot x-\ln x\cdot x'}{x^2} \Rightarrow f'(x)=\frac{\frac{1}{x}\cdot x-\ln x\cdot 1}{x^2} \Rightarrow f'(x)=\frac{1-\ln x}{x^2}.$$

Vježba 051

Nađite derivaciju funkcije $f(x)=\frac{e^x}{x}$.

Rezultat: $f'(x)=\frac{e^x\cdot(x-1)}{x^2}.$

Zadatak 052 (Slatka plavuša, studentica ekonomije)

Odredite derivaciju funkcije $y=x-2\cdot\sqrt{x}+2\cdot\ln\left(1+\sqrt{x}\right)$.

Rješenje 052

Ponovimo!

Ako je c konstanta, a u = f(x), v = g(x) su funkcije koje imaju derivacije, onda je

$$(c\cdot f(x))'=c\cdot(f(x))' \quad , \quad (f(x)\pm g(x))'=(f(x))'\pm(g(x))'.$$

Ako je y = f(u) i u = g(x), tj. y = f(g(x))), a funkcije y i u imaju derivacije, tada je

$$y'_x=y'_u\cdot u'_x \text{ ili } \frac{dy}{dx}=\frac{dy}{du}\cdot\frac{du}{dx}.$$

Računamo derivaciju funkcije:

$$y=x-2\cdot\sqrt{x}+2\cdot\ln\left(1+\sqrt{x}\right) \Rightarrow y=x-2\cdot\sqrt{x}+2\cdot\ln\left(1+\sqrt{x}\right)\ /\ ' \Rightarrow$$

$$\Rightarrow y'=\left(x-2\cdot\sqrt{x}+2\cdot\ln\left(1+\sqrt{x}\right)\right)' \Rightarrow y'=x'-\left(2\cdot\sqrt{x}\right)'+\left(2\cdot\ln\left(1+\sqrt{x}\right)\right)' \Rightarrow$$

$$\Rightarrow y'=1-2\cdot\frac{1}{2\cdot\sqrt{x}}+2\cdot\frac{1}{1+\sqrt{x}}\cdot\left(1+\sqrt{x}\right)' \Rightarrow y'=1-\frac{1}{\sqrt{x}}+2\cdot\frac{1}{1+\sqrt{x}}\cdot\frac{1}{2\cdot\sqrt{x}} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow y'=1-\frac{1}{\sqrt{x}}+\frac{1}{1+\sqrt{x}}\cdot\frac{1}{\sqrt{x}} \Rightarrow y'=1-\frac{1}{\sqrt{x}}+\frac{1}{\left(1+\sqrt{x}\right)\cdot\sqrt{x}} \Rightarrow \begin{bmatrix} \text{tražimo zajednički} \\ \text{nazivnik} \end{bmatrix} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow y' = \frac{\left(1+\sqrt{x}\right)\cdot\sqrt{x}-\left(1+\sqrt{x}\right)+1}{\left(1+\sqrt{x}\right)\cdot\sqrt{x}} \Rightarrow y' = \frac{\sqrt{x}+x-1-\sqrt{x}+1}{\left(1+\sqrt{x}\right)\cdot\sqrt{x}} \Rightarrow y' = \frac{x}{\left(1+\sqrt{x}\right)\cdot\sqrt{x}} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \left[x=\left(\sqrt{x}\right)^2\right] \Rightarrow y' = \frac{\left(\sqrt{x}\right)^2}{\left(1+\sqrt{x}\right)\cdot\sqrt{x}} \Rightarrow \left[\begin{array}{l}\text{razlomak}\\ \text{kratimo s } \sqrt{x}\end{array}\right] \Rightarrow y' = \frac{\sqrt{x}}{1+\sqrt{x}}.$$

Vježba 052

Odredite derivaciju funkcije $y = x + 2\cdot\sqrt{x}.$

Rezultat: $y' = \frac{\sqrt{x}+1}{\sqrt{x}}.$

Zadatak 053 (Slatka plavuša, studentica ekonomije)

Odredite derivaciju funkcije $y = x\cdot\sqrt[3]{\frac{x^2}{x^2+1}}.$

Rješenje 053

Ponovimo!

Ako je c konstanta, a u = f(x), v = g(x) su funkcije koje imaju derivacije, onda je

$$\left(c\cdot f(x)\right)' = c\cdot\left(f(x)\right)' \quad , \quad \left(f(x)\pm g(x)\right)' = \left(f(x)\right)' \pm \left(g(x)\right)'.$$

Ako je y = f(u) i u = g(x), tj. y = f(g(x)), a funkcije y i u imaju derivacije, tada je

$$y'_x = y'_u \cdot u'_x \text{ ili } \frac{dy}{dx} = \frac{dy}{du}\cdot\frac{du}{dx}.$$

Logaritamskom derivacijom funkcije y = f(x) nazivamo derivaciju logaritma te funkcije, tj.

$$(\ln y)' = \frac{y'}{y} = \frac{f'(x)}{f(x)}.$$

$$\ln(a\cdot b) = \ln a + \ln b \quad , \quad \ln\sqrt[n]{a} = \frac{1}{n}\cdot\ln a \quad , \quad \ln\frac{a}{b} = \ln a - \ln b \quad , \quad \ln a^n = n\cdot\ln a.$$

Računamo derivaciju funkcije:

$$y = x\cdot\sqrt[3]{\frac{x^2}{x^2+1}} \Rightarrow \left[\begin{array}{l}\text{logaritmiramo}\\ \text{jednakost}\end{array}\right] \Rightarrow y = x\cdot\sqrt[3]{\frac{x^2}{x^2+1}} \;/\ln \Rightarrow \ln y = \ln\left(x\cdot\sqrt[3]{\frac{x^2}{x^2+1}}\right) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \ln y = \ln x + \ln\sqrt[3]{\frac{x^2}{x^2+1}} \Rightarrow \ln y = \ln x + \frac{1}{3}\cdot\ln\frac{x^2}{x^2+1} \Rightarrow \ln y = \ln x + \frac{1}{3}\cdot\left(\ln x^2 - \ln\left(x^2+1\right)\right) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \ln y = \ln x + \frac{1}{3}\cdot\left(2\cdot\ln x - \ln\left(x^2+1\right)\right) \Rightarrow \ln y = \ln x + \frac{2}{3}\cdot\ln x - \frac{1}{3}\cdot\ln\left(x^2+1\right) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \left[\begin{array}{l}\text{deriviramo}\\ \text{jednakost}\end{array}\right] \Rightarrow \ln y = \ln x + \frac{1}{3}\cdot\left(2\cdot\ln x - \ln\left(x^2+1\right)\right) \;/\,' \Rightarrow (\ln y)' = \left(\ln x + \frac{2}{3}\cdot\ln x - \frac{1}{3}\cdot\ln\left(x^2+1\right)\right)' \Rightarrow$$

$$\Rightarrow (\ln y)' = (\ln x)' + \left(\frac{2}{3}\cdot\ln x\right)' - \left(\frac{1}{3}\cdot\ln\left(x^2+1\right)\right)' \Rightarrow \frac{1}{y}\cdot y' = \frac{1}{x} + \frac{2}{3}\cdot\frac{1}{x} - \frac{1}{3}\cdot\frac{1}{x^2+1}\cdot\left(x^2+1\right)' \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \frac{1}{y}\cdot y' = \frac{1}{x} + \frac{2}{3\cdot x} - \frac{1}{3}\cdot\frac{1}{x^2+1}\cdot 2\cdot x \Rightarrow \frac{1}{y}\cdot y' = \frac{1}{x} + \frac{2}{3\cdot x} - \frac{2\cdot x}{3\cdot\left(x^2+1\right)} \Rightarrow \left[\begin{array}{l}\text{tražimo zajednički}\\ \text{nazivnik}\end{array}\right] \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \frac{1}{y}\cdot y' = \frac{3\cdot\left(x^2+1\right)+2\cdot\left(x^2+1\right)-2\cdot x^2}{3\cdot x\cdot\left(x^2+1\right)} \Rightarrow \frac{1}{y}\cdot y' = \frac{3\cdot x^2+3+2\cdot x^2+2-2\cdot x^2}{3\cdot x\cdot\left(x^2+1\right)} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \frac{1}{y}\cdot y' = \frac{3\cdot x^2+5}{3\cdot x\cdot\left(x^2+1\right)} \; /\cdot y \Rightarrow y' = \frac{3\cdot x^2+5}{3\cdot x\cdot\left(x^2+1\right)}\cdot y \Rightarrow y' = \frac{3\cdot x^2+5}{3\cdot x\cdot\left(x^2+1\right)}\cdot x\cdot\sqrt[3]{\frac{x^2}{x^2+1}} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow y' = \frac{3\cdot x^2+5}{3\cdot\left(x^2+1\right)}\cdot\sqrt[3]{\frac{x^2}{x^2+1}}.$$

Vježba 053

Odredite derivaciju funkcije $y = x^x$.

Rezultat: $y' = x^x\cdot\left(1+\ln x\right).$

Zadatak 054 (Edita, Dijana, Snježana, studentice)

Odredi druge parcijalne derivacije funkcije $f(x, y) = x^2 - 3\cdot x\cdot y - 4\cdot y^2 - x + 2\cdot y + 1$.

Rješenje 054

Ponovimo!

Ako je z = f(x, y) onda, uz pretpostavku da je, na primjer, y konstanta, dobivamo derivaciju

$$\frac{\partial z}{\partial x} = \lim_{\Delta x\to 0}\frac{f\left(x+\Delta x,\ y\right)-f\left(x,\ y\right)}{\Delta x} = f_x'\left(x,\ y\right)$$

koju nazivamo parcijalnom derivacijom funkcije z = f(x, y) po varijabli x.

Ako je z = f(x, y) onda, uz pretpostavku da je, na primjer, x konstanta, dobivamo derivaciju

$$\frac{\partial z}{\partial y} = \lim_{\Delta y\to 0}\frac{f\left(x,\ y+\Delta y\right)-f\left(x,\ y\right)}{\Delta y} = f_y'\left(x,\ y\right)$$

koju nazivamo parcijalnom derivacijom funkcije z = f(x, y) po varijabli y.

Parcijalnim derivacijama drugog reda funkcije z = f(x, y) nazivamo parcijalne derivacije njezinih parcijalnih derivacija prvog reda:

$$\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right) = \frac{\partial^2 z}{\partial x^2} = f_{xx}'\left(x,\ y\right) \quad , \quad \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial z}{\partial y}\right) = \frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y} = f_{xy}'\left(x,\ y\right)$$

$$\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right) = \frac{\partial^2 z}{\partial y\partial x} = f_{yx}'\left(x,\ y\right) \quad , \quad \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial z}{\partial y}\right) = \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = f_{yy}'\left(x,\ y\right).$$

Izraze

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y} \quad , \quad \frac{\partial^2 z}{\partial y\partial x}$$

nazivamo mješovitim derivacijama.

Iznos mješovite derivacije koja je neprekinuta za zadane varijable x i y, ne ovisi od reda varijabli po kojem računamo derivaciju (Schwarzov teorem):

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y} = \frac{\partial^2 z}{\partial y\partial x}.$$

Za zadanu funkciju $f(x, y) = x^2 - 3\cdot x\cdot y - 4\cdot y^2 - x + 2\cdot y + 1$ odredimo najprije prve parcijalne derivacije. Kada se derivira funkcija z = f(x, y) po jednoj varijabli tada se druga varijabla drži konstantnom. Dakle, kada deriviramo funkciju z = f(x, y) po x tada se y drži konstantom, odnosno kada se z = f(x, y) derivira po y tada se uzme da je x konstantno.

$$\frac{\partial z}{\partial x}=\frac{\partial}{\partial x}\left(x^2-3\cdot x\cdot y-4\cdot y^2-x+2\cdot y+1\right)=2\cdot x-3\cdot 1\cdot y-0-1+0+0=2\cdot x-3\cdot y,$$

$$\frac{\partial z}{\partial y}=\frac{\partial}{\partial y}\left(x^2-3\cdot x\cdot y-4\cdot y^2-x+2\cdot y+1\right)=0-3\cdot x\cdot 1-8\cdot y-0+2+0=-3\cdot x-8\cdot y+2.$$

Dalje je:

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}=\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)=\frac{\partial}{\partial x}(2\cdot x-3\cdot y)=2\cdot 1-0=2,$$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}=\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)=\frac{\partial}{\partial x}(-3\cdot x-8\cdot y+2)=-3\cdot 1-0+0=-3,$$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial y\partial x}=\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)=\frac{\partial}{\partial y}(2\cdot x-3\cdot y)=0-3\cdot 1=-3,$$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}=\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)=\frac{\partial}{\partial y}(-3\cdot x-8\cdot y+2)=0-8\cdot 1+0=-8.$$

Vježba 054

Odredi druge parcijalne derivacije funkcije $f(x,\ y)=arctg\,\frac{x}{y}.$

Rezultat: $\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}=\frac{-2\cdot x\cdot y}{\left(x^2+y^2\right)^2}$, $\frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}=\frac{\partial^2 z}{\partial y\partial x}=\frac{x^2-y^2}{\left(x^2+y^2\right)^2}$, $\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}=\frac{2\cdot x\cdot y}{\left(x^2+y^2\right)^2}.$

Zadatak 055 (Andrea, studentica)

Ispitaj da li funkcija f(x, y) = $2\cdot x^3+2\cdot y^3-36\cdot x\cdot y+100$ ima ekstreme.

Rješenje 055

Ponovimo!

Najprije nađemo prve parcijalne derivacije funkcije z = f(x, y) i izjednačimo ih s nulom.

$$\left.\begin{matrix}\dfrac{\partial f(x,\ y)}{\partial x}\\[2ex] \dfrac{\partial f(x,\ y)}{\partial y}\end{matrix}\right\}\Rightarrow\left[\begin{matrix}\text{prve parcijalne derivacije}\\ \text{izjednačimo s nulom}\end{matrix}\right]\Rightarrow\left.\begin{matrix}\dfrac{\partial f(x,\ y)}{\partial x}=0\\[2ex] \dfrac{\partial f(x,\ y)}{\partial y}=0\end{matrix}\right\}.$$

Točke u kojima diferencijabilna funkcija z = f(x, y) može imati ekstreme (tzv. stacionarne točke) nalazimo rješavanjem sustava jednadžbi:

$$\left\{\begin{matrix}\dfrac{\partial f(x,\ y)}{\partial x}=0\\[2ex] \dfrac{\partial f(x,\ y)}{\partial y}=0.\end{matrix}\right.$$

Pretpostavimo da sustav jednadžbi ima jedno rješenje:

$$\left.\begin{matrix}x=a\\ y=b\end{matrix}\right\}\Rightarrow T(a,\ b)-\text{stacionarna točka}$$

Sustav može imati više rješenja ili ni jedno. Neka je T(a, b) stacionarna točka funkcije z = f(x, y). Sada nađemo druge parcijalne derivacije funkcije z = f(x, y) u stacionarnim točkama.

$$\frac{\partial^2 f(x,y)}{\partial x^2} \quad , \quad \frac{\partial^2 f(x,y)}{\partial x \partial y} \quad , \quad \frac{\partial^2 f(x,y)}{\partial y^2}.$$

Odavde za stacionarnu točku T(a, b) je:

$$A = \frac{\partial^2 f(a,b)}{\partial x^2} \quad , \quad B = \frac{\partial^2 f(a,b)}{\partial x \partial y} \quad , \quad C = \frac{\partial^2 f(a,b)}{\partial y^2}.$$

Tvorimo diskriminantu:

$$\Delta = \begin{vmatrix} A & B \\ B & C \end{vmatrix} \Rightarrow \Delta = A \cdot C - B^2.$$

1. Ako je $\Delta > 0$, onda funkcija z = f(x, y) ima ekstrem u točki T(a, b) i to:
   - maksimum ako je A < 0 (ili C < 0)
   - minimum ako je A > 0 (ili C > 0)
2. Ako je $\Delta < 0$, onda funkcija z = f(x, y) nema ekstrem u točki T(a, b)
3. Ako je $\Delta = 0$, potrebna su daljnja ispitivanja.

Maksimum ili minimum dobije se da koordinate stacionarne točke T(a, b) uvrstimo u zadanu funkciju:

$$z_{\max} = f(a,b) \quad \text{ili} \quad z_{\min} = f(a,b).$$

Najprije nađemo prve parcijalne derivacije fukcije z = f(x, y) i izjednačimo ih s nulom:

$$\frac{\partial f(x,y)}{\partial x} = \frac{\partial}{\partial x}\left(2 \cdot x^3 + 2 \cdot y^3 - 36 \cdot x \cdot y + 100\right) = 6 \cdot x^2 - 36 \cdot y,$$

$$\frac{\partial f(x,y)}{\partial y} = \frac{\partial}{\partial y}\left(2 \cdot x^3 + 2 \cdot y^3 - 36 \cdot x \cdot y + 100\right) = 6 \cdot y^2 - 36 \cdot x.$$

Rješavamo sustav jednadžbi:

$$\left.\begin{array}{l} 6 \cdot x^2 - 36 \cdot y = 0 \\ 6 \cdot y^2 - 36 \cdot x = 0 \end{array}\right\} \Rightarrow \left.\begin{array}{l} 6 \cdot x^2 - 36 \cdot y = 0 \; /:6 \\ 6 \cdot y^2 - 36 \cdot x = 0 \; /:6 \end{array}\right\} \Rightarrow \left.\begin{array}{l} x^2 - 6 \cdot y = 0 \\ y^2 - 6 \cdot x = 0 \end{array}\right\} \Rightarrow \left[\begin{array}{l} \text{izrazimo y iz prve jednadžbe} \\ \text{i uvrstimo u drugu} \end{array}\right] \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \left.\begin{array}{l} y = \frac{x^2}{6} \\ y^2 - 6 \cdot x = 0 \end{array}\right\} \Rightarrow \left(\frac{x^2}{6}\right)^2 - 6 \cdot x = 0 \Rightarrow \frac{x^4}{36} - 6 \cdot x = 0 \; / \cdot 36 \Rightarrow x^4 + 216 \cdot x = 0 \Rightarrow x \cdot \left(x^3 - 216\right) = 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \left.\begin{array}{l} x = 0 \\ x^3 - 216 = 0 \end{array}\right\} \Rightarrow \left.\begin{array}{l} x_1 = 0 \\ x^3 = 216 \; / \sqrt[3]{\;} \end{array}\right\} \Rightarrow \left.\begin{array}{l} x_1 = 0 \\ x_2 = \sqrt[3]{216} \end{array}\right\} \Rightarrow \left.\begin{array}{l} x_1 = 0 \\ x_2 = 6 \end{array}\right\}.$$

Uvrstimo li ove vrijednosti od x u bilo koju jednadžbu sustava dobije se:

$$\left.\begin{array}{l} x_1 = 0 \\ y^2 - 6 \cdot x = 0 \end{array}\right\} \Rightarrow y^2 - 6 \cdot 0 = 0 \Rightarrow y^2 = 0 \Rightarrow y_1 = 0 \Rightarrow T_1(0, 0) \text{ stacionarna točka},$$

$$\left.\begin{array}{l} x_2 = 0 \\ y^2 - 6 \cdot x = 0 \end{array}\right\} \Rightarrow y^2 - 6 \cdot 6 = 0 \Rightarrow y^2 - 36 = 0 \Rightarrow y^2 = 36 \; / \sqrt{\;} \Rightarrow y_2 = 6 \Rightarrow T_2(6, 6) \text{ stacionarna točka}.$$

Dakle su $T_1(0, 0)$ i $T_2(6, 6)$ stacionarne točke. Sada nađemo druge parcijalne derivacije funkcije z = f(x, y) u stacionarnim točkama. Parcijalnim derivacijama drugog reda funkcije z = f(x, y) nazivamo parcijalne derivacije njezinih parcijalnih derivacija prvog reda:

$$\frac{\partial^2 f(x, y)}{\partial x^2} = \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial f(x, y)}{\partial x}\right) = \frac{\partial}{\partial x}\left(6 \cdot x^2 - 36 \cdot y\right) = 12 \cdot x,$$

$$\frac{\partial^2 f(x, y)}{\partial x \partial y} = \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial f(x, y)}{\partial y}\right) = \frac{\partial}{\partial x}\left(6 \cdot y^2 - 36 \cdot x\right) = -36,$$

$$\frac{\partial^2 f(x, y)}{\partial y^2} = \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial f(x, y)}{\partial y}\right) = \frac{\partial}{\partial y}\left(6 \cdot y^2 - 36 \cdot x\right) = 12 \cdot y.$$

Za stacionarnu točku $T_1(0, 0)$ vrijedi:

$$A = \frac{\partial^2 f(0, 0)}{\partial x^2} = 12 \cdot 0 = 0 \quad , \quad B = \frac{\partial^2 f(0, 0)}{\partial x \partial y} = -36 \quad , \quad C = \frac{\partial^2 f(0, 0)}{\partial y^2} = 12 \cdot 0 = 0$$

te je

$$\Delta = A \cdot C - B^2 \Rightarrow \Delta = 0 \cdot 0 - (-36)^2 \Rightarrow \Delta = -1296 < 0.$$

Funkcija z = f(x, y) u stacionarnoj točki $T_1(0, 0)$ nema ekstrema.
Za stacionarnu točku $T_2(6, 6)$ vrijedi:

$$A = \frac{\partial^2 f(6, 6)}{\partial x^2} = 12 \cdot 6 = 72 \quad , \quad B = \frac{\partial^2 f(6, 6)}{\partial x \partial y} = -36 \quad , \quad C = \frac{\partial^2 f(6, 6)}{\partial y^2} = 12 \cdot 6 = 72$$

te je

$$\Delta = A \cdot C - B^2 \Rightarrow \Delta = 72 \cdot 72 - (-36)^2 \Rightarrow \Delta = 3888 > 0.$$

Funkcija z = f(x, y) u stacionarnoj točki $T_2(6, 6)$ ima ekstrem. Budući da je A = 72 > 0, riječ je o minimumu koji iznosi:

$$\left.\begin{aligned} z &= f(x\ y) = 2 \cdot x^3 + 2 \cdot y^3 - 36 \cdot x \cdot y + 100 \\ z_{\min} &= f(6\ 6) = 2 \cdot 6^3 + 2 \cdot 6^3 - 36 \cdot 6 \cdot 6 + 100 \end{aligned}\right\} \Rightarrow z_{\min} = -332.$$

Vježba 055

Ispitaj da li funkcija $f(x, y) = 2 \cdot x^3 + 2 \cdot y^3 - 36 \cdot x \cdot y + 432$ ima ekstreme.

Rezultat: $z_{\min} = 0$.

Zadatak 056 (Andrea, Dijana, Snježana, Edita, studentica)

Nađi ekstreme funkcije f(x, y) = x + 2 · y pod uvjetom da varijable x i y zadovoljavaju jednadžbu $x^2 + y^2 = 5$.

Rješenje 056

Ponovimo!

Uvjetni ekstrem funkcije z = f(x, y) je maksimum ili minimum te funkcije dostignut pod uvjetom da su varijable x i y funkcije povezane jednadžbom φ(x, y) = 0 (jednadžba veze). Da bismo našli uvjetni ekstrem derivabilne funkcije z = f(x, y) uz postojanje derivabilnog odnosa φ(x, y) = 0 tvorimo Lagrangeovu funkciju:

$$F(x, y) = f(x, y) + \lambda \cdot \varphi(x, y),$$

gdje je λ neodređen konstantan faktor i tražimo običan ekstrem te pomoćne (Lagrangeove) funkcije.
Najprije nađemo prve parcijalne derivacije funkcije z = F(x, y):

$$\frac{\partial F(x, y)}{\partial x} = \frac{\partial f(x, y)}{\partial x} + \lambda \cdot \frac{\partial \varphi(x, y)}{\partial x},$$

$$\frac{\partial F(x, y)}{\partial y} = \frac{\partial f(x, y)}{\partial y} + \lambda \cdot \frac{\partial \varphi(x, y)}{\partial y}.$$

Svodimo na sustav od tri jednadžbe sa tri nepoznanice x, y i λ iz kojih je općenito moguće odrediti te nepoznanice.

$$\left.\begin{matrix} \dfrac{\partial f(x, y)}{\partial x} + \lambda \cdot \dfrac{\partial \varphi(x, y)}{\partial x} = 0 \\ \dfrac{\partial f(x, y)}{\partial y} + \lambda \cdot \dfrac{\partial \varphi(x, y)}{\partial y} = 0 \\ \varphi(x, y) = 0 \end{matrix}\right\}.$$

Točke u kojima diferencijabilna funkcija z = F(x, y) može imati ekstreme (tzv. stacionarne točke) nalazimo rješavanjem sustava jednadžbi:

$$\begin{cases} \dfrac{\partial f(x, y)}{\partial x} + \lambda \cdot \dfrac{\partial \varphi(x, y)}{\partial x} = 0 \\ \dfrac{\partial f(x, y)}{\partial y} + \lambda \cdot \dfrac{\partial \varphi(x, y)}{\partial y} = 0 \\ \varphi(x, y) = 0. \end{cases}$$

Pretpostavimo da sustav jednadžbi ima jedno rješenje:

$$\left.\begin{matrix} x = a \\ y = b \\ \lambda = c \end{matrix}\right\} \Rightarrow T(a, b) - \text{stacionarna točka}$$

Sustav može imati više rješenja ili ni jedno. Neka je T(a, b) stacionarna točka funkcije z = F(x, y). Sada nađemo druge parcijalne derivacije funkcije z = F(x, y) u stacionarnim točkama.

$$\frac{\partial^2 F(x, y)}{\partial x^2} \quad , \quad \frac{\partial^2 F(x, y)}{\partial x \partial y} \quad , \quad \frac{\partial^2 F(x, y)}{\partial y^2}.$$

Odavde za stacionarnu točku T(a, b) je:

$$A = \frac{\partial^2 F(a, b)}{\partial x^2} \quad , \quad B = \frac{\partial^2 F(a, b)}{\partial x \partial y} \quad , \quad C = \frac{\partial^2 F(a, b)}{\partial y^2}.$$

Tvorimo diskriminantu:

$$\Delta = \begin{vmatrix} A & B \\ B & C \end{vmatrix} \Rightarrow \Delta = A \cdot C - B^2.$$

1. Ako je Δ > 0, onda funkcija z = f(x, y) ima ekstrem u točki T(a, b) i to:
   - maksimum ako je A < 0 (ili C < 0)
   - minimum ako je A > 0 (ili C > 0)
2. Ako je Δ < 0, onda funkcija z = f(x, y) nema ekstrem u točki T(a, b)
3. Ako je Δ = 0, potrebna su daljnja ispitivanja.

Maksimum ili minimum dobije se da koordinate stacionarne točke T(a, b) uvrstimo u zadanu funkciju:

$$z_{\max} = f(a, b) \quad \text{ili} \quad z_{\min} = f(a, b).$$

Najprije odredimo Lagrangeovu funkciju:

$$x^2 + y^2 = 5 \Rightarrow \left.\begin{matrix} x^2 + y^2 - 5 = 0 \\ \varphi(x, y) = 0 \end{matrix}\right\} \Rightarrow \varphi(x, y) = x^2 + y^2 - 5.$$

$$\left.\begin{array}{l} f(x,\ y)=x+2\cdot y\ ,\ \varphi(x,\ y)=x^2+y^2-5 \\ F(x,\ y)=f(x,\ y)+\lambda\cdot\varphi(x,\ y)\end{array}\right\}\Rightarrow F(x,\ y)=x+2\cdot y+\lambda\cdot\left(x^2+y^2-5\right)\ \text{Lagrangeova funkcija}$$

Nađemo prve parcijalne derivacije fukcije z = F(x, y):

$$\left.\begin{array}{l} \dfrac{\partial F(x,\ y)}{\partial x}=\dfrac{\partial}{\partial x}\left(x+2\cdot y+\lambda\cdot\left(x^2+y^2-5\right)\right)=1+2\cdot\lambda\cdot x \\ \dfrac{\partial F(x,\ y)}{\partial y}=\dfrac{\partial}{\partial y}\left(x+2\cdot y+\lambda\cdot\left(x^2+y^2-5\right)\right)=2+2\cdot\lambda\cdot y \end{array}\right\}.$$

Rješavamo sustav od tri jednadžbe sa tri nepoznanice x, y i λ:

$$\left.\begin{array}{l} 1+2\cdot\lambda\cdot x=0 \\ 2+2\cdot\lambda\cdot y=0 \\ x^2+y^2-5=0\end{array}\right\}\Rightarrow\left.\begin{array}{l} 1+2\cdot\lambda\cdot x=0 \\ 2+2\cdot\lambda\cdot y=0\ /:2 \\ x^2+y^2-5=0\end{array}\right\}\Rightarrow\left.\begin{array}{l} 1+2\cdot\lambda\cdot x=0 \\ 1+\lambda\cdot y=0 \\ x^2+y^2-5=0\end{array}\right\}\Rightarrow\left[\begin{array}{l}\text{izrazimo x iz prve, a y iz druge} \\ \text{jednadžbe i to uvrstimo u treću}\end{array}\right]\Rightarrow$$

$$\Rightarrow\left.\begin{array}{l} x=-\dfrac{1}{2\cdot\lambda} \\ y=-\dfrac{1}{\lambda} \\ x^2+y^2-5=0\end{array}\right\}\Rightarrow\left(-\frac{1}{2\cdot\lambda}\right)^2+\left(-\frac{1}{\lambda}\right)^2-5=0\Rightarrow\frac{1}{4\cdot\lambda^2}+\frac{1}{\lambda^2}-5=0\Rightarrow\frac{1}{4\cdot\lambda^2}+\frac{1}{\lambda^2}=5\ /\cdot 4\cdot\lambda^2\Rightarrow$$

$$\Rightarrow 1+4=20\cdot\lambda^2\Rightarrow 20\cdot\lambda^2=5\ /:20\Rightarrow\lambda^2=\frac{5}{20}\Rightarrow\lambda^2=\frac{1}{4}\ /\sqrt{\ }\Rightarrow\lambda_{1,2}=\pm\sqrt{\frac{1}{4}}\Rightarrow\left.\begin{array}{l}\lambda_1=\dfrac{1}{2} \\ \lambda_2=-\dfrac{1}{2}\end{array}\right\}.$$

Stacionarne točke su:

$$\left.\begin{array}{l} x=-\dfrac{1}{2\cdot\lambda} \\ y=-\dfrac{1}{\lambda} \\ \lambda_1=\dfrac{1}{2}\end{array}\right\}\Rightarrow\left.\begin{array}{l} x_1=-\dfrac{1}{2\cdot\dfrac{1}{2}} \\ y_1=-\dfrac{1}{\dfrac{1}{2}}\end{array}\right\}\Rightarrow\left.\begin{array}{l} x_1=-1 \\ y_1=-2\end{array}\right\}\Rightarrow T_1(-1,\ -2)\ \text{stacionarna točka},$$

$$\left.\begin{array}{l} x=-\dfrac{1}{2\cdot\lambda} \\ y=-\dfrac{1}{\lambda} \\ \lambda_2=-\dfrac{1}{2}\end{array}\right\}\Rightarrow\left.\begin{array}{l} x_2=-\dfrac{1}{2\cdot\left(-\dfrac{1}{2}\right)} \\ y_2=-\dfrac{1}{-\dfrac{1}{2}}\end{array}\right\}\Rightarrow\left.\begin{array}{l} x_2=1 \\ y_2=2\end{array}\right\}\Rightarrow T_2(1,\ 2)\ \text{stacionarna točka}.$$

Dakle su $T_1(-1,\ -2)$ i $T_2(1,\ 2)$ stacionarne točke. Sada nađemo druge parcijalne derivacije funkcije z = F(x, y) u stacionarnim točkama. Parcijalnim derivacijama drugog reda funkcije z = F(x, y) nazivamo parcijalne derivacije njezinih parcijalnih derivacija prvog reda:

$$\frac{\partial^2 F(x,\ y)}{\partial x^2}=\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial F(x,\ y)}{\partial x}\right)=\frac{\partial}{\partial x}(1+2\cdot\lambda\cdot x)=2\cdot\lambda,$$

$$\frac{\partial^2 F(x,\ y)}{\partial x\partial y}=\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial F(x,\ y)}{\partial y}\right)=\frac{\partial}{\partial x}(2+2\cdot\lambda\cdot y)=0,$$

$$\frac{\partial^2 F(x, y)}{\partial y^2} = \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial F(x, y)}{\partial y}\right) = \frac{\partial}{\partial y}(2 + 2 \cdot \lambda \cdot y) = 2 \cdot \lambda.$$

Za stacionarnu točku $T_1(-1, -2), \lambda_1 = \frac{1}{2}$ vrijedi:

$$A = \frac{\partial^2 F(-1, -2)}{\partial x^2} = 2 \cdot \frac{1}{2} = 1 \quad , \quad B = \frac{\partial^2 F(-1, -2)}{\partial x \partial y} = 0 \quad , \quad C = \frac{\partial^2 F(-1, -2)}{\partial y^2} = 2 \cdot \frac{1}{2} = 1$$

te je

$$\Delta = A \cdot C - B^2 \Rightarrow \Delta = 1 \cdot 1 - 0^2 \Rightarrow \Delta = 1 > 0.$$

Funkcija z = f(x, y) u stacionarnoj točki $T_1(-1, -2)$ ima ekstrem. Budući da je A = 1 > 0, riječ je o minimumu koji iznosi:

$$\left.\begin{array}{l} z = f(x\ y) = x + 2 \cdot y \\ z_{\min} = f(-1, -2) = -1 + 2 \cdot (-2) \end{array}\right\} \Rightarrow z_{\min} = -5.$$

Za stacionarnu točku $T_2(1, 2), \lambda_2 = -\frac{1}{2}$ vrijedi:

$$A = \frac{\partial^2 F(1, 2)}{\partial x^2} = 2 \cdot \left(-\frac{1}{2}\right) = -1 \quad , \quad B = \frac{\partial^2 F(1, 2)}{\partial x \partial y} = 0 \quad , \quad C = \frac{\partial^2 F(1, 2)}{\partial y^2} = 2 \cdot \left(-\frac{1}{2}\right) = -1$$

te je

$$\Delta = A \cdot C - B^2 \Rightarrow \Delta = (-1) \cdot (-1) - 0^2 \Rightarrow \Delta = 1 > 0.$$

Funkcija z = f(x, y) u stacionarnoj točki $T_2(1, 2)$ ima ekstrem. Budući da je A = – 1 < 0, riječ je o maksimumu koji iznosi:

$$\left.\begin{array}{l} z = f(x\ y) = x + 2 \cdot y \\ z_{\max} = f(1, 2) = 1 + 2 \cdot 2 \end{array}\right\} \Rightarrow z_{\max} = 5.$$

Vježba 056

Nađi ekstreme funkcije f(x, y) = x · y pod uvjetom da varijable x i y zadovoljavaju jednadžbu x + y = 1.

Rezultat: $z_{\max} = f\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right) = \frac{1}{4}.$

Zadatak 057 (Mario, student)

Dane su funkcije ukupnih prihoda R(Q) i ukupnih troškova T(Q) kao funkcije proizvodnje Q: $R(Q) = 10 \cdot Q - 5 \cdot Q^2$, $T(Q) = 5 \cdot Q^2 - 90 \cdot Q$. Uz koji se nivo proizvodnje ostvaruje maksimalna dobit (profit) i koliko iznosi? (Napomena: funkciju dobiti, profita označavamo s π).

Rješenje 057

Ponovimo!

PROFIT (DOBIT) (π)	$\pi(Q) = R(Q) - T(Q)$
UVJETI MAKSIMALNOG PROFITA	$\begin{cases} \pi'(Q) = 0 \Rightarrow Q_M & \text{stacionarna točka} \\ \pi''(Q_M) < 0 \end{cases}$

$$\pi(Q) = R(Q) - T(Q) \Rightarrow \pi(Q) = 10 \cdot Q - 5 \cdot Q^2 - \left(5 \cdot Q^2 - 90 \cdot Q\right) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \pi(Q)=10\cdot Q-5\cdot Q^2-5\cdot Q^2+90\cdot Q \Rightarrow \pi(Q)=-10\cdot Q^2+100\cdot Q.$$

- Nužan uvjet za ekstrem

$$\pi'(Q)=0.$$

$$\pi'(Q)=\left(-10\cdot Q^2+100\cdot Q\right)' \Rightarrow \pi'(Q)=\left(-10\cdot Q^2\right)'+(100\cdot Q)' \Rightarrow \pi'(Q)=-20\cdot Q+100 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \left[\pi'(Q)=0\right] \Rightarrow -20\cdot Q+100=0 \Rightarrow -20\cdot Q=-100 \;/:(-20) \Rightarrow Q=5 \text{ stacionarna točka.}$$

- Dovoljan uvjet za maksimum

$$\pi''(Q)<0.$$

$$\pi''(Q)=\left(\pi'(Q)\right)' \Rightarrow \pi''(Q)=(-20\cdot Q+100)' \Rightarrow \pi''(Q)=(-20\cdot Q)'+100' \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \pi''(Q)=-20+0 \Rightarrow \pi''(Q)=-20 \Rightarrow \pi''(Q)<0.$$

Dakle, druga derivacija je negativna pa se ostvaruje maksimalna dobit koja iznosi:

$$\left.\begin{array}{l} Q=5 \\ \pi(Q)=-10\cdot Q^2+100\cdot Q \end{array}\right\} \Rightarrow \pi(5)=-10\cdot 5^2+100\cdot 5 \Rightarrow \pi(5)=-250+500 \Rightarrow \pi(5)=250.$$

Vježba 057

Dane su funkcije ukupnih prihoda R(Q) i ukupnih troškova T(Q) kao funkcije proizvodnje Q: $R(Q) = 1400 \cdot Q - 6 \cdot Q^2$, $T(Q) = 1500 + 80 \cdot Q$. Uz koji se nivo proizvodnje ostvaruje maksimalna dobit (profit) i koliko iznosi? (Napomena: funkciju dobiti, profita označavamo s π).

Rezultat: $Q = 110$, $\pi(Q) = 71100$.

Zadatak 058 (Miro, student)

Uporabom diferencijala funkcije izračunaj približnu vrijednost od $\sqrt{25.02}$.

Rješenje 058

Ponovimo!

Diferencijal dy funkcije y = f(x) je umnožak derivacije f ' (x) i prirasta (diferencije) Δx neovisne varijable. Pod diferencijalom dx neovisne varijable x podrazumijevamo njezinu diferenciju Δx. Diferencijal se često rabi pri aproksimativnom računanju vrijednosti realne funkcije y = f(x). Vrijedi aproksimacija:

$$f(x+\Delta x) \approx f(x) + f'(x)\cdot \Delta x.$$

Najprije uočimo da je $\sqrt{25}=5.$ To znači da se jednostavno izračuna vrijednost funkcije $f(x)=\sqrt{x}$ u točki x = 25:

$$\left.\begin{array}{l} f(x)=\sqrt{x} \\ x=25 \end{array}\right\} \Rightarrow f(25)=\sqrt{25} \Rightarrow f(25)=5.$$

Budući da nas zanima vrijednost te funkcije za x = 25.02, odnosno u točki x + Δx = 25 + 0.02, trebamo izračunati f(25 + 0.02):

$$\left.\begin{array}{l} f(x)=\sqrt{x} \Rightarrow f'(x)=\dfrac{1}{2\cdot\sqrt{x}} \\ f(x+\Delta x)=f(x)+f'(x)\cdot\Delta x \\ f(25+0.02)=f(25)+f'(25)\cdot 0.02 \end{array}\right\} \Rightarrow \left.\begin{array}{l} f'(25)=\dfrac{1}{2\cdot\sqrt{25}} \\ f(25+0.02)=f(25)+f'(25)\cdot 0.02 \end{array}\right\} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \left.\begin{array}{l} f'(25)=\frac{1}{2\cdot 5} \\ f(25+0.02)=f(25)+f'(25)\cdot 0.02 \end{array}\right\} \Rightarrow \left.\begin{array}{l} f'(25)=\frac{1}{10} \\ f(25+0.02)=f(25)+f'(25)\cdot 0.02 \end{array}\right\} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow f(25+0.02)=5+\frac{1}{10}\cdot 0.02 \Rightarrow f(25+0.02)=5.002.$$

Vježba 058

Uporabom diferencijala funkcije izračunaj približnu vrijednost od $\sqrt[3]{128}$.

Rezultat: 5.04.

Zadatak 059 (Miro, student)

Uporabom diferencijala funkcije izračunaj približnu vrijednost od $e^{-0.02}$.

Rješenje 059

Ponovimo!

Diferencijal dy funkcije y = f(x) je umnožak derivacije f ' (x) i prirasta (diferencije) Δx neovisne varijable. Pod diferencijalom dx neovisne varijable x podrazumijevamo njezinu diferenciju Δx. Diferencijal se često rabi pri aproksimativnom računanju vrijednosti realne funkcije y = f(x). Vrijedi aproksimacija:

$$f(x+\Delta x) \approx f(x) + f'(x)\cdot \Delta x.$$

Najprije uočimo da je $e^0=1$. To znači da se jednostavno izračuna vrijednost funkcije $f(x)=e^x$ u točki x = 0:

$$\left.\begin{array}{l} f(x)=e^x \\ x=0 \end{array}\right\} \Rightarrow f(0)=e^0 \Rightarrow f(0)=1.$$

Budući da nas zanima vrijednost te funkcije za x = – 0.02, odnosno u točki x + Δx = 0 + (– 0.02), trebamo izračunati f(0 + (– 0.02)) = f(0 – 0.02):

$$\left.\begin{array}{l} f(x)=e^x \Rightarrow f'(x)=e^x \\ f(x+\Delta x)=f(x)+f'(x)\cdot\Delta x \\ f(0-0.02)=f(0)+f'(0)\cdot(-0.02) \end{array}\right\} \Rightarrow \left.\begin{array}{l} f'(0)=e^0 \\ f(0-0.02)=f(0)+f'(0)\cdot(-0.02) \end{array}\right\} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \left.\begin{array}{l} f'(0)=1 \\ f(0-0.02)=f(0)+f'(0)\cdot(-0.02) \end{array}\right\} \Rightarrow f(0-0.02)=1+1\cdot(-0.02) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow f(0-0.02)=1-0.02 \Rightarrow f(0-0.02)=0.98.$$

Vježba 059

Uporabom diferencijala funkcije izračunaj približnu vrijednost od $e^{-0.03}$.

Rezultat: 0.97.

Zadatak 060 (Dunja, Ivona, studentice)

Nađite derivaciju funkcije: $y=\frac{a}{\sqrt[3]{x^2}}-\frac{b}{x\cdot\sqrt[3]{x}}$.

Rješenje 060

Ponovimo!

$$\sqrt[n]{a^m}=a^{\frac{m}{n}} \quad , \quad a^{-n}=\frac{1}{a^n} \quad , \quad a^n\cdot a^m=a^{n+m}.$$

Derivacija razlike: $(f-g)' = f' - g'$.

$$y=\frac{a}{\sqrt[3]{x^2}}-\frac{b}{x\cdot\sqrt[3]{x}} \Rightarrow y=\frac{a}{x^{\frac{2}{3}}}-\frac{b}{x\cdot x^{\frac{1}{3}}} \Rightarrow y=\frac{a}{x^{\frac{2}{3}}}-\frac{b}{x^{\frac{4}{3}}} \Rightarrow y=a\cdot x^{-\frac{2}{3}}-b\cdot x^{-\frac{4}{3}}.$$

Sada deriviramo:

$$y'=\left(a\cdot x^{-\frac{2}{3}}-b\cdot x^{-\frac{4}{3}}\right)' \Rightarrow y'=\left(a\cdot x^{-\frac{2}{3}}\right)'-\left(b\cdot x^{-\frac{4}{3}}\right)' \Rightarrow y'=a\cdot\left(-\frac{2}{3}\right)\cdot x^{-\frac{5}{3}}-b\cdot\left(-\frac{4}{3}\right)\cdot x^{-\frac{7}{3}} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow y'=-\frac{2}{3}\cdot a\cdot x^{-\frac{5}{3}}+\frac{4}{3}\cdot b\cdot x^{-\frac{7}{3}} \Rightarrow y'=-\frac{2}{3}\cdot\frac{a}{x^{\frac{5}{3}}}+\frac{4}{3}\cdot\frac{b}{x^{\frac{7}{3}}} \Rightarrow y'=-\frac{2}{3}\cdot\frac{a}{\sqrt[3]{x^5}}+\frac{4}{3}\cdot\frac{b}{\sqrt[3]{x^7}} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow y'=\frac{4}{3}\cdot\frac{b}{\sqrt[3]{x^7}}-\frac{2}{3}\cdot\frac{a}{\sqrt[3]{x^5}} \Rightarrow \begin{bmatrix}\text{djelomično}\\ \text{korjenovanje}\end{bmatrix} \Rightarrow y'=\frac{4}{3}\cdot\frac{b}{\sqrt[3]{x^6\cdot x}}-\frac{2}{3}\cdot\frac{a}{\sqrt[3]{x^3\cdot x^2}} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow y'=\frac{4}{3}\cdot\frac{b}{x^2\cdot\sqrt[3]{x}}-\frac{2}{3}\cdot\frac{a}{x\cdot\sqrt[3]{x^2}} \Rightarrow y'=\frac{4\cdot b}{3\cdot x^2\cdot\sqrt[3]{x}}-\frac{2\cdot a}{3\cdot x\cdot\sqrt[3]{x^2}}.$$

Vježba 060

Nađite derivaciju funkcije: $y=\frac{3\cdot a}{2\cdot\sqrt[3]{x^2}}$.

Rezultat: $-\frac{a}{x\cdot\sqrt[3]{x^2}}$.