Zadatak 001 (Marinela, gimnazija)

Nađite derivaciju funkcije f(x) = $\frac{a+b\cdot x}{c+d\cdot x}$.

Rješenje 001

Neka su f(x), g(x), h(x) funkcije nezavisne varijable x, a f ' (x), g ' (x), h ' (x) derivacije tih funkcija po x.

Osnovna pravila deriviranja

Derivacija konstante

Derivacija konstantne funkcije c jednaka je nuli.

c ' = 0

Derivacija nezavisne varijable x jednaka je jedan.

x ' = 1

Derivacija umnoška konstantnog faktora i funkcije

(c · f(x)) ' = c · f ' (x)

Derivacija zbroja ili razlike dviju ili više funkcija jednaka je zbroju ili razlici derivacija tih funkcija.

(f(x) + g(x) – h(x)) ' = f ' (x) + g ' (x) – h ' (x)

Derivacija umnoška dviju funkcija

(f(x) · g(x))' = f '(x) · g(x) + f(x) · g'(x)

Derivacija umnoška tri funkcije

(f(x) · g(x) · h(x)) ' = f ' (x) · g(x) · h(x) + f(x) · g ' (x) · h(x) + f(x) · g(x) · h ' (x)

Derivacija kvocijenta (razlomka)

$$\left(\frac{f(x)}{g(x)}\right)' = \frac{f'(x)\cdot g(x) - f(x)\cdot g'(x)}{\left(g(x)\right)^2}\ ,\ g(x)\neq 0$$

$$\left(\frac{c}{g(x)}\right)' = -\frac{c\cdot g'(x)}{\left(g(x)\right)^2}\ ,\ g(x)\neq 0$$

Derivacija složene funkcije (kompozicija funkcija)

$y = f(g(x)) \Rightarrow \frac{dy}{dx} = \frac{df}{dg}\frac{dg}{dx}$ pri čemu su f = f(g) i g = g(x) derivabilne s obzirom na svoje argumente

Derivacije osnovnih funkcija

$$c' = 0\ ,\ x' = 1\ ,\ (x^n)' = n\cdot x^{n-1}\ ,\ \frac{1}{x} = -\frac{1}{x^2}\ ,\ \left(\frac{1}{x^n}\right)' = -\frac{n}{x^{n+1}}\ ,\ \left(\sqrt{x}\right)' = \frac{1}{2\cdot\sqrt{x}}$$

$$\left(\sqrt[n]{x}\right)' = \frac{1}{n\cdot\sqrt[n]{x^{n-1}}},\ n\neq 0,\ x>0\ ,\ \left(e^x\right)' = e^x\ ,\ \left(e^{n\cdot x}\right)' = n\cdot e^x\ ,\ \left(a^x\right)' = a^x\cdot\ln a,\ a>0$$

$$\left(a^{n\cdot x}\right)' = n\cdot a^{n\cdot x}\cdot\ln a,\ a>0\ ,\ \left(\ln x\right)' = \frac{1}{x},\ x>0\ ,\ \left(\log_a x\right)' = \frac{1}{x\cdot\ln a},\ a\neq 1,\ x>0$$

$$(\sin x)' = \cos x\ ,\ (\cos x)' = -\sin x\ ,\ \left(tg\, x\right)' = \frac{1}{\cos^2 x},\ x\neq(2k+1)\frac{\pi}{2},\ k\in Z$$

$$\left(ctg\, x\right)' = \frac{-1}{\sin^2 x},\ x\neq k\pi,\ k\in Z\ ,\ \left(\arcsin x\right)' = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}},\ |x|<1$$

$$\left(\arccos x\right)' = \frac{-1}{\sqrt{1-x^2}},\ |x|<1\ ,\ \left(\mathrm{arc}\, tgx\right)' = \frac{1}{1+x^2}\ ,\ \left(\mathrm{arc}\, ctgx\right)' = \frac{-1}{1+x^2}\ ,\ (\mathrm{sh}\ x)' = \mathrm{ch}\ x$$

$$(\text{ch } x)' = \text{sh } x \quad , \quad (th\,x)' = \frac{1}{ch^2 x} \quad , \quad (cth\,x)' = \frac{-1}{sh^2 x},\ x \neq 0 \quad , \quad (Arsh\,x)' = \frac{1}{\sqrt{1+x^2}}$$

$$(Arch\,x)' = \frac{1}{\sqrt{x^2-1}},\ x > 1 \quad , \quad (Arth\,x)' = \frac{1}{1-x^2},\ |x| < 1 \quad , \quad (Arcth\,x)' = -\frac{1}{x^2-1},\ |x| > 1$$

$$\left((f(x))^n\right)' = n \cdot (f(x))^{n-1} \cdot f'(x) \quad , \quad (\ln f(x))' = \frac{1}{f(x)} \cdot f'(x),\ f(x) > 0.$$

Derivacija funkcije iznosi:

$$f'(x) = \frac{(a+bx)' \cdot (c+dx) - (a+bx) \cdot (c+dx)'}{(c+dx)^2} = \frac{b \cdot (c+dx) - (a+bx) \cdot d}{(c+dx)^2} =$$

$$= \frac{bc + bdx - ad - bdx}{(c+dx)^2} = \frac{bc - ad}{(c+dx)^2}.$$

Vježba 001

Nađite derivaciju funkcije f(x) = $\frac{x^5}{e^x}$.

Rezultat: $\frac{5 \cdot x^4 - x^5}{e^x}$.

Zadatak 002 (Marinela, gimnazija)

Nađite derivaciju funkcije f(x) = $\frac{\ln x}{x}$.

Rješenje 002

Ponovimo!

Tablično deriviranje	
Funkcija	**Derivacija**
ln x	$\frac{1}{x}$
x	1

Derivacija kvocijenta: $\left(\frac{f(x)}{g(x)}\right)' = \frac{f'(x) \cdot g(x) - f(x) \cdot g'(x)}{(g(x))^2},\ g(x) \neq 0.$

$$f'(x) = \frac{(\ln x)' \cdot x - \ln x \cdot x'}{x^2} = \frac{\frac{1}{x} \cdot x - \ln x \cdot 1}{x^2} = \frac{1 - \ln x}{x^2}$$

Vježba 002

Nađite derivaciju funkcije f(x) = $5x^3 - 8x^2 + 4x$.

Rezultat: $15x^2 - 16x + 4$.

Zadatak 003 (Maja, gimnazija)

Nađite derivaciju funkcije

$$y = x^2 \cdot \sqrt[3]{x^2}.$$

Rješenje 003

Ponovimo!

$$\sqrt[n]{a^m} = a^{\frac{m}{n}} \quad , \quad a^n \cdot a^m = a^{n+m}.$$

Tablično deriviranje	
Funkcija	**Derivacija**
x^n	$n \cdot x^{n-1}$

Prije deriviranja transformirat ćemo izraz:

$$y = x^2 \cdot \sqrt[3]{x^2} = x^2 \cdot x^{\frac{2}{3}} = x^{2+\frac{2}{3}} = x^{\frac{8}{3}}.$$

Sada deriviramo po pravilu za derivaciju potencije:

$$y' = \frac{8}{3} \cdot x^{\frac{8}{3}-1} = \frac{8}{3} \cdot x^{\frac{5}{3}} = \frac{8}{3} \cdot \sqrt[3]{x^5} = \begin{bmatrix} \text{djelomično} \\ \text{korjenovanje} \end{bmatrix} = \frac{8}{3} \cdot \sqrt[3]{x^3 \cdot x^2} = \frac{8}{3} \cdot \sqrt[3]{x^3} \cdot \sqrt[3]{x^2} = \frac{8}{3} x \cdot \sqrt[3]{x^2}.$$

Vježba 003

Nađite derivaciju funkcije

$$y = x \cdot \sqrt{x}.$$

Rezultat: $y' = \frac{3}{2} \cdot \sqrt{x}.$

Zadatak 004 (Ana, gimnazija)

Nađi jednadžbu tangente krivulje $y = \sqrt{x}$ u točki s apscisom 1.

Rješenje 004

Ponovimo!

Tablično deriviranje	
Funkcija	**Derivacija**
$\sqrt{x}$	$\frac{1}{2 \cdot \sqrt{x}}$

Budući da točka D pripada krivulji, uvrstit ćemo apscisu $x_0 = 1$ u jednadžbu krivulje da dobijemo ordinatu točke:

$$y_0 = \sqrt{x_0} = \sqrt{1} = 1.$$

Tražena točka ima koordinate D(1, 1).

Jednadžba tangente u točki $D(x_0, y_0)$ krivulje $y = f(x)$ glasi:

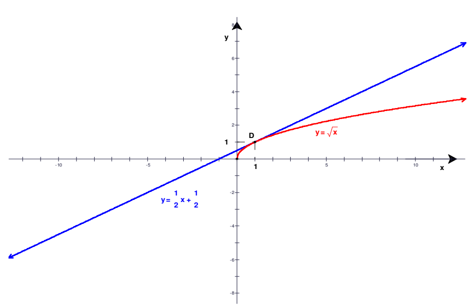
$$y - y_0 = f'(x_0) \cdot (x - x_0).$$

Nađemo derivaciju funkcije:

$$f'(x) = \frac{1}{2 \cdot \sqrt{x}}$$

i izračunamo njezinu vrijednost za $x_0 = 1$

$$f'(x_0) = f'(1) = \frac{1}{2 \cdot \sqrt{1}} = \frac{1}{2 \cdot 1} = \frac{1}{2}.$$



Jednadžba tangente je:

$$y - y_0 = f'(x_0) \cdot \left(x - x_0\right) \Rightarrow y - 1 = \frac{1}{2} \cdot (x - 1) \Rightarrow y - 1 = \frac{1}{2} x - \frac{1}{2} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow y = \frac{1}{2} x - \frac{1}{2} + 1 \Rightarrow y = \frac{1}{2} x + \frac{1}{2}.$$

Vježba 004

Nađi jednadžbu tangente krivulje $y = \sqrt{x}$ u točki s apscisom 4.

Rezultat: $y = \frac{1}{4} x + 1.$

Zadatak 005 (Ana, gimnazija)

Izračunaj derivaciju funkcije $f(x) = \dfrac{1 - \sqrt[3]{x}}{\sqrt[3]{x}}.$

Rješenje 005

Ponovimo!

Tablično deriviranje	
Funkcija	**Derivacija**
x^n	$n \cdot x^{n-1}$

Funkciju napišemo u obliku:

$$\left[\frac{a-b}{c} = \frac{a}{c} - \frac{b}{c}\right],$$

$$f(x) = \frac{1 - \sqrt[3]{x}}{\sqrt[3]{x}} = \frac{1}{\sqrt[3]{x}} - \frac{\sqrt[3]{x}}{\sqrt[3]{x}} = \frac{1}{\sqrt[3]{x}} - 1.$$

Uporabom pravila:

$$\sqrt[n]{a^m} = a^{\frac{m}{n}} \quad \text{i} \quad \frac{1}{a^n} = a^{-n}$$

zadanu funkciju konačno napišemo:

$$f(x) = \frac{1}{x^{\frac{1}{3}}} - 1 = x^{-\frac{1}{3}} - 1.$$

Derivacija iznosi:

$$f'(x) = -\frac{1}{3} \cdot x^{-\frac{1}{3} - 1} = -\frac{1}{3} \cdot x^{-\frac{4}{3}} = -\frac{1}{3} \cdot \frac{1}{x^{\frac{4}{3}}} = \frac{-1}{3 \cdot \sqrt[3]{x^4}} = \frac{-1}{3 \cdot \sqrt[3]{x^3 \cdot x}} = \frac{-1}{3 \cdot x \cdot \sqrt[3]{x}}.$$

Vježba 005

Izračunaj derivaciju funkcije $f(x) = \dfrac{2 - x}{x}.$

Rezultat: $-\dfrac{2}{x^2}.$

Zadatak 006 (Ana, gimnazija)

Nađi derivaciju funkcije $f(x) = (x^2 + 3)^2$.

Rješenje 006

Ponovimo!

Ako je y = f(u) i u = g(x), tj. y = f(g(x))), a funkcije y i u imaju derivacije, tada je

$$y'_x = y'_u \cdot u'_x \quad \text{ili} \quad \frac{dy}{dx} = \frac{dy}{du} \cdot \frac{du}{dx}.$$

Tablično deriviranje	
Funkcija	**Derivacija**
x^n	$n \cdot x^{n-1}$

1.inačica

Uporabom formule za kvadrat zbroja:

$$(a + b)^2 = a^2 + 2 \cdot a \cdot b + b^2$$

zadanu funkciju pišemo u obliku polinoma:

$$f(x) = (x^2 + 3)^2 = x^4 + 6 \cdot x^2 + 9.$$

Tada je derivacija jednaka:

$$f\,'(x) = 4 \cdot x^3 + 12 \cdot x = 4 \cdot x \cdot (x^2 + 3).$$

2.inačica

Koristimo pravilo za derivaciju složene funkcije:

$$f(x) = (x^2 + 3)^2 \quad \Rightarrow \quad f\,'(x) = 2 \cdot (x^2 + 3) \cdot (x^2 + 3)\,' = 2 \cdot (x^2 + 3) \cdot 2 \cdot x = 4 \cdot x \cdot (x^2 + 3).$$

Vježba 006

Nađi derivaciju funkcije $f(x) = (x^2 + 9)^2$.

Rezultat: $f\,'(x) = 4 \cdot x \cdot (x^2 + 9).$

Zadatak 007 (Ana, gimnazija)

Nađi derivaciju funkcije $f(x) = (\cos x - \sin x)^2$.

Rješenje 007

Ponovimo!

Tablično deriviranje	
Funkcija	**Derivacija**
x^n	$n \cdot x^{n-1}$
sin x	cos x
cos x	– sin x

1.inačica

Uporabom formule za kvadrat razlike:

$$(a - b)^2 = a^2 - 2 \cdot a \cdot b + b^2$$

i trigonometrijskih funkcija dvostrukog argumenta:

$$\cos 2x = \cos^2 x - \sin^2 x \quad , \quad \sin 2x = 2 \cdot \sin x \cdot \cos x$$

zadanu funkciju pišemo u obliku:

$$f(x) = (\cos x - \sin x)^2 = \cos^2 x - 2 \cdot \cos x \cdot \sin x + \sin^2 x = (\cos^2 x + \sin^2 x) - 2 \cdot \cos x \cdot \sin x =$$
$$= [\cos^2 x + \sin^2 x = 1] = 1 - \sin 2x.$$

Tada je derivacija jednaka:

$$f(x) = 1 - \sin 2x \quad \Rightarrow \quad f\,'(x) = -\cos 2x \cdot 2 = -2 \cdot \cos 2x.$$

2.inačica

Koristimo pravilo za derivaciju složene funkcije:

$$f(x) = (\cos x - \sin x)^2 \quad \Rightarrow \quad f\,'(x) = 2 \cdot (\cos x - \sin x) \cdot (\cos x - \sin x)' =$$
$$= 2 \cdot (\cos x - \sin x) \cdot (-\sin x - \cos x) =$$
$$= -2 \cdot (\cos x - \sin x) \cdot (\cos x + \sin x) = [(a - b) \cdot (a + b) = a^2 - b^2] = -2 \cdot (\cos^2 x - \sin^2 x) = -2 \cdot \cos 2x.$$

Vježba 007

Nađi derivaciju funkcije $f(x) = (\sin x + \cos x)^2$.

Rezultat: $f\,'(x) = 2 \cdot \cos 2x.$

Zadatak 008 (Ana, gimnazija)

Odredi prve dvije derivacije funkcije $f(x) = x \cdot \ln x$.

Rješenje 008

Neka su f i g derivabilne funkcije na istom intervalu I. Funkcija $f \cdot g$ je derivabilna i vrijedi:

$(f \cdot g)' = f' \cdot g + f \cdot g'$ (derivacija umnoška).

Tablično deriviranje	
Funkcija	**Derivacija**
x	1
ln x	$\frac{1}{x}$ cos x

Derivacija zadane funkcije glasi:

$$f'(x) = (x)' \cdot \ln x + x \cdot (\ln x)' = 1 \cdot \ln x + x \cdot \frac{1}{x} = \ln x + 1.$$

Druga derivacija funkcije f derivacija je prve derivacije. Zato je:

$$f''(x) = [f'(x)]' = [\ln x + 1]' = \frac{1}{x}.$$

Vježba 008

Odredi prve dvije derivacije funkcije $f(x) = 5 \cdot x^3$.

Rezultat: $f'(x) = 15 \cdot x^2$, $f''(x) = 30 \cdot x$.

Zadatak 009 (Ana, gimnazija)

Odredi je li u točki s apscisom x = 1 funkcija $f(x) = x^2 + 2 \cdot x$ rastuća ili opadajuća.

Rješenje 009

Funkcija f **raste** na intervalu <a, b> onda i samo onda ako je $f'(x) \geq 0$ u svakoj točki x tog intervala.
Funkcija f **pada** na intervalu <a, b> onda i samo onda ako je $f'(x) \leq 0$ u svakoj točki x tog intervala.

Odredimo derivaciju zadane funkcije:

$$f'(x) = 2x + 2.$$

Izračunamo vrijednost derivacije u točki x = 1:

$$f'(1) = 2 \cdot 1 + 2 = 4 > 0.$$

Zbog $f'(1) > 0$ funkcija je rastuća u toj točki.

Vježba 009

Odredi je li u točki s apscisom x = – 2 funkcija $f(x) = x^2 + 2 \cdot x$ rastuća ili opadajuća.

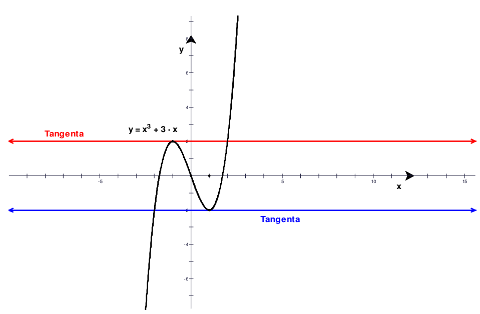
Rezultat: opadajuća.

Zadatak 010 (Ana, gimnazija)

Odredi stacionarne točke za funkciju $f(x) = x^3 - 3 \cdot x$.

Rješenje 010

Točka u kojoj je vrijednost derivacije jednaka nuli zove se **stacionarna točka**. U toj točki tangenta je paralelna s x – osi.



Izračunamo derivaciju f ' :

$$f'(x) = 3 \cdot x^2 - 3.$$

Riješimo jednadžbu $f'(x) = 0$. Njezina rješenja su stacionarne točke.

$$3 \cdot x^2 - 3 = 0 \Rightarrow 3 \cdot x^2 = 3 \;\; / : 3 \Rightarrow x^2 = 1 \Rightarrow x_1 = -1, x_2 = 1.$$

Vježba 010

Odredi stacionarne točke za funkciju $f(x) = x^3 - 12 \cdot x$.

Rezultat: $x_1 = -2, x_2 = 2$.

Zadatak 011 (Natalija, hotelijerska škola)

Zadana je funkcija $f(x)=\sqrt[7]{x^4}+2^{3\cdot x+2}-\log(4\cdot x+2)$. Odredite f ' (1).

Rješenje 011

Ponovimo!

Tablično deriviranje	
Funkcija	**Derivacija**
$\left(x^n\right)'$	$n\cdot x^{n-1}$
$\left(a^x\right)'$ n x	$a^x\cdot\ln a$ $\frac{1}{x}$ cos x
$\left(\log_a x\right)'$	$\frac{1}{x\cdot\ln a}$

$$f(x)=\sqrt[7]{x^4}+2^{3\cdot x+2}-\log(4\cdot x+2)=x^{\frac{4}{7}}+2^{3\cdot x+2}-\log(4\cdot x+2).$$

Deriviramo funkciju:

$$f'(x)=\frac{4}{7}\cdot x^{-\frac{3}{7}}+2^{3\cdot x+2}\cdot\ln 2\cdot 3-\frac{1}{(4\cdot x+2)\cdot\ln 10}\cdot 4=\frac{4}{7}\cdot\frac{1}{\sqrt[7]{x^3}}+3\cdot 2^{3\cdot x+2}\cdot\ln 2-\frac{4}{(4\cdot x+2)\cdot\ln 10}.$$

Sada je:

$$f'(1)=\frac{4}{7}+3\cdot 2^5\cdot\ln 2-\frac{4}{6\cdot\ln 10}=\frac{4}{7}+96\cdot\ln 2-\frac{2}{3\cdot\ln 10}.$$

Vježba 011

Zadana je funkcija $f(x)=2^{3\cdot x+2}-\log(4\cdot x+2)$. Odredite f ' (0).

Rezultat: $12\cdot\ln 2-\frac{2}{\ln 10}.$

Zadatak 012 (Natalija, hotelijerska škola)

Odredite jednadžbu tangente na graf funkcije $f(x)=\frac{2^x}{x}$ u točki $x_0 = 2$.

Rješenje 012

Odredimo ordinatu točke $T(2, y_0)$ koja leži na grafu funkcije:

$$\left.\begin{array}{l} x_0=2 \\ y_0=f\left(x_0\right) \end{array}\right\} \Rightarrow y_0=f(2)=\frac{2^2}{2}=\frac{4}{2}=2 \Rightarrow T\left(x_0, y_0\right)=T(2, 2).$$

Nađemo derivaciju funkcije:

$$f'(x)=\frac{2^x\cdot\ln 2\cdot x-2^x\cdot 1}{x^2}=\frac{2^x\cdot(x\cdot\ln 2-1)}{x^2} \Rightarrow f'(2)=\frac{2^2\cdot(2\cdot\ln 2-1)}{2^2}=2\cdot\ln 2-1=\ln 4-\ln e=\ln\frac{4}{e}.$$

Jednadžba tangente glasi:

$$y-y_0=f'\left(x_0\right)\cdot\left(x-x_0\right) \Rightarrow y-2=\ln\frac{4}{e}\cdot(x-2) \Rightarrow y=\ln\frac{4}{e}\cdot x-2\cdot\ln\frac{4}{e}+2 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow y=\ln\frac{4}{e}\cdot x+\ln\frac{e^2}{16}+\ln e^2 \Rightarrow y=\ln\frac{4}{e}\cdot x+\ln\frac{e^4}{16}.$$

Vježba 012

Odredite jednadžbu tangente na graf funkcije $f(x)=\frac{2^x}{x}$ u točki $x_0 = 1$.

Rezultat: $y-2=\ln\frac{4}{e^2}\cdot(x-1).$

Zadatak 013 (Marija, gimnazija)

Nađite derivaciju funkcije $y=\ln tg\,\frac{x}{2}.$

Rješenje 013

Ponovimo derivacije elementarnih funkcija:

$$\left\{ y=\ln x \Rightarrow y'=\frac{1}{x}, \quad y=tg\,x \Rightarrow y'=\frac{1}{\cos^2 x}, \quad y=\frac{x}{2} \Rightarrow y=\frac{1}{2}. \right.$$

Budući da je zadana složena funkcija, vrijedi:

- ako je y = f(u), u = g(v), v = h(x), tada je $y'=\frac{dy}{du}\cdot\frac{du}{dv}\cdot\frac{dv}{dx}.$

Derivacija funkcije je:

$$y=\ln tg\,\frac{x}{2} \Rightarrow y'=\frac{1}{tg\,\frac{x}{2}}\cdot\frac{1}{\cos^2\frac{x}{2}}\cdot\frac{1}{2}=\frac{1}{\frac{\sin\frac{x}{2}}{\cos\frac{x}{2}}}\cdot\frac{1}{\cos^2\frac{x}{2}}\cdot\frac{1}{2}=\frac{1}{\sin\frac{x}{2}\cdot\cos\frac{x}{2}}\cdot\frac{1}{2}=\frac{1}{2\cdot\sin\frac{x}{2}\cdot\cos\frac{x}{2}}=$$

$$=\left[2\cdot\sin\alpha\cdot\cos\alpha=\sin 2\alpha\right]=\frac{1}{\sin x}.$$

Vježba 013

Nađite derivaciju funkcije $y=\ln\frac{x}{2}..$

Rezultat: $\frac{1}{x}.$

Zadatak 014 (Marija, gimnazija)

Nađite derivaciju funkcije $y=\sin^6 x+\cos^6 x.$

Rješenje 014

Derivacija zbroja glasi:

$$y=u(x)+v(x) \Rightarrow y'=u'+v'.$$

Derivacije elementarnih funkcija su:

$$\left\{ y=\sin x \Rightarrow y'=\cos x, \quad y=\cos x \Rightarrow y'=-\sin x. \right.$$

Budući da je zadana složena funkcija, vrijedi:

- ako je y = f(u), u = g(x), tada je $y'=\frac{dy}{du}\cdot\frac{du}{dx}.$

Derivacija funkcije je:

$$y=\sin^6 x+\cos^6 x \Rightarrow y'=6\cdot\sin^5 x\cdot\cos x+6\cdot\cos^5 x\cdot(-\sin x)=6\cdot\sin^5 x\cdot\cos x-6\cdot\cos^5 x\cdot\sin x=$$

$$=6\cdot\sin x\cdot\cos x\cdot\left(\sin^4 x-\cos^4 x\right)=6\cdot\sin x\cdot\cos x\cdot\underbrace{\left(\sin^2 x+\cos^2 x\right)}_{1}\cdot\left(\sin^2 x-\cos^2 x\right)=$$

$$=6\cdot\sin x\cdot\cos x\cdot\left(\sin^2 x-\cos^2 x\right)=-6\cdot\sin x\cdot\cos x\cdot\underbrace{\left(\cos^2 x-\sin^2 x\right)}_{\cos 2x}=-6\cdot\sin x\cdot\cos x\cdot\cos 2x=$$

$$= -3 \cdot \underbrace{2 \cdot \sin x \cdot \cos x}_{\sin 2x} \cdot \cos 2x = -3 \cdot \sin 2x \cdot \cos 2x = -\frac{3}{2} \cdot \underbrace{2 \cdot \sin 2x \cdot \cos 2x}_{\sin 4x} = -\frac{3}{2} \cdot \sin 4x.$$

Vježba 014

Nađite derivaciju funkcije $y = \sin^4 x - \cos^4 x.$.

Rezultat: 2 · sin 2x.

Zadatak 015 (Ivana, Goran, Jelena, Edita, ekonomski fakultet)

Dokažite da je derivacija sinusa jednaka kosinusu istog argumenta: (sin x) ' = cos x.

Rješenje 015

$$(\sin x)' = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\sin(x + \Delta x) - \sin x}{\Delta x} = \left[\begin{array}{l} \text{koristimo transformaciju} \\ \sin \alpha - \sin \beta = 2 \cdot \cos \frac{\alpha + \beta}{2} \cdot \sin \frac{\alpha - \beta}{2} \end{array}\right] =$$

$$= \lim_{\Delta x \to 0} \frac{2 \cdot \cos \frac{x + \Delta x + x}{2} \cdot \sin \frac{x + \Delta x - x}{2}}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{2 \cdot \cos \frac{2 \cdot x + \Delta x}{2} \cdot \sin \frac{\Delta x}{2}}{\Delta x} =$$

$$= \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\cos \frac{2 \cdot x + \Delta x}{2} \cdot \sin \frac{\Delta x}{2}}{\frac{\Delta x}{2}} = \lim_{\Delta x \to 0} \cos \frac{2 \cdot x + \Delta x}{2} \cdot \frac{\sin \frac{\Delta x}{2}}{\frac{\Delta x}{2}} = \left[\begin{array}{l} \text{limes produkta jednak} \\ \text{je produktu limesa} \end{array}\right] =$$

$$= \lim_{\Delta x \to 0} \cos \frac{2 \cdot x + \Delta x}{2} \cdot \lim_{\frac{\Delta x}{2} \to 0} \frac{\sin \frac{\Delta x}{2}}{\frac{\Delta x}{2}} = \left[\lim_{x \to 0} \frac{\sin x}{x} = 1 \right] = \cos \frac{2 \cdot x + 0}{2} \cdot 1 = \cos \frac{2 \cdot x}{2} = \cos x.$$

Vježba 015

Dokažite da je: (cos x) ' = – sin x.

Rezultat: Sličan dokaz.

Zadatak 016 (Ivana, Goran, Jelena, Edita, ekonomski fakultet)

Dokažite da je derivacija sinusa jednaka kosinusu istog argumenta: (sin x) ' = cos x.

Rješenje 016

$$(\sin x)' = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\sin(x + \Delta x) - \sin x}{\Delta x} = \left[\begin{array}{l} \text{koristimo transformaciju} \\ \sin \alpha - \sin \beta = 2 \cdot \cos \frac{\alpha + \beta}{2} \cdot \sin \frac{\alpha - \beta}{2} \end{array}\right] =$$

$$= \lim_{\Delta x \to 0} \frac{2 \cdot \cos \frac{x + \Delta x + x}{2} \cdot \sin \frac{x + \Delta x - x}{2}}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{2 \cdot \cos \frac{2 \cdot x + \Delta x}{2} \cdot \sin \frac{\Delta x}{2}}{\Delta x} =$$

$$= \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\cos \frac{2 \cdot x + \Delta x}{2} \cdot \sin \frac{\Delta x}{2}}{\frac{\Delta x}{2}} = \lim_{\Delta x \to 0} \cos \frac{2 \cdot x + \Delta x}{2} \cdot \frac{\sin \frac{\Delta x}{2}}{\frac{\Delta x}{2}} = \left[\begin{array}{l} \text{limes produkta jednak} \\ \text{je produktu limesa} \end{array}\right] =$$

$$= \lim_{\Delta x \to 0} \cos \frac{2 \cdot x + \Delta x}{2} \cdot \lim_{\frac{\Delta x}{2} \to 0} \frac{\sin \frac{\Delta x}{2}}{\frac{\Delta x}{2}} = \left[\lim_{x \to 0} \frac{\sin x}{x} = 1 \right] = \cos \frac{2 \cdot x + 0}{2} \cdot 1 = \cos \frac{2 \cdot x}{2} = \cos x.$$

Vježba 016

Dokažite da je: (cos x) ' = – sin x.

Rezultat: Sličan dokaz.

Zadatak 017 (Ivana, Goran, Jelena, Edita, ekonomski fakultet)

Nađite derivaciju funkcije $f(x)=3\cdot x^2+5\cdot x+2.$.

Rješenje 017

Ponovimo!

$$\text{Derivacija zbroja}: (f+g)'=f'+g'.$$

Derivacija umnoška konstantnog faktora i funkcije: $(c\cdot f(x))' = c\cdot f'(x)$

$$\text{Derivacija potencije}: \left(x^n\right)'=n\cdot x^{n-1}.$$

$$(f(x))'=\left(3\cdot x^2+5\cdot x+2\right)'=\begin{bmatrix}\text{koristimo pravilo}\\ \text{derivacije zbroja}\end{bmatrix}=\left(3\cdot x^2\right)'+(5\cdot x)'+2'=\begin{bmatrix}\text{koristimo pravilo za umnožak}\\ \text{konstante i funkcije}\end{bmatrix}=$$

$$=3\cdot\left(x^2\right)'+5\cdot x'+2'=\begin{bmatrix}\text{koristimo}\\ \text{tablične derivacije}\end{bmatrix}=3\cdot 2\cdot x+5\cdot 1+0=6\cdot x+5.$$

Vježba 017

Nađite derivaciju funkcije $f(x)=4\cdot x^2+3\cdot x+2.$

Rezultat: $8\cdot x+3.$

Zadatak 018 (Ivana, Goran, Jelena, Edita, ekonomski fakultet)

Nađite derivaciju funkcije $y=\left(x^2-6\cdot x+8\right)^4.$

Rješenje 018

Ponovimo!

$$\text{Derivacija zbroja}: (f+g)'=f'+g'.$$

Derivacija umnoška konstantnog faktora i funkcije: $(c\cdot f(x))' = c\cdot f'(x)$

$$\text{Derivacija potencije}: \left(x^n\right)'=n\cdot x^{n-1}.$$

$$\text{Derivacija složene funkcije}: \frac{dy}{dx}=\frac{dy}{du}\cdot\frac{du}{dx} \text{ ili } y'(x)=y'(u)\cdot u'(x).$$

Složena funkcija derivira se tako da se najprije derivira po posrednoj funkciji kao argumentu i dobiveni rezultat pomnoži derivacijom posredne funkcije.

1.inačica

$$\left.\begin{array}{l} y=\left(x^2-6\cdot x+8\right)^4 \\ u=x^2-6\cdot x+8 \end{array}\right\} \Rightarrow \left.\begin{array}{l} y=u^4 \\ u=x^2-6\cdot x+8 \end{array}\right\} \Rightarrow \left.\begin{array}{l} y'=4\cdot u^3\cdot u' \\ u'=2\cdot x-6 \end{array}\right\} \Rightarrow y'=4\cdot\left(x^2-6\cdot x+8\right)^3\cdot(2\cdot x-6).$$

2.inačica

$$y=\left(x^2-6\cdot x+8\right)^4 \Rightarrow y'=\left(\left(x^2-6\cdot x+8\right)^4\right)' \Rightarrow y'=4\cdot\left(x^2-6\cdot x+8\right)^3\cdot\left(x^2-6\cdot x+8\right)' \Rightarrow$$

$$\Rightarrow y'=4\cdot\left(x^2-6\cdot x+8\right)^3\cdot(2\cdot x-6).$$

Vježba 018

Nađite derivaciju funkcije $y=\left(x^2-5\cdot x+6\right)^3.$

Rezultat: $y'=3\cdot\left(x^2-5\cdot x+6\right)^2\cdot(2\cdot x-5).$

Zadatak 019 (Ivana, Goran, Jelena, Edita, ekonomski fakultet)

Nađite derivaciju funkcije $y = \ln\left(x^2 + 2 \cdot x\right)$.

Rješenje 019

Ponovimo!

$$\text{Derivacija zbroja}: \ (f+g)' = f' + g'.$$

Derivacija umnoška konstantnog faktora i funkcije: $(c \cdot f(x))' = c \cdot f'(x)$

$$\text{Derivacija potencije}: \ \left(x^n\right)' = n \cdot x^{n-1}.$$

$$\text{Derivacija složene funkcije: } \frac{dy}{dx} = \frac{dy}{du} \cdot \frac{du}{dx} \text{ ili } y'(x) = y'(u) \cdot u'(x).$$

Složena funkcija derivira se tako da se najprije derivira po posrednoj funkciji kao argumentu i dobiveni rezultat pomnoži derivacijom posredne funkcije.

1.inačica

$$\left.\begin{array}{l} y = \ln\left(x^2 + 2 \cdot x\right) \\ u = x^2 + 2 \cdot x \end{array}\right\} \Rightarrow \left.\begin{array}{l} y = \ln u \\ u = x^2 + 2 \cdot x \end{array}\right\} \Rightarrow \left.\begin{array}{l} y' = \frac{1}{u} \cdot u' \\ u' = 2 \cdot x + 2 \end{array}\right\} \Rightarrow y' = \frac{1}{x^2 + 2 \cdot x} \cdot (2 \cdot x + 2) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow y' = \frac{2 \cdot x + 2}{x^2 + 2 \cdot x} \Rightarrow y' = \frac{2 \cdot (x+1)}{x \cdot (x+2)}.$$

2.inačica

$$y = \ln\left(x^2 + 2 \cdot x\right) \Rightarrow y' = \left(\ln\left(x^2 + 2 \cdot x\right)\right)' \Rightarrow y' = \frac{1}{x^2 + 2 \cdot x} \cdot \left(x^2 + 2 \cdot x\right)' \Rightarrow y' = \frac{1}{x^2 + 2 \cdot x} \cdot (2 \cdot x + 2) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow y' = \frac{2 \cdot x + 2}{x^2 + 2 \cdot x} \Rightarrow y' = \frac{2 \cdot (x+1)}{x \cdot (x+2)}.$$

Vježba 019

Nađite derivaciju funkcije $y = \ln\left(x^2 + 4 \cdot x\right)$.

Rezultat: $y' = \frac{2 \cdot (x+2)}{x \cdot (x+4)}.$

Zadatak 020 (Ivana, Goran, Jelena, Edita, ekonomski fakultet)

Nađite derivaciju funkcije $y = a \cdot \sin(b \cdot x + c) + d$.

Rješenje 020

Ponovimo!

$$\text{Derivacija zbroja}: \ (f+g)' = f' + g'.$$

Derivacija umnoška konstantnog faktora i funkcije: $(c \cdot f(x))' = c \cdot f'(x)$

$$\text{Derivacija potencije}: \ \left(x^n\right)' = n \cdot x^{n-1}.$$

$$\text{Derivacija složene funkcije: } \frac{dy}{dx} = \frac{dy}{du} \cdot \frac{du}{dx} \text{ ili } y'(x) = y'(u) \cdot u'(x).$$

Složena funkcija derivira se tako da se najprije derivira po posrednoj funkciji kao argumentu i dobiveni rezultat pomnoži derivacijom posredne funkcije.

1.inačica

$$\left.\begin{array}{l} y = a \cdot \sin(b \cdot x + c) + d \\ u = b \cdot x + c \end{array}\right\} \Rightarrow \left.\begin{array}{l} y = a \cdot \sin u + d \\ u = b \cdot x + c \end{array}\right\} \Rightarrow \left.\begin{array}{l} y' = a \cdot \cos u \cdot u' + 0 \\ u' = b \cdot 1 + 0 \end{array}\right\} \Rightarrow \left.\begin{array}{l} y' = a \cdot \cos u \cdot u' \\ u' = b \end{array}\right\} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \; y' = a \cdot \cos(b \cdot x + c) \cdot b \;\Rightarrow\; y' = a \cdot b \cdot \cos(b \cdot x + c).$$

2.inačica

$$y = a \cdot \sin(b \cdot x + c) + d \;\Rightarrow\; y' = \left(a \cdot \sin(b \cdot x + c) + d\right)' \;\Rightarrow\; y' = a \cdot \cos(b \cdot x + c) \cdot (b \cdot x + c)' + 0 \;\Rightarrow$$

$$\Rightarrow \; y' = a \cdot \cos(b \cdot x + c) \cdot b \;\Rightarrow\; y' = a \cdot b \cdot \cos(b \cdot x + c).$$

Vježba 020

Nađite derivaciju funkcije $y = a \cdot \sin(b \cdot x)$.

Rezultat: $y' = a \cdot b \cdot \cos(b \cdot x)$.