Zadatak 021 (Matija, gimnazija)

Odredite graničnu vrijednost (limes): $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\sqrt{n}-\sqrt{n+1}\right)$.

Rješenje 021

Ponovimo!

$$(a-b)\cdot(a+b)=a^2-b^2 \quad , \quad \lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}=0$$

$$\lim_{n\to\infty}\left(\sqrt{n}-\sqrt{n+1}\right)=\left[\begin{array}{c}\text{pomnožimo s}\\ \dfrac{\sqrt{n}+\sqrt{n+1}}{\sqrt{n}+\sqrt{n+1}}\end{array}\right]=\lim_{n\to\infty}\left(\sqrt{n}-\sqrt{n+1}\right)\cdot\frac{\sqrt{n}+\sqrt{n+1}}{\sqrt{n}+\sqrt{n+1}}=$$

$$=\lim_{n\to\infty}\frac{\left(\sqrt{n}-\sqrt{n+1}\right)\cdot\left(\sqrt{n}+\sqrt{n+1}\right)}{\sqrt{n}+\sqrt{n+1}}=\lim_{n\to\infty}\frac{n-n-1}{\sqrt{n}+\sqrt{n+1}}=\lim_{n\to\infty}\frac{-1}{\sqrt{n}+\sqrt{n+1}}=0.$$

Vježba 021

Odredite graničnu vrijednost (limes): $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\sqrt{n}-\sqrt{n+2}\right)$.

Rezultat: 0.

Zadatak 022 (Matija, gimnazija)

Izračunaj graničnu vrijednost (limes): $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{\sqrt{n}}{n+1}$.

Rješenje 022

Ponovimo!

$$\lim_{n\to\infty}\frac{a_n}{b_n}=\frac{\lim\limits_{n\to\infty}a_n}{\lim\limits_{n\to\infty}b_n}\ ,\ \lim_{n\to\infty}b_n\neq 0 \quad , \quad \lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}=0.$$

Podijelimo brojnik i nazivnik s najvećom potencijom od n koja se uopće pojavljuje. U našem slučaju dijelimo s n:

$$\lim_{n\to\infty}\frac{\sqrt{n}}{n+1}=\lim_{n\to\infty}\frac{\frac{\sqrt{n}}{n}}{\frac{n+1}{n}}=\lim_{n\to\infty}\frac{\frac{\sqrt{n}}{\left(\sqrt{n}\right)^2}}{\frac{n}{n}+\frac{1}{n}}=\lim_{n\to\infty}\frac{\frac{1}{\sqrt{n}}}{1+\frac{1}{n}}=\frac{\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1}{\sqrt{n}}}{\lim\limits_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)}=\frac{\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1}{\sqrt{n}}}{1+\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1}{n}}=\frac{0}{1+0}=0.$$

Vježba 022

Izračunaj graničnu vrijednost (limes): $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{\sqrt{n}}{n+2}$.

Rezultat: 0.

Zadatak 023 (Ivana, studentica)

Izračunaj graničnu vrijednost (limes): $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1-e^{-x}}{\sin x}$.

Rješenje 023

Ponovimo!

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{x}=1 \quad , \quad \lim_{x\to 0}\frac{\ln(1+x)}{x}=1 \quad , \quad \ln e=1..$$

Proširimo nazivnik s x:

$$\lim_{x\to 0}\frac{1-e^{-x}}{\sin x}=\lim_{x\to 0}\frac{1-e^{-x}}{\frac{\sin x}{x}\cdot x}=\lim_{x\to 0}\left[\frac{1}{\frac{\sin x}{x}}\cdot\frac{1-e^{-x}}{x}\right]=\lim_{x\to 0}\frac{1}{\frac{\sin x}{x}}\cdot\lim_{x\to 0}\frac{1-e^{-x}}{x}=$$

$$=\frac{1}{\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sin x}{x}}\cdot\lim_{x\to 0}\frac{1-e^{-x}}{x}=\frac{1}{1}\cdot\lim_{x\to 0}\frac{1-e^{-x}}{x}=1\cdot\lim_{x\to 0}\frac{1-e^{-x}}{x}=\lim_{x\to 0}\frac{1-e^{-x}}{x}=$$

$$=\left[\begin{array}{c}\text{supstitucija}\\ 1-e^{-x}=-y\ \Rightarrow\ 1+y=e^{-x}\ /\ln\ \Rightarrow\ \ln(1+y)=-x\cdot\ln e\ \Rightarrow\ \ln(1+y)=-x\ \Rightarrow\ x=-\ln(1+y)\\ x\to 0\ \Rightarrow\ y\to 0\end{array}\right]=$$

$$=\lim_{y\to 0}\frac{-y}{-\ln(1+y)}=\lim_{y\to 0}\frac{y}{\ln(1+y)}=\lim_{y\to 0}\frac{1}{\frac{\ln(1+y)}{y}}=\frac{1}{\lim\limits_{y\to 0}\frac{\ln(1+y)}{y}}=\frac{1}{1}=1.$$

Vježba 023

Izračunaj graničnu vrijednost (limes): $\lim\limits_{x\to 0}\frac{1-e^{x}}{\sin x}$.

Rezultat: -1.

Zadatak 024 (Ivana, studentica)

Izračunaj graničnu vrijednost (limes): $\lim\limits_{x\to 1}\frac{x^{x}-1}{x\cdot\ln x}$.

Rješenje 024

Ponovimo!

$$\lim_{x\to 0}\frac{\ln(1+x)}{x}=1.$$

$$\lim_{x\to 1}\frac{x^{x}-1}{x\cdot\ln x}=\left[\begin{array}{c}\text{supstitucija}\\ x^{x}-1=y\ \Rightarrow\ x^{x}=1+y\ /\ln\ \Rightarrow\ x\cdot\ln x=\ln(1+y)\\ x\to 1\ \Rightarrow\ y\to 0\end{array}\right]=\lim_{y\to 0}\frac{y}{\ln(1+y)}=$$

$$=\lim_{y\to 0}\frac{1}{\frac{\ln(1+y)}{y}}=\frac{1}{\lim\limits_{y\to 0}\frac{\ln(1+y)}{y}}=\frac{1}{1}=1.$$

Vježba 024

Izračunaj graničnu vrijednost (limes): $\lim\limits_{x\to 1}\frac{x^{x}-1}{2\cdot x\cdot\ln x}$.

Rezultat: $\frac{1}{2}$.

Zadatak 025 (Ivana, studentica)

Izračunaj graničnu vrijednost (limes): $\lim\limits_{x\to 0}\frac{8^{x}-7^{x}}{6^{x}-5^{x}}$.

Rješenje 025

Ponovimo!

$$\lim_{x\to 0}\frac{a^x-1}{x}=\ln a \quad , \quad \frac{a^x}{b^x}=\left(\frac{a}{b}\right)^x \quad , \quad a^0=1.$$

$$\lim_{x\to 0}\frac{8^x-7^x}{6^x-5^x}=\lim_{x\to 0}\frac{7^x\cdot\left[\frac{8^x}{7^x}-1\right]}{5^x\cdot\left[\frac{6^x}{5^x}-1\right]}=\lim_{x\to 0}\left(\frac{7}{5}\right)^x\cdot\frac{\frac{8^x}{7^x}-1}{\frac{6^x}{5^x}-1}=\lim_{x\to 0}\left(\frac{7}{5}\right)^x\cdot\frac{\left(\frac{8}{7}\right)^x-1}{\left(\frac{6}{5}\right)^x-1}=$$

$$=\lim_{x\to 0}\left(\frac{7}{5}\right)^x\cdot\lim_{x\to 0}\frac{\left(\frac{8}{7}\right)^x-1}{\left(\frac{6}{5}\right)^x-1}=\left(\frac{7}{5}\right)^0\cdot\lim_{x\to 0}\frac{\left(\frac{8}{7}\right)^x-1}{\left(\frac{6}{5}\right)^x-1}=1\cdot\lim_{x\to 0}\frac{\left(\frac{8}{7}\right)^x-1}{\left(\frac{6}{5}\right)^x-1}=\lim_{x\to 0}\frac{\left(\frac{8}{7}\right)^x-1}{\left(\frac{6}{5}\right)^x-1}=$$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{\frac{\left(\frac{8}{7}\right)^x-1}{x}}{\frac{\left(\frac{6}{5}\right)^x-1}{x}}=\frac{\lim\limits_{x\to 0}\frac{\left(\frac{8}{7}\right)^x-1}{x}}{\lim\limits_{x\to 0}\frac{\left(\frac{6}{5}\right)^x-1}{x}}=\frac{\ln\frac{8}{7}}{\ln\frac{6}{5}}=\frac{\ln 8-\ln 7}{\ln 6-\ln 5}.$$

Vježba 025

Izračunaj graničnu vrijednost (limes): $\lim\limits_{x\to 0}\frac{7^x-6^x}{6^x-5^x}.$

Rezultat: $\frac{\ln 7-\ln 6}{\ln 6-\ln 5}.$

Zadatak 026 (Ivana, studentica)

Izračunaj graničnu vrijednost (limes): $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\ln\cos x}{x^2}.$

Rješenje 026

Ponovimo!

Razvoj funkcije u red potencije: $\ln\cos x=-\frac{x^2}{2}-\frac{x^4}{12}-\frac{x^6}{45}-\frac{17\cdot x^8}{2520}-\ \dots.$

$$\lim_{x\to 0}\frac{\ln\cos x}{x^2}=\lim_{x\to 0}\frac{1}{x^2}\cdot\ln\cos x=\lim_{x\to 0}\frac{1}{x^2}\cdot\left(-\frac{x^2}{2}-\frac{x^4}{12}-\frac{x^6}{45}-\frac{17\cdot x^8}{2520}-\ \dots\right)=$$

$$=\lim_{x\to 0}\left(-\frac{1}{2}-\frac{x^2}{12}-\frac{x^4}{45}-\frac{17\cdot x^6}{2520}-\ \dots\right)=-\frac{1}{2}-\frac{0^2}{12}-\frac{0^4}{45}-\frac{17\cdot 0^6}{2520}-\ \dots=-\frac{1}{2}.$$

Vježba 026

Izračunaj graničnu vrijednost (limes): $\lim\limits_{x\to 0}\frac{2\cdot\ln\cos x}{x^2}.$

Rezultat: $-1.$

Zadatak 027 (Ivana, studentica)

Izračunaj graničnu vrijednost (limes): $\lim\limits_{x\to 0}\frac{(1+x)^3-1}{x}.$

Rješenje 027

Ponovimo!

Razlika kubova: $a^3-b^3=(a-b)\cdot\left(a^2+a\cdot b+b^2\right)$, kub zbroja: $(a+b)^3=a^3+3\cdot a^2\cdot b+3\cdot a\cdot b^2+b^3$

kvadrat zbroja: $(a+b)^2=a^2+2\cdot a\cdot b+b^2$

1.inačica

$$\lim_{x\to 0}\frac{(1+x)^3-1}{x}=\lim_{x\to 0}\frac{(1+x-1)\cdot\left((1+x)^2+(1+x)+1\right)}{x}=\lim_{x\to 0}\frac{x\cdot\left(1+2\cdot x+x^2+1+x+1\right)}{x}=$$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{x\cdot\left(1+2\cdot x+x^2+1+x+1\right)}{x}=\lim_{x\to 0}\left(1+2\cdot x+x^2+1+x+1\right)=\lim_{x\to 0}\left(x^2+3\cdot x+3\right)=0^2+3\cdot 0+3=3.$$

2.inačica

$$\lim_{x\to 0}\frac{(1+x)^3-1}{x}=\lim_{x\to 0}\frac{1^3+3\cdot 1^2\cdot x+3\cdot 1\cdot x^2+x^3-1}{x}=\lim_{x\to 0}\frac{1+3\cdot x+3\cdot x^2+x^3-1}{x}=$$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{3\cdot x+3\cdot x^2+x^3}{x}=\lim_{x\to 0}\frac{x\cdot\left(3+3\cdot x+x^2\right)}{x}=\lim_{x\to 0}\frac{x\cdot\left(3+3\cdot x+x^2\right)}{x}=$$

$$=\lim_{x\to 0}\left(3+3\cdot x+x^2\right)=3+3\cdot 0+0^2=3.$$

3.inačica

$$\lim_{x\to 0}\frac{(1+x)^3-1}{x}=\left[\begin{array}{l} x=0\ \Rightarrow\ \frac{(1+0)^3-1}{0}=\frac{1-1}{0}=\frac{0}{0} \\ \text{neodređeni je oblik } \frac{0}{0}\text{, L'Hospitalovo pravilo,} \\ \text{deriviramo posebno brojnik, posebno nazivnik} \end{array}\right]=$$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{\left((1+x)^3-1\right)'}{x'}=\lim_{x\to 0}\frac{3\cdot(1+x)^2\cdot 1-0}{1}=\lim_{x\to 0}\frac{3\cdot(1+x)^2}{1}=\lim_{x\to 0}3\cdot(1+x)^2=3\cdot(1+0)^2=3.$$

Vježba 027

Izračunaj graničnu vrijednost (limes): $\lim\limits_{x\to 0}\frac{(1+x)^2-1}{x}$.

Rezultat: 2.

Zadatak 028 (Ivana, studentica)

Izračunaj graničnu vrijednost (limes): $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{\ln\left(x+\sqrt{x^2+1}\right)}{\ln\left(x+\sqrt{x^2-1}\right)}$.

Rješenje 028

L' Hospitalovo pravilo [čitaj: Lopitál].

Neka zadana funkcija ima oblik količnika $f(x)=\frac{u(x)}{v(x)}$ i neka je za x = a ona jednaka $f(a)=\frac{u(a)}{v(a)}=\frac{0}{0}$ ili $f(a)=\frac{u(a)}{v(a)}=\frac{\infty}{\infty}$, tada je prava vrijednost funkcije f(x) za x = a, tj.

$$f(a)=\lim_{x\to a}\frac{u(x)}{v(x)}=\lim_{x\to a}\frac{u'(x)}{v'(x)}=\lim_{x\to a}\frac{u''(x)}{v''(x)}=\lim_{x\to a}\frac{u'''(x)}{v'''(x)}=\ldots \text{ itd,}$$

dok ne dođemo do određene vrijednosti konačne ili beskonačne. Derivira se posebno brojnik i posebno nazivnik, pri čemu se iza svakog deriviranja dobiveni izraz uredi i uvrsti zadani x = a. Zadatak je riješen, čim dobijemo u brojniku ili u nazivniku konačnu ili beskonačnu vrijednost.

Ponovimo!

$$(\ln x)'=\frac{1}{x}\quad,\quad\left(\sqrt{x}\right)'=\frac{1}{2\cdot\sqrt{x}}\quad,\quad\frac{\sqrt{x}}{\sqrt{y}}=\sqrt{\frac{x}{y}}\quad,\quad\lim_{x\to\infty}\frac{1}{x}=0.$$

$$\lim_{x\to\infty}\frac{\ln\left(x+\sqrt{x^2+1}\right)}{\ln\left(x+\sqrt{x^2-1}\right)}=\left[\begin{array}{c}x\to\infty\\ \text{neodređeni je oblik }\frac{\infty}{\infty}\text{, L'Hospitalovo pravilo,}\\ \text{deriviramo posebno brojnik, posebno nazivnik}\end{array}\right]=\lim_{x\to\infty}\frac{\left(\ln\left(x+\sqrt{x^2+1}\right)\right)'}{\left(\ln\left(x+\sqrt{x^2-1}\right)\right)'}=$$

$$=\lim_{x\to\infty}\frac{\frac{1}{x+\sqrt{x^2+1}}\cdot\left(1+\frac{1}{2\cdot\sqrt{x^2+1}}\cdot 2\cdot x\right)}{\frac{1}{x+\sqrt{x^2-1}}\cdot\left(1+\frac{1}{2\cdot\sqrt{x^2-1}}\cdot 2\cdot x\right)}=\lim_{x\to\infty}\frac{\frac{1}{x+\sqrt{x^2+1}}\cdot\left(1+\frac{1}{2\cdot\sqrt{x^2+1}}\cdot 2\cdot x\right)}{\frac{1}{x+\sqrt{x^2-1}}\cdot\left(1+\frac{1}{2\cdot\sqrt{x^2-1}}\cdot 2\cdot x\right)}=$$

$$=\lim_{x\to\infty}\frac{\frac{1}{x+\sqrt{x^2+1}}\cdot\left(1+\frac{x}{\sqrt{x^2+1}}\right)}{\frac{1}{x+\sqrt{x^2-1}}\cdot\left(1+\frac{x}{\sqrt{x^2-1}}\right)}=\lim_{x\to\infty}\frac{\frac{1}{x+\sqrt{x^2+1}}\cdot\frac{\sqrt{x^2+1}+x}{\sqrt{x^2+1}}}{\frac{1}{x+\sqrt{x^2-1}}\cdot\frac{\sqrt{x^2-1}+x}{\sqrt{x^2-1}}}=\lim_{x\to\infty}\frac{\frac{1}{x+\sqrt{x^2+1}}\cdot\frac{\sqrt{x^2+1}+x}{\sqrt{x^2+1}}}{\frac{1}{x+\sqrt{x^2-1}}\cdot\frac{\sqrt{x^2-1}+x}{\sqrt{x^2-1}}}=$$

$$=\lim_{x\to\infty}\frac{\frac{1}{\sqrt{x^2+1}}}{\frac{1}{\sqrt{x^2-1}}}=\lim_{x\to\infty}\frac{\sqrt{x^2-1}}{\sqrt{x^2+1}}=\lim_{x\to\infty}\sqrt{\frac{x^2-1}{x^2+1}}=\left[\begin{array}{l}\text{brojnik i nazivnik}\\ \text{podijelimo s }x^2\end{array}\right]=\lim_{x\to\infty}\sqrt{\frac{\frac{x^2-1}{x^2}}{\frac{x^2+1}{x^2}}}=$$

$$=\lim_{x\to\infty}\sqrt{\frac{\frac{x^2}{x^2}-\frac{1}{x^2}}{\frac{x^2}{x^2}+\frac{1}{x^2}}}=\lim_{x\to\infty}\sqrt{\frac{1-\frac{1}{x^2}}{1+\frac{1}{x^2}}}=\sqrt{\frac{1-0}{1+0}}=1.$$

Vježba 028

Izračunaj graničnu vrijednost (limes): $\lim_{x\to\infty}\frac{\ln\left(x+\sqrt{x^2+2}\right)}{\ln\left(x+\sqrt{x^2-2}\right)}$.

Rezultat: 1.

Zadatak 029 (Ivana, studentica)

Izračunaj graničnu vrijednost (limes): $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{\ln \sin 2x}{\ln \sin x}.$

Rješenje 029

L' Hospitalovo pravilo [čitaj: Lopitál].

Neka zadana funkcija ima oblik količnika $f(x)=\dfrac{u(x)}{v(x)}$ i neka je za x = a ona jednaka $f(a)=\dfrac{u(a)}{v(a)}=\dfrac{0}{0}$ ili $f(a)=\dfrac{u(a)}{v(a)}=\dfrac{\infty}{\infty}$, tada je prava vrijednost funkcije f(x) za x = a, tj.

$$f(a)=\lim_{x \to a} \frac{u(x)}{v(x)}=\lim_{x \to a} \frac{u'(x)}{v'(x)}=\lim_{x \to a} \frac{u''(x)}{v''(x)}=\lim_{x \to a} \frac{u'''(x)}{v'''(x)}= \ldots \text{ itd,}$$

dok ne dođemo do određene vrijednosti konačne ili beskonačne. Derivira se posebno brojnik i posebno nazivnik, pri čemu se iza svakog deriviranja dobiveni izraz uredi i uvrsti zadani x = a. Zadatak je riješen, čim dobijemo u brojniku ili u nazivniku konačnu ili beskonačnu vrijednost.

Ponovimo!

$$(\ln x)'=\frac{1}{x} \quad , \quad (\sin x)'=\cos x \quad , \quad ctg\, x=\frac{1}{tg\, x} \quad , \quad (tg\, x)'=\frac{1}{\cos^2 x} \quad , \quad \lim_{x \to 0} \cos x=1.$$

$$\lim_{x \to 0} \frac{\ln \sin 2x}{\ln \sin x}=\left[\begin{array}{c} x=0 \Rightarrow \\ \text{neodređeni je oblik } \frac{\infty}{\infty}, \text{ L'Hospitalovo pravilo,} \\ \text{deriviramo posebno brojnik, posebno nazivnik} \end{array}\right]=\lim_{x \to 0} \frac{(\ln \sin 2x)'}{(\ln \sin x)'}=$$

$$=\lim_{x \to 0} \frac{\frac{1}{\sin 2x} \cdot \cos 2x \cdot 2}{\frac{1}{\sin x} \cdot \cos x}=\lim_{x \to 0} \frac{2 \cdot \frac{\cos 2x}{\sin 2x}}{\frac{\cos x}{\sin x}}=\lim_{x \to 0} \frac{2 \cdot ctg\, 2x}{ctg\, x}=\lim_{x \to 0} \frac{2 \cdot tg\, x}{tg\, 2x}=$$

$$=\left[\begin{array}{c} x=0 \Rightarrow \\ \text{neodređeni je oblik } \frac{0}{0}, \\ \text{opet L'Hospitalovo pravilo} \end{array}\right]=\lim_{x \to 0} \frac{(2 \cdot tg\, x)'}{(tg\, 2x)'}=\lim_{x \to 0} \frac{2 \cdot \frac{1}{\cos^2 x}}{\frac{1}{\cos^2 2x} \cdot 2}=\lim_{x \to 0} \frac{\frac{1}{\cos^2 x}}{\frac{1}{\cos^2 2x}}=\lim_{x \to 0} \frac{\cos^2 2x}{\cos^2 x}=\frac{1}{1}=1.$$

Vježba 029

Izračunaj graničnu vrijednost (limes): $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{\ln \sin x}{\ln \sin 2x}.$

Rezultat: 1.

Zadatak 030 (Marinko, tehnička škola)

Odredite graničnu vrijednost (limes): $\lim\limits_{n \to \infty} \dfrac{1+2+3+4+ \ldots +2 \cdot n}{n^2+1}.$

Rješenje 030

Ponovimo!

Za zbroj prvih n prirodnih brojeva vrijedi formula:

$$1+2+3+4+ \ldots +n=\frac{n \cdot (n+1)}{2}.$$

$$\lim_{n \to \infty} \frac{1}{n}=0 \quad , \quad \lim_{n \to \infty} \frac{1}{n^2}=0.$$

Zato je:

$$1+2+3+4+\ \dots\ +2\cdot n=\frac{2\cdot n\cdot(2\cdot n+1)}{2}\ \Rightarrow\ 1+2+3+4+\ \dots\ +2\cdot n=n\cdot(2\cdot n+1).$$

Računamo limes:

$$\lim_{n\to\infty}\frac{1+2+3+4+\ \dots\ +2\cdot n}{n^2+1}=\lim_{n\to\infty}\frac{n\cdot(2\cdot n+1)}{n^2+1}=\lim_{n\to\infty}\frac{2\cdot n^2+n}{n^2+1}=\left[\begin{array}{l}\text{budući da n teži u } \infty,\\ \text{brojnik i nazivnik dijelimo}\\ \text{s potencijom baze n koja ima}\\ \text{najveći eksponent, } n^2\end{array}\right]=$$

$$=\lim_{n\to\infty}\frac{\frac{2\cdot n^2}{n^2}+\frac{n}{n^2}}{\frac{n^2}{n^2}+\frac{1}{n^2}}=\lim_{n\to\infty}\frac{2+\frac{1}{n}}{1+\frac{1}{n^2}}=\frac{2+\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1}{n}}{1+\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1}{n^2}}=\frac{2+0}{1+0}=\frac{2}{1}=2.$$

Vježba 030

Odredite graničnu vrijednost (limes): $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{1+2+3+4+\ \dots\ +2\cdot n}{1+2+3+4+\ \dots\ +n}.$

Rezultat: 4.

Zadatak 031 (Vedrana, gimnazija)

Odredite graničnu vrijednost (limes): $\lim\limits_{h\to 0}\dfrac{(x+h)^3-x^3}{h}.$

Rješenje 031

Ponovimo!

$$(a+b)^3=a^3+3\cdot a^2\cdot b+3\cdot a\cdot b^2+b^3.$$

$$\lim_{h\to 0}\frac{(x+h)^3-x^3}{h}=\lim_{h\to 0}\frac{x^3+3\cdot x^2\cdot h+3\cdot x\cdot h^2+h^3-x^3}{h}=\lim_{h\to 0}\frac{3\cdot x^2\cdot h+3\cdot x\cdot h^2+h^3}{h}=$$

$$=\lim_{h\to 0}\frac{h\cdot\left(3\cdot x^2+3\cdot x\cdot h+h^2\right)}{h}=\lim_{h\to 0}\left(3\cdot x^2+3\cdot x\cdot h+h^2\right)=3\cdot x^2+3\cdot x\cdot 0+0^2=3\cdot x^2.$$

Vježba 031

Odredite graničnu vrijednost (limes): $\lim\limits_{h\to 0}\dfrac{(x+h)^2-x^2}{h}.$

Rezultat: $2\cdot x$.

Zadatak 032 (Vedrana, gimnazija)

Odredite graničnu vrijednost (limes): $\lim\limits_{x\to a}\dfrac{x^2-(a+1)\cdot x+a}{x^3-a^3}.$

Rješenje 032

Ponovimo!

$$a^3-b^3=(a-b)\cdot\left(a^2+a\cdot b+b^2\right).$$

$$\lim_{x\to a}\frac{x^2-(a+1)\cdot x+a}{x^3-a^3}=\lim_{x\to a}\frac{x^2-a\cdot x-x+a}{(x-a)\cdot\left(x^2+x\cdot a+a^2\right)}=\left[\begin{array}{l}\text{u brojniku iz prva dva člana izlučimo } x,\\ \text{a iz druga dva člana izlučimo } -1\end{array}\right]=$$

$$=\lim_{x\to a}\frac{x\cdot(x-a)-1\cdot(x-a)}{(x-a)\cdot\left(x^2+x\cdot a+a^2\right)}=\left[\begin{array}{l}\text{u brojniku izlučimo}\\ \text{zagradu } (x-a)\end{array}\right]=\lim_{x\to a}\frac{(x-a)\cdot(x-1)}{(x-a)\cdot\left(x^2+x\cdot a+a^2\right)}=$$

$$=\lim_{x\to a}\frac{x-1}{x^2+x\cdot a+a^2}=\frac{a-1}{a^2+a\cdot a+a^2}=\frac{a-1}{3\cdot a^2}.$$

Vježba 032

Odredite graničnu vrijednost (limes): $\lim\limits_{x\to a}\dfrac{x^2-(a+1)\cdot x+a}{x^2-a^2}$.

Rezultat: $\dfrac{a-1}{2\cdot a}$.

Zadatak 033 (Vedrana, gimnazija)

Odredite graničnu vrijednost (limes): $\lim\limits_{x\to 1}\left(\dfrac{1}{1-x}-\dfrac{3}{1-x^3}\right)$.

Rješenje 033

Ponovimo!

$$a^3-b^3=(a-b)\cdot\left(a^2+a\cdot b+b^2\right)\quad,\quad a^2-b^2=(a-b)\cdot(a+b).$$

$$\lim_{x\to 1}\left(\frac{1}{1-x}-\frac{3}{1-x^3}\right)=\lim_{x\to 1}\left(\frac{1}{1-x}-\frac{3}{(1-x)\cdot\left(1+x+x^2\right)}\right)=\lim_{x\to 1}\frac{1+x+x^2-3}{(1-x)\cdot\left(1+x+x^2\right)}=$$

$$=\lim_{x\to 1}\frac{x+x^2-2}{(1-x)\cdot\left(1+x+x^2\right)}=\lim_{x\to 1}\frac{x-1+x^2-1}{(1-x)\cdot\left(1+x+x^2\right)}=\lim_{x\to 1}\frac{x-1+(x-1)\cdot(x+1)}{(1-x)\cdot\left(1+x+x^2\right)}=$$

$$=\lim_{x\to 1}\frac{(x-1)+(x-1)\cdot(x+1)}{(1-x)\cdot\left(1+x+x^2\right)}=\left[\begin{array}{l}\text{u brojniku izlučimo}\\ \text{zagradu } (x-1)\end{array}\right]=\lim_{x\to 1}\frac{(x-1)\cdot(1+x+1)}{(1-x)\cdot\left(1+x+x^2\right)}=$$

$$=\left[\begin{array}{l}\text{u brojniku iz zagrade}\\ (x-1)\text{ izlučimo minus}\end{array}\right]=\lim_{x\to 1}\frac{-(1-x)\cdot(1+x+1)}{(1-x)\cdot\left(1+x+x^2\right)}=\lim_{x\to 1}\frac{-(1-x)\cdot(1+x+1)}{(1-x)\cdot\left(1+x+x^2\right)}=-\lim_{x\to 1}\frac{1+x+1}{1+x+x^2}=$$

$$=-\frac{1+1+1}{1+1+1^2}=-\frac{3}{3}=-1.$$

Vježba 033

Odredite graničnu vrijednost (limes): $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{1-x^3}{1-x}$.

Rezultat: 3.

Zadatak 034 (Sanja, informatika)

Odredite graničnu vrijednost (limes): $\lim\limits_{x\to 0}\left(1+\dfrac{1}{x}\right)^x$.

Rješenje 034

Ponovimo!

Važan limes: $\lim\limits_{x\to\infty}\left(1+\dfrac{1}{x}\right)^x=e=2.71828\ldots$ (iracionalan broj, Neperov broj).

Definicija logaritma: $\log_b a=c \Leftrightarrow b^c=a\ ,\ \ln a=b \Leftrightarrow e^b=a.$

Logaritam potencije: $\log a^n=n\cdot\log a\ ,\ \ln a^n=n\cdot\ln a.$

Potencija s eksponentom nula: $a^0=1\ ,\ a\neq 0.$

Ako je funkcija y = f(x) neprekidna u točki a, onda je limes funkcije u točki a jednak funkciji limesa nezavisne varijable x u točki a:

$$\lim_{x \to a} f(x) = f\left(\lim_{x \to a} x\right).$$

Korisno je znati ukoliko egzistira i pozitivno je $\lim_{x \to a} f(x)$, da vrijedi:

$$\lim_{x \to a} (\ln f(x)) = \ln\left(\lim_{x \to a} f(x)\right).$$

Kako se računa limes u slučajevima koji se svode na "neodređene oblike": $\frac{0}{0}, \frac{\infty}{\infty}, 0 \cdot \infty, \infty - \infty, 0^0, \infty^0, 1^\infty$?

Uporabit ćemo L'Hospitalovo pravilo.

- Neodređeni oblici $\frac{0}{0}$ ili $\frac{\infty}{\infty}$

Ako je $h(x) = \frac{f(x)}{g(x)}$ pri čemu su funkcije f(x) i g(x) definirane (u točki a, f(x) i g(x) mogu biti i nedefinirane) u intervalu koji sadrži točku a, i imaju u tom intervalu konačne derivacije (g ' (x) ≠ 0), i ako je:

$$\lim_{x \to a} f(x) = 0 \text{ i } \lim_{x \to a} g(x) = 0 \left(\text{"neodređeni oblik } \frac{0}{0}\text{"}\right)$$

ili

$$\lim_{x \to a} f(x) = \infty \text{ i } \lim_{x \to a} g(x) = \infty \left(\text{"neodređeni oblik } \frac{\infty}{\infty}\text{"}\right)$$

tada je

$$\lim_{x \to a} h(x) = \lim_{x \to a} \frac{f'(x)}{g'(x)}$$

uz uvjet da taj limes postoji ili je jednak ∞ (L'Hospitalovo opravilo). U slučaju da $\lim_{x \to a} \frac{f'(x)}{g'(x)}$ iznova predstavlja neodređeni oblik $\frac{0}{0}$ ili $\frac{\infty}{\infty}$, tada se to pravilo ponovno primjenjuje itd.

- Neodređeni oblik $0 \cdot \infty$

Ako je $h(x) = f(x) \cdot g(x)$ (pod istim uvjetima kao i prethodni slučaj) i

$$\lim_{x \to a} f(x) = 0 \text{ i } \lim_{x \to a} g(x) = \infty \ (\text{"neodređeni oblik } 0 \cdot \infty\text{"})$$

tada za dobivanje limesa $\lim_{x \to a} h(x)$ funkciju pretvaramo u oblik

$$\frac{f(x)}{\frac{1}{g(x)}} \text{ ili } \frac{g(x)}{\frac{1}{f(x)}},$$

što dovodi do slučaja $\frac{0}{0}$ ili $\frac{\infty}{\infty}$.

- Neodređeni oblik ∞^0

Ako je $h(x) = f(x)^{g(x)}$ i $\lim_{x \to a} f(x) = \infty$, $\lim_{x \to a} g(x) = 0$, najprije potražimo limes A izraza

$$\ln f(x) = g(x) \cdot \ln f(x)$$

koji ima oblik 0 · ∞.

Njega prevedemo u oblik $\frac{0}{0}$ ili $\frac{\infty}{\infty}$. Tek na kraju potenciramo, tj. izračunamo e^A.

Zapamtimo!

Da bismo potenciranje transformirali u množenje (tj. da bismo eksponent x "spustili dolje") cijelu jednadžbu logaritmiramo:

$$y = a^x \Rightarrow y = a^x \ /\ln \Rightarrow \ln y = x \cdot \ln a.$$

Zapamtimo!

Da bismo iz logaritamske jednadžbe ln y = x izračunali y koristimo definiciju logaritma:

$$\ln y = x \Rightarrow y = e^x.$$

Rješenje zadatka glasi:

$$y = \lim_{x \to 0} \left(1 + \frac{1}{x}\right)^x \Rightarrow \left[\begin{array}{l} \text{jednadžbu} \\ \text{logaritmiramo} \end{array}\right] \Rightarrow y = \lim_{x \to 0} \left(1 + \frac{1}{x}\right)^x \ /\ln \Rightarrow \ln y = \ln \lim_{x \to 0} \left(1 + \frac{1}{x}\right)^x \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \left[\ln\left(\lim_{x \to a} f(x)\right) = \lim_{x \to a} \left(\ln f(x)\right)\right] \Rightarrow \ln y = \lim_{x \to 0} \left(\ln\left(1 + \frac{1}{x}\right)^x\right) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \ln y = \lim_{x \to 0} \left(x \cdot \ln\left(1 + \frac{1}{x}\right)\right) \Rightarrow \ln y = \lim_{x \to 0} \frac{\ln\left(1 + \frac{1}{x}\right)}{\frac{1}{x}} \Rightarrow \left[\begin{array}{l} \text{supstitucija } \frac{1}{x} = t \\ x \to 0 \Rightarrow t \to \infty \end{array}\right] \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \ln y = \lim_{t \to \infty} \frac{\ln(1+t)}{t} \Rightarrow \left[\begin{array}{l} \text{neodređeni oblik } \frac{\infty}{\infty}, \\ \text{deriviramo po varijabli t} \end{array}\right] \Rightarrow \ln y = \lim_{t \to \infty} \frac{\left(\ln(1+t)\right)'}{t'} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \ln y = \lim_{t \to \infty} \frac{\frac{1}{1+t} \cdot t'}{t'} \Rightarrow \ln y = \lim_{t \to \infty} \frac{\frac{1}{1+t} \cdot 1}{1} \Rightarrow \ln y = \lim_{t \to \infty} \frac{\frac{1}{1+t}}{1} \Rightarrow \ln y = \lim_{t \to \infty} \frac{1}{1+t} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \ln y = 0 \Rightarrow y = e^0 \Rightarrow y = 1.$$

Dakle, rješenje ovog limesa je 1.

Vježba 034

Odredite graničnu vrijednost (limes): $\lim_{x \to 1} \frac{x^2 - 1}{2x - 2}$.

Rezultat: 1.

Zadatak 035 (Sanja, informatika)

Odredite graničnu vrijednost (limes): $\lim_{x \to 0} (ctg\ x)^x$.

Rješenje 035

Ponovimo!

$$tg\ x \cdot ctg\ x = 1 \quad , \quad tg\ x = \frac{\sin x}{\cos x}.$$

Potencija s eksponentom nula: $a^0 = 1$, $a \neq 0$.

Logaritam potencije: $\log a^n = n \cdot \log a$, $\ln a^n = n \cdot \ln a$.

Definicija logaritma: $\log_b a = c \Leftrightarrow b^c = a$, $\ln a = b \Leftrightarrow e^b = a$.

Sinus dvostrukog kuta: $2 \cdot \sin x \cdot \cos x = \sin 2x$.

Ako je funkcija y = f(x) neprekidna u točki a, onda je limes funkcije u točki a jednak funkciji limesa nezavisne varijable x u točki a:

$$\lim_{x\to a} f(x) = f\left(\lim_{x\to a} x\right).$$

Korisno je znati ukoliko egzistira i pozitivno je $\lim_{x\to a} f(x)$, da vrijedi:

$$\lim_{x\to a} \left(\ln f(x)\right) = \ln\left(\lim_{x\to a} f(x)\right).$$

Kako se računa limes u slučajevima koji se svode na "neodređene oblike": $\frac{0}{0}, \frac{\infty}{\infty}, 0\cdot\infty, \infty-\infty, 0^0, \infty^0, 1^\infty$?

Uporabit ćemo L'Hospitalovo pravilo.

- Neodređeni oblici $\frac{0}{0}$ ili $\frac{\infty}{\infty}$

Ako je $h(x) = \frac{f(x)}{g(x)}$ pri čemu su funkcije f(x) i g(x) definirane (u točki a, f(x) i g(x) mogu biti i nedefinirane) u intervalu koji sadrži točku a, i imaju u tom intervalu konačne derivacije (g ' (x) ≠ 0), i ako je:

$$\lim_{x\to a} f(x) = 0 \text{ i } \lim_{x\to a} g(x) = 0 \left(\text{"neodređeni oblik } \frac{0}{0}\text{"}\right)$$

ili

$$\lim_{x\to a} f(x) = \infty \text{ i } \lim_{x\to a} g(x) = \infty \left(\text{"neodređeni oblik } \frac{\infty}{\infty}\text{"}\right)$$

tada je

$$\lim_{x\to a} h(x) = \lim_{x\to a} \frac{f'(x)}{g'(x)}$$

uz uvjet da taj limes postoji ili je jednak ∞ (L'Hospitalovo opravilo). U slučaju da $\lim_{x\to a} \frac{f'(x)}{g'(x)}$ iznova predstavlja neodređeni oblik $\frac{0}{0}$ ili $\frac{\infty}{\infty}$, tada se to pravilo ponovno primjenjuje itd.

- Neodređeni oblik $0\cdot\infty$

Ako je $h(x) = f(x)\cdot g(x)$ (pod istim uvjetima kao i prethodni slučaj) i

$$\lim_{x\to a} f(x) = 0 \text{ i } \lim_{x\to a} g(x) = \infty \left(\text{"neodređeni oblik } 0\cdot\infty\text{"}\right)$$

tada za dobivanje limesa $\lim_{x\to a} h(x)$ funkciju pretvaramo u oblik

$$\frac{f(x)}{\frac{1}{g(x)}} \text{ ili } \frac{g(x)}{\frac{1}{f(x)}},$$

što dovodi do slučaja $\frac{0}{0}$ ili $\frac{\infty}{\infty}$.

- Neodređeni oblik ∞^0

Ako je $h(x) = f(x)^{g(x)}$ i $\lim_{x\to a} f(x) = \infty$, $\lim_{x\to a} g(x) = 0$, najprije potražimo limes A izraza

$$\ln f(x) = g(x)\cdot\ln f(x)$$

koji ima oblik 0 · ∞.

Njega prevedemo u oblik $\frac{0}{0}$ ili $\frac{\infty}{\infty}$. Tek na kraju potenciramo, tj. izračunamo e^A.

Zapamtimo!
Da bismo potenciranje transformirali u množenje (tj. da bismo eksponent x "spustili dolje") cijelu jednadžbu logaritmiramo:

$$y = a^{x} \Rightarrow y = a^{x} \ /\ln \Rightarrow \ln y = x \cdot \ln a.$$

Zapamtimo!
Da bismo iz logaritamske jednadžbe ln y = x izračunali y koristimo definiciju logaritma:

$$\ln y = x \Rightarrow y = e^{x}.$$

Rješenje zadatka glasi:

$$y = \lim_{x \to 0} (ctg\, x)^{x} \Rightarrow \begin{bmatrix} \text{jednadžbu} \\ \text{logaritmiramo} \end{bmatrix} \Rightarrow y = \lim_{x \to 0} (ctg\, x)^{x} \ /\ln \Rightarrow \ln y = \ln \lim_{x \to 0} (ctg\, x)^{x} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \left[\ln\left(\lim_{x \to a} f(x) \right) = \lim_{x \to a} (\ln f(x)) \right] \Rightarrow \ln y = \lim_{x \to 0} \left(\ln (ctg\, x)^{x} \right) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \ln y = \lim_{x \to 0} (x \cdot \ln(ctg\, x)) \Rightarrow \begin{bmatrix} \text{neodređeni} \\ \text{oblik } 0 \cdot \infty \end{bmatrix} \Rightarrow \ln y = \lim_{x \to 0} \frac{\ln(ctg\, x)}{\frac{1}{x}} \Rightarrow \begin{bmatrix} \text{neodređeni} \\ \text{oblik } \frac{\infty}{\infty} \end{bmatrix} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{bmatrix} \text{L'Hospitalovo} \\ \text{pravilo} \end{bmatrix} \Rightarrow \ln y = \lim_{x \to 0} \frac{(\ln(ctg\, x))'}{\left(\frac{1}{x}\right)'} \Rightarrow \ln y = \lim_{x \to 0} \frac{\frac{1}{ctg\, x} \cdot \left(-\frac{1}{\sin^{2} x} \right)}{-\frac{1}{x^{2}}} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \ln y = \lim_{x \to 0} \frac{tg\, x \cdot \frac{1}{\sin^{2} x}}{\frac{1}{x^{2}}} \Rightarrow \ln y = \lim_{x \to 0} \frac{\frac{\sin x}{\cos x} \cdot \frac{1}{\sin^{2} x}}{\frac{1}{x^{2}}} \Rightarrow \ln y = \lim_{x \to 0} \frac{\frac{1}{\cos x \cdot \sin x}}{\frac{1}{x^{2}}} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \ln y = \lim_{x \to 0} \frac{x^{2}}{\cos x \cdot \sin x} \Rightarrow \begin{bmatrix} \text{razlomak proširujemo} \\ \text{brojem } 2 \end{bmatrix} \Rightarrow \ln y = \lim_{x \to 0} \frac{2 \cdot x^{2}}{2 \cdot \cos x \cdot \sin x} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \ln y = \lim_{x \to 0} \frac{2 \cdot x^{2}}{\sin 2x} \Rightarrow \begin{bmatrix} \text{neodređeni} \\ \text{oblik } \frac{0}{0} \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{bmatrix} \text{L'Hospitalovo} \\ \text{pravilo} \end{bmatrix} \Rightarrow \ln y = \lim_{x \to 0} \frac{(2 \cdot x^{2})'}{(\sin 2x)'} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \ln y = \lim_{x \to 0} \frac{4 \cdot x}{\cos 2x \cdot 2} \Rightarrow \ln y = \lim_{x \to 0} \frac{2 \cdot x}{\cos 2x} \Rightarrow \ln y = \frac{2 \cdot 0}{\cos 0} \Rightarrow \ln y = \frac{0}{1} \Rightarrow \ln y = 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow y = e^{0} \Rightarrow y = 1.$$

Vježba 035

Odredite graničnu vrijednost (limes): $\lim_{x \to 0} x^{x}$.

Rezultat: 1.

Zadatak 036 (Marko, student)

Odredite graničnu vrijednost (limes): $\lim_{x \to 0} \frac{\ln(1+x)}{x}$.

Rješenje 036

Ponovimo!
Logaritam potencije: $\log a^{n} = n \cdot \log a$, $\ln a^{n} = n \cdot \ln a$.

Važan limes: $\lim\limits_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n = \lim\limits_{\alpha\to 0}(1+\alpha)^{\frac{1}{\alpha}} = e = 2.71828...$ (iracionalan broj, Neperov broj)

Ako je funkcija y = f(x) neprekidna u točki a, onda je limes funkcije u točki a jednak funkciji limesa nezavisne varijable x u točki a:

$$\lim_{x\to a} f(x) = f\left(\lim_{x\to a} x\right).$$

Korisno je znati ukoliko egzistira i pozitivno je $\lim\limits_{x\to a} f(x)$, da vrijedi:

$$\lim_{x\to a}(\ln f(x)) = \ln\left(\lim_{x\to a} f(x)\right).$$

Kako se računa limes u slučajevima koji se svode na "neodređene oblike": $\frac{0}{0}, \frac{\infty}{\infty}, 0\cdot\infty, \infty-\infty, 0^0, \infty^0, 1^\infty$?

Uporabit ćemo L'Hospitalovo pravilo.

- Neodređeni oblici $\frac{0}{0}$ ili $\frac{\infty}{\infty}$

Ako je $h(x) = \frac{f(x)}{g(x)}$ pri čemu su funkcije f(x) i g(x) definirane (u točki a, f(x) i g(x) mogu biti i nedefinirane) u intervalu koji sadrži točku a, i imaju u tom intervalu konačne derivacije (g ' (x) ≠ 0), i ako je:

$$\lim_{x\to a} f(x) = 0 \text{ i } \lim_{x\to a} g(x) = 0 \left(\text{"neodređeni oblik } \frac{0}{0}\text{"}\right)$$

ili

$$\lim_{x\to a} f(x) = \infty \text{ i } \lim_{x\to a} g(x) = \infty \left(\text{"neodređeni oblik } \frac{\infty}{\infty}\text{"}\right)$$

tada je

$$\lim_{x\to a} h(x) = \lim_{x\to a}\frac{f'(x)}{g'(x)}$$

uz uvjet da taj limes postoji ili je jednak ∞ (L'Hospitalovo opravilo). U slučaju da $\lim\limits_{x\to a}\frac{f'(x)}{g'(x)}$ iznova predstavlja neodređeni oblik $\frac{0}{0}$ ili $\frac{\infty}{\infty}$, tada se to pravilo ponovno primjenjuje itd.

- Neodređeni oblik $0\cdot\infty$

Ako je $h(x) = f(x)\cdot g(x)$ (pod istim uvjetima kao i prethodni slučaj) i

$$\lim_{x\to a} f(x) = 0 \text{ i } \lim_{x\to a} g(x) = \infty \left(\text{"neodređeni oblik } 0\cdot\infty\text{"}\right)$$

tada za dobivanje limesa $\lim\limits_{x\to a} h(x)$ funkciju pretvaramo u oblik

$$\frac{f(x)}{\frac{1}{g(x)}} \text{ ili } \frac{g(x)}{\frac{1}{f(x)}},$$

što dovodi do slučaja $\frac{0}{0}$ ili $\frac{\infty}{\infty}$.

- Neodređeni oblik ∞^0

Ako je $h(x) = f(x)^{g(x)}$ i $\lim\limits_{x\to a} f(x) = \infty$, $\lim\limits_{x\to a} g(x) = 0$, najprije potražimo limes A izraza

$$\ln f(x) = g(x) \cdot \ln f(x)$$

koji ima oblik $0 \cdot \infty$.

Njega prevedemo u oblik $\frac{0}{0}$ ili $\frac{\infty}{\infty}$. Tek na kraju potenciramo, tj. izračunamo e^A.

1. inačica

$$\lim_{x \to 0} \frac{\ln(1+x)}{x} = \lim_{x \to 0} \frac{1}{x} \cdot \ln(1+x) = \lim_{x \to 0} \ln(1+x)^{\frac{1}{x}} = \ln\left(\lim_{x \to 0} (1+x)^{\frac{1}{x}}\right) = \ln e = 1.$$

2. inačica

$$\lim_{x \to 0} \frac{\ln(1+x)}{x} = \left[\begin{matrix} \text{neodređeni oblik } \frac{0}{0}, \\ \text{L'Hospitalovo pravilo} \end{matrix}\right] = \lim_{x \to 0} \frac{(\ln(1+x))'}{x'} = \lim_{x \to 0} \frac{\frac{1}{1+x} \cdot 1}{1} = \lim_{x \to 0} \frac{1}{1+x} = \frac{1}{1+0} = 1.$$

Vježba 036

Odredite graničnu vrijednost (limes): $\lim_{x \to 0} \frac{\ln(1-x)}{x}$.

Rezultat: -1.

Zadatak 037 (Sanja, informatika)

Dokažite graničnu vrijednost (limes): $\lim_{n \to \infty} \frac{3 \cdot n - 2}{n+1} = 3$.

Rješenje 037

Ponovimo!

Neka je zadan neki niz realnih brojeva:

$$a_1, a_2, a_3, a_4, \ldots, a_n, \ldots.$$

Kažemo da je broj A granična vrijednost ili limes (limes ili limit lat. granica) niza (a_n), ako su skoro svi članovi niza po volji blizu broja A i pišemo:

$$\lim_{n \to \infty} a_n = A.$$

Preciznije se to kaže ovako:

Broj A je limes ili granična vrijednost niza (a_n) ako za svaki po volji mali realan broj $\varepsilon > 0$ postoji prirodan broj $n_0 \in N$, tako da vrijedi:

$$n > n_0 \Rightarrow |a_n - A| < \varepsilon.$$

Kažemo još da a_n teži (ili konvergira) prema A i katkad pišemo:

$$a_n \to A \text{ za } n \to \infty.$$

Uvjerimo se da je po ovoj definiciji doista

$$\lim_{n \to \infty} \frac{3 \cdot n - 2}{n+1} = 3.$$

$$\lim_{n \to \infty} \frac{3 \cdot n - 2}{n+1} = 3 \Rightarrow \begin{cases} a_n = \frac{3 \cdot n - 2}{n+1} \\ A = 3. \end{cases}$$

Zadamo si bilo koji po volji mali realan broj $\varepsilon > 0$. Sada želimo (po nepoznanici n) riješiti nejednadžbu:

$$|a_n - A| < \varepsilon \Rightarrow \left|\frac{3 \cdot n - 2}{n+1} - 3\right| < \varepsilon \Rightarrow \left|\frac{3 \cdot n - 2 - 3 \cdot (n+1)}{n+1}\right| < \varepsilon \Rightarrow \left|\frac{3 \cdot n - 2 - 3 \cdot n - 3}{n+1}\right| < \varepsilon \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \left|\frac{-5}{n+1}\right| < \varepsilon \Rightarrow \left[\begin{matrix} \text{po definiciji apsolutne vrijednosti} \\ \text{negativan broj prevodimo u pozitivan} \end{matrix}\right] \Rightarrow \frac{5}{n+1} < \varepsilon \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \left[\frac{a}{b} < \frac{c}{d} \Rightarrow \frac{b}{a} > \frac{d}{c}\right] \Rightarrow \frac{n+1}{5} > \frac{1}{\varepsilon} \Rightarrow \frac{n+1}{5} > \frac{1}{\varepsilon} \; / \cdot 5 \Rightarrow n+1 > \frac{5}{\varepsilon} \Rightarrow n > \frac{5}{\varepsilon} - 1.$$

Nas zanima koji je to prirodan broj $n_0 \in N,$ tako da je ta nejednadžba ispunjena za sve prirodne brojeve

$$n > n_0.$$

Možemo staviti da je:

$$n_0 = \frac{5}{\varepsilon} - 1.$$

Za ε možemo uzeti po volji mali realan broj. Na primjer:

- za ε = 0.01 dobije se

$$n_0 = \frac{5}{0.01} - 1 \Rightarrow n_0 = 500 - 1 \Rightarrow n_0 = 499.$$

Dakle, za sve prirodne brojeve n > 499 je

$$\left|\frac{3 \cdot n - 2}{n+1} - 3\right| < 0.01.$$

- za ε = 0.001 dobije se

$$n_0 = \frac{5}{0.001} - 1 \Rightarrow n_0 = 5000 - 1 \Rightarrow n_0 = 4999.$$

Dakle, za sve prirodne brojeve n > 4999 je

$$\left|\frac{3 \cdot n - 2}{n+1} - 3\right| < 0.001, \text{ itd.}$$

Vježba 037

Dokažite graničnu vrijednost (limes): $\lim\limits_{n \to \infty} \frac{2 \cdot n - 1}{n+1} = 2.$

Rezultat: Dokaz analogan.

Zadatak 038 (Sanja, informatika)

Dokažite da je niz a_n divergentan: $a_n = \frac{n^2 - 1}{n+2}.$

Rješenje 038

Ponovimo!

Neka je zadan neki niz realnih brojeva:

$$a_1, a_2, a_3, a_4, \ldots, a_n, \ldots.$$

Kažemo da je broj A granična vrijednost ili limes (limes ili limit lat. granica) niza (a_n), ako su skoro svi članovi niza po volji blizu broja A i pišemo:

$$\lim_{n \to \infty} a_n = A.$$

Preciznije se to kaže ovako:
Broj A je limes ili granična vrijednost niza (a_n) ako za svaki po volji mali realan broj ε > 0 postoji prirodan broj $n_0 \in N,$ tako da vrijedi:

$$n > n_0 \Rightarrow |a_n - A| < \varepsilon.$$

Kažemo još da a_n teži (ili konvergira) prema A i katkad pišemo:

$$a_n \to A \text{ za } n \to \infty.$$

Niz realnih brojeva (a_n) koji ima limes zove se konvergentan niz. Za niz koji nije konvergentan kažemo da je divergentan. Niz (a_n) divergira ka + ∞ (kaže se da teži u beskonačnost) i piše se:

$$\lim_{n \to \infty} a_n = \infty,$$

ako za svaki, kako god veliki, broj M > 0, počev od nekog mjesta svi su članovi niza veći od M. Sada izrecimo točno značenje jednakosti:

$$\lim_{n \to \infty} a_n = \infty.$$

Kažemo da niz (a_n) teži u beskonačnost (divergira) ako za svaki po volji veliki broj M > 0 postoji prirodan broj $n_0 \in N$ tako da vrijedi:

$$n > n_0 \Rightarrow a_n > M.$$

Opća kvadratan jednadžba: $a \cdot x^2 + b \cdot x + c = 0 \Rightarrow x_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4 \cdot a \cdot c}}{2 \cdot a}$.

Dokažimo da je niz a_n divergentan: $a_n = \frac{n^2 - 1}{n + 2}$.

Ako zadamo bilo koji po volji veliki broj M > 0, moramo pronaći (izračunati) prirodan broj $n_0 \in N$, tako da za svaki prirodan broj $n > n_0$ vrijedi:

$$a_n > M \Rightarrow \frac{n^2 - 1}{n + 2} > M.$$

Sada želimo (po nepoznanici n) riješiti nejednadžbu:

$$\frac{n^2 - 1}{n + 2} > M \Rightarrow \frac{n^2 - 1}{n + 2} > M \ / \cdot (n + 2) \Rightarrow n^2 - 1 > M \cdot (n + 2) \Rightarrow n^2 - 1 > M \cdot n + 2 \cdot M \Rightarrow$$

$$\Rightarrow n^2 - M \cdot n - 2 \cdot M - 1 > 0 \Rightarrow$$

$$\frac{n^2 - 1}{n + 2} > M \Rightarrow \left[\begin{array}{l} \text{množimo nejednadžbu} \\ \text{brojem } n + 2 \text{ koji je pozitivan} \end{array} \right] \Rightarrow \frac{n^2 - 1}{n + 2} > M \ / \cdot (n + 2) \Rightarrow n^2 - 1 > M \cdot (n + 2) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow n^2 - 1 > M \cdot n + 2 \cdot M \Rightarrow n^2 - M \cdot n - 1 - 2 \cdot M > 0.$$

Kvadratnu nejednadžbu riješit ćemo, po varijabli n, tako da najprije nađemo nultočke opće kvadratne jednadžbe:

$$n^2 - M \cdot n - 1 - 2 \cdot M = 0 \Rightarrow \begin{cases} a = 1 \\ b = -M \\ c = -1 - 2 \cdot M. \end{cases}$$

$$n_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4 \cdot a \cdot c}}{2 \cdot a} \Rightarrow n_{1,2} = \frac{M \pm \sqrt{M^2 - 4 \cdot 1 \cdot (-1 - 2 \cdot M)}}{2 \cdot 1} \Rightarrow n_{1,2} = \frac{M \pm \sqrt{M^2 + 4 + 8 \cdot M}}{2} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow n_{1,2} = \frac{M \pm \sqrt{M^2 + 4 \cdot M + 4 + 4 \cdot M}}{2} \Rightarrow n_{1,2} = \frac{M \pm \sqrt{(M + 2)^2 + 4 \cdot M}}{2} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \left. \begin{array}{l} n_1 = \dfrac{M + \sqrt{(M + 2)^2 + 4 \cdot M}}{2} \quad \text{je rješenje jer n mora biti pozitivan} \\ n_2 = \dfrac{M - \sqrt{(M + 2)^2 + 4 \cdot M}}{2} \quad \text{nije rješenje jer je negativno} \end{array} \right\}.$$

Možemo uzeti da je n_0 najveći cjelobrojni dio od n_1:

$$n_0 = \left\lfloor \frac{M + \sqrt{(M + 2)^2 + 4 \cdot M}}{2} \right\rfloor.$$

Tada je očito:

$$n > n_0 \Rightarrow a_n > M,$$

$$n > \left\lfloor \frac{M + \sqrt{(M+2)^2 + 4 \cdot M}}{2} \right\rfloor \Rightarrow \frac{n^2 - 1}{n+2} > M.$$

Na primjer:

- za M = 1000 dobije se

$$n_0 = \left\lfloor \frac{1000 + \sqrt{(1000+2)^2 + 4 \cdot 1000}}{2} \right\rfloor = \lfloor 1001.997 \rfloor = 1001 \text{ pa}$$

$$n > 1001 \Rightarrow \frac{n^2 - 1}{n+2} > 1000.$$

- za M = 10000 dobije se

$$n_0 = \left\lfloor \frac{10000 + \sqrt{(10000+2)^2 + 4 \cdot 10000}}{2} \right\rfloor = \lfloor 10001.9997 \rfloor = 10001 \text{ pa}$$

$$n > 10001 \Rightarrow \frac{n^2 - 1}{n+2} > 10000, \text{ itd.}$$

Vježba 038

Dokažite da je: $\lim\limits_{n \to \infty} n^2 = \infty.$

Rezultat: Naputak:

Zadamo si bilo koji po volji veliki broj M > 0. Moramo pronaći prirodan broj $n_0 \in N,$ tako da za svaki prirodan broj n > n_0 vrijedi:

$$n^2 > M.$$

Korjenovanjem nejednadžbe dobije se

$$n^2 > M \Rightarrow n^2 > M \;/\sqrt{\;} \Rightarrow n > \sqrt{M}$$

pa možemo uzeti:

$$n_0 = \lfloor \sqrt{M} \rfloor = \begin{bmatrix} \text{najveći cjelobrojni} \\ \text{dio od } \sqrt{M} \end{bmatrix}.$$

Tada je očito:

$$n > n_0 \Rightarrow a_n > M,$$

$$n > \lfloor \sqrt{M} \rfloor \Rightarrow n > \sqrt{M} \Rightarrow n^2 > M.$$

Zadatak 039 (Ivica, tehnička škola)

Odredite graničnu vrijednost (limes): $\lim\limits_{x \to 0} \frac{\ln x}{ctg\, x}.$

Rješenje 039

Ponovimo!

Ako postoje $\lim\limits_{x \to a} f(x)$ i $\lim\limits_{x \to a} g(x),$ tada vrijedi poučak:

$$\lim_{x \to a} [f(x) \cdot g(x)] = \lim_{x \to a} f(x) \cdot \lim_{x \to a} g(x).$$

Važan limes: $\lim\limits_{x \to 0} \frac{\sin x}{x} = 1.$

Sinus dvostrukog kuta: $2 \cdot \sin x \cdot \cos x = \sin 2x$.

1.inačica

$$\lim_{x \to 0} \frac{\ln x}{ctg\, x} = \left[\begin{array}{c} x = 0 \Rightarrow \\ \text{neodređeni je oblik } \frac{\infty}{\infty}, \text{ L'Hospitalovo pravilo,} \\ \text{deriviramo posebno brojnik, posebno nazivnik} \end{array} \right] = \lim_{x \to 0} \frac{(\ln x)'}{(ctg\, x)'} =$$

$$= \lim_{x \to 0} \frac{\frac{1}{x}}{-\frac{1}{\sin^2 x}} = -\lim_{x \to 0} \frac{\sin^2 x}{x} = \left[\begin{array}{c} x = 0 \Rightarrow \\ \text{neodređeni je oblik } \frac{0}{0}, \\ \text{opet L'Hospitalovo pravilo} \end{array} \right] = -\lim_{x \to 0} \frac{\left(\sin^2 x\right)'}{x'} =$$

$$= -\lim_{x \to 0} \frac{2 \cdot \sin x \cdot \cos x}{1} = -\lim_{x \to 0} \frac{\sin 2x}{1} = -\lim_{x \to 0} \sin 2x = -\sin 0 = 0.$$

2.inačica

$$\lim_{x \to 0} \frac{\ln x}{ctg\, x} = \left[\begin{array}{c} x = 0 \Rightarrow \\ \text{neodređeni je oblik } \frac{\infty}{\infty}, \text{ L'Hospitalovo pravilo,} \\ \text{deriviramo posebno brojnik, posebno nazivnik} \end{array} \right] = \lim_{x \to 0} \frac{(\ln x)'}{(ctg\, x)'} =$$

$$= \lim_{x \to 0} \frac{\frac{1}{x}}{-\frac{1}{\sin^2 x}} = -\lim_{x \to 0} \frac{\sin^2 x}{x} = -\lim_{x \to 0} \left(\frac{\sin x}{x} \cdot \sin x \right) = -\lim_{x \to 0} \frac{\sin x}{x} \cdot \lim_{x \to 0} \sin x =$$

$$= -1 \cdot \sin 0 = -1 \cdot 0 = 0.$$

Vježba 039

Odredite graničnu vrijednost (limes): $\lim\limits_{x \to 0} \frac{x}{\sin x}$.

Rezultat: 1.

Zadatak 040 (Ivica, tehnička škola)

Odredite graničnu vrijednost (limes): $\lim\limits_{x \to a} \frac{\sqrt{x} - \sqrt{a}}{x - a}$.

Rješenje 040

Ponovimo!

Limes iracionalnog izraza često se računa i tako da prebacimo iracionalnost iz brojnika u nazivnik (da se riješimo korijena u brojniku) ili obrnuto iz nazivnika u brojnik (da se riješimo korijena u nazivniku).

Razlika kvadrata: $(a - b) \cdot (a + b) = a^2 - b^2$.

$$\lim_{x \to a} \frac{\sqrt{x} - \sqrt{a}}{x - a} = \left[\begin{array}{c} \text{racionaliziramo s} \\ \sqrt{x} + \sqrt{a} \end{array} \right] = \lim_{x \to a} \frac{\sqrt{x} - \sqrt{a}}{x - a} \cdot \frac{\sqrt{x} + \sqrt{a}}{\sqrt{x} + \sqrt{a}} = \lim_{x \to a} \frac{\left(\sqrt{x}\right)^2 - \left(\sqrt{a}\right)^2}{(x - a) \cdot \left(\sqrt{x} + \sqrt{a}\right)} =$$

$$= \lim_{x \to a} \frac{x - a}{(x - a) \cdot \left(\sqrt{x} + \sqrt{a}\right)} = \lim_{x \to a} \frac{1}{\sqrt{x} + \sqrt{a}} = \frac{1}{2 \cdot \sqrt{a}}.$$

Vježba 040

Odredite graničnu vrijednost (limes): $\lim\limits_{x \to 1} \frac{\sqrt{x} - 1}{x - 1}$.

Rezulat: $\frac{1}{2}$.