

Zadatak 581 (Zvone, ekonomska škola)

Izračunajte $\frac{1}{3-\sqrt{8}} - \frac{1}{\sqrt{8}-\sqrt{7}} + \frac{1}{\sqrt{7}-\sqrt{6}} - \frac{1}{\sqrt{6}-\sqrt{5}} + \frac{1}{\sqrt{5}-2}$.

A. 1 B. 3 C. 5 D. 9

Rješenje 581

Ponovimo!

$$\frac{a}{b} \cdot \frac{c}{d} = \frac{a \cdot c}{b \cdot d}, \quad (a-b) \cdot (a+b) = a^2 - b^2, \quad (\sqrt{a})^2 = a, \quad \frac{n}{1} = n.$$

Proširiti razlomak znači brojnik i nazivnik tog razlomka pomnožiti istim brojem različitim od nule i jedinice

$$\frac{a}{b} = \frac{a \cdot n}{b \cdot n}, \quad n \neq 0, \quad n \neq 1.$$

Zakon distribucije množenja prema zbrajanju.

$$a \cdot (b+c) = a \cdot b + a \cdot c, \quad a \cdot b + a \cdot c = a \cdot (b+c).$$

$$\begin{aligned} & \frac{1}{3-\sqrt{8}} - \frac{1}{\sqrt{8}-\sqrt{7}} + \frac{1}{\sqrt{7}-\sqrt{6}} - \frac{1}{\sqrt{6}-\sqrt{5}} + \frac{1}{\sqrt{5}-2} = \\ & = \frac{1}{3-\sqrt{8}} \cdot \frac{3+\sqrt{8}}{3+\sqrt{8}} - \frac{1}{\sqrt{8}-\sqrt{7}} \cdot \frac{\sqrt{8}+\sqrt{7}}{\sqrt{8}+\sqrt{7}} + \frac{1}{\sqrt{7}-\sqrt{6}} \cdot \frac{\sqrt{7}+\sqrt{6}}{\sqrt{7}+\sqrt{6}} - \frac{1}{\sqrt{6}-\sqrt{5}} \cdot \frac{\sqrt{6}+\sqrt{5}}{\sqrt{6}+\sqrt{5}} + \frac{1}{\sqrt{5}-2} \cdot \frac{\sqrt{5}+2}{\sqrt{5}+2} = \\ & = \frac{3+\sqrt{8}}{(3-\sqrt{8}) \cdot (3+\sqrt{8})} - \frac{\sqrt{8}+\sqrt{7}}{(\sqrt{8}-\sqrt{7}) \cdot (\sqrt{8}+\sqrt{7})} + \frac{\sqrt{7}+\sqrt{6}}{(\sqrt{7}-\sqrt{6}) \cdot (\sqrt{7}+\sqrt{6})} - \frac{\sqrt{6}+\sqrt{5}}{(\sqrt{6}-\sqrt{5}) \cdot (\sqrt{6}+\sqrt{5})} + \\ & \quad + \frac{\sqrt{5}+2}{(\sqrt{5}-2) \cdot (\sqrt{5}+2)} = \\ & = \frac{3+\sqrt{8}}{3^2 - (\sqrt{8})^2} - \frac{\sqrt{8}+\sqrt{7}}{(\sqrt{8})^2 - (\sqrt{7})^2} + \frac{\sqrt{7}+\sqrt{6}}{(\sqrt{7})^2 - (\sqrt{6})^2} - \frac{\sqrt{6}+\sqrt{5}}{(\sqrt{6})^2 - (\sqrt{5})^2} + \frac{\sqrt{5}+2}{(\sqrt{5})^2 - 2^2} = \\ & = \frac{3+\sqrt{8}}{9-8} - \frac{\sqrt{8}+\sqrt{7}}{8-7} + \frac{\sqrt{7}+\sqrt{6}}{7-6} - \frac{\sqrt{6}+\sqrt{5}}{6-5} + \frac{\sqrt{5}+2}{5-4} = \\ & = \frac{3+\sqrt{8}}{1} - \frac{\sqrt{8}+\sqrt{7}}{1} + \frac{\sqrt{7}+\sqrt{6}}{1} - \frac{\sqrt{6}+\sqrt{5}}{1} + \frac{\sqrt{5}+2}{1} = \\ & = 3 + \sqrt{8} - (\sqrt{8} + \sqrt{7}) + \sqrt{7} + \sqrt{6} - (\sqrt{6} + \sqrt{5}) + \sqrt{5} + 2 = \\ & = 3 + \sqrt{8} - \sqrt{8} - \sqrt{7} + \sqrt{7} + \sqrt{6} - \sqrt{6} - \sqrt{5} + \sqrt{5} + 2 = \\ & = 3 + \sqrt{8} - \sqrt{8} - \sqrt{7} + \sqrt{7} + \sqrt{6} - \sqrt{6} - \sqrt{5} + \sqrt{5} + 2 = 3 + 2 = 5. \end{aligned}$$

Odgovor je pod C.

Vježba 581

Izračunajte $\frac{1}{3-\sqrt{8}} + \frac{1}{\sqrt{7}-\sqrt{8}} - \frac{1}{\sqrt{6}-\sqrt{7}} + \frac{1}{\sqrt{5}-\sqrt{6}} + \frac{1}{\sqrt{5}-2}$.

A. 1 B. 3 C. 5 D. 9

Rezultat: C.

Zadatak 582 (Zvone, ekonomska škola)Racionalizirajte $\frac{3+\sqrt{6}}{\sqrt{3}+\sqrt{2}}$.

- A. 2 B.
- $\sqrt{2}$
- C. 3 D.
- $\sqrt{3}$

Rješenje 582

Ponovimo!

$$\frac{a}{b} \cdot \frac{c}{d} = \frac{a \cdot c}{b \cdot d}, \quad (a-b) \cdot (a+b) = a^2 - b^2, \quad (\sqrt{a})^2 = a, \quad \frac{n}{1} = n.$$

$$\sqrt{a \cdot b} = \sqrt{a} \cdot \sqrt{b}, \quad a^1 = a, \quad a^n : a^m = a^{n-m}.$$

Proširiti razlomak znači brojnik i nazivnik tog razlomka pomnožiti istim brojem različitim od nule i jedinice

$$\frac{a}{b} = \frac{a \cdot n}{b \cdot n}, \quad n \neq 0, \quad n \neq 1.$$

Zakon distribucije množenja prema zbrajanju.

$$a \cdot (b+c) = a \cdot b + a \cdot c, \quad a \cdot b + a \cdot c = a \cdot (b+c).$$

Množenje zagrada

$$(a+b) \cdot (c+d) = a \cdot c + a \cdot d + b \cdot c + b \cdot d.$$

Skratiti razlomak znači brojnik i nazivnik tog razlomka podijeliti istim brojem različitim od nule i jedinice

$$\frac{a \cdot n}{b \cdot n} = \frac{a}{b}, \quad n \neq 0, \quad n \neq 1.$$

1. inačica

$$\begin{aligned} \frac{3+\sqrt{6}}{\sqrt{3}+\sqrt{2}} &= \frac{3+\sqrt{6}}{\sqrt{3}+\sqrt{2}} \cdot \frac{\sqrt{3}-\sqrt{2}}{\sqrt{3}-\sqrt{2}} = \frac{(3+\sqrt{6}) \cdot (\sqrt{3}-\sqrt{2})}{(\sqrt{3}+\sqrt{2}) \cdot (\sqrt{3}-\sqrt{2})} = \frac{3 \cdot \sqrt{3} - 3 \cdot \sqrt{2} + \sqrt{18} - \sqrt{12}}{(\sqrt{3})^2 - (\sqrt{2})^2} = \\ &= \frac{3 \cdot \sqrt{3} - 3 \cdot \sqrt{2} + \sqrt{9 \cdot 2} - \sqrt{4 \cdot 3}}{3-2} = \frac{3 \cdot \sqrt{3} - 3 \cdot \sqrt{2} + \sqrt{9} \cdot \sqrt{2} - \sqrt{4} \cdot \sqrt{3}}{1} = \\ &= \frac{3 \cdot \sqrt{3} - 3 \cdot \sqrt{2} + 3 \cdot \sqrt{2} - 2 \cdot \sqrt{3}}{1} = 3 \cdot \sqrt{3} - 3 \cdot \sqrt{2} + 3 \cdot \sqrt{2} - 2 \cdot \sqrt{3} = 3 \cdot \sqrt{3} - 3 \cdot \sqrt{2} + 3 \cdot \sqrt{2} - 2 \cdot \sqrt{3} = \\ &= 3 \cdot \sqrt{3} - 2 \cdot \sqrt{3} = \sqrt{3}. \end{aligned}$$

Odgovor je pod D.

2. inačica

$$\frac{3+\sqrt{6}}{\sqrt{3}+\sqrt{2}} = \frac{(\sqrt{3})^2 + \sqrt{3} \cdot \sqrt{2}}{\sqrt{3}+\sqrt{2}} = \frac{(\sqrt{3})^2 + \sqrt{3} \cdot \sqrt{2}}{\sqrt{3}+\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{3} \cdot (\sqrt{3} + \sqrt{2})}{\sqrt{3}+\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{3} \cdot (\sqrt{3} + \sqrt{2})}{\sqrt{3}+\sqrt{2}} = \sqrt{3}.$$

Odgovor je pod D.

Vježba 582Racionalizirajte $\frac{5+\sqrt{10}}{\sqrt{5}+\sqrt{2}}$.

- A. 5 B.
- $\sqrt{5}$
- C. 4 D.
- $\sqrt{2}$

Rezultat: B.

Zadatak 583 (Sandra, gimnazija)

Vrijednost izraza $\frac{1}{(2-\sqrt{3})^3}$ jednaka je:

- A. $24 \cdot \sqrt{3}$ B. 56 C. $15 - 3 \cdot \sqrt{3}$ D. $26 + 15 \cdot \sqrt{3}$

Rješenje 583

Ponovimo!

$$(\sqrt{a})^2 = a \quad , \quad (\sqrt{a})^3 = a \cdot \sqrt{a} \quad , \quad \frac{n}{1} = n \quad , \quad \frac{a}{b} \cdot \frac{c}{d} = \frac{a \cdot c}{b \cdot d} \quad , \quad (a-b) \cdot (a+b) = a^2 - b^2 .$$

$$(a \cdot b)^n = a^n \cdot b^n \quad , \quad \left(\frac{a}{b}\right)^n = \frac{a^n}{b^n} \quad , \quad (a-b)^3 = a^3 - 3 \cdot a^2 \cdot b + 3 \cdot a \cdot b^2 - b^3 .$$

$$(a+b)^3 = a^3 + 3 \cdot a^2 \cdot b + 3 \cdot a \cdot b^2 + b^3 .$$

Proširiti razlomak znači brojnik i nazivnik tog razlomka pomnožiti istim brojem različitim od nule i jedinice

$$\frac{a}{b} = \frac{a \cdot n}{b \cdot n} \quad , \quad n \neq 0 \quad , \quad n \neq 1 .$$

1. inačica

$$\begin{aligned} \frac{1}{(2-\sqrt{3})^3} &= \frac{1}{2^3 - 3 \cdot 2^2 \cdot \sqrt{3} + 3 \cdot 2 \cdot (\sqrt{3})^2 - (\sqrt{3})^3} = \frac{1}{8 - 3 \cdot 4 \cdot \sqrt{3} + 3 \cdot 2 \cdot 3 - 3 \cdot \sqrt{3}} = \\ &= \frac{1}{8 - 12 \cdot \sqrt{3} + 18 - 3 \cdot \sqrt{3}} = \frac{1}{26 - 15 \cdot \sqrt{3}} = \frac{1}{26 - 15 \cdot \sqrt{3}} \cdot \frac{26 + 15 \cdot \sqrt{3}}{26 + 15 \cdot \sqrt{3}} = \frac{26 + 15 \cdot \sqrt{3}}{(26 - 15 \cdot \sqrt{3}) \cdot (26 + 15 \cdot \sqrt{3})} = \\ &= \frac{26 + 15 \cdot \sqrt{3}}{26^2 - (15 \cdot \sqrt{3})^2} = \frac{26 + 15 \cdot \sqrt{3}}{26^2 - 15^2 \cdot (\sqrt{3})^2} = \frac{26 + 15 \cdot \sqrt{3}}{676 - 225 \cdot 3} = \frac{26 + 15 \cdot \sqrt{3}}{676 - 675} = \frac{26 + 15 \cdot \sqrt{3}}{1} = 26 + 15 \cdot \sqrt{3} . \end{aligned}$$

Odgovor je pod D.

2. inačica

$$\begin{aligned} \frac{1}{(2-\sqrt{3})^3} &= \left(\frac{1}{2-\sqrt{3}}\right)^3 = \left(\frac{1}{2-\sqrt{3}} \cdot \frac{2+\sqrt{3}}{2+\sqrt{3}}\right)^3 = \left(\frac{2+\sqrt{3}}{(2-\sqrt{3}) \cdot (2+\sqrt{3})}\right)^3 = \left(\frac{2+\sqrt{3}}{2^2 - (\sqrt{3})^2}\right)^3 = \\ &= \left(\frac{2+\sqrt{3}}{4-3}\right)^3 = \left(\frac{2+\sqrt{3}}{1}\right)^3 = (2+\sqrt{3})^3 = 2^3 + 3 \cdot 2^2 \cdot \sqrt{3} + 3 \cdot 2 \cdot (\sqrt{3})^2 + (\sqrt{3})^3 = \\ &= 8 + 3 \cdot 4 \cdot \sqrt{3} + 3 \cdot 2 \cdot 3 + 3 \cdot \sqrt{3} = 8 + 12 \cdot \sqrt{3} + 18 + 3 \cdot \sqrt{3} = 26 + 15 \cdot \sqrt{3} . \end{aligned}$$

Odgovor je pod D.

Vježba 583

Odmor!

Rezultat: ...

Zadatak 584 (Zadatak objavljen na natjecanju)

Neka su a, b i c pozitivni realni brojevi tako da je $a \cdot b \cdot c = 1$. Nađite najmanju vrijednost izraza

$$P = \frac{a^2 + 1}{a \cdot b + a + 1} + \frac{b^2 + 1}{b \cdot c + b + 1} + \frac{c^2 + 1}{c \cdot a + c + 1} .$$

Rješenje 584

Ponovimo!

$$a^1 = a, \quad a^n \cdot a^m = a^{n+m}, \quad \frac{a \cdot c}{b \cdot d} = \frac{a \cdot c}{b \cdot d}, \quad a > b \Rightarrow \frac{a}{n} > \frac{b}{n}, \quad (x+1)^2 \geq 2 \cdot x.$$

$$\left. \begin{array}{l} a \geq b \\ c \geq d \end{array} \right\} \Rightarrow a+c \geq b+d, \quad \frac{a}{n} + \frac{b}{n} = \frac{a+b}{n}.$$

Proširiti razlomak znači brojnik i nazivnik tog razlomka pomnožiti istim brojem različitim od nule i jedinice

$$\frac{a}{b} = \frac{a \cdot n}{b \cdot n}, \quad n \neq 0, \quad n \neq 1.$$

Zakon distribucije množenja prema zbrajanju.

$$a \cdot (b+c) = a \cdot b + a \cdot c, \quad a \cdot b + a \cdot c = a \cdot (b+c).$$

Skratiti razlomak znači brojnik i nazivnik tog razlomka podijeliti istim brojem različitim od nule i jedinice

$$\frac{a \cdot n}{b \cdot n} = \frac{a}{b}, \quad n \neq 0, \quad n \neq 1.$$

U zadanom izrazu

$$P = \frac{a^2+1}{a \cdot b+a+1} + \frac{b^2+1}{b \cdot c+b+1} + \frac{c^2+1}{c \cdot a+c+1}$$

preoblikujemo razlomke.

$$\bullet \quad a^2+1 \geq 2 \cdot a \Rightarrow \frac{a^2+1}{a \cdot b+a+1} \geq \frac{2 \cdot a}{a \cdot b+a+1} = \frac{2 \cdot a}{a \cdot b+a+1} \cdot \frac{c}{c} = \frac{2 \cdot a \cdot c}{a \cdot b \cdot c + a \cdot c + c} = [a \cdot b \cdot c = 1] =$$

$$= \frac{2 \cdot a \cdot c}{1 + a \cdot c + c} = \frac{2 \cdot a \cdot c}{c \cdot a + c + 1}.$$

Dakle,

$$\frac{a^2+1}{a \cdot b+a+1} \geq \frac{2 \cdot a \cdot c}{c \cdot a + c + 1}.$$

$$\bullet \quad b^2+1 \geq 2 \cdot b \Rightarrow \frac{b^2+1}{b \cdot c+b+1} \geq \frac{2 \cdot b}{b \cdot c+b+1} = \frac{2 \cdot b}{b \cdot c+b+1} \cdot \frac{a \cdot c}{a \cdot c} = \frac{2 \cdot a \cdot b \cdot c}{a \cdot b \cdot c^2 + a \cdot b \cdot c + a \cdot c} =$$

$$= [a \cdot b \cdot c = 1] = \frac{2 \cdot 1}{1 \cdot c + 1 + a \cdot c} = \frac{2}{c \cdot a + c + 1}.$$

Dakle,

$$\frac{b^2+1}{b \cdot c+b+1} \geq \frac{2}{c \cdot a + c + 1}.$$

$$\bullet \quad c^2+1 \geq 2 \cdot c \Rightarrow \frac{c^2+1}{c \cdot a+c+1} \geq \frac{2 \cdot c}{c \cdot a+c+1}.$$

Dakle,

$$\frac{c^2+1}{c \cdot a+c+1} \geq \frac{2 \cdot c}{c \cdot a+c+1}.$$

Sada je

$$\left. \begin{array}{l} \frac{a^2+1}{a \cdot b+a+1} \geq \frac{2 \cdot a \cdot c}{c \cdot a+c+1} \\ \frac{b^2+1}{b \cdot c+b+1} \geq \frac{2}{c \cdot a+c+1} \\ \frac{c^2+1}{c \cdot a+c+1} \geq \frac{2 \cdot c}{c \cdot a+c+1} \end{array} \right\} \Rightarrow \left[\begin{array}{l} \text{zbrojimo} \\ \text{nejednakosti} \end{array} \right] \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \frac{a^2+1}{a \cdot b+a+1} + \frac{b^2+1}{b \cdot c+b+1} + \frac{c^2+1}{c \cdot a+c+1} \geq \frac{2 \cdot a \cdot c}{c \cdot a+c+1} + \frac{2}{c \cdot a+c+1} + \frac{2 \cdot c}{c \cdot a+c+1} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow P \geq \frac{2 \cdot a \cdot c + 2 + 2 \cdot c}{c \cdot a+c+1} \Rightarrow P \geq \frac{2 \cdot (c \cdot a+c+1)}{c \cdot a+c+1} \Rightarrow P \geq \frac{2 \cdot (c \cdot a+c+1)}{c \cdot a+c+1} \Rightarrow P \geq 2.$$

Zahvaljujem studentici matematike **Lauri Župčić** na ponuđenom dokazu. Njezinim dopuštenjem zadatak je postupno objašnjavao kako bi bio razumljiv većini učenika.

Vježba 584

Odmor!

Rezultat: ...

Zadatak 585 (Jelena, maturantica)

Šesteroznamenasti prirodni broj n ima prvu znamenku 2. Ako se ta znamenka prenese s prvog mjesta na posljednje, novodobiveni broj tri puta je veći od n . Koja je posljednja znamenka od n ?

A. 9 B. 4 C. 3 D. 1

Rješenje 585

Ponovimo!

Zakon distribucije množenja prema zbrajanju.

$$a \cdot (b+c) = a \cdot b + a \cdot c, \quad a \cdot b + a \cdot c = a \cdot (b+c).$$

Brojevna vrijednost što je nosi neka znamenka određena je ne samo vrijednošću te znamenke već i pozicijom te znamenke u zapisu broja. Takav zapis broja zovemo pozicijskim zapisom. Općenito:

Ako je $N = a_n a_{n-1} a_{n-2} \dots a_2 a_1 a_0$, pri čemu je $a_i \in \{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9\}$, $i = 0, 1, 2, \dots, n$ dekadski zapis prirodnog broja N , onda je njegova vrijednost

$$N = a_n \cdot 10^n + a_{n-1} \cdot 10^{n-1} + a_{n-2} \cdot 10^{n-2} + \dots + a_2 \cdot 10^2 + a_1 \cdot 10 + a_0.$$

Broj 10 zove se baza dekadskog brojevnog sustava.

Kako zapisati da je broj b n puta veći od broja a ?

$$b = n \cdot a, \quad \frac{b}{n} = a, \quad \frac{b}{a} = n.$$

Zadani broj n je oblika

$$n = 200\,000 + x,$$

gdje je x peteroznamenasti broj. Ako se znamenka 2 prenese s prvog mjesta na posljednje bit će

$$10 \cdot x + 2.$$

Iz uvjeta zadatka slijedi:

$$10 \cdot x + 2 = 3 \cdot (200\,000 + x) \Rightarrow 10 \cdot x + 2 = 600\,000 + 3 \cdot x \Rightarrow 10 \cdot x - 3 \cdot x = 600\,000 - 2 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 7 \cdot x = 599\,998 \Rightarrow 7 \cdot x = 599\,998 \quad /: 7 \Rightarrow x = 85\,714.$$

Broj n glasi:

$$n = 285\,714.$$

Odgovor je pod B.

Vježba 585

Odmor!

Rezultat: ...

Zadatak 586 (Marinela, maturantica)

Na gradnji nekog objekta radile su tri brigade. Ako bi radile zajedno, mogle bi taj objekt završiti za m dana. Prva brigada, radeći sama, može završiti objekt za n dana, a druga za p dana. Za koliko bi dana dovršila taj objekt treća brigada radeći sama.

Rješenje 586

Ponovimo!

$$\frac{a}{b} - \frac{c}{d} = \frac{a \cdot d - b \cdot c}{b \cdot d}, \quad \frac{a}{b} = \frac{c}{d} \Rightarrow \frac{b}{a} = \frac{d}{c}, \quad \frac{n}{1} = n.$$

Tri brigade, radeći zajedno, završe objekt za m dana. Za 1 dan one obavljaju $\frac{1}{m}$ posla.

Prva brigada, radeći sama, završi objekt za n dana. Za 1 dan ona obavi $\frac{1}{n}$ posla.

Druga brigada, radeći sama, završi objekt za p dana. Za 1 dan ona obavi $\frac{1}{p}$ posla.

Neka treća brigada, radeći sama, završi objekt za x dana. Za 1 dan ona obavi $\frac{1}{x}$ posla.

Kada bi radile zajedno tri brigade bi za **1 dan** napravile $\frac{1}{n} + \frac{1}{p} + \frac{1}{x}$ posla ili $\frac{1}{m}$ posla. Vrijedi jednačina:

$$\frac{1}{n} + \frac{1}{p} + \frac{1}{x} = \frac{1}{m} \Rightarrow \frac{1}{x} = \frac{1}{m} - \frac{1}{n} - \frac{1}{p} \Rightarrow \frac{1}{x} = \frac{n \cdot p - m \cdot p - m \cdot n}{m \cdot n \cdot p} \Rightarrow x = \frac{m \cdot n \cdot p}{n \cdot p - m \cdot p - m \cdot n}.$$

Treća brigada bi, radeći sama, taj objekt završila za $\frac{m \cdot n \cdot p}{n \cdot p - m \cdot p - m \cdot n}$ dana.

Vježba 586

Odmor!

Rezultat: ...

Zadatak 587 (Martin, gimnazija)

Odredite zbroj prvih n neparnih prirodnih brojeva.

Rješenje 587

Ponovimo!

$$\left. \begin{array}{l} a^1 = a \\ a^n \cdot a^m = a^{n+m} \\ \left. \begin{array}{l} a = b \\ c = d \end{array} \right\} \Rightarrow a + c = b + d. \end{array} \right\}$$

Zakon distribucije množenja prema zbrajanju.

$$a \cdot (b + c) = a \cdot b + a \cdot c, \quad a \cdot b + a \cdot c = a \cdot (b + c).$$

Skratiti razlomak znači brojnik i nazivnik tog razlomka podijeliti istim brojem različitim od nule i jedinice

$$\frac{a \cdot n}{b \cdot n} = \frac{a}{b}, \quad n \neq 0, \quad n \neq 1.$$

Skup prirodnih brojeva označavamo slovom N , a zapisujemo

$$N = \{1, 2, 3, 4, 5, \dots, n-1, n, n+1, \dots\}.$$

Prirodni brojevi dijele se na parne i neparne brojeve. Parni brojevi su oni brojevi koji su djeljivi sa 2, a neparni su oni koji nisu djeljivi sa 2.

Da je neki prirodan broj n neparan znači da se može napisati u obliku

$$m = 2 \cdot (\text{neki prirodan broj}) + 1, \quad m = 2 \cdot k + 1, \quad k \in N.$$

Niz (slijed) je aritmetički ako je razlika svakog člana niza (osim prvog) i člana ispred njega stalna i iznosi d .

$$a_2 - a_1 = d, \quad a_3 - a_2 = d, \quad a_4 - a_3 = d, \quad a_5 - a_4 = d, \quad a_6 - a_5 = d, \quad \dots, \quad a_n - a_{n-1} = d \dots \\ a_n - a_{n-1} = d, \quad n \geq 2.$$

Broj d naziva se razlika (diferencija) aritmetičkog niza. Aritmetički niz je jednoznačno određen ako znamo prvi član a_1 i razliku d .

Zbroj prvih n članova aritmetičkog niza dan je formulom

$$S_n = \frac{n}{2} \cdot [a_1 + a_n].$$

1. inačica

Zbroj prvih n neparnih prirodnih brojeva napišemo na dva načina.

$$\left. \begin{aligned} Z &= 1 + 3 + 5 + \dots + (2 \cdot n - 5) + (2 \cdot n - 3) + (2 \cdot n - 1) \\ Z &= (2 \cdot n - 1) + (2 \cdot n - 3) + (2 \cdot n - 5) + \dots + 5 + 3 + 1 \end{aligned} \right\} \Rightarrow \left[\begin{array}{l} \text{zbrojimo} \\ \text{jednakosti} \end{array} \right] \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 2 \cdot Z = (1 + 2 \cdot n - 1) + (3 + 2 \cdot n - 3) + (5 + 2 \cdot n - 5) + \dots + (2 \cdot n - 5 + 5) + (2 \cdot n - 3 + 3) + (2 \cdot n - 1 + 1) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 2 \cdot Z = (1 + 2 \cdot n - 1) + (3 + 2 \cdot n - 3) + (5 + 2 \cdot n - 5) + \dots + (2 \cdot n - 5 + 5) + (2 \cdot n - 3 + 3) + (2 \cdot n - 1 + 1) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 2 \cdot Z = \underbrace{2 \cdot n + 2 \cdot n + 2 \cdot n + \dots + 2 \cdot n + 2 \cdot n + 2 \cdot n}_{n \text{ članova}} \Rightarrow 2 \cdot Z = n \cdot 2 \cdot n \Rightarrow 2 \cdot Z = 2 \cdot n^2 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 2 \cdot Z = 2 \cdot n^2 \quad /: 2 \Rightarrow Z = n^2.$$

2. inačica

Zbroj prvih n neparnih prirodnih brojeva je zbroj aritmetičkog niza.

$$1, 3, 5, \dots, 2 \cdot n - 5, 2 \cdot n - 3, 2 \cdot n - 1.$$

Slijedi:

$$\left. \begin{aligned} a_1 &= 1 \\ a_n &= 2 \cdot n - 1 \\ n &= n \end{aligned} \right\} \Rightarrow \left[S_n = \frac{n}{2} \cdot [a_1 + a_n] \right] \Rightarrow S_n = \frac{n}{2} \cdot [1 + 2 \cdot n - 1] \Rightarrow S_n = \frac{n}{2} \cdot [1 + 2 \cdot n - 1] \Rightarrow$$

$$\Rightarrow S_n = \frac{n}{2} \cdot 2 \cdot n \Rightarrow S_n = \frac{n}{2} \cdot 2 \cdot n \Rightarrow S_n = n^2.$$

Vježba 587

Odmor!

Rezultat: ...

Zadatak 588 (Pixell, srednja škola)

Odredite četiri uzastopna prirodna broja čiji je umnožak 3024.

Rješenje 588

Ponovimo!

Skup prirodnih brojeva označavamo slovom N , a zapisujemo

$$N = \{1, 2, 3, 4, 5, \dots, n-1, n, n+1, \dots\}.$$

Prosti brojevi (prim – brojevi) su prirodni brojevi djeljivi bez ostatka samo s brojem 1 i sami sa sobom, a veći od broja 1. Prirodni brojevi koji su veći od broja 1, a nisu prosti brojevi nazivaju se složenim brojevima. Složen broj je prirodan broj veći od jedan koji je djeljiv brojem 1, samim sobom i barem još jednim brojem. **Svaki se složeni broj može rastaviti na proste faktore.**

Broj 1 nije ni prost, ni složen broj.

Prirodni je broj djeljiv s 2 ako mu je posljednja znamenka 0, 2, 4, 6 ili 8.

Prirodni je broj djeljiv s 2 ako je paran broj.

Prirodni je broj djeljiv s 3 ako mu je zbroj znamenki djeljiv s 3.

Prirodni je broj djeljiv s 5 ako mu je posljednja znamenka 0 ili 5.

Prirodni je broj djeljiv s 9 ako mu je zbroj znamenki djeljiv s 9.

Prirodni je broj djeljiv s 10 ako mu je posljednja znamenka 0.

1. inačica

Broj 3024 rastavimo na proste faktore.

$$\begin{aligned}
3024 &= 2 \cdot 1512 \\
&= 2 \cdot 2 \cdot 756 \\
&= 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 378 \\
&= 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 189 \\
&= 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 63 \\
&= 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 21 \\
&= 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 7.
\end{aligned}$$

Tražene brojeve lako odredimo.

$$3024 = 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 7 = (2 \cdot 3) \cdot 7 \cdot (2 \cdot 2 \cdot 2) \cdot (3 \cdot 3) = 6 \cdot 7 \cdot 8 \cdot 9.$$

2. inačica

Broj 3024 nije djeljiv brojem 5 niti 10 jer mu je zadnja znamenka 4. Primijetimo da najmanji traženi broj ne može biti veći od 10. Tada mi umnožak bio veći od 10000. Na primjer,

$$11 \cdot 12 \cdot 13 \cdot 14 = 24024.$$

Dakle, traženi faktori su manji od 10, a to je moguće za 6, 7, 8 i 9.

$$6 \cdot 7 \cdot 8 \cdot 9 = 3024.$$

Vježba 588

Odredite četiri uzastopna prirodna broja čiji je umnožak 7920.

Rezultat: 8, 9, 10, 11.

Zadatak 589 (Pixell, srednja škola)

Odredite četiri uzastopna prirodna broja ako je umnožak prvog i drugog za 38 manji od umnoška trećeg i četvrtog.

Rješenje 589

Ponovimo!

$$a^1 = a, \quad a^n \cdot a^m = a^{n+m}.$$

Zakon distribucije množenja prema zbrajanju.

$$a \cdot (b+c) = a \cdot b + a \cdot c, \quad a \cdot b + a \cdot c = a \cdot (b+c).$$

Množenje zagrada

$$(a+b) \cdot (c+d) = a \cdot c + a \cdot d + b \cdot c + b \cdot d.$$

Kako zapisati da je broj b za n manji od broja a?

$$b+n = a, \quad b = a-n, \quad a-b = n.$$

Neka su n, n+1, n+2, n+3 četiri uzastopna broja. Zbog uvjeta vrijedi jednačica:

$$\begin{aligned}
n \cdot (n+1) + 38 &= (n+2) \cdot (n+3) \Rightarrow n^2 + n + 38 = n^2 + 3 \cdot n + 2 \cdot n + 6 \Rightarrow \\
\Rightarrow n^2 + n + 38 &= n^2 + 3 \cdot n + 2 \cdot n + 6 \Rightarrow n + 38 = 3 \cdot n + 2 \cdot n + 6 \Rightarrow n - 3 \cdot n - 2 \cdot n = 6 - 38 \Rightarrow \\
\Rightarrow -4 \cdot n &= -32 \Rightarrow -4 \cdot n = -32 \quad /: (-4) \Rightarrow n = 8.
\end{aligned}$$

Uzastopni brojevi su:

$$8, 9, 10, 11.$$

Vježba 589

Odredite četiri uzastopna prirodna broja ako je umnožak prvog i drugog za 22 manji od umnoška trećeg i četvrtog.

Rezultat: 4, 5, 6, 7.

Zadatak 590 (Max, maturant)

Prosječna starost skupine osoba je 40 godina. Nađite omjer broja žena (prosječno 35 godina) i broja muškaraca (prosječno 50 godina).

$$A. 3 : 1 \quad B. 1 : 2 \quad C. 2 : 1 \quad D. 1 : 3$$

Rješenje 590

Ponovimo!

$$n = \frac{n}{1}, \quad a : b = \frac{a}{b}.$$

Zakon distribucije množenja prema zbrajanju.

$$a \cdot (b+c) = a \cdot b + a \cdot c, \quad a \cdot b + a \cdot c = a \cdot (b+c).$$

Neka je dan skup n pozitivnih brojeva $\{a_1, a_2, a_3, \dots, a_n\}$. Tada je **aritmetička sredina** ili **prosjeak** A_n brojeva $a_1, a_2, a_3, \dots, a_n$ definirana izrazom

$$A_n = \frac{a_1 + a_2 + a_3 + \dots + a_n}{n}.$$

Vrijedi:

$$n \cdot A_n = a_1 + a_2 + a_3 + \dots + a_n.$$

Neka je x broj žena, a y broj muškaraca. Tada možemo zapisati jednadžbu

$$\begin{aligned} 35 \cdot x + 50 \cdot y &= 40 \cdot (x + y) \Rightarrow 35 \cdot x + 50 \cdot y = 40 \cdot (x + y) \quad /: 5 \Rightarrow 7 \cdot x + 10 \cdot y = 8 \cdot (x + y) \Rightarrow \\ \Rightarrow 7 \cdot x + 10 \cdot y &= 8 \cdot x + 8 \cdot y \Rightarrow 7 \cdot x - 8 \cdot x = 8 \cdot y - 10 \cdot y \Rightarrow -x = -2 \cdot y \Rightarrow -x = -2 \cdot y \quad /: \left(-\frac{1}{y}\right) \Rightarrow \\ \Rightarrow \frac{x}{y} &= 2 \Rightarrow \frac{x}{y} = \frac{2}{1} \Rightarrow x : y = 2 : 1. \end{aligned}$$

Odgovor je pod C.

Vježba 590

Odmor!

Rezultat: ...

Zadatak 591 (Max, maturant)

Koji je najmanji prirodni broj veći od 1, koji pri dijeljenju sa svakim jednoznamenkastim brojem, osim jedinice, daje ostatak 1?

Rješenje 591

Ponovimo!

Za prirodni broj a i prirodni broj b postoje jedinstveni prirodni brojevi q i r takvi da je

$$a = b \cdot q + r \quad \text{i} \quad 0 \leq r < b, \quad q \text{ je količnik, } r \text{ je ostatak.}$$

Jednoznamenkasti brojevi, osim 1, su: 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9.

Dovoljno je samo odrediti umnožak brojeva 5, 7, 8 i 9 jer u njemu sadržani su 2, 3, 4 i 6.

Umnožak brojeva 5, 7, 8 i 9 uvećamo za 1 i dobijemo traženi broj.

$$5 \cdot 7 \cdot 8 \cdot 9 + 1 = 2521.$$

Vježba 591

Odmor!

Rezultat: ...

Zadatak 592 (Ivica, maturant)

Racionalizirajte nazivnik razlomka: $\frac{2}{(\sqrt{2}-1)^2}$.

Rješenje 592

Ponovimo!

$$(a-b)^2 = a^2 - 2 \cdot a \cdot b + b^2, \quad (\sqrt{a})^2 = a, \quad \frac{a}{b} \cdot \frac{c}{d} = \frac{a \cdot c}{b \cdot d}, \quad (a-b) \cdot (a+b) = a^2 - b^2.$$

$$\frac{n}{1} = n, \quad (a \cdot b)^n = a^n \cdot b^n, \quad \frac{a^n}{b^n} = \left(\frac{a}{b}\right)^n.$$

Skratiti razlomak znači brojnik i nazivnik tog razlomka podijeliti istim brojem različitim od nule i jedinice

$$\frac{a \cdot n}{b \cdot n} = \frac{a}{b}, \quad n \neq 0, \quad n \neq 1.$$

1. inačica

$$\begin{aligned} \frac{2}{(\sqrt{2}-1)^2} &= \frac{2}{(\sqrt{2})^2 - 2 \cdot \sqrt{2} \cdot 1 + 1^2} = \frac{2}{2 - 2 \cdot \sqrt{2} + 1} = \frac{2}{3 - 2 \cdot \sqrt{2}} = \frac{2}{3 - 2 \cdot \sqrt{2}} \cdot \frac{3 + 2 \cdot \sqrt{2}}{3 + 2 \cdot \sqrt{2}} = \\ &= \frac{2 \cdot (3 + 2 \cdot \sqrt{2})}{3^2 - (2 \cdot \sqrt{2})^2} = \frac{2 \cdot (3 + 2 \cdot \sqrt{2})}{9 - 2^2 \cdot (\sqrt{2})^2} = \frac{2 \cdot (3 + 2 \cdot \sqrt{2})}{9 - 4 \cdot 2} = \frac{2 \cdot (3 + 2 \cdot \sqrt{2})}{9 - 8} = \frac{2 \cdot (3 + 2 \cdot \sqrt{2})}{1} = 2 \cdot (3 + 2 \cdot \sqrt{2}). \end{aligned}$$

2. inačica

$$\begin{aligned} \frac{2}{(\sqrt{2}-1)^2} &= \frac{(\sqrt{2})^2}{(\sqrt{2}-1)^2} = \left(\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{2}-1}\right)^2 = \left(\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{2}-1} \cdot \frac{\sqrt{2}+1}{\sqrt{2}+1}\right)^2 = \left(\frac{\sqrt{2} \cdot (\sqrt{2}+1)}{(\sqrt{2})^2 - 1}\right)^2 = \\ &= \left(\frac{\sqrt{2} \cdot (\sqrt{2}+1)}{2-1}\right)^2 = \left(\frac{\sqrt{2} \cdot (\sqrt{2}+1)}{1}\right)^2 = (\sqrt{2} \cdot (\sqrt{2}+1))^2 = (\sqrt{2})^2 \cdot (\sqrt{2}+1)^2 = \\ &= 2 \cdot \left((\sqrt{2})^2 + 2 \cdot \sqrt{2} \cdot 1 + 1^2\right) = 2 \cdot (2 + 2 \cdot \sqrt{2} + 1) = 2 \cdot (3 + 2 \cdot \sqrt{2}). \end{aligned}$$

Vježba 592

Odmor!

Rezultat: ...

Zadatak 593 (Marija, ekonomska škola)

Ako je $b = 2 \cdot a$, $c = 3 \cdot b$, $d = 4 \cdot c$, $e = 5 \cdot d$, izrazi pomoću a zbroj $a + b + c + d + e$.

Rješenje 593

Ponovimo!

Umnožak se ne mijenja združimo li faktore na bilo koji način:

$$(a \cdot b) \cdot c = a \cdot (b \cdot c).$$

$$\left. \begin{array}{l} b = 2 \cdot a \\ c = 3 \cdot b \\ d = 4 \cdot c \\ e = 5 \cdot d \end{array} \right\} \Rightarrow \left. \begin{array}{l} c = 3 \cdot 2 \cdot a \\ d = 4 \cdot c \\ e = 5 \cdot d \end{array} \right\} \Rightarrow \left. \begin{array}{l} c = 6 \cdot a \\ d = 4 \cdot c \\ e = 5 \cdot d \end{array} \right\} \Rightarrow \left. \begin{array}{l} d = 4 \cdot 6 \cdot a \\ e = 5 \cdot d \end{array} \right\} \Rightarrow \left. \begin{array}{l} d = 24 \cdot a \\ e = 5 \cdot d \end{array} \right\} \Rightarrow \\ \Rightarrow e = 5 \cdot 24 \cdot a \Rightarrow e = 120 \cdot a.$$

Sada je

$$a + b + c + d + e = a + 2 \cdot a + 6 \cdot a + 24 \cdot a + 120 \cdot a = 153 \cdot a.$$

Vježba 593

Ako je $b = 2 \cdot a$, $c = 2 \cdot b$, $d = 2 \cdot c$, $e = 2 \cdot d$, izrazi pomoću a zbroj $a + b + c + d + e$.

Rezultat: $31 \cdot a$.

Zadatak 594 (Ana, ekonomska škola)

Racionalizirajte nazivnik u razlomku: $\frac{1}{\sqrt{10} + \sqrt{15} + \sqrt{14} + \sqrt{21}}$.

Rješenje 594

Ponovimo!

$$\sqrt{a \cdot b} = \sqrt{a} \cdot \sqrt{b} \quad , \quad \frac{a}{b} \cdot \frac{c}{d} = \frac{a \cdot c}{b \cdot d} \quad , \quad (a-b) \cdot (a+b) = a^2 - b^2 \quad , \quad (\sqrt{a})^2 = a.$$

Zakon distribucije množenja prema zbrajanju.

$$a \cdot (b+c) = a \cdot b + a \cdot c \quad , \quad a \cdot b + a \cdot c = a \cdot (b+c).$$

Proširiti razlomak znači brojnik i nazivnik tog razlomka pomnožiti istim brojem različitim od nule i jedinice

$$\frac{a}{b} = \frac{a \cdot n}{b \cdot n} \quad , \quad n \neq 0 \quad , \quad n \neq 1.$$

$$\begin{aligned} \frac{1}{\sqrt{10} + \sqrt{15} + \sqrt{14} + \sqrt{21}} &= \frac{1}{\sqrt{2 \cdot 5} + \sqrt{3 \cdot 5} + \sqrt{2 \cdot 7} + \sqrt{3 \cdot 7}} = \\ &= \frac{1}{\sqrt{2} \cdot \sqrt{5} + \sqrt{3} \cdot \sqrt{5} + \sqrt{2} \cdot \sqrt{7} + \sqrt{3} \cdot \sqrt{7}} = \frac{1}{\sqrt{5} \cdot (\sqrt{2} + \sqrt{3}) + \sqrt{7} \cdot (\sqrt{2} + \sqrt{3})} = \\ &= \frac{1}{(\sqrt{2} + \sqrt{3}) \cdot (\sqrt{5} + \sqrt{7})} = \frac{1}{(\sqrt{3} + \sqrt{2}) \cdot (\sqrt{7} + \sqrt{5})} = \\ &= \frac{1}{(\sqrt{3} + \sqrt{2}) \cdot (\sqrt{7} + \sqrt{5})} \cdot \frac{(\sqrt{3} - \sqrt{2}) \cdot (\sqrt{7} - \sqrt{5})}{(\sqrt{3} - \sqrt{2}) \cdot (\sqrt{7} - \sqrt{5})} = \\ &= \frac{(\sqrt{3} - \sqrt{2}) \cdot (\sqrt{7} - \sqrt{5})}{(\sqrt{3} + \sqrt{2}) \cdot (\sqrt{3} - \sqrt{2}) \cdot (\sqrt{7} + \sqrt{5}) \cdot (\sqrt{7} - \sqrt{5})} = \\ &= \frac{(\sqrt{3} - \sqrt{2}) \cdot (\sqrt{7} - \sqrt{5})}{\left((\sqrt{3})^2 - (\sqrt{2})^2 \right) \cdot \left((\sqrt{7})^2 - (\sqrt{5})^2 \right)} = \frac{(\sqrt{3} - \sqrt{2}) \cdot (\sqrt{7} - \sqrt{5})}{(3-2) \cdot (7-5)} = \\ &= \frac{(\sqrt{3} - \sqrt{2}) \cdot (\sqrt{7} - \sqrt{5})}{1 \cdot 2} = \frac{(\sqrt{3} - \sqrt{2}) \cdot (\sqrt{7} - \sqrt{5})}{2}. \end{aligned}$$

Vježba 594

Odmor!

Rezultat: ...

Zadatak 595 (Josip, maturant)

Koliko ima različitih peteroznamenastih brojeva u sustavu baze 5?

Rješenje 595

Ponovimo!

$$a^0 = 1.$$

Niz (slijed) je aritmetički ako je razlika svakog člana niza (osim prvog) i člana ispred njega stalna i iznosi d .

$$a_2 - a_1 = d \quad , \quad a_3 - a_2 = d \quad , \quad a_4 - a_3 = d \quad , \quad a_5 - a_4 = d \quad , \quad a_6 - a_5 = d \quad , \quad \dots \quad , \quad a_n - a_{n-1} = d \quad \dots$$

$$a_n - a_{n-1} = d \quad , \quad n \geq 2.$$

Broj d naziva se razlika (diferencija) aritmetičkog niza. Aritmetički niz je jednoznačno određen ako znamo prvi član a_1 i razliku d .

Opći član aritmetičkog niza s prvim članom a_1 i razlikom d ima oblik

$$a_n = a_1 + (n-1) \cdot d \Rightarrow n = \frac{a_n - a_1}{d} + 1.$$

Za bazu brojevnog sustava možemo uzeti bilo koji prirodni broj veći od 1. U sustavu s bazom b prirodni broj N zapisujemo kao

$$N = a_n a_{n-1} a_{n-2} \dots a_2 a_1 a_0(b)$$

pri čemu brojevi a_i , $i = 0, 1, 2, 3, \dots, n$ mogu poprimati vrijednosti iz skupa $\{0, 1, 2, 3, \dots, b-1\}$. Vrijednost prirodnog broja N zapisanog u sustavu s bazom b je

$$\begin{aligned} N = a_n a_{n-1} a_{n-2} \dots a_2 a_1 a_0(b) &= a_n \cdot b^n + a_{n-1} \cdot b^{n-1} + a_{n-2} \cdot b^{n-2} + \dots + a_2 \cdot b^2 + a_1 \cdot b^1 + a_0 \cdot b^0 = \\ &= a_n \cdot b^n + a_{n-1} \cdot b^{n-1} + a_{n-2} \cdot b^{n-2} + \dots + a_2 \cdot b^2 + a_1 \cdot b + a_0. \end{aligned}$$

U sustavu baze 5 postoji pet različitih znamenki: 0, 1, 2, 3 i 4. U njemu također vrijedi zakon pozicije (mjesne vrijednosti!).

Najmanji peteroznamenkasti broj u sustavu baze 5 je $10000_{(5)}$. Preveden u dekadski sustav iznosi:

$$10000_{(5)} = 10000(5) = 1 \cdot 5^4 + 0 \cdot 5^3 + 0 \cdot 5^2 + 0 \cdot 5^1 + 0 \cdot 5^0 = 625.$$

Najveći peteroznamenkasti broj u sustavu baze 5 je $44444_{(5)}$. Preveden u dekadski sustav iznosi:

$$44444_{(5)} = 44444(5) = 4 \cdot 5^4 + 4 \cdot 5^3 + 4 \cdot 5^2 + 4 \cdot 5^1 + 4 \cdot 5^0 = 4 \cdot 625 + 4 \cdot 125 + 4 \cdot 25 + 4 \cdot 5 + 4 \cdot 1 = 3124.$$

Niz prirodnih brojeva 625, ..., 3124 je aritmetički niz. Brojeva ima:

$$\left. \begin{array}{l} a_1 = 625 \\ a_n = 3124 \\ d = 1 \end{array} \right\} \Rightarrow \left[n = \frac{a_n - a_1}{d} + 1 \right] \Rightarrow n = \frac{3124 - 625}{1} + 1 \Rightarrow n = 2500.$$

Vježba 595

Koliko ima različitih troznamenkastih brojeva u sustavu baze 5?

Rezultat: 100.

Zadatak 596 (Ivana, gimnazija)

Ako je broj $a \cdot b + c \cdot d$ djeljiv s $a - c$, kojim brojem je djeljiv broj $a \cdot d + b \cdot c$?

Rješenje 596

Ponovimo!

Za prirodan broj a kažemo da je djeljiv s prirodnim brojem b ako postoji prirodan broj q tako da vrijedi

$$a = b \cdot q.$$

Zakon distribucije množenja prema zbrajanju.

$$a \cdot (b+c) = a \cdot b + a \cdot c, \quad a \cdot b + a \cdot c = a \cdot (b+c).$$

Teorem. Ako su a i b cijeli brojevi djeljivi cijelim brojem q ($q \neq 0$), onda je $s \cdot q$ djeljiv i njihov zbroj $a + b$ i njihova razlika $a - b$.

Po pretpostavci broj $a \cdot b + c \cdot d$ je djeljiv s $a - c$. To znači da postoji cijeli broj q tako da vrijedi

$$a \cdot b + c \cdot d = q \cdot (a - c).$$

Preoblikujemo izraz $a \cdot d + b \cdot c$.

$$\begin{aligned} a \cdot d + b \cdot c &= a \cdot d + b \cdot c - a \cdot b - c \cdot d + a \cdot b + c \cdot d = (a \cdot d - c \cdot d) + (-a \cdot b + b \cdot c) + (a \cdot b + c \cdot d) = \\ &= d \cdot (a - c) - b \cdot (a - c) + q \cdot (a - c) = (a - c) \cdot (d - b + q). \end{aligned}$$

Vježba 596

Odmor!

Rezultat: ...

Zadatak 597 (Bruno, gimnazija)

Za koje prirodne brojeve n je zbroj $n^2 + (n+1)^2 + (n+2)^2 + (n+3)^2$ djeljiv sa 10?

Rješenje 597

Ponovimo!

$$(a+b)^2 = a^2 + 2 \cdot a \cdot b + b^2, \quad (a \cdot b)^n = a^n \cdot b^n.$$

Prirodni je broj djeljiv s 10 ako mu je posljednja znamenka 0.

$$\begin{aligned} n^2 + (n+1)^2 + (n+2)^2 + (n+3)^2 &= n^2 + n^2 + 2 \cdot n + 1 + n^2 + 4 \cdot n + 4 + n^2 + 6 \cdot n + 9 = \\ &= 4 \cdot n^2 + 12 \cdot n + 14 = 4 \cdot n^2 + 12 \cdot n + 9 + 5 = (2 \cdot n + 3)^2 + 5. \end{aligned}$$

Primijetimo da $(2 \cdot n + 3)^2$ mora biti broj kojemu je zadnja znamenka 5, odnosno zadnja znamenka broja $2 \cdot n + 3$ mora biti 5. Dakle,

$$\begin{aligned} 2 \cdot n + 3 = 10 \cdot k + 5 &\Rightarrow 2 \cdot n = 10 \cdot k + 5 - 3 \Rightarrow 2 \cdot n = 10 \cdot k + 2 \Rightarrow 2 \cdot n = 10 \cdot k + 2 \quad / : 2 \Rightarrow \\ &\Rightarrow n = 5 \cdot k + 1, \quad k \in \{0, 1, 2, 3, 4, 5, \dots\}. \end{aligned}$$

Vježba 597

Odmor!

Rezultat: ...

Zadatak 598 (Vesna, ekonomska škola)

Izračunajte $(\sqrt{2} + \sqrt{3})^2 + 2 \cdot (\sqrt{2} + \sqrt{3}) \cdot (\sqrt{2} - \sqrt{3}) + (\sqrt{2} - \sqrt{3})^2$.

A. 4 B. 8 C. $\sqrt{2}$ D. $\sqrt{3}$

Rješenje 598

Ponovimo!

$$\begin{aligned} (a+b)^2 &= a^2 + 2 \cdot a \cdot b + b^2, \quad (a-b)^2 = a^2 - 2 \cdot a \cdot b + b^2, \quad (a \cdot b)^n = a^n \cdot b^n. \\ (a-b) \cdot (a+b) &= a^2 - b^2, \quad (\sqrt{a})^2 = a, \quad \sqrt{a} \cdot \sqrt{b} = \sqrt{a \cdot b}. \end{aligned}$$

1. inačica

$$\begin{aligned} &(\sqrt{2} + \sqrt{3})^2 + 2 \cdot (\sqrt{2} + \sqrt{3}) \cdot (\sqrt{2} - \sqrt{3}) + (\sqrt{2} - \sqrt{3})^2 = \\ &= (\sqrt{2})^2 + 2 \cdot \sqrt{2 \cdot 3} + (\sqrt{3})^2 + 2 \cdot \left((\sqrt{2})^2 - (\sqrt{3})^2 \right) + (\sqrt{2})^2 - 2 \cdot \sqrt{2 \cdot 3} + (\sqrt{3})^2 = \\ &= 2 + 2 \cdot \sqrt{2 \cdot 3} + 3 + 2 \cdot (2 - 3) + 2 - 2 \cdot \sqrt{2 \cdot 3} + 3 = 2 + 3 + 2 \cdot (-1) + 2 + 3 = 5 - 2 + 5 = 8. \end{aligned}$$

Odgovor je pod B.

2. inačica

Uočimo da se radi o kvadratu izraza $\sqrt{2} + \sqrt{3} + \sqrt{2} - \sqrt{3}$.

$$\begin{aligned} &(\sqrt{2} + \sqrt{3})^2 + 2 \cdot (\sqrt{2} + \sqrt{3}) \cdot (\sqrt{2} - \sqrt{3}) + (\sqrt{2} - \sqrt{3})^2 = \\ &= (\sqrt{2} + \sqrt{3} + \sqrt{2} - \sqrt{3})^2 = (\sqrt{2} + \sqrt{3} + \sqrt{2} - \sqrt{3})^2 = (2 \cdot \sqrt{2})^2 = 2^2 \cdot (\sqrt{2})^2 = 4 \cdot 2 = 8. \end{aligned}$$

Odgovor je pod B.

Vježba 598

Odmor!

Rezultat: ...

Zadatak 599 (Dragan, ekonomska škola)

Odredite sve cijele brojeve a za koje je izraz $\frac{a^2+1}{a-1}$ cijeli broj.

Rješenje 599

Ponovimo!

$$a^2 - b^2 = (a-b) \cdot (a+b), \quad \frac{a+b}{n} = \frac{a}{n} + \frac{b}{n}.$$

Za prirodan broj a kažemo da je djeljiv s prirodnim brojem b ako postoji prirodan broj q tako da vrijedi

$$a = b \cdot q.$$

Skratiti razlomak znači brojnik i nazivnik tog razlomka podijeliti istim brojem različitim od nule i jedinice

$$\frac{a \cdot n}{b \cdot n} = \frac{a}{b}, \quad n \neq 0, \quad n \neq 1.$$

Skup cijelih brojeva označavamo slovom Z , a zapisujemo kao

$$Z = \{ \dots, -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, \dots \} \quad \text{ili} \quad Z = \{ 0, 1, -1, 2, -2, 3, -3, \dots \}.$$

$$\begin{aligned} \frac{a^2+1}{a-1} &= \frac{a^2-1+2}{a-1} = \frac{a^2-1}{a-1} + \frac{2}{a-1} = \frac{(a-1) \cdot (a+1)}{a-1} + \frac{2}{a-1} = \frac{(a-1) \cdot (a+1)}{a-1} + \frac{2}{a-1} = \\ &= a+1 + \frac{2}{a-1}. \end{aligned}$$

Izraz $\frac{2}{a-1}$ je cijeli broj za

$$a-1 \in \{-2, -1, 1, 2\} \Rightarrow a \in \{-1, 0, 2, 3\}.$$

Vježba 599

Odmor!

Rezultat: ...

Zadatak 600 (Dino, srednja škola)

Umnožak dva dvoznamenkasta broja je broj zapisan znamenkama 4, ali ne znamo koliko ih ima. Koji su to dvoznamenkasti brojevi?

Rješenje 600

Ponovimo!

Prirodni je broj djeljiv s 2 ako mu je posljednja znamenka 0, 2, 4, 6 ili 8.

Prirodni je broj djeljiv s 2 ako je paran broj.

Prirodni je broj djeljiv s 3 ako mu je zbroj znamenki djeljiv s 3.

Prirodni je broj djeljiv s 11 ako mu je razlika zbroja znamenki na neparnim mjestima odnosno na parnim mjestima, idući zdesna na lijevo, djeljiva s 11.

Za prirodan broj a kažemo da je djeljiv s prirodnim brojem b ako postoji prirodan broj q tako da vrijedi

$$a = b \cdot q.$$

Prosti brojevi (prim – brojevi) su prirodni brojevi djeljivi bez ostatka samo s brojem 1 i sami sa sobom, a veći od broja 1. Prirodni brojevi koji su veći od broja 1, a nisu prosti brojevi nazivaju se složenim brojevima. Složen broj je prirodan broj veći od jedan koji je djeljiv brojem 1, samim sobom i barem još jednim brojem. **Svaki se složeni broj može rastaviti na proste faktore.**

Uočimo da najveći umnožak dva dvoznamenkasta broja može biti 9801 jer je

$$99 \cdot 99 = 9801,$$

a najmanji 100 jer je

$$10 \cdot 10 = 100.$$

U zadatku to mogu biti brojevi 4444 i 444.

Rastavimo li broj 4444 na proste faktore dobije se:

$$4444 = 2 \cdot 2222 = 2 \cdot 2 \cdot 1111 = 2 \cdot 2 \cdot 11 \cdot 101 = \underline{44 \cdot 101}.$$

U ovom slučaju ne dobijemo rješenje.

Rastavimo li broj 444 na proste faktore dobije se:

$$444 = 2 \cdot 222 = 2 \cdot 2 \cdot 111 = 2 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 37 = \boxed{12 \cdot 37}.$$

Traženi brojevi su 12 i 37.

Vježba 600

Odmor!

Rezultat: ...

www.halapa.com