Zadatak 481 (Davor, ekonomska škola)

Je li broj $(a-1)\cdot(a-3)\cdot(a-4)\cdot(a-6)+10$ pozitivan za svaki realni broj a?

$A.$ Da $B.$ Ne

Rješenje 481

Ponovimo!

$$a^1=a \quad , \quad a^n\cdot a^m=a^{n+m} \quad , \quad a^2+2\cdot a\cdot b+b^2=(a+b)^2 \quad , \quad a^2\geq 0 \ , \ a\in R.$$

Množenje zagrada

$$(a+b)\cdot(c+d)=a\cdot c+a\cdot d+b\cdot c+b\cdot d.$$

Preoblikujemo izraz.

$$(a-1)\cdot(a-3)\cdot(a-4)\cdot(a-6)+10=(a-1)\cdot(a-6)\cdot(a-3)\cdot(a-4)+10=$$

$$=((a-1)\cdot(a-6))\cdot((a-3)\cdot(a-4))+10=\left(a^2-6\cdot a-a+6\right)\cdot\left(a^2-4\cdot a-3\cdot a+12\right)+10=$$

$$=\left(a^2-7\cdot a+6\right)\cdot\left(a^2-7\cdot a+12\right)+10=\left(a^2-7\cdot a+6\right)\cdot\left(\left(a^2-7\cdot a+6\right)+6\right)+10=$$

$$=\left(a^2-7\cdot a+6\right)^2+6\cdot\left(a^2-7\cdot a+6\right)+10=\left(a^2-7\cdot a+6\right)^2+6\cdot\left(a^2-7\cdot a+6\right)+9+1=$$

$$=\left(a^2-7\cdot a+6\right)^2+2\cdot\left(a^2-7\cdot a+6\right)\cdot 3+3^2+1=$$

$$=\left(\left(a^2-7\cdot a+6\right)^2+2\cdot\left(a^2-7\cdot a+6\right)\cdot 3+3^2\right)+1=\left(\left(a^2-7\cdot a+6\right)+3\right)^2+1=$$

$$=\left(a^2-7\cdot a+6+3\right)^2+1=\left(a^2-7\cdot a+9\right)^2+1>0.$$

Odgovor je pod A.

Vježba 481

Je li broj $(a-1)\cdot(a-3)\cdot(a-4)\cdot(a-6)+11$ pozitivan za svaki realni broj a?

$A.$ Da $B.$ Ne

Rezultat: A.

Zadatak 482 (Mihaela, gimnazija)

Pokaži da je broju 2^{2^n}, $n\geq 2$ zadnja znamenka broj 6.

Rješenje 482

Ponovimo!

$$a^1=a \quad , \quad a^n\cdot a^m=a^{n+m} \quad , \quad \left(a^n\right)^m=a^{n\cdot m}.$$

Matematička indukcija sastoji se iz dva koraka: baze indukcije i koraka indukcije. U bazi indukcije provjerava se je li tvrdnja istinita za najmanji prirodni broj (obično je to broj 1, osim ako nije postavljen neki drugi uvjet). U koraku indukcije pretpostavi se najprije da je tvrdnja istinita za prirodan broj n i zatim se provjerava istinitost tvrdnje za sljedbenika n + 1.

baza indukcije

n = 2

$$2^{2^2}=2^4=16.$$

Dakle, baza indukcije je ispunjena jer $2^4 = 16$ završava znamenkom 6.

korak indukcije

n

Pretpostavimo da je tvrdnja istinita za neki prirodni broj n,

$$N=2^{2^{n}} \quad - \text{(broj završava šesticom) induktivna pretpostavka}$$

n + 1

Sada provjeravamo istinitost tvrdnje za sljedbenika n + 1:

$$2^{2^{n+1}}=2^{2^{n}\cdot 2^{1}}=2^{2^{n}\cdot 2}=\left(2^{2^{n}}\right)^{2}=\left[\,N=2^{2^{n}}\,\right]=N^{2}.$$

Kvadrat broja koji završava znamenkom šest, također, završava znamenkom šest.

Vježba 482

Odmor!

Rezultat: …

Zadatak 483 (Darko, srednja škola)

Pojednostavnite izraz: $(a-b)^{n}\cdot(a+b)^{-n}\cdot(a-b)^{n-1}\cdot(a+b)^{1-n}$, $a\neq\pm b$.

Rješenje 483

Ponovimo!

$$a^{1}=a \quad , \quad a^{n}\cdot a^{m}=a^{n+m} \quad , \quad a^{-n}=\frac{1}{a^{n}} \quad , \quad a\cdot\frac{b}{c}=\frac{a\cdot b}{c} \quad , \quad \frac{a^{n}}{b^{n}}=\left(\frac{a}{b}\right)^{n}.$$

$$n=\frac{n}{1} \quad , \quad \frac{a^{-n}}{b^{-m}}=\frac{b^{m}}{a^{n}}.$$

Zakon distribucije množenja prema zbrajanju.

$$a\cdot(b+c)=a\cdot b+a\cdot c \quad , \quad a\cdot b+a\cdot c=a\cdot(b+c).$$

1.inačica

$$(a-b)^{n}\cdot(a+b)^{-n}\cdot(a-b)^{n-1}\cdot(a+b)^{1-n}=(a-b)^{n}\cdot(a-b)^{n-1}\cdot(a+b)^{-n}\cdot(a+b)^{1-n}=$$

$$=(a-b)^{n+n-1}\cdot(a+b)^{-n+1-n}=(a-b)^{2\cdot n-1}\cdot(a+b)^{1-2\cdot n}=(a-b)^{2\cdot n-1}\cdot(a+b)^{-(2\cdot n-1)}=$$

$$=(a-b)^{2\cdot n-1}\cdot\frac{1}{(a+b)^{2\cdot n-1}}=\frac{(a-b)^{2\cdot n-1}}{(a+b)^{2\cdot n-1}}=\left(\frac{a-b}{a+b}\right)^{2\cdot n-1}.$$

2.inačica

$$(a-b)^{n}\cdot(a+b)^{-n}\cdot(a-b)^{n-1}\cdot(a+b)^{1-n}=(a-b)^{n}\cdot\frac{1}{(a+b)^{n}}\cdot(a-b)^{n-1}\cdot(a+b)^{-(n-1)}=$$

$$=\frac{(a-b)^{n}}{(a+b)^{n}}\cdot(a-b)^{n-1}\cdot\frac{1}{(a+b)^{n-1}}=\left(\frac{a-b}{a+b}\right)^{n}\cdot\frac{(a-b)^{n-1}}{(a+b)^{n-1}}=\left(\frac{a-b}{a+b}\right)^{n}\cdot\left(\frac{a-b}{a+b}\right)^{n-1}=$$

$$=\left(\frac{a-b}{a+b}\right)^{n+n-1}=\left(\frac{a-b}{a+b}\right)^{2\cdot n-1}.$$

3.inačica

$$(a-b)^{n}\cdot(a+b)^{-n}\cdot(a-b)^{n-1}\cdot(a+b)^{1-n}=$$

$$=(a-b)^{n}\cdot(a+b)^{-n}\cdot(a-b)^{n}\cdot(a-b)^{-1}\cdot(a+b)^{1}\cdot(a+b)^{-n}=$$

$$=(a-b)^{n}\cdot\frac{1}{(a+b)^{n}}\cdot(a-b)^{n}\cdot\frac{1}{a-b}\cdot(a+b)\cdot\frac{1}{(a+b)^{n}}=$$

$$=\frac{(a-b)^n}{1}\cdot\frac{1}{(a+b)^n}\cdot\frac{(a-b)^n}{1}\cdot\frac{1}{a-b}\cdot\frac{a+b}{1}\cdot\frac{1}{(a+b)^n}=$$

$$=\frac{(a-b)^n\cdot(a-b)^n\cdot(a+b)}{(a+b)^n\cdot(a-b)\cdot(a+b)^n}=\frac{(a-b)^{n+n}\cdot(a+b)^1}{(a+b)^{n+n}\cdot(a-b)^1}=\frac{(a-b)^{2\cdot n}\cdot(a-b)^{-1}}{(a+b)^{2\cdot n}\cdot(a+b)^{-1}}=$$

$$=\frac{(a-b)^{2\cdot n-1}}{(a+b)^{2\cdot n-1}}=\left(\frac{a-b}{a+b}\right)^{2\cdot n-1}.$$

Vježba 483

Odmor!

Rezultat: …

Zadatak 484 (Darko, srednja škola)

Čemu je jednako: $\sqrt{2\cdot x+2\cdot\sqrt{x^2-y^2}}$, $x\ge y\ge 0$.

A. $\sqrt{x-y}$ B. $\sqrt{x+y}$ C. $\sqrt{x-y}+\sqrt{x+y}$ D. $\sqrt{x-y}-\sqrt{x+y}$

Rješenje 484

Ponovimo!

$$\left(\sqrt{a}\right)^2=a\ ,\ a\ge 0\quad,\quad a^2+2\cdot a\cdot b+b^2=(a+b)^2\quad,\quad\sqrt{a^2}=a\ ,\ a\ge 0.$$

$$\sqrt{2\cdot x+2\cdot\sqrt{x^2-y^2}}=\sqrt{x+x+2\cdot\sqrt{(x-y)\cdot(x+y)}}=$$

$$=\sqrt{x-y+2\cdot\sqrt{(x-y)\cdot(x+y)}+x+y}=\sqrt{\left(\sqrt{x-y}\right)^2+2\cdot\sqrt{x-y}\cdot\sqrt{x+y}+\left(\sqrt{x+y}\right)^2}=$$

$$=\sqrt{\left(\sqrt{x-y}+\sqrt{x+y}\right)^2}=\sqrt{x-y}+\sqrt{x+y}.$$

Odgovor je pod C.

Vježba 484

Odmor!

Rezultat: …

Zadatak 485 (Lucija, gimnazija)

Ako je a realan broj različit od nule izračunaj $A=a^{-1}\cdot\left(1+a^{-2}\right)^{-0.5}\cdot\left(1+a^2\right)^{0.5}$.

Rješenje 485

Ponovimo!

$$a^1=a\quad,\quad a^{-n}=\frac{1}{a^n}\quad,\quad\frac{a}{b}\cdot c=\frac{a\cdot c}{b}\quad,\quad\frac{a^n}{b^n}=\left(\frac{a}{b}\right)^n\quad,\quad\sqrt{a}=a^{\frac{1}{2}}\quad,\quad n=\frac{n}{1}.$$

$$\frac{a}{b}+\frac{c}{d}=\frac{a\cdot d+b\cdot c}{b\cdot d}\quad,\quad\frac{\frac{a}{b}}{\frac{c}{d}}=\frac{a\cdot d}{b\cdot c}\quad,\quad\sqrt{a^2}=|a|.$$

Skratiti razlomak znači brojnik i nazivnik tog razlomka podijeliti istim brojem različitim od nule i jedinice

$$\frac{a\cdot n}{b\cdot n}=\frac{a}{b}\ ,\ n\ne 0\ ,\ n\ne 1.$$

Za realni broj x njegova je apsolutna vrijednost (modul) broj $|x|$ koji određujemo na ovaj način:

$$|x|=\begin{cases} x, & x\geq 0 \\ -x, & x<0. \end{cases}$$

Ako je broj x pozitivan ili nula, tada je on jednak svojoj apsolutnoj vrijednosti. Za svaki x, $x \geq 0$, vrijedi $|x| = x$.
Ako je x negativan broj, njegova apsolutna vrijednost je suprotan broj – x koji je pozitivan. Za svaki x, $x < 0$, je $|x| = -x$.
Decimalni broj piše se u obliku decimalnog razlomka tako da se u brojnik napiše zadani decimalni broj bez decimalne točke, a u nazivnik se napiše dekadska jedinica (10, 100, 1000, 10000, 100000, …) koja ima toliko nula koliko decimalni broj ima decimala (znamenaka na decimalnom mjestu, tj. iza decimalne točke ili decimalnog zareza).

$$A=a^{-1}\cdot\left(1+a^{-2}\right)^{-0.5}\cdot\left(1+a^{2}\right)^{0.5} \Rightarrow A=\frac{1}{a}\cdot\frac{1}{\left(1+a^{-2}\right)^{0.5}}\cdot\left(1+a^{2}\right)^{0.5} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow A=\frac{1}{a}\cdot\frac{\left(1+a^{2}\right)^{0.5}}{\left(1+a^{-2}\right)^{0.5}} \Rightarrow A=\frac{1}{a}\cdot\left(\frac{1+a^{2}}{1+a^{-2}}\right)^{0.5} \Rightarrow A=\frac{1}{a}\cdot\left(\frac{1+a^{2}}{1+a^{-2}}\right)^{\frac{5}{10}} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow A=\frac{1}{a}\cdot\left(\frac{1+a^{2}}{1+a^{-2}}\right)^{\frac{5}{10}} \Rightarrow A=\frac{1}{a}\cdot\left(\frac{1+a^{2}}{1+a^{-2}}\right)^{\frac{1}{2}} \Rightarrow A=\frac{1}{a}\cdot\sqrt{\frac{1+a^{2}}{1+a^{-2}}} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow A=\frac{1}{a}\cdot\sqrt{\frac{1+a^{2}}{1+\frac{1}{a^{2}}}} \Rightarrow A=\frac{1}{a}\cdot\sqrt{\frac{1+a^{2}}{\frac{1}{1}+\frac{1}{a^{2}}}} \Rightarrow A=\frac{1}{a}\cdot\sqrt{\frac{1+a^{2}}{\frac{a^{2}+1}{a^{2}}}} \Rightarrow A=\frac{1}{a}\cdot\sqrt{\frac{\frac{1+a^{2}}{1}}{\frac{a^{2}+1}{a^{2}}}} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow A=\frac{1}{a}\cdot\sqrt{\frac{\frac{a^{2}+1}{1}}{\frac{a^{2}+1}{a^{2}}}} \Rightarrow A=\frac{1}{a}\cdot\sqrt{\frac{\frac{a^{2}+1}{1}}{\frac{a^{2}+1}{a^{2}}}} \Rightarrow A=\frac{1}{a}\cdot\sqrt{\frac{\frac{1}{1}}{\frac{1}{a^{2}}}} \Rightarrow A=\frac{1}{a}\cdot\sqrt{a^{2}} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow A=\frac{1}{a}\cdot|a| \Rightarrow A=\frac{|a|}{a}.$$

Vrijedi:

- $a>0 \Rightarrow |a|=a \Rightarrow A=\frac{a}{a} \Rightarrow A=\frac{a}{a} \Rightarrow A=1$
- $a<0 \Rightarrow |a|=-a \Rightarrow A=\frac{-a}{a} \Rightarrow A=-\frac{a}{a} \Rightarrow A=-1.$

Vježba 485

Odmor!

Rezultat: …

Zadatak 486 (Mario, gimnazija)

Za koje cijele brojeve x je iznos $\frac{2\cdot x+8}{x}$ cijeli broj?

Rješenje 486

Ponovimo!

$$\frac{a+b}{n}=\frac{a}{n}+\frac{b}{n}.$$

Cijeli brojevi jesu brojevi:

$$..., -5, -4, -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, 4, 5, ...$$

Oni čine skup cijelih brojeva koji označavamo slovom Z, a zapisujemo kao

$$Z=\{..., -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, ...\} \qquad \text{ili} \qquad Z=\{0, 1, -1, 2, -2, 3, -3, ...\}.$$

Za cijeli broj a kažemo da je **djeljiv s cijelim brojem** b (b ≠ 0) ako postoji cijeli broj q tako da vrijedi

$$a=q\cdot b.$$

Broj q zovemo **količnikom** brojeva a i b i pišemo
Skratiti razlomak znači brojnik i nazivnik tog razlomka podijeliti istim brojem različitim od nule i jedinice

$$\frac{a\cdot n}{b\cdot n}=\frac{a}{b} \ , \ n\neq 0 \ , \ n\neq 1.$$

Preoblikujemo zadani razlomak.

$$\frac{2\cdot x+8}{x}=\frac{2\cdot x}{x}+\frac{8}{x}=\frac{2\cdot x}{x}+\frac{8}{x}=2+\frac{8}{x}.$$

Iznos $2+\frac{8}{x}$ cijeli je broj, ako je $\frac{8}{x}$ cijeli broj. To znači da x mora biti jednak: – 8, – 4, – 2, – 1, 1, 2, 4, 8.

Dakle,

$$x\in\{-8, -4, -2, -1, 1, 2, 4, 8\}.$$

Vježba 486

Za koje cijele brojeve x je iznos $\frac{5\cdot x+2}{x}$ cijeli broj?

Rezultat: $x\in\{-2, -1, 1, 2\}.$

Zadatak 487 (Mario, gimnazija)

Odredi sve razlomke s nazivnikom 9 koji su veći od $\frac{3}{7}$, a manji od $\frac{5}{7}$.

Rješenje 487

Ponovimo!

$$a<b \ , \ c>0 \ \Rightarrow \ a\cdot c<b\cdot c \qquad , \qquad \frac{a}{b}\cdot c=\frac{a\cdot c}{b} \qquad , \qquad \frac{a}{b}\cdot b=a.$$

Cijeli brojevi jesu brojevi:

$$..., -5, -4, -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, 4, 5, ...$$

Oni čine skup cijelih brojeva koji označavamo slovom Z, a zapisujemo kao

$$Z=\{..., -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, ...\} \qquad \text{ili} \qquad Z=\{0, 1, -1, 2, -2, 3, -3, ...\}.$$

Neka je x cijeli broj. Tada vrijedi:

$$\frac{3}{7}<\frac{x}{9}<\frac{5}{7} \Rightarrow \frac{3}{7}<\frac{x}{9}<\frac{5}{7} \ /\cdot 9 \Rightarrow \frac{27}{7}<x<\frac{45}{7} \Rightarrow 3.86<x<6.43 \Rightarrow \begin{bmatrix} x \text{ je} \\ \text{cijeli broj} \end{bmatrix} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow x\in\{4, 5, 6\}.$$

Razlomci su: $\frac{4}{9}, \frac{5}{9}, \frac{6}{9}.$

Vježba 487

Odredi sve razlomke s nazivnikom 9 koji su veći od $\frac{2}{7}$, a manji od $\frac{4}{7}$.

Rezultat: $x\in\{-2, -1, 1, 2\}.$

Zadatak 488 (Ivan, obrtnička škola)

Izračunaj: $\dfrac{\frac{1}{3}-\frac{1}{4}}{\frac{1}{3}+\frac{1}{4}}:\dfrac{\frac{1}{4}-\frac{1}{5}}{\frac{1}{4}+\frac{1}{5}}\cdot\left(\frac{1}{4}+\frac{1}{12}\right).$

Rješenje 488

Ponovimo!

$$\frac{a}{b}-\frac{c}{d}=\frac{a\cdot d-b\cdot c}{b\cdot d}\quad,\quad\frac{a}{b}+\frac{c}{d}=\frac{a\cdot d+b\cdot c}{b\cdot d}\quad,\quad\frac{a}{b}:\frac{c}{d}=\frac{a}{b}\cdot\frac{d}{c}=\frac{a\cdot d}{b\cdot c}.$$

$$\frac{\frac{a}{b}}{\frac{c}{d}}=\frac{a\cdot d}{b\cdot c}\quad,\quad\frac{a}{b}\cdot\frac{c}{d}=\frac{a\cdot c}{b\cdot d}.$$

Skratiti razlomak znači brojnik i nazivnik tog razlomka podijeliti istim brojem različitim od nule i jedinice

$$\frac{a\cdot n}{b\cdot n}=\frac{a}{b}\;,\;n\neq0\;,\;n\neq1.$$

$$\frac{\frac{1}{3}-\frac{1}{4}}{\frac{1}{3}+\frac{1}{4}}:\frac{\frac{1}{4}-\frac{1}{5}}{\frac{1}{4}+\frac{1}{5}}\cdot\left(\frac{1}{4}+\frac{1}{12}\right)=\frac{\frac{4-3}{12}}{\frac{4+3}{12}}:\frac{\frac{5-4}{20}}{\frac{5+4}{20}}\cdot\frac{3+1}{12}=\frac{\frac{1}{12}}{\frac{7}{12}}:\frac{\frac{1}{20}}{\frac{9}{20}}\cdot\frac{4}{12}=\frac{\frac{1}{12}}{\frac{7}{12}}:\frac{\frac{1}{20}}{\frac{9}{20}}\cdot\frac{4}{12}=\frac{\frac{1}{1}}{\frac{7}{1}}:\frac{\frac{1}{1}}{\frac{9}{1}}\cdot\frac{1}{3}=$$

$$=\frac{1}{7}:\frac{1}{9}\cdot\frac{1}{3}=\frac{1}{7}\cdot\frac{9}{1}\cdot\frac{1}{3}=\frac{1}{7}\cdot\frac{9}{1}\cdot\frac{1}{3}=\frac{1}{7}\cdot\frac{3}{1}\cdot\frac{1}{1}=\frac{3}{7}.$$

Vježba 488

Izračunaj: $\dfrac{\frac{1}{3}-\frac{1}{4}}{\frac{1}{3}+\frac{1}{4}}\cdot\dfrac{\frac{1}{4}+\frac{1}{5}}{\frac{1}{4}-\frac{1}{5}}\cdot\left(\frac{1}{4}+\frac{1}{12}\right).$

Rezultat: $\frac{3}{7}.$

Zadatak 489 (Zdravko, srednja škola)

Dokaži nejednakost $1+\frac{1}{\sqrt{2}}+\frac{1}{\sqrt{3}}+\ldots+\frac{1}{\sqrt{n}}>\sqrt{n},$ za svaki prirodni broj $n\geq2$.

Rješenje 489

Ponovimo!

$$a^1=a\quad,\quad a^n\cdot a^m=a^{n+m}\quad,\quad\left(\sqrt{a}\right)^2=a\;,\;a\geq0\quad,\quad a>b\;,\;c>0\;\Rightarrow\;a\cdot c>b\cdot c.$$

$$n=\frac{n}{1}\quad,\quad\frac{a}{b}+\frac{c}{d}=\frac{a\cdot d+b\cdot c}{b\cdot d}\quad,\quad\frac{a^n}{a^m}=a^{n-m}\quad,\quad a>b>0\;\Rightarrow\;a^2>b^2.$$

$$\sqrt{a}\cdot\sqrt{b}=\sqrt{a\cdot b}\quad,\quad\frac{a}{b}\cdot\frac{c}{d}=\frac{a\cdot c}{b\cdot d}\quad,\quad\frac{a}{n}+\frac{b}{n}=\frac{a+b}{n}.$$

Zakon distribucije množenja prema zbrajanju.

$$a\cdot(b+c)=a\cdot b+a\cdot c\quad,\quad a\cdot b+a\cdot c=a\cdot(b+c).$$

Skratiti razlomak znači brojnik i nazivnik tog razlomka podijeliti istim brojem različitim od nule i jedinice

$$\frac{a\cdot n}{b\cdot n}=\frac{a}{b}\;,\;n\neq0\;,\;n\neq1.$$

Proširiti razlomak znači brojnik i nazivnik tog razlomka pomnožiti istim brojem različitim od nule i jedinice

$$\frac{a}{b}=\frac{a\cdot n}{b\cdot n}\ ,\ n\neq 0\ ,\ n\neq 1.$$

Matematička indukcija sastoji se iz dva koraka: baze indukcije i koraka indukcije. U bazi indukcije provjerava se je li tvrdnja istinita za najmanji prirodni broj (obično je to broj 1, osim ako nije postavljen neki drugi uvjet). U koraku indukcije pretpostavi se najprije da je tvrdnja istinita za prirodan broj n i zatim se provjerava istinitost tvrdnje za sljedbenika n + 1.

baza indukcije

n = 2

$$1+\frac{1}{\sqrt{2}}>\sqrt{2}\ \Rightarrow\ 1+\frac{1}{\sqrt{2}}>\sqrt{2}\ /\cdot\sqrt{2}\ \Rightarrow\ \sqrt{2}+1>\left(\sqrt{2}\right)^2\ \Rightarrow\ \sqrt{2}+1>2\ \Rightarrow$$

$$\Rightarrow\ \sqrt{2}>2-1\ \Rightarrow\ \sqrt{2}>1\ \Rightarrow\ \sqrt{2}>1\ /^2\ \Rightarrow\ \left(\sqrt{2}\right)^2>1^2\ \Rightarrow\ 2>1.$$

Dakle, baza indukcije je ispunjena jer smo dobili točnu nejednakost.

korak indukcije

n

Pretpostavimo da je tvrdnja istinita za neki prirodni broj n,

$$1+\frac{1}{\sqrt{2}}+\frac{1}{\sqrt{3}}+\ldots+\frac{1}{\sqrt{n}}>\sqrt{n}\ -\ \text{induktivna pretpostavka}$$

n + 1

Sada provjeravamo istinitost tvrdnje za sljedbenika n + 1:

$$1+\frac{1}{\sqrt{2}}+\frac{1}{\sqrt{3}}+\ldots+\frac{1}{\sqrt{n}}+\frac{1}{\sqrt{n+1}}=\underbrace{1+\frac{1}{\sqrt{2}}+\frac{1}{\sqrt{3}}+\ldots+\frac{1}{\sqrt{n}}}_{\text{induktivna pretpostavka}}+\frac{1}{\sqrt{n+1}}>\sqrt{n}+\frac{1}{\sqrt{n+1}}.$$

Treba dokazati da vrijedi

$$\boxed{\sqrt{n}+\frac{1}{\sqrt{n+1}}>\sqrt{n+1}.}$$

Pokažimo to na više načina.

1.inačica

$$\sqrt{n}+\frac{1}{\sqrt{n+1}}=\frac{\sqrt{n}}{1}+\frac{1}{\sqrt{n+1}}=\frac{\sqrt{n}\cdot\sqrt{n+1}+1}{\sqrt{n+1}}=\frac{\sqrt{n\cdot(n+1)}+1}{\sqrt{n+1}}=\frac{\sqrt{n^2+n}+1}{\sqrt{n+1}}\ \ldots\left[\sqrt{n^2+n}>n\right]\ldots$$

$$>\frac{n+1}{\sqrt{n+1}}=\frac{\left(\sqrt{n+1}\right)^2}{\sqrt{n+1}}=\frac{\left(\sqrt{n+1}\right)^{\cancel{2}}}{\cancel{\sqrt{n+1}}}=\sqrt{n+1}.$$

2.inačica

$$\sqrt{n}+\frac{1}{\sqrt{n+1}}=\sqrt{n+1}\cdot\left(\frac{\sqrt{n}}{\sqrt{n+1}}+\frac{1}{\left(\sqrt{n+1}\right)^2}\right)=\sqrt{n+1}\cdot\left(\frac{\sqrt{n}}{\sqrt{n+1}}\cdot\frac{\sqrt{n+1}}{\sqrt{n+1}}+\frac{1}{n+1}\right)=$$

$$=\sqrt{n+1}\cdot\left(\frac{\sqrt{n}\cdot\sqrt{n+1}}{\left(\sqrt{n+1}\right)^2}+\frac{1}{n+1}\right)=\sqrt{n+1}\cdot\left(\frac{\sqrt{n\cdot(n+1)}}{n+1}+\frac{1}{n+1}\right)=\sqrt{n+1}\cdot\left(\frac{\sqrt{n^2+n}}{n+1}+\frac{1}{n+1}\right)=$$

$$=\sqrt{n+1}\cdot\frac{\sqrt{n^2+n}+1}{n+1}\ \ldots\left[\sqrt{n^2+n}>n\right]\ldots>\sqrt{n+1}\cdot\frac{n+1}{n+1}=\sqrt{n+1}\cdot\frac{\cancel{n+1}}{\cancel{n+1}}=\sqrt{n+1}.$$

3.inačica

$$\sqrt{n}+\frac{1}{\sqrt{n+1}}=\frac{\sqrt{n}}{1}+\frac{1}{\sqrt{n+1}}=\frac{\sqrt{n}\cdot\sqrt{n+1}+1}{\sqrt{n+1}}>\frac{\sqrt{n}\cdot\sqrt{n}+1}{\sqrt{n+1}}=\frac{\left(\sqrt{n}\right)^2+1}{\sqrt{n+1}}=\frac{n+1}{\sqrt{n+1}}=$$

$$=\frac{\left(\sqrt{n+1}\right)^2}{\sqrt{n+1}}=\frac{\left(\sqrt{n+1}\right)^2}{\sqrt{n+1}}=\sqrt{n+1}.$$

4.inačica

$$\sqrt{n}+\frac{1}{\sqrt{n+1}}>\sqrt{n+1}\ \Rightarrow\ \sqrt{n}+\frac{1}{\sqrt{n+1}}>\sqrt{n+1}\ /\cdot\sqrt{n+1}\ \Rightarrow\ \sqrt{n}\cdot\sqrt{n+1}+1>\left(\sqrt{n+1}\right)^2\ \Rightarrow$$

$$\Rightarrow\ \sqrt{n\cdot(n+1)}+1>n+1\ \Rightarrow\ \sqrt{n^2+n}+1>n+1\ \Rightarrow\ \sqrt{n^2+n}>n\ \Rightarrow\ \sqrt{n^2+n}>n\ /^2\ \Rightarrow$$

$$\Rightarrow\ \left(\sqrt{n^2+n}\right)^2>n^2\ \Rightarrow\ n^2+n>n^2\ \Rightarrow\ n^2+n>n^2\ \Rightarrow\ n>0.$$

Dobili smo točnu nejednakost. Pretpostavka

$$\sqrt{n}+\frac{1}{\sqrt{n+1}}>\sqrt{n+1}$$

je istinita.

Vježba 489

Odmor!

Rezultat: …

Zadatak 490 (Maturant, gimnazija)

Dokaži da za svaki prirodni broj n > 1 vrijedi nejednakost $\frac{1}{n+1}+\frac{1}{n+2}+\frac{1}{n+3}+\ldots+\frac{1}{2\cdot n}>\frac{1}{2}.$

Rješenje 490

Ponovimo!

$$0<a<b\ \Rightarrow\ \frac{1}{a}>\frac{1}{b}\quad,\quad a>b\ ,\ c>d\ \Rightarrow\ a+c>b+d.$$

Skratiti razlomak znači brojnik i nazivnik tog razlomka podijeliti istim brojem različitim od nule i jedinice

$$\frac{a\cdot n}{b\cdot n}=\frac{a}{b}\ ,\ n\neq 0\ ,\ n\neq 1.$$

Uočimo da vrijedi:

$$\left.\begin{array}{l} n+1<2\cdot n \\ n+2<2\cdot n \\ n+3<2\cdot n \\ \ldots \\ 2\cdot n=2\cdot n \end{array}\right\}\ \Rightarrow\ \left.\begin{array}{l} \frac{1}{n+1}>\frac{1}{2\cdot n} \\ \frac{1}{n+2}>\frac{1}{2\cdot n} \\ \frac{1}{n+3}>\frac{1}{2\cdot n} \\ \ldots \\ \frac{1}{2\cdot n}=\frac{1}{2\cdot n} \end{array}\right\}.$$

Budući da je svaki od n – 1 pribrojnika veći od $\frac{1}{2\cdot n}$ (a posljednji je pribrojnik jednak $\frac{1}{2\cdot n}$), zbroj je veći od $\frac{1}{2}$.

$$\frac{1}{n+1}+\frac{1}{n+2}+\frac{1}{n+3}+\ldots+\frac{1}{2\cdot n}>n\cdot\frac{1}{2\cdot n}=n\cdot\frac{1}{2\cdot n}=\frac{1}{2}.$$

Vježba 490

Odmor!

Rezultat: …

Zadatak 491 (Marinko, srednja škola)

Koji prirodni brojevi imaju **točno četiri** djelitelja?

Rješenje 491

Ponovimo!

Skup prirodnih brojeva označavamo slovom N, a zapisujemo

$$N=\{1,\ 2,\ 3,\ 4,\ 5,\ \ldots,\ n-1,\ n,\ n+1,\ \ldots\}.$$

Za prirodan broj a kažemo da je djeljiv s prirodnim brojem b ako postoji prirodan broj q tako da vrijedi

$$a=b\cdot q.$$

Prosti brojevi (prim – brojevi) su prirodni brojevi djeljivi bez ostatka samo s brojem 1 i sami sa sobom, a veći od broja 1.
Svaki prost broj ima točno dva djelitelja. To su broj 1 i taj broj. Umnožak dva proizvoljna međusobno različita prosta broja p i q ima točno četiri djelitelja: 1, p, q, p · q.

Vježba 491

Koji prirodni brojevi imaju **točno tri** djelitelja?

Rezultat: 1, p, p^2, gdje je p prost broj.

Zadatak 492 (Fox, gimnazija)

Izračunaj: $\left(\sqrt{7+2\cdot\sqrt{6}}+\sqrt{7-2\cdot\sqrt{6}}\right)^2$.

$A.$ 4 $B.$ 8 $C.$ 24 $D.$ 34

Rješenje 492

Ponovimo!

$$(a+b)^2=a^2+2\cdot a\cdot b+b^2 \quad , \quad (a-b)^2=a^2-2\cdot a\cdot b+b^2 \quad , \quad \left(\sqrt{a}\right)^2=a.$$

$$\sqrt{a}\cdot\sqrt{b}=\sqrt{a\cdot b} \quad , \quad (a-b)\cdot(a+b)=a^2-b^2 \quad , \quad (a\cdot b)^n=a^n\cdot b^n \quad , \quad \sqrt{a^2}=a \ , \ a\geq 0.$$

Zakon distribucije množenja prema zbrajanju.

$$a\cdot(b+c)=a\cdot b+a\cdot c \quad , \quad a\cdot b+a\cdot c=a\cdot(b+c).$$

1.inačica

$$\left(\sqrt{7+2\cdot\sqrt{6}}+\sqrt{7-2\cdot\sqrt{6}}\right)^2=$$

$$=\left(\sqrt{7+2\cdot\sqrt{6}}\right)^2+2\cdot\sqrt{7+2\cdot\sqrt{6}}\cdot\sqrt{7-2\cdot\sqrt{6}}+\left(\sqrt{7-2\cdot\sqrt{6}}\right)^2=$$

$$=7+2\cdot\sqrt{6}+2\cdot\sqrt{\left(7+2\cdot\sqrt{6}\right)\cdot\left(7-2\cdot\sqrt{6}\right)}+7-2\cdot\sqrt{6}=$$

$$=7+2\cdot\sqrt{6}+2\cdot\sqrt{7^2-\left(2\cdot\sqrt{6}\right)^2}+7-2\cdot\sqrt{6}=7+2\cdot\sqrt{49-2^2\cdot\left(\sqrt{6}\right)^2}+7=$$

$$=14+2\cdot\sqrt{49-4\cdot 6}=14+2\cdot\sqrt{49-24}=14+2\cdot\sqrt{25}=14+2\cdot 5=14+10=24.$$

Odgovor je pod C.

2.inačica

$$\left(\sqrt{7+2\cdot\sqrt{6}}+\sqrt{7-2\cdot\sqrt{6}}\right)^2=\left(\sqrt{6+2\cdot\sqrt{6}+1}+\sqrt{6-2\cdot\sqrt{6}+1}\right)^2=$$

$$=\left(\sqrt{\left(\sqrt{6}\right)^2+2\cdot\sqrt{6}+1}+\sqrt{\left(\sqrt{6}\right)^2-2\cdot\sqrt{6}+1}\right)^2=\left(\sqrt{\left(\sqrt{6}+1\right)^2}+\sqrt{\left(\sqrt{6}-1\right)^2}\right)^2=$$

$$=\begin{bmatrix}\sqrt{6}+1>0\\ \sqrt{6}-1>0\end{bmatrix}=\left(\sqrt{6}+1+\sqrt{6}-1\right)^2=\left(\sqrt{6}+1+\sqrt{6}-1\right)^2=\left(2\cdot\sqrt{6}\right)^2=2^2\cdot\left(\sqrt{6}\right)^2=4\cdot 6=24.$$

Odgovor je pod C.

Vježba 492

Izračunaj: $\left(\sqrt{4+2\cdot\sqrt{3}}-\sqrt{4-2\cdot\sqrt{3}}\right)^2.$

$A.\ 4 \qquad B.\ 8 \qquad C.\ 24 \qquad D.\ 34$

Rezultat: A.

Zadatak 493 (Maja, strukovna škola)

Zbroj dvaju prostih brojeva iznosi 36. Koji su to brojevi?

Rješenje 493

Ponovimo!

Skup prirodnih brojeva označavamo slovom N, a zapisujemo

$$N=\{1,\ 2,\ 3,\ 4,\ 5,\ \ldots,\ n-1,\ n,\ n+1,\ \ldots\}.$$

Prosti brojevi (prim – brojevi) su prirodni brojevi djeljivi bez ostatka samo s brojem 1 i sami sa sobom, a veći od broja 1. To su:

2, 3, 5, 7, 11, 13, 17, 19, 23, …

Sva rješenja su:

$$5+31=36 \quad , \quad 7+29=36 \quad , \quad 13+23=36 \quad , \quad 17+19=36.$$

Vježba 493

Zbroj dvaju prostih brojeva iznosi 18. Koji su to brojevi?

Rezultat: $5+13=18 \quad , \quad 7+11=18.$

Zadatak 494 (Luka, gimnazija)

Pomnoži $\sqrt{a}\cdot\sqrt[3]{a}\cdot\sqrt[4]{a}.$

$A.\ a \qquad B.\ \sqrt[12]{a} \qquad C.\ a\cdot\sqrt[6]{a} \qquad D.\ a\cdot\sqrt[12]{a}$

Rješenje 494

Ponovimo!

$$a^1=a \quad , \quad \sqrt[n]{a^m}=\sqrt[n\cdot r]{a^{m\cdot r}} \quad , \quad \sqrt[n]{a}\cdot\sqrt[n]{b}=\sqrt[n]{a\cdot b} \quad , \quad a^n\cdot a^m=a^{n+m}.$$

$$\sqrt[n]{a^n}=a\ ,\ a\ge 0 \quad , \quad \sqrt[n]{a^m}=a^{\frac{m}{n}} \quad , \quad \frac{a}{b}+\frac{c}{d}=\frac{a\cdot d+b\cdot c}{b\cdot d} \quad , \quad \frac{a+b}{n}=\frac{a}{n}+\frac{b}{n}.$$

Skratiti razlomak znači brojnik i nazivnik tog razlomka podijeliti istim brojem različitim od nule i jedinice

$$\frac{a\cdot n}{b\cdot n}=\frac{a}{b}\ ,\ n\ne 0\ ,\ n\ne 1.$$

1.inačica

Budući da je 12 najmanji zajednički višekratnik broja 2, 3 i 4 sve korijene svest ćemo na 12 – ti korijen.

$$\sqrt{a}\cdot\sqrt[3]{a}\cdot\sqrt[4]{a}=\sqrt{a^{1}}\cdot\sqrt[3]{a^{1}}\cdot\sqrt[4]{a^{1}}=\sqrt[6\cdot 2]{a^{6\cdot 1}}\cdot\sqrt[4\cdot 3]{a^{4\cdot 1}}\cdot\sqrt[3\cdot 4]{a^{3\cdot 1}}=\sqrt[12]{a^{6}}\cdot\sqrt[12]{a^{4}}\cdot\sqrt[12]{a^{3}}=$$

$$=\sqrt[12]{a^{6}\cdot a^{4}\cdot a^{3}}=\sqrt[12]{a^{6+4+3}}=\sqrt[12]{a^{13}}=\sqrt[12]{a^{12+1}}=\sqrt[12]{a^{12}\cdot a^{1}}=\sqrt[12]{a^{12}}\cdot\sqrt[12]{a^{1}}=$$

$$=\sqrt[12]{a^{12}}\cdot\sqrt[12]{a}=a\cdot\sqrt[12]{a}.$$

Odgovor je pod D.

2.inačica

$$\sqrt{a}\cdot\sqrt[3]{a}\cdot\sqrt[4]{a}=a^{\frac{1}{2}}\cdot a^{\frac{1}{3}}\cdot a^{\frac{1}{4}}=a^{\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\frac{1}{4}}=a^{\frac{6+4+3}{12}}=a^{\frac{13}{12}}=a^{\frac{12+1}{12}}=a^{\frac{12}{12}+\frac{1}{12}}=$$

$$=a^{\frac{12}{12}+\frac{1}{12}}=a^{1+\frac{1}{12}}=a^{1}\cdot a^{\frac{1}{12}}=a\cdot\sqrt[12]{a}.$$

Odgovor je pod D.

Vježba 494

Odmor!

Rezultat: …

Zadatak 495 (Antun, strukovna škola)

Koliki je rezultat umnoška $\left(\sqrt{3}-1\right)^{2}\cdot\left(\sqrt{3}+1\right)^{2}$?

$A.\ \sqrt{3}-1$ $\qquad B.\ \sqrt{3}+1$ $\qquad C.\ 4$ $\qquad D.\ 8$

Rješenje 495

Ponovimo!

$$(a-b)^{2}=a^{2}-2\cdot a\cdot b+b^{2}\quad,\quad(a+b)^{2}=a^{2}+2\cdot a\cdot b+b^{2}\quad,\quad\left(\sqrt{a}\right)^{2}=a\ ,\ a\geq 0.$$

$$a^{2}-b^{2}=(a-b)\cdot(a+b)\quad,\quad(a\cdot b)^{n}=a^{n}\cdot b^{n}.$$

Zakon distribucije množenja prema zbrajanju.

$$a\cdot(b+c)=a\cdot b+a\cdot c\quad,\quad a\cdot b+a\cdot c=a\cdot(b+c).$$

1.inačica

$$\left(\sqrt{3}-1\right)^{2}\cdot\left(\sqrt{3}+1\right)^{2}=\left(\left(\sqrt{3}\right)^{2}-2\cdot\sqrt{3}+1\right)\cdot\left(\left(\sqrt{3}\right)^{2}+2\cdot\sqrt{3}+1\right)=$$

$$=\left(3-2\cdot\sqrt{3}+1\right)\cdot\left(3+2\cdot\sqrt{3}+1\right)=\left(4-2\cdot\sqrt{3}\right)\cdot\left(4+2\cdot\sqrt{3}\right)=4^{2}-\left(2\cdot\sqrt{3}\right)^{2}=$$

$$=16-2^{2}\cdot\left(\sqrt{3}\right)^{2}=16-4\cdot 3=16-12=4.$$

Odgovor je pod C.

2.inačica

$$\left(\sqrt{3}-1\right)^{2}\cdot\left(\sqrt{3}+1\right)^{2}=\left(\left(\sqrt{3}\right)^{2}-2\cdot\sqrt{3}+1\right)\cdot\left(\left(\sqrt{3}\right)^{2}+2\cdot\sqrt{3}+1\right)=$$

$$=\left(3-2\cdot\sqrt{3}+1\right)\cdot\left(3+2\cdot\sqrt{3}+1\right)=\left(4-2\cdot\sqrt{3}\right)\cdot\left(4+2\cdot\sqrt{3}\right)=2\cdot\left(2-\sqrt{3}\right)\cdot 2\cdot\left(2+\sqrt{3}\right)=$$

$$=4\cdot\left(2-\sqrt{3}\right)\cdot\left(2+\sqrt{3}\right)=4\cdot\left(2^{2}-\left(\sqrt{3}\right)^{2}\right)=4\cdot(4-3)=4\cdot 1=4.$$

Odgovor je pod C.

3.inačica

$$\left(\sqrt{3}-1\right)^2\cdot\left(\sqrt{3}+1\right)^2=\left(\left(\sqrt{3}-1\right)\cdot\left(\sqrt{3}+1\right)\right)^2=\left(\left(\sqrt{3}\right)^2-1\right)^2=(3-1)^2=2^2=4.$$

Odgovor je pod C.

Vježba 495

Koliki je rezultat umnoška $\left(\sqrt{2}-1\right)^2\cdot\left(\sqrt{2}+1\right)^2$?

$$A.\ \sqrt{2}-1 \qquad B.\ \sqrt{2}+1 \qquad C.\ 2 \qquad D.\ 1$$

Rezultat: D.

Zadatak 496 (Pavle, ekonomska škola)

Pojednostavni: $\dfrac{\sqrt{27}+\sqrt{75}}{\sqrt{48}}$.

$$A.\ \sqrt{3} \qquad B.\ 2\cdot\sqrt{3} \qquad C.\ 1 \qquad D.\ 2$$

Rješenje 496

Ponovimo!

$$\sqrt{a\cdot b}=\sqrt{a}\cdot\sqrt{b} \quad , \quad \sqrt{a^2}=a \ , \ a\ge 0 \quad , \quad \frac{\sqrt{a}}{\sqrt{b}}=\sqrt{\frac{a}{b}} \quad , \quad \frac{a+b}{n}=\frac{a}{n}+\frac{b}{n}.$$

Skratiti razlomak znači brojnik i nazivnik tog razlomka podijeliti istim brojem različitim od nule i jedinice

$$\frac{a\cdot n}{b\cdot n}=\frac{a}{b} \ , \ n\ne 0 \ , \ n\ne 1.$$

1.inačica

$$\frac{\sqrt{27}+\sqrt{75}}{\sqrt{48}}=\frac{\sqrt{9\cdot 3}+\sqrt{25\cdot 3}}{\sqrt{16\cdot 3}}=\frac{\sqrt{9}\cdot\sqrt{3}+\sqrt{25}\cdot\sqrt{3}}{\sqrt{16}\cdot\sqrt{3}}=\frac{\sqrt{3^2}\cdot\sqrt{3}+\sqrt{5^2}\cdot\sqrt{3}}{\sqrt{4^2}\cdot\sqrt{3}}=$$

$$=\frac{3\cdot\sqrt{3}+5\cdot\sqrt{3}}{4\cdot\sqrt{3}}=\frac{8\cdot\sqrt{3}}{4\cdot\sqrt{3}}=\frac{8\cdot\sqrt{3}}{4\cdot\sqrt{3}}=2.$$

Odgovor je pod D.

2.inačica

$$\frac{\sqrt{27}+\sqrt{75}}{\sqrt{48}}=\frac{\sqrt{27}}{\sqrt{48}}+\frac{\sqrt{75}}{\sqrt{48}}=\sqrt{\frac{27}{48}}+\sqrt{\frac{75}{48}}=\sqrt{\frac{27}{48}}+\sqrt{\frac{75}{48}}=\sqrt{\frac{9}{16}}+\sqrt{\frac{25}{16}}=$$

$$=\sqrt{\left(\frac{3}{4}\right)^2}+\sqrt{\left(\frac{5}{4}\right)^2}=\frac{3}{4}+\frac{5}{4}=\frac{3+5}{4}=\frac{8}{4}=\frac{8}{4}=2.$$

Odgovor je pod D.

Vježba 496

Pojednostavni: $\dfrac{\sqrt{75}-\sqrt{27}}{\sqrt{12}}$.

$$A.\ \sqrt{3} \qquad B.\ 2\cdot\sqrt{3} \qquad C.\ 1 \qquad D.\ 2$$

Rezultat: C.

Zadatak 497 (Ivana, ekonomska škola)

Aritmetička sredina 6 različitih prirodnih brojeva je 6. Koju najveću moguću vrijednost može imati neki od tih brojeva?

$$A.\ 20 \qquad B.\ 21 \qquad C.\ 22 \qquad D.\ 23$$

Rješenje 497

Ponovimo!

Neka je dan skup n pozitivnih brojeva $\{a_1, a_2, a_3, \ldots, a_n\}$. Tada je aritmetička sredina A_n brojeva $a_1, a_2, a_3, \ldots, a_n$ definirana izrazom

$$A_n = \frac{a_1 + a_2 + a_3 + \ldots + a_n}{n}.$$

Skup prirodnih brojeva označavamo slovom N, a zapisujemo

$$N = \{1, 2, 3, 4, 5, \ldots, n-1, n, n+1, \ldots\}.$$

Da bismo dobili najveću moguću vrijednost traženog prirodnog broja n uzet ćemo pet najmanjih prirodnih brojeva: 1, 2, 3, 4 i 5. Tada je prema uvjetu zadatka:

$$\frac{1+2+3+4+5+n}{6} = 6 \Rightarrow \frac{15+n}{6} = 6 \Rightarrow \frac{15+n}{6} = 6 \ / \cdot 6 \Rightarrow 15+n = 36 \Rightarrow n = 36-15 \Rightarrow$$
$$\Rightarrow n = 21.$$

Odgovor je pod B.

Vježba 497

Aritmetička sredina 7 različitih prirodnih brojeva je 7. Koju najveću moguću vrijednost može imati neki od tih brojeva?

$A.\ 25 \qquad B.\ 26 \qquad C.\ 27 \qquad D.\ 28$

Rezultat: D.

Zadatak 498 (Ruala, gimnazija)

Dokaži matematičkom indukcijom da formula vrijedi za svaki prirodni broj n:

$$\frac{1}{2\cdot 5} + \frac{1}{5\cdot 8} + \frac{1}{8\cdot 11} + \ldots + \frac{1}{(3\cdot n-1)\cdot(3\cdot n+2)} = \frac{n}{6\cdot n+4}.$$

Rješenje 498

Ponovimo!

$$a^1 = a \quad , \quad a^n \cdot a^m = a^{n+m} \quad , \quad a^n : a^m = a^{n-m} \quad , \quad \frac{a}{b} + \frac{c}{d} = \frac{a\cdot d + b\cdot c}{b\cdot d}.$$

$$a^2 - b^2 = (a-b)\cdot(a+b).$$

Zakon distribucije množenja prema zbrajanju.

$$a\cdot(b+c) = a\cdot b + a\cdot c \quad , \quad a\cdot b + a\cdot c = a\cdot(b+c).$$

Skratiti razlomak znači brojnik i nazivnik tog razlomka podijeliti istim brojem različitim od nule i jedinice

$$\frac{a\cdot n}{b\cdot n} = \frac{a}{b} \ , \ n \neq 0 \ , \ n \neq 1.$$

Načelo matematičke indukcije

Ako neka tvrdnja vrijedi za broj 1 i ako iz pretpostavke da vrijedi za prirodni broj n slijedi da ona vrijedi i za sljedeći broj n + 1, tad ona vrijedi za svaki prirodni broj n.

Dokaz matematičkom indukcijom

Dokaz matematičkom indukcijom sprovodi se u tri koraka:

i) Baza indukcije. Trebamo provjeriti da tvrdnja vrijedi za broj 1, tj. da je T(1) istinita tvrdnja.

ii) Pretpostavka indukcije. Pretpostavimo da tvrdnja vrijedi za broj n, tj. pretpostavimo da je T(n) istinita tvrdnja.

iii) Korak indukcije. Dokažimo da uz tu pretpostavku tvrdnja vrijedi i za broj n + 1, tj. iz T(n) slijedi tvrdnja T(n + 1).

Tad je tvrdnja T(n) istinita za svaki prirodni broj n.

i) Baza indukcije.

Dokažimo da zadana jednakost vrijedi za n = 1. Zaista je:

$$\frac{1}{2\cdot 5}=\frac{1}{6\cdot 1+4}\Rightarrow\frac{1}{10}=\frac{1}{6+4}\Rightarrow\frac{1}{10}=\frac{1}{10}.$$

ii) Pretpostavka indukcije.

Sada pretpostavimo da je zadana jednakost točna za bilo koji prirodni broj n, tj. da je:

$$\frac{1}{2\cdot 5}+\frac{1}{5\cdot 8}+\frac{1}{8\cdot 11}+\ldots+\frac{1}{(3\cdot n-1)\cdot(3\cdot n+2)}=\frac{n}{6\cdot n+4}.$$

iii) Korak indukcije.

Dokažimo da zadana jednakost vrijedi i za n + 1. Dodajmo zbroju s lijeve strane sljedeći član:

$$\frac{1}{2\cdot 5}+\frac{1}{5\cdot 8}+\frac{1}{8\cdot 11}+\ldots+\frac{1}{(3\cdot n-1)\cdot(3\cdot n+2)}+\frac{1}{(3\cdot(n+1)-1)\cdot(3\cdot(n+1)+2)}=$$

$$=\frac{1}{2\cdot 5}+\frac{1}{5\cdot 8}+\frac{1}{8\cdot 11}+\ldots+\frac{1}{(3\cdot n-1)\cdot(3\cdot n+2)}+\frac{1}{(3\cdot n+3-1)\cdot(3\cdot n+3+2)}=$$

$$=\frac{1}{2\cdot 5}+\frac{1}{5\cdot 8}+\frac{1}{8\cdot 11}+\ldots+\frac{1}{(3\cdot n-1)\cdot(3\cdot n+2)}+\frac{1}{(3\cdot n+2)\cdot(3\cdot n+5)}=$$

$$=\left[\begin{array}{l}\text{iskoristimo}\\\text{pretpostavku indukcije}\end{array}\right]=$$

$$=\underbrace{\frac{1}{2\cdot 5}+\frac{1}{5\cdot 8}+\frac{1}{8\cdot 11}+\ldots+\frac{1}{(3\cdot n-1)\cdot(3\cdot n+2)}}_{\frac{n}{6\cdot n+4}}+\frac{1}{(3\cdot n+2)\cdot(3\cdot n+5)}=$$

$$=\frac{n}{6\cdot n+4}+\frac{1}{(3\cdot n+2)\cdot(3\cdot n+5)}=\frac{n}{2\cdot(3\cdot n+2)}+\frac{1}{(3\cdot n+2)\cdot(3\cdot n+5)}=$$

$$=\frac{n\cdot(3\cdot n+5)+2}{2\cdot(3\cdot n+2)\cdot(3\cdot n+5)}=\frac{3\cdot n^2+5\cdot n+2}{2\cdot(3\cdot n+2)\cdot(3\cdot n+5)}.$$

Izraz u brojniku rastavit ćemo na faktore na dva načina (može i rješavanjem kvadratne jednadžbe, ali moramo se i odmoriti malo 😉)

1.inačica

$$3\cdot n^2+5\cdot n+2=3\cdot n^2+3\cdot n+2\cdot n+2=[\text{ metoda grupiranja }]=\left(3\cdot n^2+3\cdot n\right)+(2\cdot n+2)=$$

$$=3\cdot n\cdot(n+1)+2\cdot(n+1)=(n+1)\cdot(3\cdot n+2).$$

2.inačica

$$3\cdot n^2+5\cdot n+2=3\cdot n^2-3+5\cdot n+5=[\text{ metoda grupiranja }]=\left(3\cdot n^2-3\right)+(5\cdot n+5)=$$

$$=3\cdot\left(n^2-1\right)+5\cdot(n+1)=3\cdot(n-1)\cdot(n+1)+5\cdot(n+1)=(n+1)\cdot(3\cdot(n-1)+5)=$$

$$=(n+1)\cdot(3\cdot n-3+5)=(n+1)\cdot(3\cdot n+2).$$

Vratimo se zadatku!

$$\frac{3\cdot n^2+5\cdot n+2}{2\cdot(3\cdot n+2)\cdot(3\cdot n+5)}=\frac{(n+1)\cdot(3\cdot n+2)}{2\cdot(3\cdot n+2)\cdot(3\cdot n+5)}=\frac{(n+1)\cdot(3\cdot n+2)}{2\cdot(3\cdot n+2)\cdot(3\cdot n+5)}=\frac{n+1}{2\cdot(3\cdot n+5)}=$$

$$=\frac{n+1}{6\cdot n+10}=\frac{n+1}{6\cdot n+6+4}=\frac{n+1}{6\cdot(n+1)+4}.$$

Dobili smo jednakost istovjetnu zadanoj jednakosti, s n + 1 umjesto n. To znači da tvrdnja vrijedi za broj n + 1. Prema načelu matematičke indukcije, tvrdnja vrijedi za svaki prirodni broj n.

Vježba 498

Dokaži matematičkom indukcijom da formula vrijedi za svaki prirodni broj n:

$$\frac{1}{1\cdot 5}+\frac{1}{5\cdot 9}+\frac{1}{9\cdot 13}+...+\frac{1}{(4\cdot n-3)\cdot(4\cdot n+1)}=\frac{n}{4\cdot n+1}.$$

Rezultat: Točno je!

Zadatak 499 (Fox, gimnazija)

Ako za realne brojeve x, y vrijedi $x-y=6$ i $x^2+y^2=22$, koliko je x^3-y^3?

$$A.\ 16 \qquad B.\ 90 \qquad C.\ 154 \qquad D.\ 218$$

Rješenje 499

Ponovimo!

$$(a-b)^2=a^2-2\cdot a\cdot b+b^2 \quad , \quad a^3-b^3=(a-b)\cdot\left(a^2+a\cdot b+b^2\right).$$

Zakon distribucije množenja prema zbrajanju.

$$a\cdot(b+c)=a\cdot b+a\cdot c \quad , \quad a\cdot b+a\cdot c=a\cdot(b+c).$$

Preoblikujemo jednakost x – y = 6 tako da je kvadriramo

$$x-y=6 \Rightarrow x-y=6\ /^2 \Rightarrow (x-y)^2=6^2 \Rightarrow x^2-2\cdot x\cdot y+y^2=36 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow -2\cdot x\cdot y=36-x^2-y^2 \Rightarrow -2\cdot x\cdot y=36-\left(x^2+y^2\right) \Rightarrow \left[x^2+y^2=22\right] \Rightarrow$$

$$\Rightarrow -2\cdot x\cdot y=36-22 \Rightarrow -2\cdot x\cdot y=14 \Rightarrow -2\cdot x\cdot y=14\ /:(-2) \Rightarrow x\cdot y=-7.$$

Sada je

$$x^3-y^3=(x-y)\cdot\left(x^2+x\cdot y+y^2\right)=\begin{bmatrix} x-y=6 \\ x^2+y^2=22 \\ x\cdot y=-7 \end{bmatrix}=6\cdot(22-7)=6\cdot 15=90.$$

Odgovor je pod B.

Vježba 499

Ako za realne brojeve x, y vrijedi $x-y=2$ i $x^2+y^2=34$, koliko je x^3-y^3?

$$A.\ 76 \qquad B.\ 88 \qquad C.\ 98 \qquad D.\ 108$$

Rezultat: C.

Zadatak 500 (Tina, ekonomska škola)

Zadani su brojevi a = 10101 i $b = a^2$. Zapis prirodnog broja N s pomoću broja a glasi $N = 1 \cdot a^5 + 2 \cdot a^4 + 3 \cdot a^3 + 4 \cdot a^2 + 5 \cdot a + 6$. Ako N zapišemo u obliku $N = A \cdot b^2 + B \cdot b + C$ pri čemu su brojevi $A, B, C \in \{0, 1, 2, ..., b-1\}$, kolike su vrijednosti brojeva A i C?

$$A.\ A=0 \ ,\ C=50511 \qquad B.\ A=0 \ ,\ C=102030195$$
$$C.\ A=10103 \ ,\ C=50511 \qquad D.\ A=10103 \ ,\ C=102030195$$

Rješenje 500

Ponovimo!

$$a^1=a \quad , \quad \left(a^n\right)^m=a^{n\cdot m} \quad , \quad a^n:a^m=a^{n-m}.$$

Zakon distribucije množenja prema zbrajanju.

$$a\cdot(b+c)=a\cdot b+a\cdot c \quad , \quad a\cdot b+a\cdot c=a\cdot(b+c).$$

Preoblikujemo broj N rabeći uvjet $b = a^2$.

$$N=1\cdot a^5+2\cdot a^4+3\cdot a^3+4\cdot a^2+5\cdot a+6 \Rightarrow N=\left(1\cdot a^5+2\cdot a^4\right)+\left(3\cdot a^3+4\cdot a^2\right)+(5\cdot a+6) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow N=(a+2)\cdot a^4+(3\cdot a+4)\cdot a^2+(5\cdot a+6) \Rightarrow N=(a+2)\cdot\left(a^2\right)^2+(3\cdot a+4)\cdot a^2+(5\cdot a+6) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \left[\ b=a^2\ \right] \Rightarrow N=(a+2)\cdot b^2+(3\cdot a+4)\cdot b+(5\cdot a+6).$$

Ako N zapišemo u obliku

$$N=A\cdot b^2+B\cdot b+C$$

pri čemu su brojevi $A,\ B,\ C\in\{0,\ 1,\ 2,\ \ldots,\ b-1\}$ dobije se:

$$\left.\begin{array}{l} N=A\cdot b^2+B\cdot b+C \\ N=(a+2)\cdot b^2+(3\cdot a+4)\cdot b+(5\cdot a+6) \end{array}\right\} \Rightarrow \left.\begin{array}{l} A=a+2 \\ C=5\cdot a+6 \end{array}\right\}.$$

Sada je:

$$A=a+2=\left[\ a=10101\ \right]=10101+2=10103.$$

$$C=5\cdot a+6=\left[\ a=10101\ \right]=5\cdot 10101+6=50511.$$

Budući da su $A,\ B,\ C\in\{0,\ 1,\ 2,\ \ldots,\ b-1\}$, treba se uvjeriti da vrijedi:

$$\left.\begin{array}{l} A\le b-1 \\ C\le b-1 \end{array}\right\} \Rightarrow \left[\ b=a^2\ \right] \Rightarrow \left.\begin{array}{l} A\le a^2-1 \\ C\le a^2-1 \end{array}\right\} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \left.\begin{array}{l} 10103\le 10101^2-1 \text{ nejednakost točna} \\ 50511\le 10101^2-1 \text{ nejednakost točna} \end{array}\right\}.$$

Odgovor je pod C.

Vježba 500

Zadani su brojevi a = 10101 i b = a^2. Zapis prirodnog broja N s pomoću broja a glasi $N = 1\cdot a^5 + 2\cdot a^4 + 3\cdot a^3 + 4\cdot a^2 + 5\cdot a + 6$. Ako N zapišemo u obliku $N = A\cdot b^2 + B\cdot b + C$ pri čemu su brojevi $A,\ B,\ C\in\{0,\ 1,\ 2,\ \ldots,\ b-1\}$, kolika je vrijednost broja B?

Rezultat: 30307.