Zadatak 481 (Davor, ekonomska škola)

Je li broj $(a-1)\cdot(a-3)\cdot(a-4)\cdot(a-6)+10$ pozitivan za svaki realni broj a?

$A.$ Da $\quad B.$ Ne

Rješenje 481

Ponovimo!

$$a^1=a \quad , \quad a^n\cdot a^m=a^{n+m} \quad , \quad a^2+2\cdot a\cdot b+b^2=(a+b)^2 \quad , \quad a^2\ge 0 \ , \ a\in R.$$

Množenje zagrada

$$(a+b)\cdot(c+d)=a\cdot c+a\cdot d+b\cdot c+b\cdot d.$$

Preoblikujemo izraz.

$$(a-1)\cdot(a-3)\cdot(a-4)\cdot(a-6)+10=(a-1)\cdot(a-6)\cdot(a-3)\cdot(a-4)+10=$$

$$=((a-1)\cdot(a-6))\cdot((a-3)\cdot(a-4))+10=\left(a^2-6\cdot a-a+6\right)\cdot\left(a^2-4\cdot a-3\cdot a+12\right)+10=$$

$$=\left(a^2-7\cdot a+6\right)\cdot\left(a^2-7\cdot a+12\right)+10=\left(a^2-7\cdot a+6\right)\cdot\left(\left(a^2-7\cdot a+6\right)+6\right)+10=$$

$$=\left(a^2-7\cdot a+6\right)^2+6\cdot\left(a^2-7\cdot a+6\right)+10=\left(a^2-7\cdot a+6\right)^2+6\cdot\left(a^2-7\cdot a+6\right)+9+1=$$

$$=\left(a^2-7\cdot a+6\right)^2+2\cdot\left(a^2-7\cdot a+6\right)\cdot 3+3^2+1=$$

$$=\left(\left(a^2-7\cdot a+6\right)^2+2\cdot\left(a^2-7\cdot a+6\right)\cdot 3+3^2\right)+1=\left(\left(a^2-7\cdot a+6\right)+3\right)^2+1=$$

$$=\left(a^2-7\cdot a+6+3\right)^2+1=\left(a^2-7\cdot a+9\right)^2+1>0.$$

Odgovor je pod A.

Vježba 481

Je li broj $(a-1)\cdot(a-3)\cdot(a-4)\cdot(a-6)+11$ pozitivan za svaki realni broj a?

$A.$ Da $\quad B.$ Ne

Rezultat: A.

Zadatak 482 (Mihaela, gimnazija)

Pokaži da je broju 2^{2^n}, $n\ge 2$ zadnja znamenka broj 6.

Rješenje 482

Ponovimo!

$$a^1=a \quad , \quad a^n\cdot a^m=a^{n+m} \quad , \quad \left(a^n\right)^m=a^{n\cdot m}.$$

Matematička indukcija sastoji se iz dva koraka: baze indukcije i koraka indukcije. U bazi indukcije provjerava se je li tvrdnja istinita za najmanji prirodni broj (obično je to broj 1, osim ako nije postavljen neki drugi uvjet). U koraku indukcije pretpostavi se najprije da je tvrdnja istinita za prirodan broj n i zatim se provjerava istinitost tvrdnje za sljedbenika n + 1.

baza indukcije

n = 2

$$2^{2^2}=2^4=16.$$

Dakle, baza indukcije je ispunjena jer 2^4 = 16 završava znamenkom 6.

korak indukcije

n

Pretpostavimo da je tvrdnja istinita za neki prirodni broj n,

$$N = 2^{2^n} \; - \text{(broj završava šesticom) induktivna pretpostavka}$$

n + 1

Sada provjeravamo istinitost tvrdnje za sljedbenika n + 1:

$$2^{2^{n+1}} = 2^{2^n \cdot 2^1} = 2^{2^n \cdot 2} = \left(2^{2^n}\right)^2 = \left[N = 2^{2^n} \right] = N^2.$$

Kvadrat broja koji završava znamenkom šest, također, završava znamenkom šest.

Vježba 482

Odmor!

Rezultat: …

Zadatak 483 (Darko, srednja škola)

Pojednostavnite izraz: $(a-b)^n \cdot (a+b)^{-n} \cdot (a-b)^{n-1} \cdot (a+b)^{1-n}$, $a \neq \pm b$.

Rješenje 483

Ponovimo!

$$a^1 = a \quad , \quad a^n \cdot a^m = a^{n+m} \quad , \quad a^{-n} = \frac{1}{a^n} \quad , \quad a \cdot \frac{b}{c} = \frac{a \cdot b}{c} \quad , \quad \frac{a^n}{b^n} = \left(\frac{a}{b}\right)^n.$$

$$n = \frac{n}{1} \quad , \quad \frac{a^{-n}}{b^{-m}} = \frac{b^m}{a^n}.$$

Zakon distribucije množenja prema zbrajanju.

$$a \cdot (b+c) = a \cdot b + a \cdot c \quad , \quad a \cdot b + a \cdot c = a \cdot (b+c).$$

1.inačica

$$(a-b)^n \cdot (a+b)^{-n} \cdot (a-b)^{n-1} \cdot (a+b)^{1-n} = (a-b)^n \cdot (a-b)^{n-1} \cdot (a+b)^{-n} \cdot (a+b)^{1-n} =$$

$$= (a-b)^{n+n-1} \cdot (a+b)^{-n+1-n} = (a-b)^{2 \cdot n-1} \cdot (a+b)^{1-2 \cdot n} = (a-b)^{2 \cdot n-1} \cdot (a+b)^{-(2 \cdot n-1)} =$$

$$= (a-b)^{2 \cdot n-1} \cdot \frac{1}{(a+b)^{2 \cdot n-1}} = \frac{(a-b)^{2 \cdot n-1}}{(a+b)^{2 \cdot n-1}} = \left(\frac{a-b}{a+b}\right)^{2 \cdot n-1}.$$

2.inačica

$$(a-b)^n \cdot (a+b)^{-n} \cdot (a-b)^{n-1} \cdot (a+b)^{1-n} = (a-b)^n \cdot \frac{1}{(a+b)^n} \cdot (a-b)^{n-1} \cdot (a+b)^{-(n-1)} =$$

$$= \frac{(a-b)^n}{(a+b)^n} \cdot (a-b)^{n-1} \cdot \frac{1}{(a+b)^{n-1}} = \left(\frac{a-b}{a+b}\right)^n \cdot \frac{(a-b)^{n-1}}{(a+b)^{n-1}} = \left(\frac{a-b}{a+b}\right)^n \cdot \left(\frac{a-b}{a+b}\right)^{n-1} =$$

$$= \left(\frac{a-b}{a+b}\right)^{n+n-1} = \left(\frac{a-b}{a+b}\right)^{2 \cdot n-1}.$$

3.inačica

$$(a-b)^n \cdot (a+b)^{-n} \cdot (a-b)^{n-1} \cdot (a+b)^{1-n} =$$

$$= (a-b)^n \cdot (a+b)^{-n} \cdot (a-b)^n \cdot (a-b)^{-1} \cdot (a+b)^1 \cdot (a+b)^{-n} =$$

$$= (a-b)^n \cdot \frac{1}{(a+b)^n} \cdot (a-b)^n \cdot \frac{1}{a-b} \cdot (a+b) \cdot \frac{1}{(a+b)^n} =$$

$$=\frac{(a-b)^n}{1}\cdot\frac{1}{(a+b)^n}\cdot\frac{(a-b)^n}{1}\cdot\frac{1}{a-b}\cdot\frac{a+b}{1}\cdot\frac{1}{(a+b)^n}=$$

$$=\frac{(a-b)^n\cdot(a-b)^n\cdot(a+b)}{(a+b)^n\cdot(a-b)\cdot(a+b)^n}=\frac{(a-b)^{n+n}\cdot(a+b)^1}{(a+b)^{n+n}\cdot(a-b)^1}=\frac{(a-b)^{2\cdot n}\cdot(a-b)^{-1}}{(a+b)^{2\cdot n}\cdot(a+b)^{-1}}=$$

$$=\frac{(a-b)^{2\cdot n-1}}{(a+b)^{2\cdot n-1}}=\left(\frac{a-b}{a+b}\right)^{2\cdot n-1}.$$

Vježba 483

Odmor!

Rezultat: …

Zadatak 484 (Darko, srednja škola)

Čemu je jednako: $\sqrt{2\cdot x+2\cdot\sqrt{x^2-y^2}}$, $x\ge y\ge 0$.

A. $\sqrt{x-y}$ B. $\sqrt{x+y}$ C. $\sqrt{x-y}+\sqrt{x+y}$ D. $\sqrt{x-y}-\sqrt{x+y}$

Rješenje 484

Ponovimo!

$$\left(\sqrt{a}\right)^2=a\ ,\ a\ge 0\quad,\quad a^2+2\cdot a\cdot b+b^2=(a+b)^2\quad,\quad\sqrt{a^2}=a\ ,\ a\ge 0.$$

$$\sqrt{2\cdot x+2\cdot\sqrt{x^2-y^2}}=\sqrt{x+x+2\cdot\sqrt{(x-y)\cdot(x+y)}}=$$

$$=\sqrt{x-y+2\cdot\sqrt{(x-y)\cdot(x+y)}+x+y}=\sqrt{\left(\sqrt{x-y}\right)^2+2\cdot\sqrt{x-y}\cdot\sqrt{x+y}+\left(\sqrt{x+y}\right)^2}=$$

$$=\sqrt{\left(\sqrt{x-y}+\sqrt{x+y}\right)^2}=\sqrt{x-y}+\sqrt{x+y}.$$

Odgovor je pod C.

Vježba 484

Odmor!

Rezultat: …

Zadatak 485 (Lucija, gimnazija)

Ako je a realan broj različit od nule izračunaj $A=a^{-1}\cdot\left(1+a^{-2}\right)^{-0.5}\cdot\left(1+a^2\right)^{0.5}$.

Rješenje 485

Ponovimo!

$$a^1=a\quad,\quad a^{-n}=\frac{1}{a^n}\quad,\quad\frac{a}{b}\cdot c=\frac{a\cdot c}{b}\quad,\quad\frac{a^n}{b^n}=\left(\frac{a}{b}\right)^n\quad,\quad\sqrt{a}=a^{\frac{1}{2}}\quad,\quad n=\frac{n}{1}.$$

$$\frac{a}{b}+\frac{c}{d}=\frac{a\cdot d+b\cdot c}{b\cdot d}\quad,\quad\frac{\frac{a}{b}}{\frac{c}{d}}=\frac{a\cdot d}{b\cdot c}\quad,\quad\sqrt{a^2}=|a|.$$

Skratiti razlomak znači brojnik i nazivnik tog razlomka podijeliti istim brojem različitim od nule i jedinice

$$\frac{a\cdot n}{b\cdot n}=\frac{a}{b}\ ,\ n\ne 0\ ,\ n\ne 1.$$

Za realni broj x njegova je apsolutna vrijednost (modul) broj $|x|$ koji određujemo na ovaj način:

$$|x|=\begin{cases} x, & x \ge 0 \\ -x, & x<0. \end{cases}$$

Ako je broj x pozitivan ili nula, tada je on jednak svojoj apsolutnoj vrijednosti. Za svaki x, $x \ge 0$, vrijedi $|x| = x$.
Ako je x negativan broj, njegova apsolutna vrijednost je suprotan broj – x koji je pozitivan. Za svaki x, $x < 0$, je $|x| = -x$.
Decimalni broj piše se u obliku decimalnog razlomka tako da se u brojnik napiše zadani decimalni broj bez decimalne točke, a u nazivnik se napiše dekadska jedinica (10, 100, 1000, 10000, 100000, …) koja ima toliko nula koliko decimalni broj ima decimala (znamenaka na decimalnom mjestu, tj. iza decimalne točke ili decimalnog zareza).

$$A=a^{-1}\cdot\left(1+a^{-2}\right)^{-0.5}\cdot\left(1+a^{2}\right)^{0.5} \Rightarrow A=\frac{1}{a}\cdot\frac{1}{\left(1+a^{-2}\right)^{0.5}}\cdot\left(1+a^{2}\right)^{0.5} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow A=\frac{1}{a}\cdot\frac{\left(1+a^{2}\right)^{0.5}}{\left(1+a^{-2}\right)^{0.5}} \Rightarrow A=\frac{1}{a}\cdot\left(\frac{1+a^{2}}{1+a^{-2}}\right)^{0.5} \Rightarrow A=\frac{1}{a}\cdot\left(\frac{1+a^{2}}{1+a^{-2}}\right)^{\frac{5}{10}} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow A=\frac{1}{a}\cdot\left(\frac{1+a^{2}}{1+a^{-2}}\right)^{\frac{5}{10}} \Rightarrow A=\frac{1}{a}\cdot\left(\frac{1+a^{2}}{1+a^{-2}}\right)^{\frac{1}{2}} \Rightarrow A=\frac{1}{a}\cdot\sqrt{\frac{1+a^{2}}{1+a^{-2}}} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow A=\frac{1}{a}\cdot\sqrt{\frac{1+a^{2}}{1+\frac{1}{a^{2}}}} \Rightarrow A=\frac{1}{a}\cdot\sqrt{\frac{1+a^{2}}{\frac{1}{1}+\frac{1}{a^{2}}}} \Rightarrow A=\frac{1}{a}\cdot\sqrt{\frac{1+a^{2}}{\frac{a^{2}+1}{a^{2}}}} \Rightarrow A=\frac{1}{a}\cdot\sqrt{\frac{\frac{1+a^{2}}{1}}{\frac{a^{2}+1}{a^{2}}}} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow A=\frac{1}{a}\cdot\sqrt{\frac{\frac{a^{2}+1}{1}}{\frac{a^{2}+1}{a^{2}}}} \Rightarrow A=\frac{1}{a}\cdot\sqrt{\frac{\frac{a^{2}+1}{1}}{\frac{a^{2}+1}{a^{2}}}} \Rightarrow A=\frac{1}{a}\cdot\sqrt{\frac{\frac{1}{1}}{\frac{1}{a^{2}}}} \Rightarrow A=\frac{1}{a}\cdot\sqrt{a^{2}} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow A=\frac{1}{a}\cdot|a| \Rightarrow A=\frac{|a|}{a}.$$

Vrijedi:

- $a>0 \Rightarrow |a|=a \Rightarrow A=\frac{a}{a} \Rightarrow A=\frac{a}{a} \Rightarrow A=1$
- $a<0 \Rightarrow |a|=-a \Rightarrow A=\frac{-a}{a} \Rightarrow A=-\frac{a}{a} \Rightarrow A=-1.$

Vježba 485

Odmor!

Rezultat: …

Zadatak 486 (Mario, gimnazija)

Za koje cijele brojeve x je iznos $\frac{2\cdot x+8}{x}$ cijeli broj?

Rješenje 486

Ponovimo!

$$\frac{a+b}{n}=\frac{a}{n}+\frac{b}{n}.$$

Cijeli brojevi jesu brojevi:

$$..., -5, -4, -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, 4, 5, ...$$

Oni čine skup cijelih brojeva koji označavamo slovom Z, a zapisujemo kao

$$Z=\{ ..., -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, ... \} \qquad \text{ili} \qquad Z=\{ 0, 1, -1, 2, -2, 3, -3, ... \}.$$

Za cijeli broj a kažemo da je **djeljiv s cijelim brojem** b ($b \neq 0$) ako postoji cijeli broj q tako da vrijedi

$$a=q\cdot b.$$

Broj q zovemo **količnikom** brojeva a i b i pišemo

Skratiti razlomak znači brojnik i nazivnik tog razlomka podijeliti istim brojem različitim od nule i jedinice

$$\frac{a\cdot n}{b\cdot n}=\frac{a}{b} \quad , \quad n\neq 0 \quad , \quad n\neq 1.$$

Preoblikujemo zadani razlomak.

$$\frac{2\cdot x+8}{x}=\frac{2\cdot x}{x}+\frac{8}{x}=\frac{2\cdot x}{x}+\frac{8}{x}=2+\frac{8}{x}.$$

Iznos $2+\frac{8}{x}$ cijeli je broj, ako je $\frac{8}{x}$ cijeli broj. To znači da x mora biti jednak: – 8, – 4, – 2, – 1, 1, 2, 4, 8.

Dakle,

$$x\in\{ -8, -4, -2, -1, 1, 2, 4, 8 \}.$$

Vježba 486

Za koje cijele brojeve x je iznos $\frac{5\cdot x+2}{x}$ cijeli broj?

Rezultat: $x\in\{ -2, -1, 1, 2 \}.$

Zadatak 487 (Mario, gimnazija)

Odredi sve razlomke s nazivnikom 9 koji su veći od $\frac{3}{7}$, a manji od $\frac{5}{7}$.

Rješenje 487

Ponovimo!

$$a<b \; , \; c>0 \;\Rightarrow\; a\cdot c<b\cdot c \quad , \quad \frac{a}{b}\cdot c=\frac{a\cdot c}{b} \quad , \quad \frac{a}{b}\cdot b=a.$$

Cijeli brojevi jesu brojevi:

$$..., -5, -4, -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, 4, 5, ...$$

Oni čine skup cijelih brojeva koji označavamo slovom Z, a zapisujemo kao

$$Z=\{ ..., -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, ... \} \qquad \text{ili} \qquad Z=\{ 0, 1, -1, 2, -2, 3, -3, ... \}.$$

Neka je x cijeli broj. Tada vrijedi:

$$\frac{3}{7}<\frac{x}{9}<\frac{5}{7} \;\Rightarrow\; \frac{3}{7}<\frac{x}{9}<\frac{5}{7} \;/\cdot 9 \;\Rightarrow\; \frac{27}{7}<x<\frac{45}{7} \;\Rightarrow\; 3.86<x<6.43 \;\Rightarrow\; \begin{bmatrix} x \text{ je} \\ \text{cijeli broj} \end{bmatrix} \;\Rightarrow$$

$$\Rightarrow\; x\in\{ 4, 5, 6 \}.$$

Razlomci su: $\frac{4}{9}, \frac{5}{9}, \frac{6}{9}.$

Vježba 487

Odredi sve razlomke s nazivnikom 9 koji su veći od $\frac{2}{7}$, a manji od $\frac{4}{7}$.

Rezultat: $x\in\{ -2, -1, 1, 2 \}.$

Zadatak 488 (Ivan, obrtnička škola)

Izračunaj: $\dfrac{\dfrac{1}{3}-\dfrac{1}{4}}{\dfrac{1}{3}+\dfrac{1}{4}}:\dfrac{\dfrac{1}{4}-\dfrac{1}{5}}{\dfrac{1}{4}+\dfrac{1}{5}}\cdot\left(\dfrac{1}{4}+\dfrac{1}{12}\right).$

Rješenje 488

Ponovimo!

$$\frac{a}{b}-\frac{c}{d}=\frac{a\cdot d-b\cdot c}{b\cdot d}\quad,\quad\frac{a}{b}+\frac{c}{d}=\frac{a\cdot d+b\cdot c}{b\cdot d}\quad,\quad\frac{a}{b}:\frac{c}{d}=\frac{a}{b}\cdot\frac{d}{c}=\frac{a\cdot d}{b\cdot c}.$$

$$\frac{\frac{a}{b}}{\frac{c}{d}}=\frac{a\cdot d}{b\cdot c}\quad,\quad\frac{a}{b}\cdot\frac{c}{d}=\frac{a\cdot c}{b\cdot d}.$$

Skratiti razlomak znači brojnik i nazivnik tog razlomka podijeliti istim brojem različitim od nule i jedinice

$$\frac{a\cdot n}{b\cdot n}=\frac{a}{b}\ ,\ n\neq 0\ ,\ n\neq 1.$$

$$\frac{\frac{1}{3}-\frac{1}{4}}{\frac{1}{3}+\frac{1}{4}}:\frac{\frac{1}{4}-\frac{1}{5}}{\frac{1}{4}+\frac{1}{5}}\cdot\left(\frac{1}{4}+\frac{1}{12}\right)=\frac{\frac{4-3}{12}}{\frac{4+3}{12}}:\frac{\frac{5-4}{20}}{\frac{5+4}{20}}\cdot\frac{3+1}{12}=\frac{\frac{1}{12}}{\frac{7}{12}}:\frac{\frac{1}{20}}{\frac{9}{20}}\cdot\frac{4}{12}=\frac{\frac{1}{12}}{\frac{7}{12}}:\frac{\frac{1}{20}}{\frac{9}{20}}\cdot\frac{4}{12}=\frac{\frac{1}{1}}{\frac{7}{1}}:\frac{\frac{1}{1}}{\frac{9}{1}}\cdot\frac{1}{3}=$$

$$=\frac{1}{7}:\frac{1}{9}\cdot\frac{1}{3}=\frac{1}{7}\cdot\frac{9}{1}\cdot\frac{1}{3}=\frac{1}{7}\cdot\frac{9}{1}\cdot\frac{1}{3}=\frac{1}{7}\cdot\frac{3}{1}\cdot\frac{1}{1}=\frac{3}{7}.$$

Vježba 488

Izračunaj: $\dfrac{\dfrac{1}{3}-\dfrac{1}{4}}{\dfrac{1}{3}+\dfrac{1}{4}}\cdot\dfrac{\dfrac{1}{4}+\dfrac{1}{5}}{\dfrac{1}{4}-\dfrac{1}{5}}\cdot\left(\dfrac{1}{4}+\dfrac{1}{12}\right).$

Rezultat: $\dfrac{3}{7}.$

Zadatak 489 (Zdravko, srednja škola)

Dokaži nejednakost $1+\dfrac{1}{\sqrt{2}}+\dfrac{1}{\sqrt{3}}+\ldots+\dfrac{1}{\sqrt{n}}>\sqrt{n},$ za svaki prirodni broj $n\geq 2.$

Rješenje 489

Ponovimo!

$$a^1=a\quad,\quad a^n\cdot a^m=a^{n+m}\quad,\quad\left(\sqrt{a}\right)^2=a\ ,\ a\geq 0\quad,\quad a>b\ ,\ c>0\ \Rightarrow\ a\cdot c>b\cdot c.$$

$$n=\frac{n}{1}\quad,\quad\frac{a}{b}+\frac{c}{d}=\frac{a\cdot d+b\cdot c}{b\cdot d}\quad,\quad\frac{a^n}{a^m}=a^{n-m}\quad,\quad a>b>0\ \Rightarrow\ a^2>b^2.$$

$$\sqrt{a}\cdot\sqrt{b}=\sqrt{a\cdot b}\quad,\quad\frac{a}{b}\cdot\frac{c}{d}=\frac{a\cdot c}{b\cdot d}\quad,\quad\frac{a}{n}+\frac{b}{n}=\frac{a+b}{n}.$$

Zakon distribucije množenja prema zbrajanju.

$$a\cdot(b+c)=a\cdot b+a\cdot c\quad,\quad a\cdot b+a\cdot c=a\cdot(b+c).$$

Skratiti razlomak znači brojnik i nazivnik tog razlomka podijeliti istim brojem različitim od nule i jedinice

$$\frac{a\cdot n}{b\cdot n}=\frac{a}{b}\ ,\ n\neq 0\ ,\ n\neq 1.$$

Proširiti razlomak znači brojnik i nazivnik tog razlomka pomnožiti istim brojem različitim od nule i jedinice

$$\frac{a}{b}=\frac{a\cdot n}{b\cdot n}\ ,\ n\neq 0\ ,\ n\neq 1.$$

Matematička indukcija sastoji se iz dva koraka: baze indukcije i koraka indukcije. U bazi indukcije provjerava se je li tvrdnja istinita za najmanji prirodni broj (obično je to broj 1, osim ako nije postavljen neki drugi uvjet). U koraku indukcije pretpostavi se najprije da je tvrdnja istinita za prirodan broj n i zatim se provjerava istinitost tvrdnje za sljedbenika n + 1.

baza indukcije

n = 2

$$1+\frac{1}{\sqrt{2}}>\sqrt{2}\ \Rightarrow\ 1+\frac{1}{\sqrt{2}}>\sqrt{2}\ /\cdot\sqrt{2}\ \Rightarrow\ \sqrt{2}+1>\left(\sqrt{2}\right)^{2}\ \Rightarrow\ \sqrt{2}+1>2\ \Rightarrow$$

$$\Rightarrow\ \sqrt{2}>2-1\ \Rightarrow\ \sqrt{2}>1\ \Rightarrow\ \sqrt{2}>1\ /^{2}\ \Rightarrow\ \left(\sqrt{2}\right)^{2}>1^{2}\ \Rightarrow\ 2>1.$$

Dakle, baza indukcije je ispunjena jer smo dobili točnu nejednakost.

korak indukcije

n

Pretpostavimo da je tvrdnja istinita za neki prirodni broj n,

$$1+\frac{1}{\sqrt{2}}+\frac{1}{\sqrt{3}}+\ldots+\frac{1}{\sqrt{n}}>\sqrt{n}\ -\ \text{induktivna pretpostavka}$$

n + 1

Sada provjeravamo istinitost tvrdnje za sljedbenika n + 1:

$$1+\frac{1}{\sqrt{2}}+\frac{1}{\sqrt{3}}+\ldots+\frac{1}{\sqrt{n}}+\frac{1}{\sqrt{n+1}}=\underbrace{1+\frac{1}{\sqrt{2}}+\frac{1}{\sqrt{3}}+\ldots+\frac{1}{\sqrt{n}}}_{\textit{induktivna pretpostavka}}+\frac{1}{\sqrt{n+1}}>\sqrt{n}+\frac{1}{\sqrt{n+1}}.$$

Treba dokazati da vrijedi

$$\boxed{\sqrt{n}+\frac{1}{\sqrt{n+1}}>\sqrt{n+1}.}$$

Pokažimo to na više načina.

1.inačica

$$\sqrt{n}+\frac{1}{\sqrt{n+1}}=\frac{\sqrt{n}}{1}+\frac{1}{\sqrt{n+1}}=\frac{\sqrt{n}\cdot\sqrt{n+1}+1}{\sqrt{n+1}}=\frac{\sqrt{n\cdot(n+1)}+1}{\sqrt{n+1}}=\frac{\sqrt{n^{2}+n}+1}{\sqrt{n+1}}\ldots\left[\sqrt{n^{2}+n}>n\right]\ldots$$

$$>\frac{n+1}{\sqrt{n+1}}=\frac{\left(\sqrt{n+1}\right)^{2}}{\sqrt{n+1}}=\frac{\left(\sqrt{n+1}\right)^{2}}{\sqrt{n+1}}=\sqrt{n+1}.$$

2.inačica

$$\sqrt{n}+\frac{1}{\sqrt{n+1}}=\sqrt{n+1}\cdot\left(\frac{\sqrt{n}}{\sqrt{n+1}}+\frac{1}{\left(\sqrt{n+1}\right)^{2}}\right)=\sqrt{n+1}\cdot\left(\frac{\sqrt{n}}{\sqrt{n+1}}\cdot\frac{\sqrt{n+1}}{\sqrt{n+1}}+\frac{1}{n+1}\right)=$$

$$=\sqrt{n+1}\cdot\left(\frac{\sqrt{n}\cdot\sqrt{n+1}}{\left(\sqrt{n+1}\right)^{2}}+\frac{1}{n+1}\right)=\sqrt{n+1}\cdot\left(\frac{\sqrt{n\cdot(n+1)}}{n+1}+\frac{1}{n+1}\right)=\sqrt{n+1}\cdot\left(\frac{\sqrt{n^{2}+n}}{n+1}+\frac{1}{n+1}\right)=$$

$$=\sqrt{n+1}\cdot\frac{\sqrt{n^{2}+n}+1}{n+1}\ldots\left[\sqrt{n^{2}+n}>n\right]\ldots>\sqrt{n+1}\cdot\frac{n+1}{n+1}=\sqrt{n+1}\cdot\frac{n+1}{n+1}=\sqrt{n+1}.$$

3.inačica

$$\sqrt{n}+\frac{1}{\sqrt{n+1}}=\frac{\sqrt{n}}{1}+\frac{1}{\sqrt{n+1}}=\frac{\sqrt{n}\cdot\sqrt{n+1}+1}{\sqrt{n+1}}>\frac{\sqrt{n}\cdot\sqrt{n}+1}{\sqrt{n+1}}=\frac{\left(\sqrt{n}\right)^2+1}{\sqrt{n+1}}=\frac{n+1}{\sqrt{n+1}}=$$

$$=\frac{\left(\sqrt{n+1}\right)^2}{\sqrt{n+1}}=\frac{\left(\sqrt{n+1}\right)^2}{\sqrt{n+1}}=\sqrt{n+1}.$$

4.inačica

$$\sqrt{n}+\frac{1}{\sqrt{n+1}}>\sqrt{n+1}\ \Rightarrow\ \sqrt{n}+\frac{1}{\sqrt{n+1}}>\sqrt{n+1}\ /\cdot\sqrt{n+1}\ \Rightarrow\ \sqrt{n}\cdot\sqrt{n+1}+1>\left(\sqrt{n+1}\right)^2\ \Rightarrow$$

$$\Rightarrow\ \sqrt{n\cdot(n+1)}+1>n+1\ \Rightarrow\ \sqrt{n^2+n}+1>n+1\ \Rightarrow\ \sqrt{n^2+n}>n\ \Rightarrow\ \sqrt{n^2+n}>n\ /^2\ \Rightarrow$$

$$\Rightarrow\ \left(\sqrt{n^2+n}\right)^2>n^2\ \Rightarrow\ n^2+n>n^2\ \Rightarrow\ n^2+n>n^2\ \Rightarrow\ n>0.$$

Dobili smo točnu nejednakost. Pretpostavka

$$\sqrt{n}+\frac{1}{\sqrt{n+1}}>\sqrt{n+1}$$

je istinita.

Vježba 489

Odmor!

Rezultat: …

Zadatak 490 (Maturant, gimnazija)

Dokaži da za svaki prirodni broj n > 1 vrijedi nejednakost $\frac{1}{n+1}+\frac{1}{n+2}+\frac{1}{n+3}+\ldots+\frac{1}{2\cdot n}>\frac{1}{2}.$

Rješenje 490

Ponovimo!

$$0<a<b\ \Rightarrow\ \frac{1}{a}>\frac{1}{b}\quad,\quad a>b\ ,\ c>d\ \Rightarrow\ a+c>b+d.$$

Skratiti razlomak znači brojnik i nazivnik tog razlomka podijeliti istim brojem različitim od nule i jedinice

$$\frac{a\cdot n}{b\cdot n}=\frac{a}{b}\ ,\ n\neq 0\ ,\ n\neq 1.$$

Uočimo da vrijedi:

$$\left.\begin{array}{l} n+1<2\cdot n\\ n+2<2\cdot n\\ n+3<2\cdot n\\ \ldots\\ 2\cdot n=2\cdot n\end{array}\right\}\ \Rightarrow\ \left.\begin{array}{l} \frac{1}{n+1}>\frac{1}{2\cdot n}\\ \frac{1}{n+2}>\frac{1}{2\cdot n}\\ \frac{1}{n+3}>\frac{1}{2\cdot n}\\ \ldots\\ \frac{1}{2\cdot n}=\frac{1}{2\cdot n}\end{array}\right\}.$$

Budući da je svaki od n – 1 pribrojnika veći od $\frac{1}{2\cdot n}$ (a posljednji je pribrojnik jednak $\frac{1}{2\cdot n}$), zbroj je veći od $\frac{1}{2}$.

$$\frac{1}{n+1}+\frac{1}{n+2}+\frac{1}{n+3}+\ldots+\frac{1}{2\cdot n}>n\cdot\frac{1}{2\cdot n}=n\cdot\frac{1}{2\cdot n}=\frac{1}{2}.$$

Vježba 490

Odmor!

Rezultat: …

Zadatak 491 (Marinko, srednja škola)

Koji prirodni brojevi imaju **točno četiri** djelitelja?

Rješenje 491

Ponovimo!

Skup prirodnih brojeva označavamo slovom N, a zapisujemo

$$N=\{1,\ 2,\ 3,\ 4,\ 5,\ \ldots,\ n-1,\ n,\ n+1,\ \ldots\}.$$

Za prirodan broj a kažemo da je djeljiv s prirodnim brojem b ako postoji prirodan broj q tako da vrijedi

$$a=b\cdot q.$$

Prosti brojevi (prim – brojevi) su prirodni brojevi djeljivi bez ostatka samo s brojem 1 i sami sa sobom, a veći od broja 1.

Svaki prost broj ima točno dva djelitelja. To su broj 1 i taj broj. Umnožak dva proizvoljna međusobno različita prosta broja p i q ima točno četiri djelitelja: 1, p, q, p · q.

Vježba 491

Koji prirodni brojevi imaju **točno tri** djelitelja?

Rezultat: 1, p, p^2, gdje je p prost broj.

Zadatak 492 (Fox, gimnazija)

Izračunaj: $\left(\sqrt{7+2\cdot\sqrt{6}}+\sqrt{7-2\cdot\sqrt{6}}\right)^2$.

$A.\ 4 \qquad B.\ 8 \qquad C.\ 24 \qquad D.\ 34$

Rješenje 492

Ponovimo!

$$(a+b)^2=a^2+2\cdot a\cdot b+b^2\quad,\quad(a-b)^2=a^2-2\cdot a\cdot b+b^2\quad,\quad\left(\sqrt{a}\right)^2=a.$$

$$\sqrt{a}\cdot\sqrt{b}=\sqrt{a\cdot b}\quad,\quad(a-b)\cdot(a+b)=a^2-b^2\quad,\quad(a\cdot b)^n=a^n\cdot b^n\quad,\quad\sqrt{a^2}=a\ ,\ a\geq 0.$$

Zakon distribucije množenja prema zbrajanju.

$$a\cdot(b+c)=a\cdot b+a\cdot c\quad,\quad a\cdot b+a\cdot c=a\cdot(b+c).$$

1.inačica

$$\left(\sqrt{7+2\cdot\sqrt{6}}+\sqrt{7-2\cdot\sqrt{6}}\right)^2=$$

$$=\left(\sqrt{7+2\cdot\sqrt{6}}\right)^2+2\cdot\sqrt{7+2\cdot\sqrt{6}}\cdot\sqrt{7-2\cdot\sqrt{6}}+\left(\sqrt{7-2\cdot\sqrt{6}}\right)^2=$$

$$=7+2\cdot\sqrt{6}+2\cdot\sqrt{\left(7+2\cdot\sqrt{6}\right)\cdot\left(7-2\cdot\sqrt{6}\right)}+7-2\cdot\sqrt{6}=$$

$$=7+2\cdot\sqrt{6}+2\cdot\sqrt{7^2-\left(2\cdot\sqrt{6}\right)^2}+7-2\cdot\sqrt{6}=7+2\cdot\sqrt{49-2^2\cdot\left(\sqrt{6}\right)^2}+7=$$

$$=14+2\cdot\sqrt{49-4\cdot 6}=14+2\cdot\sqrt{49-24}=14+2\cdot\sqrt{25}=14+2\cdot 5=14+10=24.$$

Odgovor je pod C.

2.inačica

$$\left(\sqrt{7+2\cdot\sqrt{6}}+\sqrt{7-2\cdot\sqrt{6}}\right)^2=\left(\sqrt{6+2\cdot\sqrt{6}+1}+\sqrt{6-2\cdot\sqrt{6}+1}\right)^2=$$

$$=\left(\sqrt{\left(\sqrt{6}\right)^2+2\cdot\sqrt{6}+1}+\sqrt{\left(\sqrt{6}\right)^2-2\cdot\sqrt{6}+1}\right)^2=\left(\sqrt{\left(\sqrt{6}+1\right)^2}+\sqrt{\left(\sqrt{6}-1\right)^2}\right)^2=$$

$$=\left[\begin{array}{l}\sqrt{6}+1>0\\ \sqrt{6}-1>0\end{array}\right]=\left(\sqrt{6}+1+\sqrt{6}-1\right)^2=\left(\sqrt{6}+1+\sqrt{6}-1\right)^2=\left(2\cdot\sqrt{6}\right)^2=2^2\cdot\left(\sqrt{6}\right)^2=4\cdot 6=24.$$

Odgovor je pod C.

Vježba 492

Izračunaj: $\left(\sqrt{4+2\cdot\sqrt{3}}-\sqrt{4-2\cdot\sqrt{3}}\right)^2.$

A. 4 *B.* 8 *C.* 24 *D.* 34

Rezultat: A.