Zadatak 441 (Katarina, maturantica)

Dijelimo li n bombona na osmero djece tako da svako dijete dobije jednaki broj bombona, ostat će nepodijeljena 3 bombona. Kada bismo toj djeci dijelili 5 · n bombona tako da svako dijete dobije jednaki broj bombona, koliko bi **najmanje** bombona ostalo nepodijeljeno?

$A.\ 1 \qquad B.\ 3 \qquad C.\ 5 \qquad D.\ 7$

Rješenje 441

Ponovimo!

$$\frac{a+b}{n}=\frac{a}{n}+\frac{b}{n}.$$

Skratiti razlomak znači brojnik i nazivnik tog razlomka podijeliti istim brojem različitim od nule i jedinice

$$\frac{a\cdot n}{b\cdot n}=\frac{a}{b}\ \ ,\ \ n\neq 0\ \ ,\ \ n\neq 1.$$

Za cijeli broj a kažemo da je djeljiv s cijelim brojem b (b ≠ 0) ako postoji cijeli broj q tako da vrijedi

$$a=q\cdot b.$$

Broj q zovemo kvocijentom brojeva a i b i pišemo

$$\frac{a}{b}=q \quad \text{ili} \quad a:b=q.$$

Za cijeli broj a i prirodni broj b postoje jedinstveni cijeli brojevi q i r takvi da je

$$a=b\cdot q+r\ \text{ i }\ 0\leq r<b,\ q\ \text{ je kvocijent, }\ r\ \text{ je ostatak}.$$

Zakon distribucije množenja prema zbrajanju.

$$a\cdot(b+c)=a\cdot b+a\cdot c \quad , \quad a\cdot b+a\cdot c=a\cdot(b+c).$$

1.inačica

Ako n bombona dijelimo na osmero djece tako da svako dijete dobije jednaki broj bombona, ostat će nepodijeljena 3 bombona. Dijelimo li pet puta više bombona tako da svako dijete dobije jednaki broj bombona ostat će nepodijeljeno 15 bombona.

$$5\cdot 3=15.$$

Od tih 15 bombona svakome od osmero djece damo po jedan pa će ostati nepodijeljeno 7 bombona.

$$15-8\cdot 1=7.$$

Odgovor je pod D.

2.inačica

Neka je b broj bombona koji dobije svako od osmero djece kada dijelimo ukupno n bombona. Vrijedi:

$$n=8\cdot b+3\ \Rightarrow\ 5\cdot n=5\cdot(8\cdot b+3)\ \Rightarrow\ 5\cdot n=5\cdot 8\cdot b+15\ \Rightarrow\ 5\cdot n=8\cdot 5\cdot b+8+7\ \Rightarrow$$

$$\Rightarrow\ 5\cdot n=8\cdot(5\cdot b+1)+7\ \Rightarrow\ 5\cdot n=8\cdot(5\cdot b+1)+7.$$

Odgovor je pod D.

3.inačica

Neka je b broj bombona koji dobije svako od osmero djece kada dijelimo ukupno n bombona. Vrijedi:

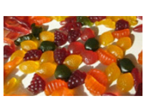
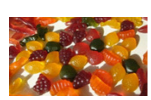
$$n=8\cdot b+3\ \Rightarrow\ 5\cdot n=5\cdot(8\cdot b+3)\ \Rightarrow\ 5\cdot n=40\cdot b+15.$$

Taj broj podijelimo na osmero djece tako da svako dijete dobije jednak broj bombona.

$$\frac{40\cdot b+15}{8}=\frac{40\cdot b+8+7}{8}=\frac{40\cdot b}{8}+\frac{8}{8}+\frac{7}{8}=\frac{40\cdot b}{8}+\frac{8}{8}+\frac{7}{8}=5\cdot b+1+\frac{7}{8}=5\cdot b+1+\frac{7}{8}.$$

Svako bi dijete dobilo 5 · b + 1 bombona, a ostalo bi nepodijeljeno 7 bombona.

Odgovor je pod D.

 +  5 ·  + ?

Vježba 441

Odmor!

Rezultat: …

Zadatak 442 (Iva, maturantica)

Napunjenost baterije mobitela B(t) izražena je u postotcima, npr. za bateriju napunjenu do 60% je B(t) = 60. U tablici je prikazana ovisnost napunjenosti baterije mobitela B(t) o vremenu punjenja / pražnjenja t izraženome u minutama.

Napunjenost potpuno prazne baterije nakon t minuta punjenja	Napunjenost baterije nakon t minuta pražnjenja ako je baterija u trenutku početka pražnjenja napunjena P %
$B(t)=100\cdot\left(1-a^{-t}\right)\ ,\ a\in R^{+}$	$B(t)=P-3\cdot t$

Potpuno prazna baterija napuni se do 99% za 70 min. Ako se potpuno prazna baterija punila 25 min, za koliko će se vremena potpuno isprazniti?

Rješenje 442

Ponovimo!

$$0.01=10^{-2}\quad,\quad a=b\ \Rightarrow\ a^{n}=b^{n}\quad,\quad\left(a^{n}\right)^{m}=a^{n\cdot m}\quad,\quad\sqrt[n]{a^{m}}=a^{\frac{m}{n}}.$$

$$\sqrt[n\cdot r]{a^{m\cdot r}}=\sqrt[n]{a^{m}}\quad,\quad a^{1}=a\quad,\quad a\cdot\frac{b}{c}=\frac{a\cdot b}{c}.$$

Skratiti razlomak znači brojnik i nazivnik tog razlomka podijeliti istim brojem različitim od nule i jedinice

$$\frac{a\cdot n}{b\cdot n}=\frac{a}{b}\ ,\ n\neq 0\ ,\ n\neq 1.$$

Decimalni broj dijelimo dekadskom jedinicom (10, 100, 1000, 10000, …) tako da mu decimalnu točku pomaknemo ulijevo za onoliko mjesta koliko dekadska jedinica ima nula.
Ako se potpuno prazna baterija napuni do 99% za 70 min to zapisujemo

$$B(70)=99.$$

Računamo bazu a.

$$B(t)=100\cdot\left(1-a^{-t}\right)\ \Rightarrow\ \begin{bmatrix}t=70\\B(70)=99\end{bmatrix}\ \Rightarrow\ 99=100\cdot\left(1-a^{-70}\right)\ \Rightarrow$$

$$\Rightarrow\ 99=100\cdot\left(1-a^{-70}\right)\ /:100\ \Rightarrow\ 0.99=1-a^{-70}\ \Rightarrow\ a^{-70}=1-0.99\ \Rightarrow$$

$$\Rightarrow\ a^{-70}=0.01\ \Rightarrow\ a^{-70}=10^{-2}\ \Rightarrow\ a^{-70}=10^{-2}\ /^{-\frac{1}{2}}\ \Rightarrow\ \left(a^{-70}\right)^{-\frac{1}{2}}=\left(10^{-2}\right)^{-\frac{1}{2}}\ \Rightarrow$$

$$\Rightarrow\ a^{35}=10\ \Rightarrow\ a^{35}=10\ /\sqrt[35]{\ }\ \Rightarrow\ a=\sqrt[35]{10}.$$

Ako se potpuno prazna baterija punila 25 min njezina napunjenost iznosit će:

$$\left.\begin{array}{l}t=25\\B(t)=100\cdot\left(1-\left(\sqrt[35]{10}\right)^{-t}\right)\end{array}\right\}\ \Rightarrow\ B(25)=100\cdot\left(1-\left(\sqrt[35]{10}\right)^{-25}\right)\ \Rightarrow$$

$$\Rightarrow\ B(25)=100\cdot\left(1-10^{-\frac{25}{35}}\right)\ \Rightarrow\ B(25)=100\cdot\left(1-10^{-\frac{25}{35}}\right)\ \Rightarrow\ B(25)=100\cdot\left(1-10^{-\frac{5}{7}}\right).$$

Neka je t vrijeme za koje će se isprazniti baterija koja se punila 25 min. Vrijedi:

$$B(25)-3\cdot t=0 \Rightarrow -3\cdot t=-B(25) \Rightarrow -3\cdot t=-B(25) \;/\cdot\left(-\frac{1}{3}\right) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow t=\frac{1}{3}\cdot B(25) \Rightarrow \left[B(25)=100\cdot\left(1-10^{-\frac{5}{7}}\right)\right] \Rightarrow t=\frac{1}{3}\cdot 100\cdot\left(1-10^{-\frac{5}{7}}\right) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \left[\begin{array}{c}\text{džepno}\\ \text{računalo}\end{array}\right] \Rightarrow t=26.8977 \text{ min}.$$

Vježba 442

Odmor!

Rezultat: …

Zadatak 443 (Zvonimir, srednja škola)

Pokazati da je broj $2+2^2+2^3+...+2^{15}$ djeljiv brojem 7.

Rješenje 443

Ponovimo!

$$a^1=a \quad , \quad a^n : a^m = a^{n-m}.$$

Zakon distribucije množenja prema zbrajanju.

$$a\cdot(b+c)=a\cdot b+a\cdot c \quad , \quad a\cdot b+a\cdot c=a\cdot(b+c).$$

$$2+2^2+2^3+2^4+2^5+2^6+2^7+2^8+2^9+2^{10}+2^{11}+2^{12}+2^{13}+2^{14}+2^{15}=$$

$$=2\cdot\left(1+2+2^2+2^3+2^4+2^5+2^6+2^7+2^8+2^9+2^{10}+2^{11}+2^{12}+2^{13}+2^{14}\right)=$$

$$=2\cdot\left(\left(1+2+2^2\right)+\left(2^3+2^4+2^5\right)+\left(2^6+2^7+2^8\right)+\left(2^9+2^{10}+2^{11}\right)+\left(2^{12}+2^{13}+2^{14}\right)\right)=$$

$$=2\cdot\left(\left(1+2+2^2\right)+2^3\cdot\left(1+2+2^2\right)+2^6\cdot\left(1+2+2^2\right)+2^9\cdot\left(1+2+2^2\right)+2^{12}\cdot\left(1+2+2^2\right)\right)=$$

$$=2\cdot\left(1+2+2^2\right)\cdot\left(1+2^3+2^6+2^9+2^{12}\right)=2\cdot 7\cdot\left(1+2^3+2^6+2^9+2^{12}\right).$$

Broj 7 je jedan od faktora pa je umnožak djeljiv sa 7.

Vježba 443

Pokazati da je broj $2+2^2+2^3+...+2^{30}$ djeljiv brojem 7.

Rezultat: $2\cdot 7\cdot\left(1+2^3+2^6+...+2^{27}\right)$. Dokaz analogan.

Zadatak 444 (Krešo, gimnazija)

Zadani su pozitivni brojevi a, b, c, d takvi da je $\frac{a}{b}<\frac{c}{d}$. Dokazati da je $\frac{a}{b}<\frac{a+c}{b+d}<\frac{c}{d}$.

Rješenje 444

Ponovimo!

$$a<b \;,\; c>0 \Rightarrow a\cdot c<b\cdot c \quad , \quad a<b \;,\; c\in R \Rightarrow a+c<b+c.$$

$$a<b \text{ i } b<c \Rightarrow a<b<c.$$

Zakon distribucije množenja prema zbrajanju.

$$a\cdot(b+c)=a\cdot b+a\cdot c \quad , \quad a\cdot b+a\cdot c=a\cdot(b+c).$$

Skratiti razlomak znači brojnik i nazivnik tog razlomka podijeliti istim brojem različitim od nule i jedinice

$$\frac{a \cdot n}{b \cdot n} = \frac{a}{b} \ , \ n \neq 0 \ , \ n \neq 1.$$

Preoblikujemo nejednakost $\frac{a}{b} < \frac{c}{d}$ na dva načina:

- $\frac{a}{b} < \frac{c}{d} \Rightarrow \frac{a}{b} < \frac{c}{d} \ / \cdot b \cdot d \Rightarrow a \cdot d < b \cdot c \Rightarrow a \cdot d < b \cdot c \ / + a \cdot b \Rightarrow$

  $\Rightarrow a \cdot b + a \cdot d < a \cdot b + b \cdot c \Rightarrow a \cdot (b+d) < b \cdot (a+c) \Rightarrow a \cdot (b+d) < b \cdot (a+c) \ / \cdot \frac{1}{b \cdot (b+d)} \Rightarrow$

  $$\Rightarrow \frac{a}{b} < \frac{a+c}{b+d}$$

- $\frac{a}{b} < \frac{c}{d} \Rightarrow \frac{a}{b} < \frac{c}{d} \ / \cdot b \cdot d \Rightarrow a \cdot d < b \cdot c \Rightarrow a \cdot d < b \cdot c \ / + c \cdot d \Rightarrow$

  $\Rightarrow a \cdot d + c \cdot d < b \cdot c + c \cdot d \Rightarrow d \cdot (a+c) < c \cdot (b+d) \Rightarrow d \cdot (a+c) < c \cdot (b+d) \ / \cdot \frac{1}{d \cdot (b+d)} \Rightarrow$

  $$\Rightarrow \frac{a+c}{b+d} < \frac{c}{d}.$$

Dalje slijedi:

$$\left. \begin{array}{l} \frac{a}{b} < \frac{a+c}{b+d} \\ \frac{a+c}{b+d} < \frac{c}{d} \end{array} \right\} \Rightarrow \frac{a}{b} < \frac{a+c}{b+d} < \frac{c}{d}.$$

Vježba 444

Odmor!

Rezultat: …

Zadatak 445 (Ivan, tehnička škola)

Aritmetička sredina od 50 brojeva iznosi 38. Ako iz toga skupa brojeva izbacimo brojeve 45 i 55, onda je aritmetička sredina preostalih 48 brojeva jednaka:

A. 36 *B.* 36.5 *C.* 37 *D.* 37.5

Rješenje 445

Ponovimo!

Neka je dan skup n pozitivnih brojeva $\{a_1, a_2, a_3, \ldots, a_n\}$. Tada je aritmetička sredina A_n brojeva $a_1, a_2, a_3, \ldots, a_n$ definirana izrazom

$$A_n = \frac{a_1 + a_2 + a_3 + \ldots + a_n}{n}.$$

$$\frac{a_1 + a_2 + a_3 + \ldots + a_{48} + 45 + 55}{50} = 38 \Rightarrow \frac{a_1 + a_2 + a_3 + \ldots + a_{48} + 45 + 55}{50} = 38 \ / \cdot 50 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow a_1 + a_2 + a_3 + \ldots + a_{48} + 45 + 55 = 1900 \Rightarrow a_1 + a_2 + a_3 + \ldots + a_{48} = 1900 - 45 - 55 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow a_1 + a_2 + a_3 + \ldots + a_{48} = 1800.$$

Računamo aritmetičku sredinu 48 preostalih brojeva.

$$\frac{a_1 + a_2 + a_3 + \ldots + a_{48}}{48} = \frac{1800}{48} = 37.5.$$

Odgovor je pod D.

Vježba 445

Aritmetička sredina od 50 brojeva iznosi 38. Ako iz toga skupa brojeva izbacimo brojeve 40 i 60, onda je aritmetička sredina preostalih 48 brojeva jednaka:

$A.\ 36 \qquad B.\ 36.5 \qquad C.\ 37 \qquad D.\ 37.5$

Rezultat: D.

Zadatak 446 (Ivan, tehnička škola)

Odredi brojeve a i b za koje vrijedi $a^2+b^2=2\cdot(2\cdot a-3\cdot b)-13.$

Rješenje 446

Ponovimo!

$$a^2-2\cdot a\cdot b+b^2=(a-b)^2 \quad , \quad a^2+2\cdot a\cdot b+b^2=(a+b)^2.$$

$$a^2+b^2=0 \;\Rightarrow\; a=b=0.$$

$$a^2+b^2=2\cdot(2\cdot a-3\cdot b)-13 \;\Rightarrow\; a^2+b^2=4\cdot a-6\cdot b-13 \;\Rightarrow$$

$$\Rightarrow\; a^2+b^2-4\cdot a+6\cdot b+13=0 \;\Rightarrow\; a^2-4\cdot a+4+b^2+6\cdot b+9=0 \;\Rightarrow$$

$$\Rightarrow\; \left(a^2-4\cdot a+4\right)+\left(b^2+6\cdot b+9\right)=0 \;\Rightarrow\; (a-2)^2+(b+3)^2=0 \;\Rightarrow\; \left.\begin{array}{l} a-2=0 \\ b+3=0 \end{array}\right\} \;\Rightarrow\; \left.\begin{array}{l} a=2 \\ b=-3 \end{array}\right\}.$$

Vježba 446

Odredi brojeve a i b za koje vrijedi $a^2+b^2=2\cdot(a-2\cdot b)-5.$

Rezultat: a = 1, b = – 2.

Zadatak 447 (Kristijan, srednja škola)

Izračunajte $\dfrac{2^{35}\cdot 3^{32}-4^{17}\cdot 81^8}{256^4\cdot 9^{16}}.$

Rješenje 447

Ponovimo!

$$\left(a^n\right)^m=a^{n\cdot m} \quad , \quad a^n:a^m=a^{n-m} \quad , \quad \frac{a^n}{a^m}=a^{n-m} \quad , \quad \frac{a-b}{n}=\frac{a}{n}-\frac{b}{n}.$$

Zakon distribucije množenja prema zbrajanju.

$$a\cdot(b+c)=a\cdot b+a\cdot c \quad , \quad a\cdot b+a\cdot c=a\cdot(b+c).$$

Skratiti razlomak znači brojnik i nazivnik tog razlomka podijeliti istim brojem različitim od nule i jedinice

$$\frac{a\cdot n}{b\cdot n}=\frac{a}{b} \;,\; n\neq 0 \;,\; n\neq 1.$$

1.inačica

$$\frac{2^{35}\cdot 3^{32}-4^{17}\cdot 81^8}{256^4\cdot 9^{16}}=\frac{2^{35}\cdot 3^{32}-\left(2^2\right)^{17}\cdot\left(3^4\right)^8}{\left(2^8\right)^4\cdot\left(3^2\right)^{16}}=\frac{2^{35}\cdot 3^{32}-2^{34}\cdot 3^{32}}{2^{32}\cdot 3^{32}}=$$

$$=\frac{2^{34}\cdot 3^{32}\cdot(2-1)}{2^{32}\cdot 3^{32}}=\frac{2^{34}\cdot 3^{32}\cdot 1}{2^{32}\cdot 3^{32}}=\frac{2^{34}\cdot 3^{32}}{2^{32}\cdot 3^{32}}=\frac{2^{34}\cdot 3^{32}}{2^{32}\cdot 3^{32}}=\frac{2^{34}}{2^{32}}=2^2=4.$$

2.inačica

$$\frac{2^{35}\cdot 3^{32}-4^{17}\cdot 81^{8}}{256^{4}\cdot 9^{16}}=\frac{2^{35}\cdot 3^{32}-\left(2^{2}\right)^{17}\cdot\left(3^{4}\right)^{8}}{\left(2^{8}\right)^{4}\cdot\left(3^{2}\right)^{16}}=\frac{2^{35}\cdot 3^{32}-2^{34}\cdot 3^{32}}{2^{32}\cdot 3^{32}}=$$

$$=\frac{2^{35}\cdot 3^{32}}{2^{32}\cdot 3^{32}}-\frac{2^{34}\cdot 3^{32}}{2^{32}\cdot 3^{32}}=\frac{2^{35}\cdot 3^{32}}{2^{32}\cdot 3^{32}}-\frac{2^{34}\cdot 3^{32}}{2^{32}\cdot 3^{32}}=\frac{2^{35}}{2^{32}}-\frac{2^{34}}{2^{32}}=2^{3}-2^{2}=8-4=4.$$

Vježba 447

Izračunajte $\frac{256^{4}\cdot 9^{16}}{2^{35}\cdot 3^{32}-4^{17}\cdot 81^{8}}$.

Rezultat: $\frac{1}{4}$.

Zadatak 448 (Kristijan, srednja škola)

Neka su a i b uzastopni prirodni brojevi i c njihov umnožak. Ako je $D=a^{2}+b^{2}+c^{2}$, $\sqrt{D}$ je:

$A.$ uvijek paran broj $\quad B.$ uvijek neparan broj

$C.$ uvijek iracionalan broj $\quad D.$ uvijek prost broj

Rješenje 448

Ponovimo!

$$(a+b)^{2}=a^{2}+2\cdot a\cdot b+b^{2} \quad , \quad \sqrt{a^{2}}=a \ , \ a\geq 0 \quad , \quad a^{1}=a \quad , \quad a^{n}:a^{m}=a^{n-m}.$$

Zakon distribucije množenja prema zbrajanju.

$$a\cdot(b+c)=a\cdot b+a\cdot c \quad , \quad a\cdot b+a\cdot c=a\cdot(b+c).$$

Skup prirodnih brojeva označavamo slovom N, a zapisujemo

$$N=\{1,\ 2,\ 3,\ 4,\ 5,\ \ldots,\ n-1,\ n,\ n+1,\ \ldots\}.$$

Prosti brojevi (prim – brojevi) su prirodni brojevi djeljivi bez ostatka samo s brojem 1 i sami sa sobom, a veći od broja 1.
Prethodnik prirodnog broja n, n ≠ 1, je prirodan broj n – 1.
Sljedbenik prirodnog broja n je prirodan broj n + 1.
Prirodni brojevi dijele se na parne i neparne brojeve. Parni brojevi su oni brojevi koji su djeljivi sa 2, a neparni su oni koji nisu djeljivi sa 2.
Da je neki prirodan broj m paran znači da se može napisati u obliku

$$m=2\cdot(\text{neki prirodan broj}) \quad , \quad m=2\cdot k \ , \ k\in N.$$

Zbroj parnih brojeva je paran broj.

$$2\cdot n+2\cdot m=2\cdot(n+m)=2\cdot k \ , \ n,\ m,\ k\in N.$$

Umnožak dva susjedna prirodna broja (brojevi se razlikuju za 1) uvijek je paran broj (djeljiv s 2).

$$(n-1)\cdot n=2\cdot k \ , \ n,\ k\in N \quad , \quad n\cdot(n+1)=2\cdot k \ , \ n,\ k\in N.$$

Iracionalni brojevi su brojevi koje ne možemo zapisati u obliku razlomaka.
Prema uvjetima zadatka je

$$\left.\begin{array}{l} a=a \\ b=a+1 \\ c=a\cdot(a+1) \end{array}\right\}.$$

Računamo $\sqrt{D}$.

$$D=a^{2}+b^{2}+c^{2} \ \Rightarrow\ D=a^{2}+(a+1)^{2}+(a\cdot(a+1))^{2} \ \Rightarrow\ D=(a\cdot(a+1))^{2}+a^{2}+(a+1)^{2} \ \Rightarrow$$

$$\Rightarrow D = \left(a\cdot(a+1)\right)^2 + a^2 + a^2 + 2\cdot a + 1 \Rightarrow D = \left(a\cdot(a+1)\right)^2 + 2\cdot a^2 + 2\cdot a + 1 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow D = \left(a\cdot(a+1)\right)^2 + 2\cdot a\cdot(a+1) + 1 \Rightarrow D = \left(a\cdot(a+1)+1\right)^2 \Rightarrow D = \left(a\cdot(a+1)+1\right)^2 \ /\sqrt{\ } \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \sqrt{D} = \sqrt{\left(a\cdot(a+1)+1\right)^2} \Rightarrow \sqrt{D} = a\cdot(a+1)+1.$$

Budući da je umnožak a · (a + 1) dva uzastopna prirodna broja a i a + 1 uvijek paran broj, slijedi da je

$$\sqrt{D} = a\cdot(a+1)+1$$

uvijek neparan broj.
Odgovor je pod B.

Vježba 448

Odmor!

Rezultat: …

Zadatak 449 (Josip, gimnazija)

Neka su A i B dva broja koji imaju jednake znamenke. Ako je A + B = 10^{10}, dokazati da je A djeljiv sa 10.

Rješenje 449

Ponovimo!

$$\left.\begin{matrix} a = b \\ c = d \end{matrix}\right\} \Rightarrow a + c = b + d.$$

Prirodni brojevi dijele se na parne i neparne brojeve. Parni brojevi su oni brojevi koji su djeljivi sa 2, a neparni su oni koji nisu djeljivi sa 2.
Da je neki prirodan broj m paran znači da se može napisati u obliku

$$m = 2\cdot(\text{neki prirodan broj}) \quad , \quad m = 2\cdot k \ , \ k \in N.$$

Za zapis broja koristimo znamenke 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8 i 9. Brojevna vrijednost što je nosi neka znamenka određena je ne samo vrijednošću te znamenke već i pozicijom te znamenke u zapisu broja. Takav zapis broja zovemo pozicijskim zapisom. Općenito:

Ako je $N = \overline{a_n a_{n-1} a_{n-2} \ldots a_2 a_1 a_\circ}$, pri čemu je $a_i \in \{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9\}$, $i = 0, 1, 2, \ldots, n$ dekadski zapis prirodnog broja N, onda je njegova vrijednost

$$N = a_n\cdot 10^n + a_{n-1}\cdot 10^{n-1} + a_{n-2}\cdot 10^{n-2} + \ldots + a_2\cdot 10^2 + a_1\cdot 10 + a_\circ.$$

Broj 10 zove se baza dekadskog brojevnog sustava.
Prirodni je broj djeljiv s 10 ako mu je posljednja znamenka 0.
Iz uvjeta:

- A + B =10^{10}
- A i B imaju jednake znamenke,

slijedi da su A i B deseteroznamenkasti brojevi oblika

$$A = \overline{a_9 a_8 \ldots a_2 a_1 a_\circ} \quad , \quad B = \overline{b_9 b_8 \ldots b_2 b_1 b_\circ}.$$

Za zbroj znamenaka jedinica moguća su dva slučaja:

- $a_0 + b_0 = 10$
- $a_0 + b_0 = 0$.

U prvom slučaju imamo:

$$\left.\begin{aligned} a_\circ + b_\circ &= 10 \\ a_1 + b_1 &= 9 \\ a_2 + b_2 &= 9 \\ &\ldots\ldots\ldots\ldots \\ a_9 + b_9 &= 9 \end{aligned}\right\} \Rightarrow \left[\begin{matrix} \text{zbrojimo} \\ \text{jednakosti} \end{matrix}\right] \Rightarrow \left(a_\circ + a_1 + a_2 + \ldots + a_9\right) + \left(b_\circ + b_1 + b_2 + \ldots + b_9\right) = 10 + 9 \cdot 9 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \left(a_\circ + a_1 + a_2 + \ldots + a_9\right) + \left(b_\circ + b_1 + b_2 + \ldots + b_9\right) = 91 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \left[\begin{matrix} \text{brojevi A i B imaju jednake znamenke} \\ a_\circ + a_1 + a_2 + \ldots + a_9 = b_\circ + b_1 + b_2 + \ldots + b_9 \end{matrix}\right] \Rightarrow 2 \cdot \left(a_\circ + a_1 + a_2 + \ldots + a_9\right) = 91.$$

Ova jednakost nije moguća jer je na lijevoj strani paran broj, a na desnoj neparan.
Promotrimo drugi slučaj.

$$a_\circ + b_\circ = 0 \Rightarrow \left[\, a_\circ, \, b_\circ \in \{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9\} \,\right] \Rightarrow \left.\begin{matrix} a_\circ = 0 \\ b_\circ = 0 \end{matrix}\right\}.$$

Time je dokazano da je broj

$$A = \overline{a_9 a_8 \ldots a_2 a_1 0}$$

djeljiv sa 10.

Vježba 449

Neka su A i B dva broja koji imaju jednake znamenke. Ako je A + B = 10^{10}, dokazati da je B djeljiv sa 10.

Rezultat: Dokaz analogan.

Zadatak 450 (Josip, gimnazija)

Pokaži da je $\sqrt{a-1} + \sqrt{b-1} + \sqrt{c-1} < \sqrt{c \cdot (a \cdot b + 1) + 1}$, kada su a, b i c realni brojevi koji nisu manji od 1.

Rješenje 450

Ponovimo!

$$\sqrt{a^2} = a \; , \; a \ge 0 \quad , \quad \left(\sqrt{a}\right)^2 = a \quad , \quad a^n \cdot b^n = (a \cdot b)^n \quad , \quad a > 0 \Rightarrow a^2 > 0.$$

$$(a+b+c)^2 = a^2 + b^2 + c^2 + 2 \cdot a \cdot b + 2 \cdot a \cdot c + 2 \cdot b \cdot c \quad , \quad a^2 - 2 \cdot a \cdot b + b^2 = (a-b)^2.$$

Množenje zagrada

$$(a+b) \cdot (c+d) = a \cdot c + a \cdot d + b \cdot c + b \cdot d.$$

Zakon distribucije množenja prema zbrajanju.

$$a \cdot (b+c) = a \cdot b + a \cdot c \quad , \quad a \cdot b + a \cdot c = a \cdot (b+c).$$

Preoblikujemo nejednakost.

$$\sqrt{a-1} + \sqrt{b-1} + \sqrt{c-1} < \sqrt{c \cdot (a \cdot b + 1) + 1} \Rightarrow \left[\begin{matrix} \text{zamjena} \\ a - 1 = x^2 \; , \; a = x^2 + 1 \\ b - 1 = y^2 \; , \; b = y^2 + 1 \\ c - 1 = z^2 \; , \; c = z^2 + 1 \end{matrix}\right] \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \sqrt{x^2} + \sqrt{y^2} + \sqrt{z^2} < \sqrt{\left(z^2+1\right) \cdot \left(\left(x^2+1\right) \cdot \left(y^2+1\right) + 1\right) + 1} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \; x+y+z<\sqrt{\left(z^{2}+1\right)\cdot\left(x^{2}\cdot y^{2}+x^{2}+y^{2}+1+1\right)+1} \; \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \; x+y+z<\sqrt{\left(z^{2}+1\right)\cdot\left(x^{2}\cdot y^{2}+x^{2}+y^{2}+2\right)+1} \; /^{2} \; \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \; (x+y+z)^{2}<\left(\sqrt{\left(z^{2}+1\right)\cdot\left(x^{2}\cdot y^{2}+x^{2}+y^{2}+2\right)+1}\right)^{2} \; \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \; x^{2}+y^{2}+z^{2}+2\cdot x\cdot y+2\cdot x\cdot z+2\cdot y\cdot z<\left(z^{2}+1\right)\cdot\left(x^{2}\cdot y^{2}+x^{2}+y^{2}+2\right)+1 \; \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \; x^{2}+y^{2}+z^{2}+2\cdot x\cdot y+2\cdot x\cdot z+2\cdot y\cdot z<$$

$$<x^{2}\cdot y^{2}\cdot z^{2}+x^{2}\cdot z^{2}+y^{2}\cdot z^{2}+2\cdot z^{2}+x^{2}\cdot y^{2}+x^{2}+y^{2}+2+1 \; \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \; x^{2}+y^{2}+z^{2}+2\cdot x\cdot y+2\cdot x\cdot z+2\cdot y\cdot z<$$

$$<x^{2}\cdot y^{2}\cdot z^{2}+x^{2}\cdot z^{2}+y^{2}\cdot z^{2}+2\cdot z^{2}+x^{2}\cdot y^{2}+x^{2}+y^{2}+3 \; \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \; z^{2}+2\cdot x\cdot y+2\cdot x\cdot z+2\cdot y\cdot z<x^{2}\cdot y^{2}\cdot z^{2}+x^{2}\cdot z^{2}+y^{2}\cdot z^{2}+2\cdot z^{2}+x^{2}\cdot y^{2}+3 \; \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \; 0<x^{2}\cdot y^{2}\cdot z^{2}+x^{2}\cdot z^{2}+y^{2}\cdot z^{2}+2\cdot z^{2}+x^{2}\cdot y^{2}+3-z^{2}-2\cdot x\cdot y-2\cdot x\cdot z-2\cdot y\cdot z \; \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \; 0<x^{2}\cdot y^{2}\cdot z^{2}+x^{2}\cdot z^{2}+y^{2}\cdot z^{2}+z^{2}+x^{2}\cdot y^{2}+3-2\cdot x\cdot y-2\cdot x\cdot z-2\cdot y\cdot z \; \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \; 0<x^{2}\cdot y^{2}\cdot z^{2}+x^{2}\cdot y^{2}-2\cdot x\cdot y+1+y^{2}\cdot z^{2}-2\cdot y\cdot z+1+x^{2}\cdot z^{2}-2\cdot x\cdot z+1+z^{2} \; \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \; 0<(x\cdot y\cdot z)^{2}+\left(x^{2}\cdot y^{2}-2\cdot x\cdot y+1\right)+\left(y^{2}\cdot z^{2}-2\cdot y\cdot z+1\right)+\left(x^{2}\cdot z^{2}-2\cdot x\cdot z+1\right)+z^{2} \; \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \; 0<(x\cdot y\cdot z)^{2}+(x\cdot y-1)^{2}+(y\cdot z-1)^{2}+(x\cdot z-1)^{2}+z^{2}.$$

Ovo je uvijek točna nejednakost.

Vježba 450

Pokaži da je $\sqrt{a-1}+\sqrt{b-1}+\sqrt{c-1}<\sqrt{c\cdot(a\cdot b+2)-c+1},$ kada su a, b i c realni brojevi koji nisu manji od 1.

Rezultat: Dokaz analogan.

Zadatak 451 (Ivan, gimnazija)

Ako je $\left(a+\frac{1}{a}\right)^{2}=3,$ koliko je $a^{3}+\frac{1}{a^{3}}$?

Rješenje 451

Ponovimo!

$$\left(\sqrt{a}\right)^{3}=\left(\sqrt{a}\right)^{2}\cdot\sqrt{a}=a\cdot\sqrt{a} \quad , \quad (-a)^{3}=-a^{3} \quad , \quad a^{3}+b^{3}=(a+b)^{3}-3\cdot a\cdot b\cdot(a+b).$$

$$a^{1}=a \quad , \quad a^{n}:a^{m}=a^{n-m} \quad , \quad \sqrt{a^{2}}=a\;,\; a\geq 0.$$

Zakon distribucije množenja prema zbrajanju.

$$a\cdot(b+c)=a\cdot b+a\cdot c \quad , \quad a\cdot b+a\cdot c=a\cdot(b+c).$$

Iz $\left(a+\frac{1}{a}\right)^{2}=3$ slijedi:

$$\left(a+\frac{1}{a}\right)^2=3 \Rightarrow \left(a+\frac{1}{a}\right)^2=3 \ /\sqrt{} \Rightarrow a+\frac{1}{a}=\pm\sqrt{3} \Rightarrow \left.\begin{array}{l} a+\frac{1}{a}=\sqrt{3} \\ a+\frac{1}{a}=-\sqrt{3} \end{array}\right\}.$$

Sada je:

- $$a^3+\frac{1}{a^3}=\left(a+\frac{1}{a}\right)^3-3\cdot\left(a+\frac{1}{a}\right) \Rightarrow \left[a+\frac{1}{a}=\sqrt{3}\right] \Rightarrow a^3+\frac{1}{a^3}=\left(\sqrt{3}\right)^3-3\cdot\sqrt{3} \Rightarrow$$
$$\Rightarrow a^3+\frac{1}{a^3}=3\cdot\sqrt{3}-3\cdot\sqrt{3} \Rightarrow a^3+\frac{1}{a^3}=3\cdot\sqrt{3}-3\cdot\sqrt{3} \Rightarrow a^3+\frac{1}{a^3}=0.$$
- $$a^3+\frac{1}{a^3}=\left(a+\frac{1}{a}\right)^3-3\cdot\left(a+\frac{1}{a}\right) \Rightarrow \left[a+\frac{1}{a}=-\sqrt{3}\right] \Rightarrow a^3+\frac{1}{a^3}=\left(-\sqrt{3}\right)^3-3\cdot\left(-\sqrt{3}\right) \Rightarrow$$
$$\Rightarrow a^3+\frac{1}{a^3}=-3\cdot\sqrt{3}+3\cdot\sqrt{3} \Rightarrow a^3+\frac{1}{a^3}=-3\cdot\sqrt{3}+3\cdot\sqrt{3} \Rightarrow a^3+\frac{1}{a^3}=0.$$

Vježba 451

Odmor!

Rezultat: …

Zadatak 452 (Tonka, gimnazija)

Umnožak prvih n prirodnih brojeva je 272 puta veći od umnoška prvih n – 2 prirodnih brojeva. Odredite koeficijent uz x^{15} u razvoju binoma $(x+4)^n$.

Rješenje 452

Ponovimo!

$$a^1=a \quad , \quad a^n\cdot a^m=a^{n+m}.$$

Skup prirodnih brojeva označavamo slovom N, a zapisujemo

$$N=\{1, 2, 3, 4, 5, \ldots, n-1, n, n+1, \ldots\}.$$

Kako zapisati da je broj b n puta veći od broja a?

$$b=n\cdot a \quad , \quad \frac{b}{n}=a \quad , \quad \frac{b}{a}=n.$$

Zakon distribucije množenja prema zbrajanju.

$$a\cdot(b+c)=a\cdot b+a\cdot c \quad , \quad a\cdot b+a\cdot c=a\cdot(b+c).$$

Skratiti razlomak znači brojnik i nazivnik tog razlomka podijeliti istim brojem različitim od nule i jedinice

$$\frac{a\cdot n}{b\cdot n}=\frac{a}{b} \ , \ n\neq 0 \ , \ n\neq 1.$$

Binomni poučak

Za svaki $a, b\in R, n\in N$ vrijedi

$$(a+b)^n=\binom{n}{0}\cdot a^n+\binom{n}{1}\cdot a^{n-1}\cdot b^1+\ldots+\binom{n}{n-1}\cdot a^1\cdot b^{n-1}+\binom{n}{n}\cdot b^n.$$

Binomni koeficijent

Neka je n prirodan broj, a k prirodan broj ili 0 i k ≤ n. Binomni koeficijent označavamo simbolom $\binom{n}{k}$ i definiramo

$$\binom{n}{k}=\frac{n\cdot(n-1)\cdot(n-2)\cdot\ ...\ \cdot(n-k+1)}{1\cdot 2\cdot 3\cdot\ ...\ \cdot k}.$$

Prvi član u razvoju binoma ima oblik

$$\binom{n}{\circ}\cdot a^{n}\cdot b^{\circ},\ \text{drugi}\ \binom{n}{1}\cdot a^{n-1}\cdot b^{1},\ ...\ ,\ \text{a k} - \text{ti član glasi}\ \binom{n}{k-1}\cdot a^{n-(k-1)}\cdot b^{k-1}.$$

Budući da je umnožak prvih n prirodnih brojeva 272 puta veći od umnoška prvih n – 2 prirodnih brojeva, slijedi:

$$1\cdot 2\cdot 3\cdot\ ...\ \cdot(n-2)\cdot(n-1)\cdot n=272\cdot 1\cdot 2\cdot 3\cdot\ ...\ \cdot(n-2)\ \Rightarrow$$

$$\Rightarrow\ 1\cdot 2\cdot 3\cdot\ ...\ \cdot(n-2)\cdot(n-1)\cdot n=272\cdot 1\cdot 2\cdot 3\cdot\ ...\ \cdot(n-2)\ /\cdot\frac{1}{1\cdot 2\cdot 3\cdot\ ...\ \cdot(n-2)}\ \Rightarrow$$

$$\Rightarrow\ (n-1)\cdot n=272\ \Rightarrow\ n^{2}-n=272\ \Rightarrow\ n^{2}-n-272=0\ \Rightarrow\ \left.\begin{array}{l} n^{2}-n-272=0\\ a=1\ ,\ b=-1\ ,\ c=-272\end{array}\right\}\Rightarrow$$

$$\Rightarrow\ \left.\begin{array}{l} a=1\ ,\ b=-1\ ,\ c=-272\\ n_{1,2}=\dfrac{-b\pm\sqrt{b^{2}-4\cdot a\cdot c}}{2\cdot a}\end{array}\right\}\Rightarrow\ n_{1,2}=\frac{-(-1)\pm\sqrt{(-1)^{2}-4\cdot 1\cdot(-272)}}{2\cdot 1}\ \Rightarrow$$

$$\Rightarrow\ n_{1,2}=\frac{1\pm\sqrt{1+1088}}{2}\ \Rightarrow\ n_{1,2}=\frac{1\pm\sqrt{1089}}{2}\ \Rightarrow\ n_{1,2}=\frac{1\pm 33}{2}\ \Rightarrow\ \left.\begin{array}{l} n_{1}=\dfrac{1+33}{2}\\ n_{2}=\dfrac{1-33}{2}\end{array}\right\}\Rightarrow$$

$$\Rightarrow\ \left.\begin{array}{l} n_{1}=\dfrac{34}{2}\\ n_{2}=-\dfrac{32}{2}\end{array}\right\}\Rightarrow\ \left.\begin{array}{l} n_{1}=\dfrac{34}{2}\\ n_{2}=-\dfrac{32}{2}\end{array}\right\}\Rightarrow\ \left.\begin{array}{l} n_{1}=17\\ n_{2}=-16\ \text{nije prirodan broj}\end{array}\right\}\Rightarrow\ n=17.$$

Dakle, riječ je o binomu

$$(x+4)^{17}=\binom{17}{\circ}\cdot x^{17}+\binom{17}{1}\cdot x^{16}\cdot 4^{1}+\binom{17}{2}\cdot x^{15}\cdot 4^{2}+\ ...\ +\binom{17}{16}\cdot x^{1}\cdot 4^{16}+\binom{17}{17}\cdot 4^{17}.$$

Koeficijent uz x^{15} glasi:

$$\binom{17}{2}\cdot 4^{2}=\frac{17\cdot 16}{1\cdot 2}\cdot 16=\frac{17\cdot 16}{2}\cdot 16=17\cdot 8\cdot 16=2176.$$

Vježba 452

Umnožak prvih n – 2 prirodnih brojeva je 272 puta manji od umnoška prvih n prirodnih brojeva. Odredite koeficijent uz x^{16} u razvoju binoma $(x+4)^{n}$.

Rezultat: 68.

Zadatak 453 (Branimir, gimnazija)

Nađi najveći prirodni broj koji pri dijeljenju s 13 daje količnik 19.

Rješenje 453

Ponovimo!

Skup prirodnih brojeva označavamo slovom N, a zapisujemo

$$N=\{1,\ 2,\ 3,\ 4,\ 5,\ ...\ ,\ n-1,\ n,\ n+1,\ ...\}.$$

Cijeli brojevi jesu brojevi:

$$...,\ -5,\ -4,\ -3,\ -2,\ -1,\ 0,\ 1,\ 2,\ 3,\ 4,\ 5,\ ...$$

Oni čine skup cijelih brojeva koji označavamo slovom Z, a zapisujemo kao

$$Z = \{\,...,\ -3,\ -2,\ -1,\ 0,\ 1,\ 2,\ 3,\ ...\,\} \qquad \text{ili} \qquad Z = \{\,0,\ 1,\ -1,\ 2,\ -2,\ 3,\ -3,\ ...\,\}.$$

Za cijeli broj a kažemo da je **djeljiv s cijelim brojem** b (b ≠ 0) ako postoji cijeli broj q tako da vrijedi

$$a = q \cdot b.$$

Broj q zovemo **količnikom** brojeva a i b i pišemo

$$\frac{a}{b} = q \quad \text{ili} \quad a : b = q.$$

Teorem o dijeljenju

Za cijeli broj a i prirodni broj b postoje jedinstveni cijeli brojevi q i r takvi da je

$$a = b \cdot q + r \ \text{ i } \ 0 \le r < b, \ q \ \text{ je količnik, } r \ \text{ je ostatak}.$$

Pretpostavimo da je a traženi broj. Tada je:

$$a = 13 \cdot 19 + r.$$

Za ostatak r vrijedi:

$$r \in \{\,0,\ 1,\ 2,\ 3,\ 4,\ 5,\ 6,\ 7,\ 8,\ 9,\ 10,\ 11,\ 12\,\}.$$

Broj a je najveći za r = 12 i iznosi:

$$a = 13 \cdot 19 + 12 \ \Rightarrow \ a = 259.$$

Vježba 453

Nađi najveći prirodni broj koji pri dijeljenju sa 17 daje količnik 23.

Rezultat: 407.

Zadatak 454 (Branimir, gimnazija)

Ako cijeli broj nije djeljiv s 3 onda je njegov kvadrat umanjen za 1 djeljiv s 3. Dokažite!

Rješenje 454

Ponovimo!

$$a^2 - b^2 = (a-b)\cdot(a+b).$$

Zakon distribucije množenja prema zbrajanju.

$$a \cdot (b+c) = a \cdot b + a \cdot c \quad , \quad a \cdot b + a \cdot c = a \cdot (b+c).$$

Skup prirodnih brojeva označavamo slovom N, a zapisujemo

$$N = \{\,1,\ 2,\ 3,\ 4,\ 5,\ ...\ ,\ n-1,\ n,\ n+1,\ ...\,\}.$$

Cijeli brojevi jesu brojevi:

$$...,\ -5,\ -4,\ -3,\ -2,\ -1,\ 0,\ 1,\ 2,\ 3,\ 4,\ 5,\ ...$$

Oni čine skup cijelih brojeva koji označavamo slovom Z, a zapisujemo kao

$$Z = \{\,...,\ -3,\ -2,\ -1,\ 0,\ 1,\ 2,\ 3,\ ...\,\} \qquad \text{ili} \qquad Z = \{\,0,\ 1,\ -1,\ 2,\ -2,\ 3,\ -3,\ ...\,\}.$$

Za cijeli broj a kažemo da je **djeljiv s cijelim brojem** b (b ≠ 0) ako postoji cijeli broj q tako da vrijedi

$$a = q \cdot b.$$

Broj q zovemo **količnikom** brojeva a i b i pišemo

$$\frac{a}{b} = q \quad \text{ili} \quad a : b = q.$$

Teorem

Svaki se cijeli broj a za neki prirodni broj b može prikazati u jednom od oblika:

$$a = b \cdot q,$$
$$a = b \cdot q + 1,$$
$$a = b \cdot q + 2,$$
$$a = b \cdot q + 3,$$
$$\ldots$$
$$a = b \cdot q + (b - 1).$$

Dakle, skup Z dijeli se na podskupove u kojima su brojevi što pri dijeljenju s b redom daju ostatke:

$$0,\ 1,\ 2,\ 3,\ \ldots,\ b - 1.$$

Primijetimo da se svi cijeli brojevi a koji nisu djeljivi s 3 mogu prikazati u jednom od oblika:

- $a = 3 \cdot q + 1\ ,\ q \in Z$
- $a = 3 \cdot q + 2\ ,\ q \in Z.$

Ako je $a = 3 \cdot q + 1$, slijedi:

$$a^2 - 1 = (3 \cdot q + 1)^2 - 1 = (3 \cdot q + 1 - 1) \cdot (3 \cdot q + 1 + 1) = (3 \cdot q + 1 - 1) \cdot (3 \cdot q + 2) = 3 \cdot q \cdot (3 \cdot q + 2) =$$
$$= 3 \cdot q \cdot (3 \cdot q + 2).$$

Zaključak:

$$a^2 - 1 \text{ djeljiv je s } 3.$$

Ako je $a = 3 \cdot q + 2$, slijedi:

$$a^2 - 1 = (3 \cdot q + 2)^2 - 1 = (3 \cdot q + 2 - 1) \cdot (3 \cdot q + 2 + 1) = (3 \cdot q + 1) \cdot (3 \cdot q + 3) = (3 \cdot q + 1) \cdot 3 \cdot (q + 1) =$$
$$= 3 \cdot (3 \cdot q + 1) \cdot (q + 1).$$

Zaključak:

$$a^2 - 1 \text{ djeljiv je s } 3.$$

Time smo tvrdnju dokazali.

Vježba 454

Odmor!

Rezultat: …

Zadatak 455 (Blek, srednja škola)

Izračunati: $\left(-\left(-\left(-1^2\right)\right)^3\right)^5.$

Rješenje 455

Ponovimo!

$$(-a)^{2 \cdot n - 1} = -a^{2 \cdot n - 1}.$$

Skup prirodnih brojeva označavamo slovom N, a zapisujemo

$$N = \{1,\ 2,\ 3,\ 4,\ 5,\ \ldots,\ n - 1,\ n,\ n + 1,\ \ldots\}.$$

Prirodni brojevi dijele se na parne i neparne brojeve. Parni brojevi su oni brojevi koji su djeljivi sa 2, a neparni su oni koji nisu djeljivi sa 2.

Da je neki prirodan broj m neparan znači da se može napisati u obliku

$$m = 2 \cdot (\text{neki prirodan broj}) - 1 \quad , \quad m = 2 \cdot k - 1\ ,\ k \in N.$$

$$\left(-\left(-\left(-1^2\right)\right)^3\right)^5 = \left(-\left(-(-1)\right)^3\right)^5 = \left(-(+1)^3\right)^5 = (-1)^5 = -1.$$

Vježba 455

Izračunati: $\left(-\left(-\left(-1^{2}\right)\right)^{3}\right)^{7}$.

Rezultat: -1.

Zadatak 456 (Pascal, gimnazija)

Dokažite sljedeće nejednakosti za a > 0 i b > 0:

1) $\sqrt{a\cdot b}\ge\dfrac{2}{\dfrac{1}{a}+\dfrac{1}{b}}$

2) $\dfrac{a+b}{2}\ge\dfrac{2}{\dfrac{1}{a}+\dfrac{1}{b}}$

3) $\dfrac{a+b}{2}\ge\sqrt{a\cdot b}$

4) $\sqrt{\dfrac{a^{2}+b^{2}}{2}}\ge\sqrt{a\cdot b}$

5) $\sqrt{\dfrac{a^{2}+b^{2}}{2}}\ge\dfrac{a+b}{2}$

Rješenje 456

Ponovimo!

$$n=\frac{n}{1}\quad,\quad\frac{a}{b}+\frac{c}{d}=\frac{a\cdot d+b\cdot c}{b\cdot d}\quad,\quad\frac{\frac{a}{b}}{\frac{c}{d}}=\frac{a\cdot d}{b\cdot c}\quad,\quad\left(\sqrt{a}\right)^{2}=a\quad,\quad a\ge b\ ,\ c>\ \Rightarrow\ a\cdot c\ge b\cdot c.$$

$$\sqrt{a\cdot b}=\sqrt{a}\cdot\sqrt{b}\quad,\quad a^{2}-2\cdot a\cdot b+b^{2}=\left(a-b\right)^{2}\quad,\quad a^{2}\ge 0\ ,\ a\in R\quad,\quad a^{1}=a.$$

$$\left(a+b\right)^{2}a^{2}+2\cdot a\cdot b+b^{2}\quad,\quad a\ge b>0\ \Rightarrow\ a^{2}\ge b^{2}\quad,\quad\frac{a^{n}}{a^{m}}=a^{n-m}\quad,\quad\left(\frac{a}{b}\right)^{n}=\frac{a^{n}}{b^{n}}.$$

Zakon distribucije množenja prema zbrajanju.

$$a\cdot\left(b+c\right)=a\cdot b+a\cdot c\quad,\quad a\cdot b+a\cdot c=a\cdot\left(b+c\right).$$

1)

$$\sqrt{a\cdot b}\ge\frac{2}{\frac{1}{a}+\frac{1}{b}}\ \Rightarrow\ \sqrt{a\cdot b}\ge\frac{\frac{2}{1}}{\frac{b+a}{a\cdot b}}\ \Rightarrow\ \sqrt{a\cdot b}\ge\frac{2\cdot a\cdot b}{a+b}\ \Rightarrow\ \sqrt{a\cdot b}\ge\frac{2\cdot\left(\sqrt{a\cdot b}\right)^{2}}{a+b}\ \Rightarrow$$

$$\Rightarrow\ \sqrt{a\cdot b}\ge\frac{2\cdot\left(\sqrt{a\cdot b}\right)^{2}}{a+b}\ /\cdot\frac{a+b}{\sqrt{a\cdot b}}\ \Rightarrow\ a+b\ge 2\cdot\sqrt{a\cdot b}\ \Rightarrow\ a-2\cdot\sqrt{a\cdot b}+b\ge 0\ \Rightarrow$$

$$\Rightarrow\ \left(\sqrt{a}\right)^{2}-2\cdot\sqrt{a}\cdot\sqrt{b}+\left(\sqrt{b}\right)^{2}\ge 0\ \Rightarrow\ \left(\sqrt{a}-\sqrt{b}\right)^{2}\ge 0.$$

2)

$$\frac{a+b}{2}\ge\frac{2}{\frac{1}{a}+\frac{1}{b}} \Rightarrow \frac{a+b}{2}\ge\frac{\frac{2}{1}}{\frac{b+a}{a\cdot b}} \Rightarrow \frac{a+b}{2}\ge\frac{2\cdot a\cdot b}{a+b} \Rightarrow \frac{a+b}{2}\ge\frac{2\cdot a\cdot b}{a+b}\ /\cdot 2\cdot(a+b) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow (a+b)^2\ge 4\cdot a\cdot b \Rightarrow a^2+2\cdot a\cdot b+b^2\ge 4\cdot a\cdot b \Rightarrow a^2+2\cdot a\cdot b+b^2-4\cdot a\cdot b\ge 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow a^2-2\cdot a\cdot b+b^2\ge 0 \Rightarrow (a-b)^2\ge 0.$$

3)

$$\frac{a+b}{2}\ge\sqrt{a\cdot b} \Rightarrow \frac{a+b}{2}\ge\sqrt{a\cdot b}\ /\cdot 2 \Rightarrow a+b\ge 2\cdot\sqrt{a\cdot b} \Rightarrow a-2\cdot\sqrt{a\cdot b}+b\ge 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \left(\sqrt{a}\right)^2-2\cdot\sqrt{a}\cdot\sqrt{b}+\left(\sqrt{b}\right)^2\ge 0 \Rightarrow \left(\sqrt{a}-\sqrt{b}\right)^2\ge 0.$$

4)

$$\sqrt{\frac{a^2+b^2}{2}}\ge\sqrt{a\cdot b} \Rightarrow \sqrt{\frac{a^2+b^2}{2}}\ge\sqrt{a\cdot b}\ /^2 \Rightarrow \left(\sqrt{\frac{a^2+b^2}{2}}\right)^2\ge\left(\sqrt{a\cdot b}\right)^2 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \frac{a^2+b^2}{2}\ge a\cdot b \Rightarrow \frac{a^2+b^2}{2}\ge a\cdot b\ /\cdot 2 \Rightarrow a^2+b^2\ge 2\cdot a\cdot b \Rightarrow a^2-2\cdot a\cdot b+b^2\ge 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow (a-b)^2\ge 0.$$

5)

$$\sqrt{\frac{a^2+b^2}{2}}\ge\frac{a+b}{2} \Rightarrow \sqrt{\frac{a^2+b^2}{2}}\ge\frac{a+b}{2}\ /^2 \Rightarrow \left(\sqrt{\frac{a^2+b^2}{2}}\right)^2\ge\left(\frac{a+b}{2}\right)^2 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \frac{a^2+b^2}{2}\ge\frac{(a+b)^2}{2^2} \Rightarrow \frac{a^2+b^2}{2}\ge\frac{a^2+2\cdot a\cdot b+b^2}{4} \Rightarrow \frac{a^2+b^2}{2}\ge\frac{a^2+2\cdot a\cdot b+b^2}{4}\ /\cdot 4 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 2\cdot\left(a^2+b^2\right)\ge a^2+2\cdot a\cdot b+b^2 \Rightarrow 2\cdot a^2+2\cdot b^2\ge a^2+2\cdot a\cdot b+b^2 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 2\cdot a^2+2\cdot b^2-a^2-2\cdot a\cdot b-b^2\ge 0 \Rightarrow a^2-2\cdot a\cdot b+b^2\ge 0 \Rightarrow (a-b)^2\ge 0.$$

Znak jednakosti vrijedi za a = b.

Vježba 456

Odmor!

Rezultat: …

Zadatak 457 (Lucy, gimnazija)

Odredi tri uzastopna prirodna broja čiji je zbroj 84.

Rješenje 457

Ponovimo!

Skup prirodnih brojeva označavamo slovom N, a zapisujemo

$$N=\{1,\ 2,\ 3,\ 4,\ 5,\ \ldots\ ,\ n-1,\ n,\ n+1,\ \ldots\}.$$

Prethodnik prirodnog broja n, n ≠ 1, je prirodan broj n – 1.
Sljedbenik prirodnog broja n je prirodan broj n + 1.
Zakon distribucije množenja prema zbrajanju.

$$a\cdot(b+c)=a\cdot b+a\cdot c \quad , \quad a\cdot b+a\cdot c=a\cdot(b+c).$$

1.inačica

$$n+(n+1)+(n+2)=84 \Rightarrow n+n+1+n+2=84 \Rightarrow n+n+n=84-1-2 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 3\cdot n=81 \Rightarrow 3\cdot n=81 \;/:3 \Rightarrow n=27.$$

Brojevi su:

$$n,\ n+1,\ n+2 \Rightarrow [n=27] \Rightarrow 27,\ 27+1,\ 27+2 \Rightarrow 27,\ 28,\ 29.$$

2.inačica

$$(n-1)+n+(n+1)=84 \Rightarrow n-1+n+n+1=84 \Rightarrow n-1+n+n+1=84 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow n+n+n=84 \Rightarrow 3\cdot n=84 \Rightarrow 3\cdot n=84 \;/:3 \Rightarrow n=28.$$

Brojevi su:

$$n-1,\ n,\ n+1 \Rightarrow [n=28] \Rightarrow 28-1,\ 28,\ 28+1 \Rightarrow 27,\ 28,\ 29.$$

3.inačica

Budući da je neparan broj traženih uzastopnih prirodnih brojeva (tri su broja), srednji broj glasi:

$$84:3=28.$$

Brojevi su:

$$27,\ 28,\ 29.$$

Vježba 457

Odredi tri uzastopna prirodna broja čiji je zbroj 96.

Rezultat: 31, 32, 33.

Zadatak 458 (Lucy, gimnazija)

Odredi tri uzastopna parna prirodna broja čiji je zbroj 72.

Rješenje 458

Ponovimo!

Skup prirodnih brojeva označavamo slovom N, a zapisujemo

$$N=\{1,\ 2,\ 3,\ 4,\ 5,\ \ldots,\ n-1,\ n,\ n+1,\ \ldots\}.$$

Prirodni brojevi dijele se na parne i neparne brojeve. Parni brojevi su oni brojevi koji su djeljivi sa 2, a neparni su oni koji nisu djeljivi sa 2.
Da je neki prirodan broj m paran znači da se može napisati u obliku

$$m=2\cdot(\text{neki prirodan broj}) \quad , \quad m=2\cdot k \ ,\ k\in N.$$

Dva susjedna parna broja razlikuju se za 2.
Zakon distribucije množenja prema zbrajanju.

$$a\cdot(b+c)=a\cdot b+a\cdot c \quad , \quad a\cdot b+a\cdot c=a\cdot(b+c).$$

1.inačica

$$2\cdot n+(2\cdot n+2)+(2\cdot n+4)=72 \Rightarrow 2\cdot n+2\cdot n+2+2\cdot n+4=72 \Rightarrow 2\cdot n+2\cdot n+2\cdot n=72-2-4 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 6\cdot n=66 \Rightarrow 6\cdot n=66 \;/:6 \Rightarrow n=11.$$

Brojevi su:

$$2\cdot n,\ 2\cdot n+2,\ 2\cdot n+4 \Rightarrow [n=11] \Rightarrow 2\cdot 11,\ 2\cdot 11+2,\ 2\cdot 11+4 \Rightarrow 22,\ 24,\ 26.$$

2.inačica

$$(2\cdot n-2)+2\cdot n+(2\cdot n+2)=72 \Rightarrow 2\cdot n-2+2\cdot n+2\cdot n+2=72 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 2\cdot n-2+2\cdot n+2\cdot n+2=72 \Rightarrow 2\cdot n+2\cdot n+2\cdot n=72 \Rightarrow 6\cdot n=72 \Rightarrow 6\cdot n=72 \;/:6 \Rightarrow n=12.$$

Brojevi su:

$$2\cdot n-2,\ 2\cdot n,\ 2\cdot n+2 \Rightarrow [n=12] \Rightarrow 2\cdot 12-2,\ 2\cdot 12,\ 2\cdot 12+2 \Rightarrow 22,\ 24,\ 26.$$

3.inačica

Budući da je neparan broj traženih uzastopnih parnih prirodnih brojeva (tri su broja), srednji broj glasi:

$$72:3=24.$$

Brojevi su:

$$22,\ 24,\ 26.$$

Vježba 458

Odredi tri uzastopna parna prirodna broja čiji je zbroj 96.

Rezultat: 30, 32, 34.

Zadatak 459 (Đurđica, srednja škola)

Izračunaj $\frac{a+b}{a-b}$ ako je $\frac{a}{a+b}=\frac{1}{3}.$

Rješenje 459

Ponovimo!

$$\frac{n}{1}=n.$$

Skratiti razlomak znači brojnik i nazivnik tog razlomka podijeliti istim brojem različitim od nule i jedinice

$$\frac{a\cdot n}{b\cdot n}=\frac{a}{b}\ ,\ n\neq 0\ ,\ n\neq 1.$$

Preoblikujemo zadanu jednakost.

$$\frac{a}{a+b}=\frac{1}{3}\ \Rightarrow\ \frac{a}{a+b}=\frac{1}{3}\ /\cdot 3\cdot(a+b)\ \Rightarrow\ 3\cdot a=a+b\ \Rightarrow\ 3\cdot a-a=b\ \Rightarrow\ 2\cdot a=b\ \Rightarrow\ b=2\cdot a.$$

Sada je:

$$\frac{a+b}{a-b}=\left[b=2\cdot a\right]=\frac{a+2\cdot a}{a-2\cdot a}=\frac{3\cdot a}{-a}=\frac{3\cdot a}{-a}=-\frac{3}{1}=-3.$$

Vježba 459

Izračunaj $\frac{a-b}{a+b}$ ako je $\frac{a}{a+b}=\frac{1}{3}.$

Rezultat: $-\frac{1}{3}.$

Zadatak 460 (Đurđica, srednja škola)

Izračunaj vrijednost brojevnog izraza $\left(\frac{1}{a}-\frac{1}{b}\right):\frac{a+b}{a\cdot b}$ za $a=2,\ b=3.$

Rješenje 460

Ponovimo!

$$\frac{a}{b}-\frac{c}{d}=\frac{a\cdot d-b\cdot c}{b\cdot d}\quad,\quad\frac{a}{b}\cdot\frac{c}{d}=\frac{a\cdot c}{b\cdot d}\quad,\quad\frac{a}{b}:\frac{c}{d}=\frac{a}{b}\cdot\frac{d}{c}=\frac{a\cdot d}{b\cdot c}.$$

Skratiti razlomak znači brojnik i nazivnik tog razlomka podijeliti istim brojem različitim od nule i jedinice

$$\frac{a\cdot n}{b\cdot n}=\frac{a}{b}\ ,\ n\neq 0\ ,\ n\neq 1.$$

1.inačica

$$\left(\frac{1}{a}-\frac{1}{b}\right):\frac{a+b}{a\cdot b}=\begin{bmatrix}a=2\\ b=3\end{bmatrix}=\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{3}\right):\frac{2+3}{2\cdot 3}=\frac{3-2}{6}:\frac{5}{6}=\frac{1}{6}:\frac{5}{6}=\frac{1}{6}\cdot\frac{6}{5}=\frac{1}{6}\cdot\frac{6}{5}=\frac{1}{1}\cdot\frac{1}{5}=\frac{1}{5}.$$

2.inačica

$$\left(\frac{1}{a}-\frac{1}{b}\right):\frac{a+b}{a\cdot b}=\frac{b-a}{a\cdot b}:\frac{a+b}{a\cdot b}=\frac{b-a}{a\cdot b}\cdot\frac{a\cdot b}{a+b}=\frac{b-a}{a\cdot b}\cdot\frac{a\cdot b}{a+b}=\frac{b-a}{1}\cdot\frac{1}{a+b}=\frac{b-a}{a+b}=\begin{bmatrix}a=2\\ b=3\end{bmatrix}=$$

$$= \frac{3-2}{2+3} = \frac{1}{5}.$$

Vježba 460

Izračunaj vrijednost brojevnog izraza $\frac{a+b}{a \cdot b} : \left(\frac{1}{a} - \frac{1}{b} \right)$ za $a = 2,\ b = 3.$

Rezultat: 5.