Zadatak 421 (Miroslav, gimnazija)

Prosjek starosti 11 igrača u nekoj nogometnoj momčadi je 22 godine. Za vrijeme igre jedan igrač, zbog povrede, načas napusti teren pa je prosjek godina igrača koji ostanu u igri 21 godina. Koliko godina ima igrač koji je napustio igru?

Rješenje 421

Ponovimo!

Skup prirodnih brojeva označavamo slovom N, a zapisujemo

$$N = \{1,\ 2,\ 3,\ 4,\ 5,\ \dots,\ n-1,\ n,\ n+1,\ \dots\}.$$

Neka je dan skup n pozitivnih brojeva $\{a_1,\ a_2,\ a_3,\ \dots,\ a_n\}$. Tada je aritmetička sredina A_n brojeva a_1, a_2, a_3, … , a_n definirana izrazom

$$A_n = \frac{a_1 + a_2 + a_3 + \dots + a_n}{n}.$$

Zakon distribucije množenja prema zbrajanju.

$$a \cdot (b + c) = a \cdot b + a \cdot c \quad , \quad a \cdot b + a \cdot c = a \cdot (b + c).$$

Kako zapisati da je broj b za n veći od broja a?

$$b = a + n \quad , \quad b - n = a \quad , \quad b - a = n.$$

1.inačica

Neka je n zbroj godina starosti svih 11 igrača. Tada je

$$\frac{n}{11} = 22 \;\Rightarrow\; \frac{n}{11} = 22 \;/\cdot 11 \;\Rightarrow\; n = 242.$$

Neka je x broj godina igrača koji je napustio igru. Vrijedi jednadžba:

$$\frac{242 - x}{10} = 21 \;\Rightarrow\; \frac{242 - x}{10} = 21 \;/\cdot 10 \;\Rightarrow\; 242 - x = 210 \;\Rightarrow\; -x = 210 - 242 \;\Rightarrow$$

$$\Rightarrow\; -x = -32 \;\Rightarrow\; -x = -32 \;/\cdot (-1) \;\Rightarrow\; x = 32.$$

2.inačica

Prosjek starosti u momčadi, sa svim igračima, je 22 godine. Budući da se prosjek godina starosti, igrača ostalih u igri, smanji za 1 godinu (22 – 21), znači da se ukupan zbroj godina smanjio za još 10 godina. Ukupan zbroj godina smanjio se za 32 godine.

$$22 + 10 = 32.$$

Igrač koji je napustio igru ima 32 godine.

3.inačica

Zbroj godina starosti svih 11 igrača iznosi

$$22 \cdot 11 = 242.$$

Neka je x broj godina igrača koji je napustio igru. Sada je prosjek godina starosti 21 godina, dakle, za 1 godinu manje od prijašnjeg prosjeka koji je iznosio 22 godine. Vrijedi jednadžba:

$$\frac{242}{11} = \frac{242 - x}{10} + 1 \;\Rightarrow\; \frac{242}{11} = \frac{242 - x}{10} + 1 \;/\cdot 110 \;\Rightarrow\; 2\,420 = 11 \cdot (242 - x) + 110 \;\Rightarrow$$

$$\Rightarrow\; 2\,420 = 2\,662 - 11 \cdot x + 110 \;\Rightarrow\; 11 \cdot x = 2\,662 + 110 - 2420 \;\Rightarrow\; 11 \cdot x = 352 \;\Rightarrow$$

$$\Rightarrow\; 11 \cdot x = 352 \;/ : 11 \;\Rightarrow\; x = 32.$$

4.inačica

Stanete uz rub igrališta i kada igrač napusti teren ljubazno ga upitate za njegove godine. (Šala mala!)

Vježba 421

Prosjek starosti 11 igrača u nekoj nogometnoj momčadi je 23 godine. Za vrijeme igre jedan igrač, zbog povrede, načas napusti teren pa je prosjek godina igrača koji ostanu u igri 21 godina. Koliko godina ima igrač koji je napustio igru?

Rezultat: 43.

Zadatak 422 (Fox, gimnazija)

Uz koje uvjete je razlomak $\frac{a+1}{b+1}$ jednak razlomku $\frac{a-1}{b-1}$?

Rješenje 422

Ponovimo!

$$\frac{a}{b}=\frac{c}{d} \Rightarrow a\cdot d=b\cdot c.$$

Množenje zagrada

$$(a+b)\cdot(c+d)=a\cdot c+a\cdot d+b\cdot c+b\cdot d.$$

Rasprava

S nulom se ne može dijeliti. Zato moramo odbaciti vrijednost nepoznanice x za koju je nazivnik jednak nuli.

Najprije raspravimo!

Budući da se s nulom ne može dijeliti, nazivnici b + 1 i b – 1 moraju biti različiti od nule. Zato je:

$$\left.\begin{array}{l} b+1\neq 0 \Rightarrow b\neq -1 \\ b-1\neq 0 \Rightarrow b\neq 1 \end{array}\right\}.$$

Dalje slijedi:

$$\frac{a+1}{b+1}=\frac{a-1}{b-1} \Rightarrow \frac{a+1}{b+1}=\frac{a-1}{b-1} \;/\cdot(b+1)\cdot(b-1) \Rightarrow (a+1)\cdot(b-1)=(a-1)\cdot(b+1) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow a\cdot b-a+b-1=a\cdot b+a-b-1 \Rightarrow a\cdot b-a+b-1=a\cdot b+a-b-1 \Rightarrow -a+b=a-b \Rightarrow$$

$$\Rightarrow -a-a=-b-b \Rightarrow -2\cdot a=-2\cdot b \Rightarrow -2\cdot a=-2\cdot b \;/:(-2) \Rightarrow a=b.$$

Također mora biti $a\neq -1$ i $a\neq 1$.

Vježba 422

Uz koje uvjete je razlomak $\frac{a+2}{b+2}$ jednak razlomku $\frac{a-2}{b-2}$?

Rezultat: $a=b$, $a\neq -2$, $a\neq 2$.

Zadatak 423 (Sandra, gimnazija)

Odredi cijele brojeve x i y za koje vrijedi jednakost $\frac{5}{x}=\frac{y}{3}$.

Rješenje 423

Ponovimo!

$$\frac{a}{b}=\frac{c}{d} \Rightarrow a\cdot d=b\cdot c.$$

Cijeli brojevi jesu brojevi:

$$\ldots, -5, -4, -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, 4, 5, \ldots$$

Oni čine skup cijelih brojeva koji označavamo slovom Z, a zapisujemo kao

$Z=\{\ldots, -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, \ldots\}$ ili $Z=\{0, 1, -1, 2, -2, 3, -3, \ldots\}$.

$$\frac{5}{x}=\frac{y}{3} \Rightarrow \frac{5}{x}=\frac{y}{3} \;/\cdot 3\cdot x \Rightarrow 15=x\cdot y \Rightarrow x\cdot y=15.$$

Budući da x i y moraju biti cijeli brojevi, postoje ova rješenja:

- $x\cdot y=15 \Rightarrow \left.\begin{array}{l} x=-1 \\ y=-15 \end{array}\right\}$
- $x\cdot y=15 \Rightarrow \left.\begin{array}{l} x=-3 \\ y=-5 \end{array}\right\}$

- $x \cdot y = 15 \Rightarrow \left.\begin{array}{l} x = -5 \\ y = -3 \end{array}\right\}$
- $x \cdot y = 15 \Rightarrow \left.\begin{array}{l} x = -15 \\ y = -1 \end{array}\right\}$
- $x \cdot y = 15 \Rightarrow \left.\begin{array}{l} x = 1 \\ y = 15 \end{array}\right\}$
- $x \cdot y = 15 \Rightarrow \left.\begin{array}{l} x = 3 \\ y = 5 \end{array}\right\}$
- $x \cdot y = 15 \Rightarrow \left.\begin{array}{l} x = 5 \\ y = 3 \end{array}\right\}$
- $x \cdot y = 15 \Rightarrow \left.\begin{array}{l} x = 15 \\ y = 1 \end{array}\right\}.$

Vježba 423

Odredi cijele brojeve x i y za koje vrijedi jednakost $\frac{x}{2} = \frac{1}{y}$.

Rezultat: $\left.\begin{array}{l} x = 1 \\ y = 2 \end{array}\right\}, \left.\begin{array}{l} x = 2 \\ y = 1 \end{array}\right\}, \left.\begin{array}{l} x = -1 \\ y = -2 \end{array}\right\}, \left.\begin{array}{l} x = -2 \\ y = -1 \end{array}\right\}.$

Zadatak 424 (Fox, gimnazija)

Što je veće: $\sqrt{1993 \cdot 1995}$ ili 1994?

Rješenje 424

Ponovimo!

$$(a-b) \cdot (a+b) = a^2 - b^2 \quad , \quad \sqrt{a^2} = a \ , \ a \geq 0 \quad , \quad \sqrt{a-1} < \sqrt{a}.$$

Preoblikujemo umnožak pod korijenom u razliku kvadrata.

$$\sqrt{1993 \cdot 1995} = \sqrt{(1994-1) \cdot (1994+1)} = \sqrt{1994^2 - 1} < \sqrt{1994^2} = 1994.$$

Vrijedi:

$$\sqrt{1993 \cdot 1995} < 1994.$$

Vježba 424

Što je veće: $\sqrt{2016 \cdot 2018}$ ili 2017?

Rezultat: $\sqrt{2016 \cdot 2018} < 2017.$

Zadatak 425 (Lana, gimnazija)

Dokažite da je $\frac{a+b}{a-b}$ iracionalan broj, ako je $a > 0$ i $b > 0$ i $a^2 + b^2 = 6 \cdot a \cdot b$.

Rješenje 425

Ponovimo!

$$\left(\frac{a}{b}\right)^n = \frac{a^n}{b^n} \quad , \quad (a+b)^2 = a^2 + 2 \cdot a \cdot b + b^2 \quad , \quad (a-b)^2 = a^2 - 2 \cdot a \cdot b + b^2.$$

Iracionalni brojevi su brojevi koje ne možemo zapisati u obliku razlomaka. Skup iracionalnih brojeva označavamo slovom I. Algebarski iracionalni brojevi su:

$$\sqrt{2},\ \sqrt{3},\ \sqrt{5},\ \sqrt{7},\ \ldots$$

Skratiti razlomak znači brojnik i nazivnik tog razlomka podijeliti istim brojem različitim od nule i jedinice

$$\frac{a\cdot n}{b\cdot n}=\frac{a}{b}\ ,\ n\neq 0\ ,\ n\neq 1.$$

Neka je

$$x=\frac{a+b}{a-b}.$$

Dalje slijedi:

$$x=\frac{a+b}{a-b}\Rightarrow\left[\begin{array}{c}\text{kvadriramo}\\ \text{jednakost}\end{array}\right]\Rightarrow x=\frac{a+b}{a-b}\ /^2\Rightarrow x^2=\left(\frac{a+b}{a-b}\right)^2\Rightarrow x^2=\frac{(a+b)^2}{(a-b)^2}\Rightarrow$$

$$\Rightarrow x^2=\frac{a^2+2\cdot a\cdot b+b^2}{a^2-2\cdot a\cdot b+b^2}\Rightarrow\left[\begin{array}{c}\text{uvjet}\\ a^2+b^2=6\cdot a\cdot b\end{array}\right]\Rightarrow x^2=\frac{6\cdot a\cdot b+2\cdot a\cdot b}{6\cdot a\cdot b-2\cdot a\cdot b}\Rightarrow x^2=\frac{8\cdot a\cdot b}{4\cdot a\cdot b}\Rightarrow$$

$$\Rightarrow x^2=\frac{8\cdot a\cdot b}{4\cdot a\cdot b}\Rightarrow x^2=2\Rightarrow x^2=2\ /\sqrt{\ }\Rightarrow x=\sqrt{2}\Rightarrow\frac{a+b}{a-b}=\sqrt{2}\in I.$$

Vježba 425

Dokažite da je $\frac{a+b}{a-b}$ iracionalan broj, ako je $a>0$ i $b>0$ i $a^2+b^2-6\cdot a\cdot b=0$.

Rezultat: Dokaz analogan.

Zadatak 426 (Dora, gimnazija)

Izračunajte na najlakši mogući način (bez računala): $10101\cdot\left(\frac{5}{111111}+\frac{5}{222\,222}-\frac{4}{3\cdot 7\cdot 11\cdot 13\cdot 37}\right)$.

Rješenje 426

Ponovimo!

$$a\cdot\frac{b}{c}=\frac{a\cdot b}{c}\quad,\quad\frac{a}{b}+\frac{c}{d}=\frac{a\cdot d+b\cdot c}{b\cdot d}\quad,\quad\frac{a}{b}-\frac{c}{d}=\frac{a\cdot d-b\cdot c}{b\cdot d}.$$

Zakon distribucije množenja prema zbrajanju.

$$a\cdot(b+c)=a\cdot b+a\cdot c\quad,\quad a\cdot b+a\cdot c=a\cdot(b+c).$$

Skratiti razlomak znači brojnik i nazivnik tog razlomka podijeliti istim brojem različitim od nule i jedinice

$$\frac{a\cdot n}{b\cdot n}=\frac{a}{b}\ ,\ n\neq 0\ ,\ n\neq 1.$$

$$10101\cdot\left(\frac{5}{111111}+\frac{5}{222\,222}-\frac{4}{3\cdot 7\cdot 11\cdot 13\cdot 37}\right)=\frac{50\,505}{111111}+\frac{50\,505}{222\,222}-\frac{40\,404}{3\cdot 7\cdot 11\cdot 13\cdot 37}=$$

$$=\frac{50\,505}{111111}+\frac{50\,505}{222\,222}-\frac{40\,404}{111111}=\left[\begin{array}{l}\text{svaki razlomak}\\ \text{kratimo sa }10101\end{array}\right]=\frac{5}{11}+\frac{5}{22}-\frac{4}{3\cdot 7\cdot 11\cdot 13\cdot 37}=$$

$$=\frac{5}{11}+\frac{5}{22}-\frac{4}{11}=\frac{10+5-8}{22}=\frac{7}{22}.$$

Vježba 426

Izračunajte na najlakši mogući način (bez računala): $10101\cdot\left(\frac{5}{111111}+\frac{2.5}{111111}-\frac{4}{3\cdot 7\cdot 11\cdot 13\cdot 37}\right)$.

Rezultat: $\frac{7}{22}$.

Zadatak 427 (Dora, gimnazija)

Izračunajte na najlakši mogući način (bez računala): $\frac{254\cdot399-145}{254+399\cdot253}$.

Rješenje 427

Ponovimo!

Zakon distribucije množenja prema zbrajanju.

$$a\cdot(b+c)=a\cdot b+a\cdot c \quad , \quad a\cdot b+a\cdot c=a\cdot(b+c).$$

Skratiti razlomak znači brojnik i nazivnik tog razlomka podijeliti istim brojem različitim od nule i jedinice

$$\frac{a\cdot n}{b\cdot n}=\frac{a}{b} \; , \; n\neq0 \; , \; n\neq1.$$

$$\frac{254\cdot399-145}{254+399\cdot253}=\frac{254\cdot399-399+399-145}{254+399\cdot253}=\frac{254\cdot399-399+(399-145)}{254+399\cdot253}=$$

$$=\frac{254\cdot399-399+254}{254+399\cdot253}=\frac{253\cdot399+254}{254+399\cdot253}=\frac{254+399\cdot253}{254+399\cdot253}=\frac{254+399\cdot253}{254+399\cdot253}=1.$$

Vježba 427

Izračunajte na najlakši mogući način (bez računala): $\frac{254+399\cdot253}{254\cdot399-145}$.

Rezultat: 1.

Zadatak 428 (Dora, gimnazija)

Izračunajte na najlakši mogući način (bez računala): $\left(1-\frac{1}{4}\right)\cdot\left(1-\frac{1}{9}\right)\cdot\ldots\cdot\left(1-\frac{1}{81}\right)\cdot\left(1-\frac{1}{100}\right)$.

Rješenje 428

Ponovimo!

$$n=\frac{n}{1} \quad , \quad \frac{a}{b}-\frac{c}{d}=\frac{a\cdot d-b\cdot c}{b\cdot d} \quad , \quad a^2-b^2=(a-b)\cdot(a+b) \quad , \quad \frac{a}{b}\cdot\frac{c}{d}=\frac{a\cdot c}{b\cdot d}.$$

Skratiti razlomak znači brojnik i nazivnik tog razlomka podijeliti istim brojem različitim od nule i jedinice

$$\frac{a\cdot n}{b\cdot n}=\frac{a}{b} \; , \; n\neq0 \; , \; n\neq1.$$

Uočimo:

- $1-\frac{1}{4}=\frac{1}{1}-\frac{1}{4}=\frac{4-1}{4}=\frac{2^2-1}{2^2}=\frac{2-1}{2}\cdot\frac{2+1}{2}=\frac{1}{2}\cdot\frac{3}{2}$
- $1-\frac{1}{9}=\frac{1}{1}-\frac{1}{9}=\frac{9-1}{9}=\frac{3^2-1}{3^2}=\frac{3-1}{3}\cdot\frac{3+1}{3}=\frac{2}{3}\cdot\frac{4}{3}$
- $1-\frac{1}{16}=\frac{1}{1}-\frac{1}{16}=\frac{16-1}{16}=\frac{4^2-1}{4^2}=\frac{4-1}{4}\cdot\frac{4+1}{4}=\frac{3}{4}\cdot\frac{5}{4}$
- $1-\frac{1}{25}=\frac{1}{1}-\frac{1}{25}=\frac{25-1}{25}=\frac{5^2-1}{5^2}=\frac{5-1}{5}\cdot\frac{5+1}{5}=\frac{4}{5}\cdot\frac{6}{5}$
- $1-\frac{1}{36}=\frac{1}{1}-\frac{1}{36}=\frac{36-1}{36}=\frac{6^2-1}{6^2}=\frac{6-1}{6}\cdot\frac{6+1}{6}=\frac{5}{6}\cdot\frac{7}{6}$

- $1-\frac{1}{49}=\frac{1}{1}-\frac{1}{49}=\frac{49-1}{49}=\frac{7^2-1}{7^2}=\frac{7-1}{7}\cdot\frac{7+1}{7}=\frac{6}{7}\cdot\frac{8}{7}$
- $1-\frac{1}{64}=\frac{1}{1}-\frac{1}{64}=\frac{64-1}{64}=\frac{8^2-1}{8^2}=\frac{8-1}{8}\cdot\frac{8+1}{8}=\frac{7}{8}\cdot\frac{9}{8}$
- $1-\frac{1}{81}=\frac{1}{1}-\frac{1}{81}=\frac{81-1}{81}=\frac{9^2-1}{9^2}=\frac{9-1}{9}\cdot\frac{9+1}{9}=\frac{8}{9}\cdot\frac{10}{9}$
- $1-\frac{1}{100}=\frac{1}{1}-\frac{1}{100}=\frac{100-1}{100}=\frac{10^2-1}{10^2}=\frac{10-1}{10}\cdot\frac{10+1}{10}=\frac{9}{10}\cdot\frac{11}{10}.$

Općenito!

$$1-\frac{1}{n^2}=\frac{1}{1}-\frac{1}{n^2}=\frac{n^2-1}{n^2}=\frac{n-1}{n}\cdot\frac{n+1}{n}.$$

Sada je:

$$\left(1-\frac{1}{4}\right)\cdot\left(1-\frac{1}{9}\right)\cdot\ ...\ \cdot\left(1-\frac{1}{81}\right)\cdot\left(1-\frac{1}{100}\right)=$$

$$=\frac{1}{2}\cdot\frac{3}{2}\cdot\frac{2}{3}\cdot\frac{4}{3}\cdot\ ...\ \cdot\frac{8}{9}\cdot\frac{10}{9}\cdot\frac{9}{10}\cdot\frac{11}{10}=\frac{1}{2}\cdot\frac{3}{2}\cdot\frac{2}{3}\cdot\frac{4}{3}\cdot\ ...\ \cdot\frac{8}{9}\cdot\frac{10}{9}\cdot\frac{9}{10}\cdot\frac{11}{10}=\frac{1}{2}\cdot\frac{11}{10}=\frac{11}{20}.$$

Vježba 428

Izračunajte na najlakši mogući način (bez računala): $\frac{20}{11}\cdot\left(1-\frac{1}{4}\right)\cdot\left(1-\frac{1}{9}\right)\cdot\ ...\ \cdot\left(1-\frac{1}{81}\right)\cdot\left(1-\frac{1}{100}\right).$

Rezultat: 1.

Zadatak 429 (Petra, medicinska škola)

Pojednostavnite brojevni izraz: $\frac{1}{2}\cdot\sqrt{20}+\sqrt{80}+\frac{1}{3}\cdot\sqrt{45}.$

Rješenje 429

Ponovimo!

$$\sqrt{a\cdot b}=\sqrt{a}\cdot\sqrt{b}\quad,\quad\sqrt{a^2}=a\ ,\ a\geq 0.$$

Skratiti razlomak znači brojnik i nazivnik tog razlomka podijeliti istim brojem različitim od nule i jedinice

$$\frac{a\cdot n}{b\cdot n}=\frac{a}{b}\ ,\ n\neq 0\ ,\ n\neq 1.$$

Brojeve 20, 80 i 45 prikažemo u obliku umnoška dvaju faktora od kojih je jedan kvadrat prirodnog broja.

$$\frac{1}{2}\cdot\sqrt{20}+\sqrt{80}+\frac{1}{3}\cdot\sqrt{45}=\frac{1}{2}\cdot\sqrt{4\cdot 5}+\sqrt{16\cdot 5}+\frac{1}{3}\cdot\sqrt{9\cdot 5}=$$

$$=\frac{1}{2}\cdot\sqrt{4}\cdot\sqrt{5}+\sqrt{16}\cdot\sqrt{5}+\frac{1}{3}\cdot\sqrt{9}\cdot\sqrt{5}=\frac{1}{2}\cdot 2\cdot\sqrt{5}+4\cdot\sqrt{5}+\frac{1}{3}\cdot 3\cdot\sqrt{5}=$$

$$=\frac{1}{2}\cdot 2\cdot\sqrt{5}+4\cdot\sqrt{5}+\frac{1}{3}\cdot 3\cdot\sqrt{5}=\sqrt{5}+4\cdot\sqrt{5}+\sqrt{5}=6\cdot\sqrt{5}.$$

Vježba 429

Pojednostavnite brojevni izraz: $\sqrt{20}+\sqrt{80}+\sqrt{45}.$

Rezultat: $9\cdot\sqrt{5}.$

Zadatak 430 (4B, TUPŠ)

Nakon djelomičnog korjenovanja i obavljenih računskih operacija izraz

$$\frac{\left(\sqrt{50}+\sqrt{32}-2\cdot\sqrt{2}\right)\cdot\left(\sqrt{2}+\sqrt{8}\right)}{\sqrt{2}}$$ daje:

$A.\ 24\cdot\sqrt{2}$ $\quad B.\ 21\cdot\sqrt{2}$ $\quad C.\ 42$ $\quad D.\ 21$

Rješenje 430

Ponovimo!

$$\sqrt{a\cdot b}=\sqrt{a}\cdot\sqrt{b} \quad , \quad \frac{n}{1}=n.$$

Skratiti razlomak znači brojnik i nazivnik tog razlomka podijeliti istim brojem različitim od nule i jedinice

$$\frac{a\cdot n}{b\cdot n}=\frac{a}{b} \ , \ n\neq 0 \ , \ n\neq 1.$$

$$\frac{\left(\sqrt{50}+\sqrt{32}-2\cdot\sqrt{2}\right)\cdot\left(\sqrt{2}+\sqrt{8}\right)}{\sqrt{2}}=\left[\begin{array}{l}\text{djelomično}\\ \text{korjenovanje}\end{array}\right]=$$

$$=\frac{\left(\sqrt{25\cdot 2}+\sqrt{16\cdot 2}-2\cdot\sqrt{2}\right)\cdot\left(\sqrt{2}+\sqrt{4\cdot 2}\right)}{\sqrt{2}}=$$

$$=\frac{\left(\sqrt{25}\cdot\sqrt{2}+\sqrt{16}\cdot\sqrt{2}-2\cdot\sqrt{2}\right)\cdot\left(\sqrt{2}+\sqrt{4}\cdot\sqrt{2}\right)}{\sqrt{2}}=$$

$$=\frac{\left(5\cdot\sqrt{2}+4\cdot\sqrt{2}-2\cdot\sqrt{2}\right)\cdot\left(\sqrt{2}+2\cdot\sqrt{2}\right)}{\sqrt{2}}=\frac{7\cdot\sqrt{2}\cdot 3\cdot\sqrt{2}}{\sqrt{2}}=\frac{7\cdot\sqrt{2}\cdot 3\cdot\cancel{\sqrt{2}}}{\cancel{\sqrt{2}}}=$$

$$=\frac{7\cdot\sqrt{2}\cdot 3}{1}=\frac{21\cdot\sqrt{2}}{1}=21\cdot\sqrt{2}.$$

Odgovor je pod B.

Vježba 430

Nakon djelomičnog korjenovanja i obavljenih računskih operacija izraz

$$\frac{\left(\sqrt{50}+\sqrt{32}-2\cdot\sqrt{2}\right)\cdot\left(\sqrt{50}-\sqrt{8}\right)}{\sqrt{2}}$$ daje:

$A.\ 24\cdot\sqrt{2}$ $\quad B.\ 21\cdot\sqrt{2}$ $\quad C.\ 42$ $\quad D.\ 21$

Rezultat: B.

Zadatak 431 (4B, TUPŠ)

Kolika je vrijednost izraza $\left(\sqrt{\frac{\sqrt{2}+3}{2}}-\sqrt{\frac{3-\sqrt{2}}{2}}\right)^2$?

$A.\ 3-\sqrt{7}$ $\quad B.\ \sqrt{7}-\sqrt{3}$ $\quad C.\ 1$ $\quad D.\ 2$

Rješenje 431

Ponovimo!

$$(a-b)^2=a^2-2\cdot a\cdot b+b^2 \quad , \quad \left(\sqrt{a}\right)^2=a \quad , \quad \sqrt{a}\cdot\sqrt{b}=\sqrt{a\cdot b}.$$

$$\frac{a}{n}+\frac{b}{n}=\frac{a+b}{n} \quad , \quad \frac{a}{b}\cdot\frac{c}{d}=\frac{a\cdot c}{b\cdot d} \quad , \quad (a-b)\cdot(a+b)=a^2-b^2 \quad , \quad \sqrt{\frac{a}{b}}=\frac{\sqrt{a}}{\sqrt{b}}.$$

Skratiti razlomak znači brojnik i nazivnik tog razlomka podijeliti istim brojem različitim od nule i jedinice

$$\frac{a\cdot n}{b\cdot n}=\frac{a}{b} \ , \ n\neq 0 \ , \ n\neq 1.$$

$$\left(\sqrt{\frac{\sqrt{2}+3}{2}}-\sqrt{\frac{3-\sqrt{2}}{2}}\right)^2=\left(\sqrt{\frac{\sqrt{2}+3}{2}}\right)^2-2\cdot\sqrt{\frac{\sqrt{2}+3}{2}}\cdot\sqrt{\frac{3-\sqrt{2}}{2}}+\left(\sqrt{\frac{3-\sqrt{2}}{2}}\right)^2=$$

$$=\frac{\sqrt{2}+3}{2}-2\cdot\sqrt{\frac{\sqrt{2}+3}{2}\cdot\frac{3-\sqrt{2}}{2}}+\frac{3-\sqrt{2}}{2}=\frac{\sqrt{2}+3}{2}+\frac{3-\sqrt{2}}{2}-2\cdot\sqrt{\frac{3+\sqrt{2}}{2}\cdot\frac{3-\sqrt{2}}{2}}=$$

$$=\frac{\sqrt{2}+3+3-\sqrt{2}}{2}-2\cdot\sqrt{\frac{(3+\sqrt{2})\cdot(3-\sqrt{2})}{4}}=\frac{\sqrt{2}+3+3-\sqrt{2}}{2}-2\cdot\sqrt{\frac{3^2-(\sqrt{2})^2}{4}}=$$

$$=\frac{6}{2}-2\cdot\sqrt{\frac{9-2}{4}}=\frac{6}{2}-2\cdot\sqrt{\frac{7}{4}}=3-2\cdot\frac{\sqrt{7}}{\sqrt{4}}=3-2\cdot\frac{\sqrt{7}}{2}=3-2\cdot\frac{\sqrt{7}}{2}=3-\sqrt{7}.$$

Odgovor je pod A.

Vježba 431

Kolika je vrijednost izraza $\left(\sqrt{\frac{3-\sqrt{2}}{2}}-\sqrt{\frac{\sqrt{2}+3}{2}}\right)^2$?

$A.\ 3-\sqrt{7}$ $\qquad B.\ \sqrt{7}-\sqrt{3}$ $\qquad C.\ 1$ $\qquad D.\ 2$

Rezultat: A.

Zadatak 432 (4B, TUPŠ)

Nakon racionalizacije nazivnika izraz $\frac{\sqrt{\sqrt{3}+2}}{\sqrt{2-\sqrt{3}}}$ jednak je:

$A.\ 1$ $\qquad B.\ \sqrt{3}+2$ $\qquad C.\ \sqrt{3}$ $\qquad D.\ 3\cdot\sqrt{2}$

Rješenje 432

Ponovimo!

$$\frac{a}{b}\cdot\frac{c}{d}=\frac{a\cdot c}{b\cdot d} \quad , \quad \sqrt{a}\cdot\sqrt{b}=\sqrt{a\cdot b} \quad , \quad (\sqrt{a})^2=a \quad , \quad (a-b)\cdot(a+b)=a^2-b^2.$$

$$\frac{n}{1}=n \quad , \quad a^1=a \quad , \quad a^n\cdot a^m=a^{n+m}.$$

Proširiti razlomak znači brojnik i nazivnik tog razlomka pomnožiti istim brojem različitim od nule i jedinice

$$\frac{a}{b}=\frac{a\cdot n}{b\cdot n} \ , \ n\neq 0 \ , \ n\neq 1.$$

$$\frac{\sqrt{\sqrt{3}+2}}{\sqrt{2-\sqrt{3}}}=\left[\begin{array}{l}\text{racionalizacija}\\ \text{nazivnika}\end{array}\right]=\frac{\sqrt{\sqrt{3}+2}}{\sqrt{2-\sqrt{3}}}\cdot\frac{\sqrt{2-\sqrt{3}}}{\sqrt{2-\sqrt{3}}}=\frac{\sqrt{\sqrt{3}+2}\cdot\sqrt{2-\sqrt{3}}}{\left(\sqrt{2-\sqrt{3}}\right)^2}=$$

$$=\frac{\sqrt{(\sqrt{3}+2)\cdot(2-\sqrt{3})}}{2-\sqrt{3}}=\frac{\sqrt{(2+\sqrt{3})\cdot(2-\sqrt{3})}}{2-\sqrt{3}}=\frac{\sqrt{2^2-(\sqrt{3})^2}}{2-\sqrt{3}}=\frac{\sqrt{4-3}}{2-\sqrt{3}}=\frac{\sqrt{1}}{2-\sqrt{3}}=$$

$$=\frac{1}{2-\sqrt{3}}=\left[\begin{array}{l}\text{racionalizacija}\\ \text{nazivnika}\end{array}\right]=\frac{1}{2-\sqrt{3}}\cdot\frac{2+\sqrt{3}}{2+\sqrt{3}}=\frac{2+\sqrt{3}}{(2-\sqrt{3})\cdot(2+\sqrt{3})}=\frac{2+\sqrt{3}}{2^2-(\sqrt{3})^2}=$$

$$=\frac{2+\sqrt{3}}{4-3}=\frac{2+\sqrt{3}}{1}=2+\sqrt{3}=\sqrt{3}+2.$$

Odgovor je pod B.

Vježba 432

Nakon racionalizacije nazivnika izraz $\frac{\sqrt{2+\sqrt{3}}}{\sqrt{2-\sqrt{3}}}$ jednak je:

$A.\ 1 \qquad B.\ \sqrt{3}+2 \qquad C.\ \sqrt{3} \qquad D.\ 3\cdot\sqrt{2}$

Rezultat: B.

Zadatak 433 (4B, TUPŠ)

Ako je $A=(1-x)\cdot\left(1+x^2\right)$, $B=(1+x)\cdot\left(1+x^4\right)$, onda je vrijednost $A\cdot B-1$ za $\sqrt[4]{8}$ jednaka:

$A.\ -64 \qquad B.\ 7 \qquad C.\ 32 \qquad D.\ -11$

Rješenje 433

Ponovimo!

$$a^1=a \quad , \quad \left(a^n\right)^m=a^{n\cdot m} \quad , \quad (a-b)\cdot(a+b)=a^2-b^2 \quad , \quad \sqrt[n\cdot r]{a^{m\cdot r}}=\sqrt[n]{a^m}.$$

$$A\cdot B-1=\left[\begin{array}{l}A=(1-x)\cdot\left(1+x^2\right)\\ B=(1+x)\cdot\left(1+x^4\right)\end{array}\right]=(1-x)\cdot\left(1+x^2\right)\cdot(1+x)\cdot\left(1+x^4\right)-1=$$

$$=(1-x)\cdot(1+x)\cdot\left(1+x^2\right)\cdot\left(1+x^4\right)-1=\left(1-x^2\right)\cdot\left(1+x^2\right)\cdot\left(1+x^4\right)-1=$$

$$=\left(1-\left(x^2\right)^2\right)\cdot\left(1+x^4\right)-1=\left(1-x^4\right)\cdot\left(1+x^4\right)-1=1-\left(x^4\right)^2-1=1-x^8-1=$$

$$=1-x^8-1=-x^8=\left[x=\sqrt[4]{8}\right]=-\left(\sqrt[4]{8}\right)^8=-\left(\sqrt[4]{8}\right)^8=-8^2=-64.$$

Odgovor je pod A.

Vježba 433

Ako je $A=(1+x)\cdot\left(1+x^2\right)$, $B=(1-x)\cdot\left(1+x^4\right)$, onda je vrijednost $A\cdot B-1$ za $\sqrt[4]{8}$ jednaka:

$A.\ -64 \qquad B.\ 7 \qquad C.\ 32 \qquad D.\ -11$

Rezultat: A.

Zadatak 434 (4B, TUPŠ)

Praćenjem vodostaja rijeke primijećeno je da je u posljednjih pet mjeseci svakog prvog u mjesecu vodostaj bio izražen cijelim brojem metara, ali svaki mjesec drugim brojem te da je umnožak tih pet brojeva jednak broju 12. Koliki su bili vodostaji?

Rješenje 434

Ponovimo!

Vodostaj je visina vode u moru, rijeci ili jezeru. Visina vode se obično izražava u centimetrima, a mjeri se uglavnom pomoću vodomjerne letve.
Cijeli brojevi jesu brojevi:

$$..., -5, -4, -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, 4, 5, ...$$

Oni čine skup cijelih brojeva koji označavamo slovom Z, a zapisujemo kao

$$Z = \{..., -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, ...\} \quad \text{ili} \quad Z = \{0, 1, -1, 2, -2, 3, -3, ...\}.$$

Prosti brojevi (prim – brojevi) su prirodni brojevi djeljivi bez ostatka samo s brojem 1 i sami sa sobom, a veći od broja 1.

Broj 12 rastavimo na proste faktore, ali uporabit ćemo i broj 1.

$$12 = 1 \cdot 12 = 1 \cdot 2 \cdot 6 = 1 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 3.$$

Budući da mora biti pet cijelih brojeva, a vodostaj može biti izražen i negativnim brojevima, vrijedi:

$$-2\ m, -1\ m, 1\ m, 2\ m, 3\ m$$

Vježba 434

Odmor!

Rezultat: …

Zadatak 435 (Lovro, srednja škola)

Zadani su razlomci $\frac{35}{396}$ i $\frac{28}{297}$. Nađite najmanji razlomak koji je djeljiv sa zadanim razlomcima (kvocijent je prirodan broj).

Rješenje 435

Ponovimo!

$$\frac{a}{b} : \frac{c}{d} = \frac{a}{b} \cdot \frac{d}{c} = \frac{a \cdot d}{b \cdot c} \quad , \quad \frac{a}{b} \cdot \frac{c}{d} = \frac{a \cdot c}{b \cdot d} \quad , \quad \frac{n}{1} = n.$$

Skup prirodnih brojeva označavamo slovom N, a zapisujemo

$$N = \{1, 2, 3, 4, 5, ..., n-1, n, n+1, ...\}.$$

Prosti brojevi (prim – brojevi) su prirodni brojevi djeljivi bez ostatka samo s brojem 1 i sami sa sobom, a veći od broja 1.
Prirodni brojevi koji su veći od broja 1, a nisu prosti brojevi nazivaju se složenim brojevima. Složen broj je prirodan broj veći od jedan koji je djeljiv brojem 1, samim sobom i barem još jednim brojem. Svaki se složeni broj može rastaviti na proste faktore.
Broj b je višekratnik prirodnog broja a ako postoji takav prirodan broj k da vrijedi

$$b = k \cdot a.$$

Višekratnici prirodnog broja su svi brojevi koji su djeljivi s tim brojem. Prirodni broj ima beskonačno višekratnika. Zajednički višekratnici dvaju ili više brojeva su brojevi koji su djeljivi sa svim zadanim brojevima. Najmanji zajednički višekratnik prirodnih brojeva a i b (oznaka v(a, b)) je najmanji prirodni broj koji je djeljiv sa svakim od tih brojeva.
Najveća zajednička mjera (najveći zajednički djelitelj) prirodnih brojeva a, b, ... je najveći broj koji dijeli sve te brojeve. Oznaka je M(a, b, ...).
Skratiti razlomak znači brojnik i nazivnik tog razlomka podijeliti istim brojem različitim od nule i jedinice.

$$\frac{a \cdot n}{b \cdot n} = \frac{a}{b} \quad , \quad n \neq 0 \quad , \quad n \neq 1.$$

Traženi razlomak imat će:
- brojnik koji je najmanji zajednički višekratnik brojeva 35 i 28
- nazivnik koji je najveća zajednička mjera brojeva 396 i 297.

Računamo najmanji zajednički višekratnik brojeva 35 i 28.

35	28	2	dijelimo s 2
35	14	2	dijelimo s 2
35	7	5	dijelimo s 5
7	7	7	dijelimo sa 7
1	1		

$$v(35,28)=2\cdot 2\cdot 5\cdot 7=140$$

Računamo najveću zajedničku mjeru brojeva 396 i 297.

396	297	3	dijelimo s 3
132	99	3	dijelimo s 3
44	33	11	dijelimo s 11
4	3		

$$M(396,297)=3\cdot 3\cdot 11=99.$$

Traženi razlomak glasi:

$$\frac{140}{99}.$$

Provjera!

$$\frac{140}{99}:\frac{35}{396}=\frac{140}{99}\cdot\frac{396}{35}=\frac{140}{99}\cdot\frac{396}{35}=\frac{4}{1}\cdot\frac{4}{1}=\frac{16}{1}=16.$$

$$\frac{140}{99}:\frac{28}{297}=\frac{140}{99}\cdot\frac{297}{28}=\frac{140}{99}\cdot\frac{297}{28}=\frac{5}{1}\cdot\frac{3}{1}=\frac{15}{1}=15.$$

Vježba 435

Odmor!

Rezultat: …

Zadatak 436 (Tonka, maturantica)

Poredajte od najmanjega prema najvećemu brojeve $x, \frac{1}{x}, \sqrt{x}$ za sve $x\in\left\langle\frac{1}{2}, 1\right\rangle$.

Rješenje 436

Ponovimo!

$$x\in\langle a, b\rangle \Rightarrow a<x<b \;,\; a<b \;,\; a, b\in R.$$

Iz intervala $\left\langle\frac{1}{2}, 1\right\rangle$ uzmemo, na primjer, x = 0.8 pa dobijemo:

$$\left.\begin{matrix} x \\ \frac{1}{x} \\ \sqrt{x}\end{matrix}\right\} \Rightarrow [x=0.8] \Rightarrow \left.\begin{matrix} x=0.8 \\ \frac{1}{x}=\frac{1}{0.8} \\ \sqrt{x}=\sqrt{0.8}\end{matrix}\right\} \Rightarrow \left.\begin{matrix} x=0.8000 \\ \frac{1}{x}=1.2500 \\ \sqrt{x}=0.8944\end{matrix}\right\} \Rightarrow x<\sqrt{x}<\frac{1}{x} \Rightarrow x, \sqrt{x}, \frac{1}{x}.$$

Vježba 436

Odmor!

Rezultat: …

Zadatak 437 (Viki, srednja škola)

Neka su x i y realni brojevi. Najmanja vrijednost koju može imati izraz $x^2+y^2-6\cdot x+4\cdot y+24$ iznosi:

$A.\ 11 \qquad B.\ -11 \qquad C.\ 8 \qquad D.\ 9 \qquad E.\ 10$

Rješenje 437

Ponovimo!

$$a^2 - 2 \cdot a \cdot b + b^2 = (a-b)^2 \quad , \quad a^2 + 2 \cdot a \cdot b + b^2 = (a+b)^2 \quad , \quad a^2 \geq 0 \ , \ a \in R.$$

Zakon distribucije množenja prema zbrajanju.

$$a \cdot (b+c) = a \cdot b + a \cdot c \quad , \quad a \cdot b + a \cdot c = a \cdot (b+c).$$

Preoblikujemo zadani izraz.

$$z(x,\ y) = x^2 + y^2 - 6 \cdot x + 4 \cdot y + 24 \Rightarrow z(x,\ y) = x^2 - 6 \cdot x + 9 + y^2 + 4 \cdot y + 4 + 11 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow z(x,\ y) = \left(x^2 - 6 \cdot x + 9\right) + \left(y^2 + 4 \cdot y + 4\right) + 11 \Rightarrow z(x,\ y) = (x-3)^2 + (y+2)^2 + 11.$$

Najmanju vrijednost izraz može imati za

$$\left.\begin{array}{l} x - 3 = 0 \\ y + 2 = 0 \end{array}\right\} \Rightarrow \left.\begin{array}{l} x = 3 \\ y = -2 \end{array}\right\}$$

i ona iznosi:

$$z(x,\ y) = (x-3)^2 + (y+2)^2 + 11 \Rightarrow \left[\begin{array}{l} x = 3 \\ y = -2 \end{array}\right] \Rightarrow$$

$$\Rightarrow z(3,\ -2) = (3-3)^2 + (-2+2)^2 + 11 \Rightarrow z(3,\ -2) = 11.$$

Odgovor je pod A.

Vježba 437

Neka su x i y realni brojevi. Najmanja vrijednost koju može imati izraz $x^2 + y^2 - 6 \cdot x + 4 \cdot y + 20$ iznosi:

$A.\ 7 \qquad B.\ -7 \qquad C.\ 6 \qquad D.\ -6 \qquad E.\ 8$

Rezultat: A.

Zadatak 438 (Iva, maturantica)

Podatci o visini i broju učenika nekog razreda navedeni su u tablici.

Visina	Broj učenika
172 cm	5
176 cm	3
178 cm	10

Nakon što su u taj razred upisana još 2 učenika iste visine, prosječna visina učenika u tome razredu je 177 cm. Kolika je visina novoupisanih učenika?

$A.\ 177\ cm \qquad B.\ 180\ cm \qquad C.\ 183\ cm \qquad D.\ 186\ cm$

Rješenje 438

Ponovimo!

Neka je dan skup n pozitivnih brojeva $\{a_1, a_2, a_3, \ \ldots \ , a_n\}$. Tada je aritmetička sredina ili prosjek A_n brojeva $a_1, a_2, a_3, \ldots , a_n$ definirana izrazom

$$A_n = \frac{a_1 + a_2 + a_3 + \ \ldots \ + a_n}{n}.$$

Ako su $a_1, a_2, a_3, \ldots , a_n$ veličine čiji se prosjek traži i imamo

f_1 veličine a_1
f_2 veličine a_2
……………..
f_n veličine a_n,

tada je prosječna vrijednost vagana (ponderirana) aritmetička sredina:

$$A_n = \frac{f_1 \cdot a_1 + f_2 \cdot a_2 + f_3 \cdot a_3 + \ \ldots \ + f_n \cdot a_n}{f_1 + f_2 + f_3 + \ \ldots \ + f_n}.$$

Visina	Broj učenika
172 cm	5
176 cm	3
178 cm	10
x cm	**2**

Neka je x visina novoupisanih učenika. Tada je broj učenika u razredu jednak 20.

$$5+3+10+2=20.$$

Računamo visinu novoupisanih učenika.

$$\frac{172\cdot 5+176\cdot 3+178\cdot 10+2\cdot x}{5+3+10+2}=177 \Rightarrow \frac{860+528+1780+2\cdot x}{20}=177 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \frac{3168+2\cdot x}{20}=177 \Rightarrow \frac{3168+2\cdot x}{20}=177 \;/\cdot 20 \Rightarrow 3168+2\cdot x=3540 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 2\cdot x=3540-3168 \Rightarrow 2\cdot x=372 \Rightarrow 2\cdot x=372 \;/:2 \Rightarrow x=186\ cm.$$

Odgovor je pod D.

Vježba 438

Odmor!

Rezultat: …

Zadatak 439 (Katarina, maturantica)

Koliki je koeficijent uz x u izrazu $2\cdot(3\cdot x-1)^2-5\cdot(2\cdot x+1)$ sređenome do kraja?

$A.\ -34 \qquad B.\ -22 \qquad C.\ -10 \qquad D.\ -4$

Rješenje 439

Ponovimo!

$$(a\cdot b)^n=a^n\cdot b^n \quad , \quad (a-b)^2=a^2-2\cdot a\cdot b+b^2.$$

Zakon distribucije množenja prema zbrajanju.

$$a\cdot(b+c)=a\cdot b+a\cdot c \quad , \quad a\cdot b+a\cdot c=a\cdot(b+c).$$

$$2\cdot(3\cdot x-1)^2-5\cdot(2\cdot x+1)=2\cdot\left(9\cdot x^2-6\cdot x+1\right)-5\cdot(2\cdot x+1)=$$

$$=18\cdot x^2-12\cdot x+2-10\cdot x-5=18\cdot x^2-22\cdot x-3=18\cdot x^2-22\cdot x-3.$$

Odgovor je pod B.

Vježba 439

Koliki je koeficijent uz x^2 u izrazu $2\cdot(3\cdot x-1)^2-5\cdot(2\cdot x+1)$ sređenome do kraja?

$A.\ -18 \qquad B.\ 18 \qquad C.\ 10 \qquad D.\ 4$

Rezultat: B.

Zadatak 440 (Katarina, maturantica)

Odredite koeficijent uz $a^2\cdot b^2\cdot c$ u sređenome raspisu izraza $(a\cdot b+c)\cdot(c+a\cdot b)\cdot(b\cdot a+c)$.

Rješenje 440

Ponovimo!

$$a^1=a \quad , \quad a^n\cdot a^m=a^{n+m} \quad , \quad (a\cdot b)^n=a^n\cdot b^n.$$

$$(a+b)^3=a^3+3\cdot a^2\cdot b+3\cdot a\cdot b^2+b^3.$$

$$(a\cdot b+c)\cdot(c+a\cdot b)\cdot(b\cdot a+c)=(a\cdot b+c)\cdot(a\cdot b+c)\cdot(a\cdot b+c)=(a\cdot b+c)^3=$$

$$=(a\cdot b)^3+3\cdot(a\cdot b)^2\cdot c+3\cdot a\cdot b\cdot c^2+c^3=a^3\cdot b^3+3\cdot a^2\cdot b^2\cdot c+3\cdot a\cdot b\cdot c^2+c^3=$$

$$= a^3 \cdot b^3 + 3 \cdot a^2 \cdot b^2 \cdot c + 3 \cdot a \cdot b \cdot c^2 + c^3.$$

Koeficijent uz $a^2 \cdot b^2 \cdot c$ je 3.

Vježba 440

Odredite koeficijent uz $a \cdot b \cdot c^2$ u sređenome raspisu izraza $(a \cdot b + c) \cdot (c + a \cdot b) \cdot (b \cdot a + c)$.

Rezultat: 3.