Zadatak 401 (Vox, gimnazija)

Dokaži da je za svaki prirodni broj n broj (5 · n – 2) · (3 · n – 1) – (2 · n + 3) · (2 · n – 3) djeljivo s 11.

Rješenje 401

Ponovimo!

$$a^1 = a \quad , \quad a^n \cdot a^m = a^{n+m} \quad , \quad (a \cdot b)^n = a^n \cdot b^n \quad , \quad (a+b)\cdot(a-b) = a^2 - b^2.$$

Množenje zagrada

$$(a+b)\cdot(c+d) = a\cdot c + a\cdot d + b\cdot c + b\cdot d.$$

Zakon distribucije množenja prema zbrajanju.

$$a\cdot(b+c) = a\cdot b + a\cdot c \quad , \quad a\cdot b + a\cdot c = a\cdot(b+c).$$

1.inačica

$$(5\cdot n-2)\cdot(3\cdot n-1)-(2\cdot n+3)\cdot(2\cdot n-3) = \left[\begin{array}{l}\text{pomnožimo}\\ \text{zagrade}\end{array}\right] =$$

$$= 15\cdot n^2 - 5\cdot n - 6\cdot n + 2 - \left(4\cdot n^2 - 6\cdot n + 6\cdot n - 9\right) = 15\cdot n^2 - 5\cdot n - 6\cdot n + 2 - 4\cdot n^2 + 6\cdot n - 6\cdot n + 9 =$$

$$= 15\cdot n^2 - 5\cdot n - 6\cdot n + 2 - 4\cdot n^2 + 6\cdot n - 6\cdot n + 9 = 15\cdot n^2 - 5\cdot n - 6\cdot n + 2 - 4\cdot n^2 + 9 =$$

$$= 11\cdot n^2 - 11\cdot n + 11 = \left[\begin{array}{l}\text{izlučimo}\\ \text{broj } 11\end{array}\right] = 11\cdot\left(n^2 - n + 1\right).$$

Dakle, broj $(5\cdot n-2)\cdot(3\cdot n-1)-(2\cdot n+3)\cdot(2\cdot n-3)$ djeljiv je s 11 za svaki $n \in N$.

2.inačica

$$(5\cdot n-2)\cdot(3\cdot n-1)-(2\cdot n+3)\cdot(2\cdot n-3) =$$

$$= \left[\begin{array}{l}\text{pomnožimo prve dvije zagrade}\\ \text{druge dvije zagrade čine razliku kvadrata}\end{array}\right] = 15\cdot n^2 - 5\cdot n - 6\cdot n + 2 - \left((2\cdot n)^2 - 3^2\right) =$$

$$= 15\cdot n^2 - 5\cdot n - 6\cdot n + 2 - \left(4\cdot n^2 - 9\right) = 15\cdot n^2 - 5\cdot n - 6\cdot n + 2 - 4\cdot n^2 + 9 =$$

$$= 11\cdot n^2 - 11\cdot n + 11 = \left[\begin{array}{l}\text{izlučimo}\\ \text{broj } 11\end{array}\right] = 11\cdot\left(n^2 - n + 1\right).$$

Dakle, broj $(5\cdot n-2)\cdot(3\cdot n-1)-(2\cdot n+3)\cdot(2\cdot n-3)$ djeljiv je s 11 za svaki $n \in N$.

Vježba 401

Dokaži da je za svaki prirodni broj n broj (5 · n – 2) · (3 · n – 1) + (3 + 2 · n) · (3 – 2 · n) djeljivo s 11.

Rezultat: Dokaz analogan.

Zadatak 402 (Vox, gimnazija)

Dokaži da je za svaki prirodni broj n broj (2 · n + 3) · (3 · n – 7) – (n + 1) · (n – 1) djeljivo s 10.

Rješenje 402

Ponovimo!

$$a^1 = a \quad , \quad a^n \cdot a^m = a^{n+m} \quad , \quad (a \cdot b)^n = a^n \cdot b^n \quad , \quad (a+b)\cdot(a-b) = a^2 - b^2.$$

$$a^n : a^m = a^{n-m}.$$

Množenje zagrada

$$(a+b)\cdot(c+d) = a\cdot c + a\cdot d + b\cdot c + b\cdot d.$$

Zakon distribucije množenja prema zbrajanju.

$$a \cdot (b+c) = a \cdot b + a \cdot c \quad , \quad a \cdot b + a \cdot c = a \cdot (b+c).$$

Skup prirodnih brojeva označavamo slovom N, a zapisujemo

$$N = \{1,\ 2,\ 3,\ 4,\ 5,\ \dots,\ n-1,\ n,\ n+1,\ \dots\}.$$

Prethodnik prirodnog broja n, n ≠ 1, je prirodan broj n – 1.
Sljedbenik prirodnog broja n je prirodan broj n + 1.
Prirodni brojevi dijele se na parne i neparne brojeve. Parni brojevi su oni brojevi koji su djeljivi sa 2, a neparni su oni koji nisu djeljivi sa 2.
Da je neki prirodan broj m paran znači da se može napisati u obliku

$$m = 2 \cdot (\text{neki prirodan broj}) \quad , \quad m = 2 \cdot k \ , \ k \in N.$$

Zbroj parnih brojeva je paran broj.

$$2 \cdot n + 2 \cdot m = 2 \cdot (n+m) = 2 \cdot k \ , \ n,\ m,\ k \in N.$$

Umnožak dva susjedna prirodna broja (brojevi se razlikuju za 1) uvijek je paran broj (djeljiv s 2).

$$(n-1) \cdot n = 2 \cdot k \ , \ n,\ k \in N \quad , \quad n \cdot (n+1) = 2 \cdot k \ , \ n,\ k \in N.$$

Umnožak broja 5 i parnog broja djeljiv je s 10.

$$5 \cdot (2 \cdot k) = 10 \cdot k \ , \ k \in N.$$

1.inačica

$$(2 \cdot n+3) \cdot (3 \cdot n-7) - (n+1) \cdot (n-1) = \begin{bmatrix} \text{pomnožimo} \\ \text{zagrade} \end{bmatrix} =$$

$$= 6 \cdot n^2 - 14 \cdot n + 9 \cdot n - 21 - \left(n^2 - n + n - 1\right) = 6 \cdot n^2 - 14 \cdot n + 9 \cdot n - 21 - n^2 + n - n + 1 =$$

$$= 6 \cdot n^2 - 14 \cdot n + 9 \cdot n - 21 - n^2 + n - n + 1 = 6 \cdot n^2 - 14 \cdot n + 9 \cdot n - 21 - n^2 + 1 =$$

$$= 5 \cdot n^2 - 5 \cdot n - 20 = \begin{bmatrix} \text{izlučimo} \\ \text{broj 5} \end{bmatrix} = 5 \cdot \left(n^2 - n - 4\right) = 5 \cdot \left(n \cdot (n-1) - 4\right) =$$

$$= \begin{bmatrix} n \cdot (n-1) = 2 \cdot k,\ k \in N \\ \text{umnožak je djeljiv s 2} \end{bmatrix} = 5 \cdot (2 \cdot k - 4) = 5 \cdot 2 \cdot (k-2) = 10 \cdot (k-2),\ k \in N.$$

Dakle, broj $(2 \cdot n+3) \cdot (3 \cdot n-7) - (n+1) \cdot (n-1)$ djeljiv je s 10 za svaki $n \in N$.

2.inačica

$$(2 \cdot n+3) \cdot (3 \cdot n-7) - (n+1) \cdot (n-1) =$$

$$= \begin{bmatrix} \text{pomnožimo prve dvije zagrade} \\ \text{druge dvije zagrade čine razliku kvadrata} \end{bmatrix} = 6 \cdot n^2 - 14 \cdot n + 9 \cdot n - 21 - \left(n^2 - 1\right) =$$

$$= 6 \cdot n^2 - 14 \cdot n + 9 \cdot n - 21 - n^2 + 1 = 5 \cdot n^2 - 5 \cdot n - 20 =$$

$$= \begin{bmatrix} \text{izlučimo} \\ \text{broj 5} \end{bmatrix} = 5 \cdot \left(n^2 - n - 4\right) = 5 \cdot \left(n \cdot (n-1) - 4\right) =$$

$$= \begin{bmatrix} n \cdot (n-1) = 2 \cdot k,\ k \in N \\ \text{umnožak je djeljiv s 2} \end{bmatrix} = 5 \cdot (2 \cdot k - 4) = 5 \cdot 2 \cdot (k-2) = 10 \cdot (k-2),\ k \in N.$$

Dakle, broj $(2 \cdot n+3) \cdot (3 \cdot n-7) - (n+1) \cdot (n-1)$ djeljiv je s 10 za svaki $n \in N$.

Vježba 402

Dokaži da je za svaki prirodni broj n broj (2 · n + 3) · (3 · n – 7) + (1 + n) · (1 – n) djeljivo s 10.

Rezultat: Dokaz analogan.

Zadatak 403 (Danijel, gimnazija)

Izračunaj: 123456787 · 123456788 – 123456789 · 123456786.

Rješenje 403

Ponovimo!

$$a^1 = a \quad , \quad a^n \cdot a^m = a^{n+m}.$$

Množenje zagrada

$$(a+b)\cdot(c+d) = a\cdot c + a\cdot d + b\cdot c + b\cdot d.$$

Zakon distribucije množenja prema zbrajanju.

$$a\cdot(b+c) = a\cdot b + a\cdot c \quad , \quad a\cdot b + a\cdot c = a\cdot(b+c).$$

1.inačica

Ako je

$$x = 123456787,$$

onda je

$$123\,456\,787\cdot 123\,456\,788 - 123\,456\,789\cdot 123\,456\,786 = x\cdot(x+1) - (x+2)\cdot(x-1) =$$

$$= x^2 + x - \left(x^2 - x + 2\cdot x - 2\right) = x^2 + x - x^2 + x - 2\cdot x + 2 = x^2 + x - x^2 + x - 2\cdot x + 2 = 2.$$

2.inačica

Ako je

$$x = 123456788,$$

onda je

$$123\,456\,787\cdot 123\,456\,788 - 123\,456\,789\cdot 123\,456\,786 = (x-1)\cdot x - (x+1)\cdot(x-2) =$$

$$= x^2 - x - \left(x^2 - 2\cdot x + x - 2\right) = x^2 - x - x^2 + 2\cdot x - x + 2 = x^2 - x - x^2 + 2\cdot x - x + 2 = 2.$$

3.inačica

Ako je

$$x = 123456789,$$

onda je

$$123\,456\,787\cdot 123\,456\,788 - 123\,456\,789\cdot 123\,456\,786 = (x-2)\cdot(x-1) - x\cdot(x-3) =$$

$$= x^2 - x - 2\cdot x + 2 - x^2 + 3\cdot x = x^2 - x - 2\cdot x + 2 - x^2 + 3\cdot x = 2.$$

4.inačica

Ako je

$$x = 123456786,$$

onda je

$$123\,456\,787\cdot 123\,456\,788 - 123\,456\,789\cdot 123\,456\,786 = (x+1)\cdot(x+2) - (x+3)\cdot x =$$

$$= x^2 + 2\cdot x + x + 2 - x^2 - 3\cdot x = x^2 + 2\cdot x + x + 2 - x^2 - 3\cdot x = 2.$$

Vježba 403

Izračunaj: 787 · 788 – 789 · 786.

Rezultat: 2.

Zadatak 404 (Asterix, gimnazija)

Dokaži matematičkom indukcijom da je izraz $6^n + 4$ djeljiv s 5.

Rješenje 404

Ponovimo!

$$a^1 = a \quad , \quad a^n \cdot a^m = a^{n+m}.$$

Zakon distribucije množenja prema zbrajanju.

$$a \cdot (b + c) = a \cdot b + a \cdot c \quad , \quad a \cdot b + a \cdot c = a \cdot (b + c).$$

Za prirodan broj a kažemo da je djeljiv s prirodnim brojem b ako postoji prirodan broj q tako da vrijedi

$$a = q \cdot b.$$

Matematička indukcija sastoji se iz dva koraka: baze indukcije i koraka indukcije. U bazi indukcije provjerava se je li tvrdnja istinita za najmanji prirodni broj (obično je to broj 1, osim ako nije postavljen neki drugi uvjet). U koraku indukcije pretpostavi se najprije da je tvrdnja istinita za prirodan broj n i zatim se provjerava istinitost tvrdnje za sljedbenika n + 1.

baza indukcije

n = 1

$$6^1 + 4 = 6 + 4 = 10 = 5 \cdot 2 = 5 \cdot 2.$$

Dakle, baza indukcije je ispunjena.

korak indukcije

n

Pretpostavimo da je tvrdnja istinita za neki prirodni broj n, tj. da vrijedi

$$6^n + 4 = 5 \cdot k, \; k \in N, \; k \text{ je neki prirodan broj} - \text{induktivna pretpostavka}$$

n + 1

Sada provjeravamo izraz za sljedbenika n + 1:

$$6^{n+1} + 4 = 6^n \cdot 6^1 + 4 = 6^n \cdot 6 + 4 = 6 \cdot 6^n + 4 = 5 \cdot 6^n + 6^n + 4 = 5 \cdot 6^n + \left(6^n + 4\right) =$$

$$= \left[\begin{matrix} \text{induktivna pretpostavka} \\ 6^n + 4 = 5 \cdot k \end{matrix}\right] = 5 \cdot 6^n + 5 \cdot k = 5 \cdot \left(6^n + k\right) = 5 \cdot \left(6^n + k\right).$$

Ili ovako!

$$6^{n+1} + 4 = 6^n \cdot 6^1 + 4 = 6^n \cdot 6 + 4 = 6 \cdot 6^n + 4 = 6 \cdot 6^n + 6 \cdot 4 - 6 \cdot 4 + 4 =$$

$$= \left(6 \cdot 6^n + 6 \cdot 4\right) - 6 \cdot 4 + 4 = 6 \cdot \left(6^n + 4\right) - 6 \cdot 4 + 4 = 6 \cdot \left(6^n + 4\right) - 5 \cdot 4 = \left[\begin{matrix} \text{induktivna pretpostavka} \\ 6^n + 4 = 5 \cdot k \end{matrix}\right] =$$

$$= 6 \cdot 5 \cdot k - 5 \cdot 4 = 5 \cdot (6 \cdot k - 4) = 5 \cdot (6 \cdot k - 4).$$

Vježba 404

Dokaži matematičkom indukcijom da je izraz $7^n + 4 \cdot 2^n$ djeljiv s 5.

Rezultat: Točno je.

Zadatak 405 (Lily, gimnazija)

Dokaži da za sve realne brojeve a, b i c vrijedi nejednakost $a^2 + b^2 + c^2 \geq a \cdot b + b \cdot c + a \cdot c$.

Rješenje 405

Ponovimo!

$$\sqrt{a \cdot b} = \sqrt{a} \cdot \sqrt{b} \quad , \quad \sqrt{a^2} = a \; , \; a \geq 0 \quad , \quad a \geq b \; , \; c > 0 \; \Rightarrow \; a \cdot c \geq b \cdot c.$$

$$\left.\begin{matrix} a \geq b \\ c \geq d \end{matrix}\right\} \Rightarrow a + c \geq b + d \quad , \quad a \geq b \; , \; c > 0 \; \Rightarrow \; \frac{a}{c} \geq \frac{b}{c} \quad , \quad a^2 \geq 0 \; , \; a \in R.$$

$$a^2 - 2 \cdot a \cdot b + b^2 = (a - b)^2.$$

Zakon distribucije množenja prema zbrajanju.

$$a \cdot (b + c) = a \cdot b + a \cdot c \quad , \quad a \cdot b + a \cdot c = a \cdot (b + c).$$

Neka je dan skup n pozitivnih brojeva $\left\{a_1, a_2, a_3, \ldots, a_n\right\}$. Tada je aritmetička sredina A_n brojeva $a_1, a_2, a_3, \ldots, a_n$ definirana izrazom

$$A_n = \frac{a_1 + a_2 + a_3 + \ldots + a_n}{n}.$$

Neka je dan skup n pozitivnih brojeva $\left\{a_1, a_2, a_3, \ldots, a_n\right\}$. Tada je geometrijska sredina G_n brojeva $a_1, a_2, a_3, \ldots, a_n$ definirana izrazom

$$G_n = \sqrt[n]{a_1 \cdot a_2 \cdot a_3 \cdot \ldots \cdot a_n}.$$

Neka su a i b dva pozitivna realna broja. Tada je

- aritmetička sredina A brojeva a i b definirana izrazom

$$A = \frac{a+b}{2}$$

- geometrijska sredina G brojeva a i b definirana izrazom

$$G = \sqrt{a \cdot b}.$$

1.inačica

Promatrajmo pozitivne realne brojeve a, b i c.

$$\left.\begin{array}{l} \dfrac{a^2+b^2}{2} \ge \sqrt{a^2 \cdot b^2} \\ \dfrac{b^2+c^2}{2} \ge \sqrt{b^2 \cdot c^2} \\ \dfrac{a^2+c^2}{2} \ge \sqrt{a^2 \cdot c^2} \end{array}\right\} \Rightarrow \left.\begin{array}{l} \dfrac{a^2+b^2}{2} \ge \sqrt{a^2} \cdot \sqrt{b^2} \\ \dfrac{b^2+c^2}{2} \ge \sqrt{b^2} \cdot \sqrt{c^2} \\ \dfrac{a^2+c^2}{2} \ge \sqrt{a^2} \cdot \sqrt{c^2} \end{array}\right\} \Rightarrow \left.\begin{array}{l} \dfrac{a^2+b^2}{2} \ge a \cdot b \\ \dfrac{b^2+c^2}{2} \ge b \cdot c \\ \dfrac{a^2+c^2}{2} \ge a \cdot c \end{array}\right\} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \left.\begin{array}{l} \dfrac{a^2+b^2}{2} \ge a \cdot b \;/\cdot 2 \\ \dfrac{b^2+c^2}{2} \ge b \cdot c \;/\cdot 2 \\ \dfrac{a^2+c^2}{2} \ge a \cdot c \;/\cdot 2 \end{array}\right\} \Rightarrow \left.\begin{array}{l} a^2+b^2 \ge 2 \cdot a \cdot b \\ b^2+c^2 \ge 2 \cdot b \cdot c \\ a^2+c^2 \ge 2 \cdot a \cdot c \end{array}\right\} \Rightarrow \left[\begin{array}{l} \text{zbrojimo} \\ \text{nejednakosti} \end{array}\right] \Rightarrow$$

$$\Rightarrow a^2+b^2+b^2+c^2+a^2+c^2 \ge 2 \cdot a \cdot b + 2 \cdot b \cdot c + 2 \cdot a \cdot c \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 2 \cdot a^2 + 2 \cdot b^2 + 2 \cdot c^2 \ge 2 \cdot a \cdot b + 2 \cdot b \cdot c + 2 \cdot a \cdot c \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 2 \cdot \left(a^2+b^2+c^2\right) \ge 2 \cdot (a \cdot b + b \cdot c + a \cdot c) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 2 \cdot \left(a^2+b^2+c^2\right) \ge 2 \cdot (a \cdot b + b \cdot c + a \cdot c) \;/: 2 \Rightarrow a^2+b^2+c^2 \ge a \cdot b + b \cdot c + a \cdot c.$$

2.inačica

Promatrajmo pozitivne realne brojeve a, b i c.

$$a^2+b^2+c^2 \ge a \cdot b + b \cdot c + a \cdot c \Rightarrow a^2+b^2+c^2 - a \cdot b - b \cdot c - a \cdot c \ge 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow a^2+b^2+c^2 - a \cdot b - b \cdot c - a \cdot c \ge 0 \;/\cdot 2 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 2 \cdot a^2 + 2 \cdot b^2 + 2 \cdot c^2 - 2 \cdot a \cdot b - 2 \cdot b \cdot c - 2 \cdot a \cdot c \geq 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow a^2 - 2 \cdot a \cdot b + b^2 + b^2 - 2 \cdot b \cdot c + c^2 + a^2 - 2 \cdot a \cdot c + c^2 \geq 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \left(a^2 - 2 \cdot a \cdot b + b^2\right) + \left(b^2 - 2 \cdot b \cdot c + c^2\right) + \left(a^2 - 2 \cdot a \cdot c + c^2\right) \geq 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow (a-b)^2 + (b-c)^2 + (a-c)^2 \geq 0.$$

Tvrdnja je točna.

Vježba 405

Dokaži da za sve realne brojeve a, b i c vrijedi nejednakost $a \cdot (a-b) + b \cdot (b-c) + c \cdot (c-a) \geq 0.$

Rezultat: Dokaz analogan.

Zadatak 406 (Luka, gimnazija)

Dokažite da za sve prirodne brojeve n ≥ 3 vrijedi $3^n > 2^n + 3 \cdot n.$

Rješenje 406

Ponovimo!

$$a^1 = a \quad , \quad a^n \cdot a^m = a^{n+m}.$$

Zakon distribucije množenja prema zbrajanju.

$$a \cdot (b+c) = a \cdot b + a \cdot c \quad , \quad a \cdot b + a \cdot c = a \cdot (b+c).$$

Matematička indukcija sastoji se iz dva koraka: baze indukcije i koraka indukcije. U bazi indukcije provjerava se je li tvrdnja istinita za najmanji prirodni broj (obično je to broj 1, osim ako nije postavljen neki drugi uvjet). U koraku indukcije pretpostavi se najprije da je tvrdnja istinita za prirodan broj n i zatim se provjerava istinitost tvrdnje za sljedbenika n + 1.

baza indukcije

n = 3

$$3^3 > 2^3 + 3 \cdot 3 \Rightarrow 27 > 8 + 9 \Rightarrow 27 > 17.$$

Dakle, baza indukcije je ispunjena.

korak indukcije

n

Pretpostavimo da je tvrdnja istinita za neki prirodni broj n veći od 3, tj. da vrijedi

$$3^n > 2^n + 3 \cdot n \text{ - induktivna pretpostavka}$$

n + 1

Sada provjeravamo tvrdnju za sljedbenika n + 1. Pomnožimo prethodnu nejednakost s 3.

$$3^n > 2^n + 3 \cdot n \Rightarrow 3^n > 2^n + 3 \cdot n \; / \cdot 3 \Rightarrow 3 \cdot 3^n > 3 \cdot 2^n + 9 \cdot n \Rightarrow 3^{n+1} > 3 \cdot 2^n + 3 \cdot n + 6 \cdot n.$$

Važno je uočiti da je

$$3 > 2 \; , \; 6 \cdot n > 3,$$

za svaki prirodni broj n.

Sada iz gornje nejednakosti slijedi:

$$3^{n+1} > 3 \cdot 2^n + 3 \cdot n + 6 \cdot n \Rightarrow \begin{bmatrix} 3 > 2 \\ 6 \cdot n > 3 \end{bmatrix} \Rightarrow 3^{n+1} > 3 \cdot 2^n + 3 \cdot n + 6 \cdot n > 2 \cdot 2^n + 3 \cdot n + 3 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 3^{n+1} > 2^{n+1} + 3 \cdot (n+1).$$

Vježba 406

Dokažite da za sve prirodne brojeve n ≥ 5 vrijedi $2^n > n^2.$

Rezultat: Točno je.

Zadatak 407 (Marijan, gimnazija)

Dokažite da je $\frac{1}{\sqrt{3}+\sqrt{5}}+\frac{1}{\sqrt{5}+\sqrt{7}}+\ldots+\frac{1}{\sqrt{2\cdot n-1}+\sqrt{2\cdot n+1}}=\frac{n-1}{\sqrt{3}+\sqrt{2\cdot n+1}}.$

Rješenje 407

Ponovimo!

$$\left(\sqrt{a}\right)^2=a \quad , \quad a^2-b^2=(a-b)\cdot(a+b) \quad , \quad \frac{a}{b}\cdot\frac{c}{d}=\frac{a\cdot c}{b\cdot d} \quad , \quad n=\frac{n}{1}.$$

Zakon distribucije množenja prema zbrajanju.

$$a\cdot(b+c)=a\cdot b+a\cdot c \quad , \quad a\cdot b+a\cdot c=a\cdot(b+c).$$

Proširiti razlomak znači brojnik i nazivnik tog razlomka pomnožiti istim brojem različitim od nule i jedinice

$$\frac{a}{b}=\frac{a\cdot n}{b\cdot n} \ , \ n\neq 0 \ , \ n\neq 1.$$

$$\frac{1}{\sqrt{3}+\sqrt{5}}+\frac{1}{\sqrt{5}+\sqrt{7}}+\ldots+\frac{1}{\sqrt{2\cdot n-1}+\sqrt{2\cdot n+1}}=$$

$$=\frac{1}{\sqrt{3}+\sqrt{5}}\cdot\frac{\sqrt{3}-\sqrt{5}}{\sqrt{3}-\sqrt{5}}+\frac{1}{\sqrt{5}+\sqrt{7}}\cdot\frac{\sqrt{5}-\sqrt{7}}{\sqrt{5}-\sqrt{7}}+\ldots+\frac{1}{\sqrt{2\cdot n-1}+\sqrt{2\cdot n+1}}\cdot\frac{\sqrt{2\cdot n-1}-\sqrt{2\cdot n+1}}{\sqrt{2\cdot n-1}-\sqrt{2\cdot n+1}}=$$

$$=\frac{\sqrt{3}-\sqrt{5}}{\left(\sqrt{3}\right)^2-\left(\sqrt{5}\right)^2}+\frac{\sqrt{5}-\sqrt{7}}{\left(\sqrt{5}\right)^2-\left(\sqrt{7}\right)^2}+\ldots+\frac{\sqrt{2\cdot n-1}-\sqrt{2\cdot n+1}}{\left(\sqrt{2\cdot n-1}\right)^2-\left(\sqrt{2\cdot n+1}\right)^2}=$$

$$=\frac{\sqrt{3}-\sqrt{5}}{3-5}+\frac{\sqrt{5}-\sqrt{7}}{5-7}+\ldots+\frac{\sqrt{2\cdot n-1}-\sqrt{2\cdot n+1}}{2\cdot n-1-(2\cdot n+1)}=$$

$$=\frac{\sqrt{3}-\sqrt{5}}{-2}+\frac{\sqrt{5}-\sqrt{7}}{-2}+\ldots+\frac{\sqrt{2\cdot n-1}-\sqrt{2\cdot n+1}}{2\cdot n-1-2\cdot n-1}=$$

$$=\frac{\sqrt{3}-\sqrt{5}}{-2}+\frac{\sqrt{5}-\sqrt{7}}{-2}+\ldots+\frac{\sqrt{2\cdot n-1}-\sqrt{2\cdot n+1}}{2\cdot n-1-2\cdot n-1}=$$

$$=\frac{\sqrt{3}-\sqrt{5}}{-2}+\frac{\sqrt{5}-\sqrt{7}}{-2}+\ldots+\frac{\sqrt{2\cdot n-1}-\sqrt{2\cdot n+1}}{-2}=$$

$$=-\frac{1}{2}\cdot\left(\sqrt{3}-\sqrt{5}+\sqrt{5}-\sqrt{7}+\ldots+\sqrt{2\cdot n-1}-\sqrt{2\cdot n+1}\right)=$$

$$=-\frac{1}{2}\cdot\left(\sqrt{3}-\sqrt{5}+\sqrt{5}-\sqrt{7}+\ldots+\sqrt{2\cdot n-1}-\sqrt{2\cdot n+1}\right)=-\frac{1}{2}\cdot\left(\sqrt{3}-\sqrt{2\cdot n+1}\right)=$$

$$=-\frac{1}{2}\cdot\frac{\sqrt{3}-\sqrt{2\cdot n+1}}{1}=\frac{-\sqrt{3}+\sqrt{2\cdot n+1}}{2}=\frac{\sqrt{2\cdot n+1}-\sqrt{3}}{2}=$$

$$=\frac{\sqrt{2\cdot n+1}-\sqrt{3}}{2}\cdot\frac{\sqrt{2\cdot n+1}+\sqrt{3}}{\sqrt{2\cdot n+1}+\sqrt{3}}=\frac{\left(\sqrt{2\cdot n+1}-\sqrt{3}\right)\cdot\left(\sqrt{2\cdot n+1}+\sqrt{3}\right)}{2\cdot\left(\sqrt{2\cdot n+1}+\sqrt{3}\right)}=$$

$$=\frac{\left(\sqrt{2\cdot n+1}\right)^2-\left(\sqrt{3}\right)^2}{2\cdot\left(\sqrt{2\cdot n+1}+\sqrt{3}\right)}=\frac{2\cdot n+1-3}{2\cdot\left(\sqrt{2\cdot n+1}+\sqrt{3}\right)}=\frac{2\cdot n-2}{2\cdot\left(\sqrt{2\cdot n+1}+\sqrt{3}\right)}=$$

$$=\frac{2\cdot(n-1)}{2\cdot\left(\sqrt{2\cdot n+1}+\sqrt{3}\right)}=\frac{2\cdot(n-1)}{2\cdot\left(\sqrt{2\cdot n+1}+\sqrt{3}\right)}=\frac{n-1}{\sqrt{2\cdot n+1}+\sqrt{3}}=\frac{n-1}{\sqrt{3}+\sqrt{2\cdot n+1}}.$$

Vježba 407

Dokažite da je $\frac{1}{\sqrt{3}+\sqrt{5}}+\frac{1}{\sqrt{5}+\sqrt{7}}+\ldots+\frac{1}{\sqrt{2\cdot n-1}+\sqrt{2\cdot n+1}}=\frac{\sqrt{2\cdot n+1}-\sqrt{3}}{2}.$

Rezultat: Točno je, dokaz analogan.

Zadatak 408 (Rex, gimnazija)

Dokažite da je za sve prirodne brojeve izraz $2^{3\cdot n}-7\cdot n-1$ djeljiv sa 49.

Rješenje 408

Ponovimo!

$$a^{n}\cdot a^{m}=a^{n+m}.$$

Zakon distribucije množenja prema zbrajanju.

$$a\cdot(b+c)=a\cdot b+a\cdot c \quad , \quad a\cdot b+a\cdot c=a\cdot(b+c).$$

Za prirodan broj a kažemo da je djeljiv s prirodnim brojem b ako postoji prirodan broj q tako da vrijedi

$$a=q\cdot b.$$

To simbolično zapisujemo:

$$b\mid a$$

i čitamo "b je djelitelj od a ili b dijeli a".
Matematička indukcija sastoji se iz dva koraka: baze indukcije i koraka indukcije. U bazi indukcije provjerava se je li tvrdnja istinita za najmanji prirodni broj (obično je to broj 1, osim ako nije postavljen neki drugi uvjet). U koraku indukcije pretpostavi se najprije da je tvrdnja istinita za prirodan broj n i zatim se provjerava istinitost tvrdnje za sljedbenika n + 1.

1.inačica

baza indukcije
n = 1

$$2^{3\cdot 1}-7\cdot 1-1=2^{3}-7-1=8-8=0=49\cdot 0=49\cdot 0 \Rightarrow 49\mid 0.$$

Dakle, baza indukcije je ispunjena.

korak indukcije
n

Pretpostavimo da je tvrdnja istinita za neki prirodni broj n, tj. da vrijedi

$$2^{3\cdot n}-7\cdot n-1=49\cdot k,\ k\in N,\ k \text{ je neki prirodan broj} - \text{induktivna pretpostavka}$$

n + 1

Sada provjeravamo izraz za sljedbenika n + 1:

$$2^{3\cdot(n+1)}-7\cdot(n+1)-1=2^{3\cdot n+3}-7\cdot n-7-1=2^{3\cdot n}\cdot 2^{3}-7\cdot n-8=8\cdot 2^{3\cdot n}-7\cdot n-8=$$

$$=8\cdot 2^{3\cdot n}-8\cdot 7\cdot n+7\cdot 7\cdot n-8=8\cdot 2^{3\cdot n}-8\cdot 7\cdot n-8+7\cdot 7\cdot n=\left(8\cdot 2^{3\cdot n}-8\cdot 7\cdot n-8\right)+7\cdot 7\cdot n=$$

$$=8\cdot\left(2^{3\cdot n}-7\cdot n-1\right)+49\cdot n=\left[\begin{array}{c}\text{induktivna pretpostavka}\\ 2^{3\cdot n}-7\cdot n-1=49\cdot k\end{array}\right]=8\cdot 49\cdot k+49\cdot n=$$

$$=49\cdot(8\cdot k+n) \Rightarrow 49\mid 2^{3\cdot(n+1)}-7\cdot(n+1)-1.$$

2.inačica

baza indukcije
n = 1

$$2^{3\cdot 1}-7\cdot 1-1=2^{3}-7-1=8-8=0=49\cdot 0=49\cdot 0 \Rightarrow 49 \mid 0.$$

Dakle, baza indukcije je ispunjena.

korak indukcije

n

Pretpostavimo da je tvrdnja istinita za neki prirodni broj n, tj. da vrijedi

$$2^{3\cdot n}-7\cdot n-1=49\cdot k,\ k\in N,\ k \text{ je neki prirodan broj} - \text{induktivna pretpostavka}$$

Sada izračunamo:

$$2^{3\cdot n}-7\cdot n-1=49\cdot k \Rightarrow 2^{3\cdot n}=49\cdot k+7\cdot n+1.$$

n + 1

Provjeravamo izraz za sljedbenika n + 1:

$$2^{3\cdot(n+1)}-7\cdot(n+1)-1=2^{3\cdot n+3}-7\cdot n-7-1=2^{3\cdot n}\cdot 2^{3}-7\cdot n-8=8\cdot 2^{3\cdot n}-7\cdot n-8=$$

$$=\left[2^{3\cdot n}=49\cdot k+7\cdot n+1\right]=8\cdot(49\cdot k+7\cdot n+1)-7\cdot n-8=392\cdot k+56\cdot n+8-7\cdot n-8=$$

$$=392\cdot k+56\cdot n+8-7\cdot n-8=392\cdot k+56\cdot n-7\cdot n=392\cdot k+49\cdot n=49\cdot(8\cdot k+n) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 49 \mid 2^{3\cdot(n+1)}-7\cdot(n+1)-1.$$

Vježba 408

Dokažite da je za sve prirodne brojeve izraz $2^{3\cdot n}-7\cdot n-1$ djeljiv sa 7.

Rezultat: Točno je.

Zadatak 409 (Lara, gimnazija)

Ako je $a_\circ=2,\ a_1=3$ i $a_{n+1}=3\cdot a_n-2\cdot a_{n-1}$, dokazati da je $a_n=2^{n}+1.$

Rješenje 409

Ponovimo!

$$a^{1}=a \quad , \quad a^{n}\cdot a^{m}=a^{n+m}.$$

Zakon distribucije množenja prema zbrajanju.

$$a\cdot(b+c)=a\cdot b+a\cdot c \quad , \quad a\cdot b+a\cdot c=a\cdot(b+c).$$

Funkcija definirana na skupu prirodnih brojeva je beskonačan niz (sljed)

$$a : N \rightarrow R \ ,\ a(n)=a_n.$$

Rekurzivna formula ili rekurzija je formula kojom se opći član niza izražava pomoći prethodnih članova.
Matematička indukcija sastoji se iz dva koraka: baze indukcije i koraka indukcije. U bazi indukcije provjerava se je li tvrdnja istinita za najmanji prirodni broj (obično je to broj 1, osim ako nije postavljen neki drugi uvjet). U koraku indukcije pretpostavi se najprije da je tvrdnja istinita za prirodan broj n i zatim se provjerava istinitost tvrdnje za sljedbenika n + 1.

baza indukcije

n = 1

$$a_2=3\cdot a_1-2\cdot a_\circ \Rightarrow \left[\begin{array}{l} a_1=3 \\ a_\circ=2 \end{array}\right] \Rightarrow a_2=3\cdot 3-2\cdot 2 \Rightarrow a_2=9-4 \Rightarrow a_2=5 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow a_2=4+1 \Rightarrow a_2=2^{2}+1.$$

Dakle, baza indukcije je ispunjena.

korak indukcije

n – 1

n

Pretpostavimo da je tvrdnja istinita za prirodne brojeve n – 1 i n, tj. da vrijedi

$$a_{n-1} = 2^{n-1} + 1 \ , \ a_n = 2^n + 1 - \text{induktivna pretpostavka}$$

n + 1

Sada provjeravamo izraz za sljedbenika n + 1:

$$a_{n+1} = 3 \cdot a_n - 2 \cdot a_{n-1} \Rightarrow \begin{bmatrix} a_{n-1} = 2^{n-1} + 1 \\ a_n = 2^n + 1 \end{bmatrix} \Rightarrow a_{n+1} = 3 \cdot \left(2^n + 1\right) - 2 \cdot \left(2^{n-1} + 1\right) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow a_{n+1} = 3 \cdot 2^n + 3 - 2 \cdot 2^{n-1} - 2 \Rightarrow a_{n+1} = 3 \cdot 2^n + 3 - 2^1 \cdot 2^{n-1} - 2 \Rightarrow a_{n+1} = 3 \cdot 2^n + 3 - 2^n - 2 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow a_{n+1} = 2 \cdot 2^n + 1 \Rightarrow a_{n+1} = 2^1 \cdot 2^n + 1 \Rightarrow a_{n+1} = 2^{n+1} + 1.$$

Vježba 409

Ako je $a_\circ = 0,\ a_1 = 1$ i $a_{n+1} = 3 \cdot a_n - 2 \cdot a_{n-1}$, dokazati da je $a_n = 2^n - 1$.

Rezultat: Točno je.

Zadatak 410 (Roby, gimnazija)

Ako je $a + b + c = 1,\ a > 0,\ b > 0,\ c > 0,$ tada je $(1-a) \cdot (1-b) \cdot (1-c) \geq 8 \cdot a \cdot b \cdot c.$ Dokazati!

Rješenje 410

Ponovimo!

$$a \geq b \ , \ c > 0 \Rightarrow a \cdot c \geq b \cdot c \quad , \quad \left.\begin{matrix} a \geq b \\ c \geq d \end{matrix}\right\} \Rightarrow a \cdot c \geq b \cdot d \quad , \quad a^1 = a.$$

$$\sqrt{a} \cdot \sqrt{b} = \sqrt{a \cdot b} \quad , \quad a^n \cdot a^m = a^{n+m} \quad , \quad \sqrt{a^2} = a \ , \ a \geq 0.$$

Neka je dan skup n pozitivnih brojeva $\left\{ a_1, a_2, a_3, \ldots, a_n \right\}$. Tada je aritmetička sredina A_n brojeva $a_1, a_2, a_3, \ldots, a_n$ definirana izrazom

$$A_n = \frac{a_1 + a_2 + a_3 + \ \ldots \ + a_n}{n}.$$

Neka je dan skup n pozitivnih brojeva $\left\{ a_1, a_2, a_3, \ \ldots \ , a_n \right\}$. Tada je geometrijska sredina G_n brojeva $a_1, a_2, a_3, \ldots, a_n$ definirana izrazom

$$G_n = \sqrt[n]{a_1 \cdot a_2 \cdot a_3 \cdot \ldots \cdot a_n}.$$

Neka su a i b dva pozitivna realna broja. Tada je

- aritmetička sredina A brojeva a i b definirana izrazom

$$A = \frac{a+b}{2}$$

- geometrijska sredina G brojeva a i b definirana izrazom

$$G = \sqrt{a \cdot b}.$$

Vrijedi:

$$A \geq G \Rightarrow \frac{a+b}{2} \geq \sqrt{a \cdot b}.$$

Budući da je aritmetička sredina dva broja veća ili jednaka njegovoj geometrijskoj sredini, imamo:

$$\left.\begin{array}{l}\frac{a+b}{2}\geq\sqrt{a\cdot b}\\ \frac{a+c}{2}\geq\sqrt{a\cdot c}\\ \frac{b+c}{2}\geq\sqrt{b\cdot c}\end{array}\right\}\Rightarrow\left.\begin{array}{l}\frac{a+b}{2}\geq\sqrt{a\cdot b}\ \ /\cdot 2\\ \frac{a+c}{2}\geq\sqrt{a\cdot c}\ \ /\cdot 2\\ \frac{b+c}{2}\geq\sqrt{b\cdot c}\ \ /\cdot 2\end{array}\right\}\Rightarrow\left.\begin{array}{l}a+b\geq 2\cdot\sqrt{a\cdot b}\\ a+c\geq 2\cdot\sqrt{a\cdot c}\\ b+c\geq 2\cdot\sqrt{b\cdot c}\end{array}\right\}.$$

Iz pretpostavke slijedi:

$$a+b+c=1\ \Rightarrow\ \left.\begin{array}{l}a+b=1-c\\ a+c=1-b\\ b+c=1-a\end{array}\right\}\Rightarrow\left.\begin{array}{l}1-c\geq 2\cdot\sqrt{a\cdot b}\\ 1-b\geq 2\cdot\sqrt{a\cdot c}\\ 1-a\geq 2\cdot\sqrt{b\cdot c}\end{array}\right\}\Rightarrow\left[\begin{array}{c}\text{pomnožimo}\\ \text{nejednakosti}\end{array}\right]\Rightarrow$$

$$\Rightarrow (1-c)\cdot(1-b)\cdot(1-a)\geq 2\cdot\sqrt{a\cdot b}\cdot 2\cdot\sqrt{a\cdot c}\cdot 2\cdot\sqrt{b\cdot c}\ \Rightarrow$$

$$\Rightarrow (1-a)\cdot(1-b)\cdot(1-c)\geq 8\cdot\sqrt{a\cdot b\cdot a\cdot c\cdot b\cdot c}\ \Rightarrow\ (1-a)\cdot(1-b)\cdot(1-c)\geq 8\cdot\sqrt{a^2\cdot b^2\cdot c^2}\ \Rightarrow$$

$$\Rightarrow (1-a)\cdot(1-b)\cdot(1-c)\geq 8\cdot\sqrt{a^2}\cdot\sqrt{b^2}\cdot\sqrt{c^2}\ \Rightarrow\ (1-a)\cdot(1-b)\cdot(1-c)\geq 8\cdot a\cdot b\cdot c.$$

Vježba 410

Ako je $a+b+c=1,\ a>0,\ b>0,\ c>0,$ tada je $(1-a)\cdot(1-b)\cdot(1-c)-8\cdot a\cdot b\cdot c\geq 0.$ Dokazati!

Rezultat: Dokaz analogan.

Zadatak 411 (Branka, srednja škola)

Dijeljenjem nekog broja brojem 72 dobije se kvocijent n i ostatak 68. Koliki će biti kvocijent i ostatak ako se isti broj podijeli brojem 24?

Rješenje 411

Ponovimo!

Za cijeli broj a kažemo da je djeljiv s cijelim brojem b (b $\neq$ 0) ako postoji cijeli broj q tako da vrijedi

$$a=q\cdot b.$$

Broj q zovemo kvocijentom brojeva a i b i pišemo

$$\frac{a}{b}=q\qquad\text{ili}\qquad a:b=q.$$

Za cijeli broj a i prirodni broj b postoje jedinstveni cijeli brojevi q i r takvi da je

$$a=b\cdot q+r\ \text{ i }\ 0\leq r<b,\ q\ \text{ je kvocijent, }\ r\ \text{ je ostatak}.$$

Zakon distribucije množenja prema zbrajanju.

$$a\cdot(b+c)=a\cdot b+a\cdot c\quad,\quad a\cdot b+a\cdot c=a\cdot(b+c).$$

Neka je b broj koji podijeljen brojem 72 daje kvocijent n i ostatak 68.

$$b=72\cdot n+68\ \Rightarrow\ b=72\cdot n+48+20\ \Rightarrow\ b=(72\cdot n+48)+20\ \Rightarrow\ b=24\cdot(3\cdot n+2)+20.$$

Ako se broj b podijeli brojem 24 dobije se kvocijent 3 · n + 2 i ostatak 20.

Vježba 411

Dijeljenjem nekog broja brojem 72 dobije se kvocijent n i ostatak 68. Koliki će biti kvocijent i ostatak ako se isti broj podijeli brojem 36?

Rezultat: Kvocijent 2 · n + 1, ostatak 32.

Zadatak 412 (Branka, srednja škola)

Razlika kvadrata dva uzastopna neparna prirodna broja je 48. Koji su to brojevi?

Rješenje 412

Ponovimo!

$$(a\cdot b)^n = a^n \cdot b^n \quad , \quad (a+b)^2 = a^2 + 2\cdot a\cdot b + b^2 \quad , \quad a^2 - b^2 = (a-b)\cdot(a+b).$$

$$(a-b)^2 = a^2 - 2\cdot a\cdot b + b^2.$$

Skup prirodnih brojeva označavamo slovom N, a zapisujemo

$$N = \{1,\ 2,\ 3,\ 4,\ 5,\ \ldots\ ,\ n-1,\ n,\ n+1,\ \ldots\}.$$

Prirodni brojevi dijele se na parne i neparne brojeve. Parni brojevi su oni brojevi koji su djeljivi sa 2, a neparni su oni koji nisu djeljivi sa 2.
Da je neki prirodan broj m neparan znači da se može napisati u obliku

$$m = 2\cdot(\text{neki prirodan broj}) + 1 \quad , \quad m = 2\cdot k + 1 \ ,\ k \in N.$$

Zakon distribucije množenja prema zbrajanju.

$$a\cdot(b+c) = a\cdot b + a\cdot c \quad , \quad a\cdot b + a\cdot c = a\cdot(b+c).$$

1.inačica
Budući da se uzastopni neparni brojevi razlikuju za 2 možemo napisati jednadžbu:

$$(x+2)^2 - x^2 = 48 \Rightarrow x^2 + 4\cdot x + 4 - x^2 = 48 \Rightarrow x^2 + 4\cdot x + 4 - x^2 = 48 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 4\cdot x + 4 = 48 \Rightarrow 4\cdot x = 48 - 4 \Rightarrow 4\cdot x = 44 \Rightarrow 4\cdot x = 44 \ /:4 \Rightarrow x = 11.$$

Traženi brojevi su:

$$x = 11 \ ,\ x+2 = 11+2 = 13.$$

2.inačica
Budući da se uzastopni neparni brojevi razlikuju za 2 možemo napisati jednadžbu:

$$(x+2)^2 - x^2 = 48 \Rightarrow (x+2-x)\cdot(x+2+x) = 48 \Rightarrow (x+2-x)\cdot(x+2+x) = 48 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 2\cdot(2\cdot x+2) = 48 \Rightarrow 2\cdot(2\cdot x+2) = 48 \ /:2 \Rightarrow 2\cdot x + 2 = 24 \Rightarrow 2\cdot x = 24 - 2 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 2\cdot x = 22 \Rightarrow 2\cdot x = 22 \ /:2 \Rightarrow x = 11.$$

Traženi brojevi su:

$$x = 11 \ ,\ x+2 = 11+2 = 13.$$

3.inačica
Dva uzastopna neparna broja možemo napisati na ovaj način

$$2\cdot n - 1 \ ,\ 2\cdot n + 1.$$

Dalje slijedi:

$$(2\cdot n+1)^2 - (2\cdot n-1)^2 = 48 \Rightarrow 4\cdot n^2 + 4\cdot n + 1 - \left(4\cdot n^2 - 4\cdot n + 1\right) = 48 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 4\cdot n^2 + 4\cdot n + 1 - 4\cdot n^2 + 4\cdot n - 1 = 48 \Rightarrow 4\cdot n^2 + 4\cdot n + 1 - 4\cdot n^2 + 4\cdot n - 1 = 48 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 4\cdot n + 4\cdot n = 48 \Rightarrow 8\cdot n = 48 \Rightarrow 8\cdot n = 48 \ /:8 \Rightarrow n = 6.$$

Traženi brojevi su:

$$\left.\begin{array}{l} 2\cdot n - 1 = 2\cdot 6 - 1 = 12 - 1 = 11 \\ 2\cdot n + 1 = 2\cdot 6 + 1 = 12 + 1 = 13 \end{array}\right\}.$$

4.inačica
Dva uzastopna neparna broja možemo napisati na ovaj način

$$2\cdot n - 1 \ ,\ 2\cdot n + 1.$$

Dalje slijedi:

$$(2\cdot n+1)^2 - (2\cdot n-1)^2 = 48 \Rightarrow \left((2\cdot n+1) - (2\cdot n-1)\right)\cdot\left((2\cdot n+1) + (2\cdot n-1)\right) = 48 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow (2\cdot n + 1 - 2\cdot n + 1)\cdot(2\cdot n + 1 + 2\cdot n - 1) = 48 \Rightarrow (2\cdot n + 1 - 2\cdot n + 1)\cdot(2\cdot n + 1 + 2\cdot n - 1) = 48 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 2\cdot 4\cdot n = 48 \Rightarrow 8\cdot n = 48 \Rightarrow 8\cdot n = 48 \ /:8 \Rightarrow n = 6.$$

Traženi brojevi su:

$$\left.\begin{array}{l} 2\cdot n-1=2\cdot 6-1=12-1=11 \\ 2\cdot n+1=2\cdot 6+1=12+1=13 \end{array}\right\}.$$

Vježba 412

Razlika kvadrata dva uzastopna neparna prirodna broja je 32. Koji su to brojevi?

Rezultat: 7 i 9.

Zadatak 413 (Laurina sestrica ☺, srednja škola)

Traka od $5\frac{1}{2}$ metra razdijeljena je na tri dijela. Prvi je dio $\frac{1}{4}$ cijele trake, a drugi dio $\frac{4}{5}$ prvoga dijela. Koliko je dugačak treći dio?

Rješenje 413

Ponovimo!

$$\frac{a}{b}\cdot\frac{c}{d}=\frac{a\cdot c}{b\cdot d} \quad , \quad \frac{a}{b}+\frac{c}{d}=\frac{a\cdot d+b\cdot c}{b\cdot d} \quad , \quad \frac{a}{b}-\frac{c}{d}=\frac{a\cdot d-b\cdot c}{b\cdot d} \quad , \quad n=\frac{n}{1}.$$

Kako mješoviti broj pretvoriti u razlomak?

$$a\frac{b}{c}=\frac{a\cdot c+b}{c}.$$

Kako računamo $\frac{a}{b}$ od x?

$$\frac{a}{b}\cdot x.$$

Zakon distribucije množenja prema zbrajanju.

$$a\cdot(b+c)=a\cdot b+a\cdot c \quad , \quad a\cdot b+a\cdot c=a\cdot(b+c).$$

Skratiti razlomak znači brojnik i nazivnik tog razlomka podijeliti istim brojem različitim od nule i jedinice.

$$\frac{a\cdot n}{b\cdot n}=\frac{a}{b} \; , \; n\neq 0 \; , \; n\neq 1.$$

(Ne) pravi razlomak

$\frac{a}{b}$ je pravi razlomak ako je a < b , $\frac{a}{b}$ je nepravi razlomak ako je a > b

Primjeri $\frac{7}{9}$ je pravi razlomak , $\frac{9}{5}$ je nepravi razlomak

Mješoviti broj

zbroj prirodnog broja i pravog razlomka , $a+\frac{b}{c}=\frac{a\cdot c+b}{c}$, $c\neq 0$

Primjer $2+\frac{1}{5}=2\frac{1}{5}=\frac{2\cdot 5+1}{5}=\frac{11}{5}$, $3\frac{2}{7}=\frac{3\cdot 7+2}{7}=\frac{23}{7}$

Kako nepravi razlomak zapisati kao mješoviti broj

$$\left.\begin{array}{l} \text{dijelimo brojnik s nazivnikom} \\ \text{dobiveni kvocijent je cijeli broj} \\ \text{ostatak je brojnik pravog razlomka} \end{array}\right\} \Rightarrow \frac{23}{5}=\left[\begin{array}{l} 23:5=4 \\ 3 \end{array}\right]=4\frac{3}{5}$$

Traka je duga

$$5\frac{1}{2}=\frac{5\cdot 2+1}{2}=\frac{10+1}{2}=\frac{11}{2}\ m.$$

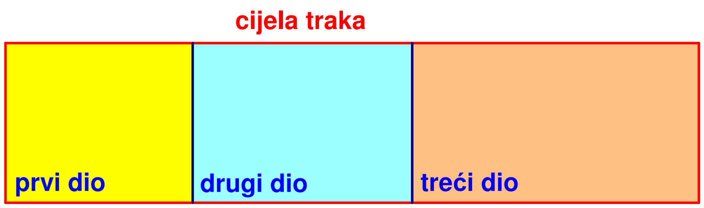
Prvi dio je $\frac{1}{4}$ cijele trake.

$$\frac{11}{2}\cdot\frac{1}{4}=\frac{11}{8}=\begin{bmatrix} 11:8=1 \\ 3 \end{bmatrix}=1\frac{3}{8}\ m.$$

Drugi dio je $\frac{4}{5}$ prvog dijela.

$$\frac{11}{8}\cdot\frac{4}{5}=\frac{11}{8}\cdot\frac{4}{5}=\frac{11}{2}\cdot\frac{1}{5}=\frac{11}{10}=\begin{bmatrix} 11:10=1 \\ 1 \end{bmatrix}=1\frac{1}{10}\ m.$$

Duljinu trećeg dijela dobijemo oduzimanjem od duljine cijele trake duljine prvog i drugog dijela.



$$\frac{11}{2}-\left(\frac{11}{8}+\frac{11}{10}\right).$$

Izračunat ćemo na dva načina, jedan posvećen Lauri, a drugi njezinoj sestrici. ☺

1.inačica

$$\frac{11}{2}-\left(\frac{11}{8}+\frac{11}{10}\right)=\frac{11}{2}-\frac{11\cdot 5+11\cdot 4}{40}=\frac{11}{2}-\frac{55+44}{40}=\frac{11}{2}-\frac{99}{40}=$$

$$=\frac{11\cdot 20-99\cdot 1}{40}=\frac{220-99}{40}=\frac{121}{40}=\begin{bmatrix} 121:40=3 \\ 1 \end{bmatrix}=3\frac{1}{40}\ m.$$

2.inačica

$$\frac{11}{2}-\left(\frac{11}{8}+\frac{11}{10}\right)=\frac{11}{2}-\frac{11}{8}-\frac{11}{10}=11\cdot\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{8}-\frac{1}{10}\right)=11\cdot\frac{1\cdot 20-1\cdot 5-1\cdot 4}{40}=$$

$$=11\cdot\frac{20-5-4}{40}=11\cdot\frac{11}{40}=\frac{11}{1}\cdot\frac{11}{40}=\frac{121}{40}=\begin{bmatrix} 121:40=3 \\ 1 \end{bmatrix}=3\frac{1}{40}\ m.$$

Vježba 413

Nema zadatka za vježbu!

Rezultat:

Zadatak 414 (Ema, gimnazija)

Dokazati da broj $n^2+8\cdot n+15$ nije djeljiv brojem n + 4, gdje je n prirodan broj.

Rješenje 414

Ponovimo!

$$a^2+2\cdot a\cdot b+b^2=(a+b)^2\quad,\quad a^1=a\quad,\quad a^n:a^m=a^{n-m}.$$

Skup prirodnih brojeva označavamo slovom N, a zapisujemo

$$N=\{1,\ 2,\ 3,\ 4,\ 5,\ \ldots,\ n-1,\ n,\ n+1,\ \ldots\}.$$

Za prirodan broj a kažemo da je djeljiv s prirodnim brojem b ako postoji prirodan broj q tako da vrijedi

$$a=q\cdot b.$$

Zakon distribucije množenja prema zbrajanju.

$$a\cdot(b+c)=a\cdot b+a\cdot c\quad,\quad a\cdot b+a\cdot c=a\cdot(b+c).$$

1.inačica

Preoblikujemo trinom.

$$n^2+8\cdot n+15=n^2+3\cdot n+5\cdot n+15=\left(n^2+3\cdot n\right)+\left(5\cdot n+15\right)=$$

$$=n\cdot\left(n+3\right)+5\cdot\left(n+3\right)=\left(n+3\right)\cdot\left(n+5\right).$$

Trinom smo rastavili na dva faktora, ali ni jedan nije n + 4.

2.inačica

Preoblikujemo trinom.

$$n^2+8\cdot n+15=n^2+8\cdot n+16-1=\left(n^2+8\cdot n+16\right)-1=\left(n+4\right)^2-1.$$

Trinom se ne može podijeliti brojem n + 4 jer postoji ostatak.

Vježba 414

Dokazati da broj $n^2+8\cdot n+15$ nije djeljiv brojem n + 2, gdje je n prirodan broj.

Rezultat: Dokaz analogan.

Zadatak 415 (Tom, gimnazija)

Dokazati da je $n!=\frac{\left(2\cdot n\right)!!}{2^n}$.

Rješenje 415

Ponovimo!

$$n=\frac{n}{1}.$$

Skup prirodnih brojeva označavamo slovom N, a zapisujemo

$$N=\left\{1,\ 2,\ 3,\ 4,\ 5,\ \ldots,\ n-1,\ n,\ n+1,\ \ldots\right\}.$$

Prirodni brojevi dijele se na parne i neparne brojeve. Parni brojevi su oni brojevi koji su djeljivi sa 2, a neparni su oni koji nisu djeljivi sa 2.

Da je neki prirodan broj m paran znači da se može napisati u obliku

$$m=2\cdot\left(\text{neki prirodan broj}\right)\quad,\quad m=2\cdot k\ ,\ k\in N.$$

Umnožak prvih n prirodnih brojeva označavamo posebnim simbolom

$$n!=1\cdot 2\cdot 3\cdot 4\cdot\ \ldots\ \cdot\left(n-2\right)\cdot\left(n-1\right)\cdot n.$$

Broj n! čitamo "en faktorijela". Tako na primjer, vrijedi

1! = 1,
2! = 1 · 2,
3! = 1 · 2 · 3,
4! = 1 · 2 · 3 · 4,
5! = 1 · 2 · 3 · 4 · 5,
6! = 1 · 2 · 3 · 4 · 5 · 6 itd.

Umnožak parnih brojeva zapisujemo ovako:

$$2\cdot 4\cdot 6\cdot 8\cdot\ \ldots\ \cdot\left(2\cdot n\right)=\left(2\cdot n\right)!!.$$

Proširiti razlomak znači brojnik i nazivnik tog razlomka pomnožiti istim brojem različitim od nule i jedinice

$$\frac{a}{b}=\frac{a\cdot n}{b\cdot n}\ ,\ n\neq 0\ ,\ n\neq 1.$$

$$n!=\frac{n!}{1}=\left[\begin{array}{l}\text{proširimo}\\ \text{brojem }2^n\end{array}\right]=\frac{n!\cdot 2^n}{2^n}=\frac{\left(1\cdot 2\cdot 3\cdot 4\cdot\ \ldots\ \cdot n\right)\cdot 2^n}{2^n}=$$

$$=\frac{(2\cdot 1)\cdot(2\cdot 2)\cdot(2\cdot 3)\cdot(2\cdot 4)\cdot\ ...\ \cdot(2\cdot n)}{2^{n}}=\frac{2\cdot 4\cdot 6\cdot 8\cdot\ ...\ \cdot(2\cdot n)}{2^{n}}=\frac{(2\cdot n)!!}{2^{n}}.$$

Vježba 415

Dokazati da je $2^{n}\cdot n!=(2\cdot n)!!$.

Rezultat: Dokaz analogan.

Zadatak 416 (Dora, gimnazija)

Aritmetička sredina 27 brojeva je 72. Ako su dva od tih 27 brojeva brojevi 13 i 41, kolika je aritmetička sredina ostalih 25 brojeva?

Rješenje 416

Ponovimo!

Skup prirodnih brojeva označavamo slovom N, a zapisujemo

$$N=\{1,\ 2,\ 3,\ 4,\ 5,\ ...\ ,\ n-1,\ n,\ n+1,\ ...\}.$$

Neka je dan skup n pozitivnih brojeva $\{a_1,\ a_2,\ a_3,\ ...\ ,\ a_n\}$. Tada je aritmetička sredina A_n brojeva a_1, a_2, a_3, … , a_n definirana izrazom

$$A_n=\frac{a_1+a_2+a_3+\ ...\ +a_n}{n}.$$

Neka je x zbroj 27 brojeva čija je aritmetička sredina jednaka 72. Tada vrijedi jednadžba:

$$\frac{x}{27}=72\ \Rightarrow\ \frac{x}{27}=72\ /\cdot 27\ \Rightarrow\ x=72\cdot 27\ \Rightarrow\ x=1944.$$

Aritmetička sredina 25 brojeva (kada se uklone brojevi 13 i 41) iznosi:

$$\frac{x-13-41}{25}=[\,x=1944\,]=\frac{1944-13-41}{25}=\frac{1944-54}{25}=75.6.$$

Vježba 416

Aritmetička sredina 27 brojeva je 72. Ako su dva od tih 27 brojeva brojevi 14 i 40, kolika je aritmetička sredina ostalih 25 brojeva?

Rezultat: 75.6.

Zadatak 417 (Dora, gimnazija)

Aritmetička sredina 10 različitih prirodnih brojeva jednaka je 11. Koju najveću moguću vrijednost može imati neki od tih brojeva?

Rješenje 417

Ponovimo!

$$1+2+3+\ ...\ +n=\frac{n\cdot(n+1)}{2}.$$

Skup prirodnih brojeva označavamo slovom N, a zapisujemo

$$N=\{1,\ 2,\ 3,\ 4,\ 5,\ ...\ ,\ n-1,\ n,\ n+1,\ ...\}.$$

Neka je dan skup n pozitivnih brojeva $\{a_1,\ a_2,\ a_3,\ ...\ ,\ a_n\}$. Tada je aritmetička sredina A_n brojeva a_1, a_2, a_3, … , a_n definirana izrazom

$$A_n=\frac{a_1+a_2+a_3+\ ...\ +a_n}{n}.$$

Skratiti razlomak znači brojnik i nazivnik tog razlomka podijeliti istim brojem različitim od nule i jedinice

$$\frac{a\cdot n}{b\cdot n}=\frac{a}{b}\ ,\ n\neq 0\ ,\ n\neq 1.$$

Budući da prirodni brojevi moraju biti različiti, uzet ćemo prvih devet uzastopnih brojeva (to će biti najmanji zbroj) i njima pribrojiti broj x najveće moguće vrijednosti. Tada dobijemo jednadžbu:

$$\frac{1+2+3+\ldots+9+x}{10}=11 \Rightarrow \frac{1+2+3+\ldots+9+x}{10}=11 \,/\cdot 10 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 1+2+3+\ldots+9+x=110 \Rightarrow \frac{9\cdot(9+1)}{2}+x=110 \Rightarrow \frac{9\cdot 10}{2}+x=110 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \frac{9\cdot 10}{2}+x=110 \Rightarrow 9\cdot 5+x=110 \Rightarrow 45+x=110 \Rightarrow x=110-45 \Rightarrow x=65.$$

Vježba 417

Aritmetička sredina 10 različitih prirodnih brojeva jednaka je 12. Koju najveću moguću vrijednost može imati neki od tih brojeva?

Rezultat: 75.

Zadatak 418 (Boris, gimnazija)

Asterix ☺ je tijekom sedam dana trčao prosječno 5 km dnevno. Ako je svaki dan trčao najmanje 3.5 km, koliko je najviše kilometara mogao trčati u nekom danu?

Rješenje 418

Ponovimo!

Skup prirodnih brojeva označavamo slovom N, a zapisujemo

$$N=\{1,\ 2,\ 3,\ 4,\ 5,\ \ldots,\ n-1,\ n,\ n+1,\ \ldots\}.$$

Neka je dan skup n pozitivnih brojeva $\{a_1, a_2, a_3, \ldots, a_n\}$. Tada je aritmetička sredina A_n brojeva $a_1, a_2, a_3, \ldots, a_n$ definirana izrazom

$$A_n=\frac{a_1+a_2+a_3+\ldots+a_n}{n}.$$

Pretpostavimo da je Asterix u šest dana svaki dan trčao najmanje 3.5 km, a sedmi dan trčao je maksimalno x kilometara. Tada vrijedi jednadžba:

$$\frac{6\cdot 3.5+x}{7}=5 \Rightarrow \frac{21+x}{7}=5 \Rightarrow \frac{21+x}{7}=5 \,/\cdot 7 \Rightarrow 21+x=35 \Rightarrow x=35-21 \Rightarrow x=14.$$

Najviše je mogao trčati 14 km u jednom danu.

Vježba 418

Asterix je tijekom sedam dana trčao prosječno 5 km dnevno. Ako je svaki dan trčao najmanje 4 km, koliko je najviše kilometara mogao trčati u nekom danu?

Rezultat: 11 km.

Zadatak 419 (Vesna, gimnazija)

U I^c razredu je 28 učenika. Na pismenom ispitu iz matematike prosjek osvojenih bodova iznosio je 15. Ako je 5 učenika imalo 20 bodova, a 3 učenika imali su po 18 bodova, koliki je prosjek ostalih?

Rješenje 419

Ponovimo!

Skup prirodnih brojeva označavamo slovom N, a zapisujemo

$$N = \{1,\ 2,\ 3,\ 4,\ 5,\ \dots,\ n-1,\ n,\ n+1,\ \dots\}.$$

Neka je dan skup n pozitivnih brojeva $\{a_1, a_2, a_3, \ \dots\ , a_n\}$. Tada je aritmetička sredina A_n brojeva $a_1, a_2, a_3, \dots, a_n$ definirana izrazom

$$A_n = \frac{a_1 + a_2 + a_3 + \ \dots\ + a_n}{n}.$$

Neka je x ukupan broj osvojenih bodova 28 učenika. Budući da je prosjek osvojenih bodova 15, vrijedi jednadžba:

$$\frac{x}{28} = 15 \Rightarrow \frac{x}{28} = 15 \ / \cdot 28 \Rightarrow x = 420.$$

Ako izdvojimo 5 učenika sa po 20 bodova i 3 učenika sa po 18 bodova, prosjek bodova ostalih 20 učenika iznosi:

$$\frac{x - 5 \cdot 20 - 3 \cdot 18}{20} = [\,x = 420\,] = \frac{420 - 100 - 54}{20} = \frac{266}{20} = 13.3.$$

Vježba 419

U I^c razredu je 28 učenika. Na pismenom ispitu iz fizike prosjek osvojenih bodova iznosio je 15. Ako je 4 učenika imalo 20 bodova, a 4 učenika imali su po 18 bodova, koliki je prosjek ostalih?

Rezultat: 13.4.

Zadatak 420 (Vesna, gimnazija)

U skupini od 32 osobe prosječna starost iznosi 25 godina. Ako se izdvoje najmlađa osoba, kojoj je 15 godina i najstarija osoba kojoj je 35 godina, koliki je prosjek godina ostalih?

Rješenje 420

Ponovimo!

Skup prirodnih brojeva označavamo slovom N, a zapisujemo

$$N = \{1,\ 2,\ 3,\ 4,\ 5,\ \dots,\ n-1,\ n,\ n+1,\ \dots\}.$$

Neka je dan skup n pozitivnih brojeva $\{a_1, a_2, a_3, \ \dots\ , a_n\}$. Tada je aritmetička sredina A_n brojeva $a_1, a_2, a_3, \dots, a_n$ definirana izrazom

$$A_n = \frac{a_1 + a_2 + a_3 + \ \dots\ + a_n}{n}.$$

Skratiti razlomak znači brojnik i nazivnik tog razlomka podijeliti istim brojem različitim od nule i jedinice

$$\frac{a \cdot n}{b \cdot n} = \frac{a}{b} \ , \ n \neq 0 \ , \ n \neq 1.$$

Neka je x zbroj godina starosti 32 osobe. Budući da prosječna starost iznosi 25 godina, vrijedi jednadžba:

$$\frac{x}{32} = 25 \Rightarrow \frac{x}{32} = 25 \ / \cdot 32 \Rightarrow x = 800.$$

Ako se izdvoje godine najmlađe i najstarije osobe (15 i 35 godina) prosjek godina ostalih 30 osoba iznosi:

$$\frac{x - 15 - 35}{30} = [\,x = 800\,] = \frac{800 - 15 - 35}{30} = \frac{800 - 50}{30} = \frac{750}{30} = \frac{750}{30} = 25.$$

Vježba 420

U skupini od 32 osobe prosječna starost iznosi 25 godina. Ako se izdvoje najmlađa osoba, kojoj je 14 godina i najstarija osoba kojoj je 36 godina, koliki je prosjek godina ostalih?

Rezultat: 25.