Zadatak 381 (Valerija, srednja škola)

Dokaži ako je $a+b \geq 1$, onda je $a^2+b^2 \geq \frac{1}{2}$.

Rješenje 381

Ponovimo!

$$(x+y)^2=x^2+2\cdot x\cdot y+y^2 \quad , \quad a^2 \geq 0 \ , \ a \in R \quad , \quad (x-y)^2=x^2-2\cdot x\cdot y+y^2.$$

$$\left.\begin{array}{l} a \geq b \\ c \geq d \end{array}\right\} \Rightarrow a+c \geq b+d \quad , \quad a \geq b \ , \ c>0 \Rightarrow \frac{a}{c} \geq \frac{b}{c}.$$

Zakon distribucije množenja prema zbrajanju.

$$a\cdot(b+c)=a\cdot b+a\cdot c \quad , \quad a\cdot b+a\cdot c=a\cdot(b+c).$$

Postavimo dvije pretpostavke.

$$\left.\begin{array}{l} a+b \geq 1 \\ (a-b)^2 \geq 0 \end{array}\right\} \Rightarrow \left.\begin{array}{l} a+b \geq 1 \ /^2 \\ a^2-2\cdot a\cdot b+b^2 \geq 0 \end{array}\right\} \Rightarrow \left.\begin{array}{l} (a+b)^2 \geq 1^2 \\ a^2-2\cdot a\cdot b+b^2 \geq 0 \end{array}\right\} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \left.\begin{array}{l} a^2+2\cdot a\cdot b+b^2 \geq 1 \\ a^2-2\cdot a\cdot b+b^2 \geq 0 \end{array}\right\} \Rightarrow \left[\begin{array}{l} \text{zbrojimo} \\ \text{nejednadžbe} \end{array}\right] \Rightarrow$$

$$\Rightarrow a^2+2\cdot a\cdot b+b^2+a^2-2\cdot a\cdot b+b^2 \geq 1+0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow a^2+2\cdot a\cdot b+b^2+a^2-2\cdot a\cdot b+b^2 \geq 1 \Rightarrow a^2+b^2+a^2+b^2 \geq 1 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 2\cdot a^2+2\cdot b^2 \geq 1 \Rightarrow 2\cdot\left(a^2+b^2\right) \geq 1 \Rightarrow 2\cdot\left(a^2+b^2\right) \geq 1 \ /:2 \Rightarrow a^2+b^2 \geq \frac{1}{2}.$$

Vježba 381

Dokaži ako je $a+b-1 \geq 0$, onda je $a^2+b^2 \geq \frac{1}{2}$.

Rezultat: Dokaz analogan.

Zadatak 382 (Ivo, gimnazija)

Izračunati $\sqrt[3]{3^{3^3}}$.

Rješenje 382

Ponovimo!

$$\sqrt[n]{a^m}=a^{\frac{m}{n}}.$$

Skratiti razlomak znači brojnik i nazivnik tog razlomka podijeliti istim brojem različitim od nule i jedinice

$$\frac{a\cdot n}{b\cdot n}=\frac{a}{b} \ , \ n \neq 0 \ , \ n \neq 1.$$

$$\sqrt[3]{3^{3^3}}=\sqrt[3]{3^{27}}=3^{\frac{27}{3}}=3^{\frac{27}{3}}=3^9=19683.$$

Vježba 382

Izračunati $\sqrt[9]{3^{3^3}}$.

Rezultat: 27.

Zadatak 383 (Ivo, gimnazija)

Izračunati: $\dfrac{2^{2014}-2^{2013}}{2^{2013}-2^{2012}}$.

Rješenje 383

Ponovimo!

$$a^1=a \quad , \quad a^n:a^m=a^{n-m} \quad , \quad a^{-n}=\frac{1}{a^n} \quad , \quad n=\frac{n}{1}.$$

$$\frac{a}{b}-\frac{c}{d}=\frac{a\cdot d-b\cdot c}{b\cdot d} \quad , \quad \frac{\frac{a}{b}}{\frac{c}{d}}=\frac{a\cdot d}{b\cdot c}.$$

Skratiti razlomak znači brojnik i nazivnik tog razlomka podijeliti istim brojem različitim od nule i jedinice

$$\frac{a\cdot n}{b\cdot n}=\frac{a}{b} \ , \ n\neq 0 \ , \ n\neq 1.$$

1.inačica

$$\frac{2^{2014}-2^{2013}}{2^{2013}-2^{2012}}=\frac{2^{2013}\cdot 2^1-2^{2013}}{2^{2013}-2^{2013}\cdot 2^{-1}}=\frac{2^{2013}\cdot\left(2^1-1\right)}{2^{2013}\cdot\left(1-2^{-1}\right)}=\frac{2^{2013}\cdot\left(2^1-1\right)}{2^{2013}\cdot\left(1-2^{-1}\right)}=$$

$$=\frac{2^1-1}{1-2^{-1}}=\frac{2-1}{1-\frac{1}{2}}=\frac{1}{\frac{1}{1}-\frac{1}{2}}=\frac{\frac{1}{1}}{\frac{2-1}{2}}=\frac{\frac{1}{1}}{\frac{1}{2}}=\frac{2}{1}=2.$$

2.inačica

$$\frac{2^{2014}-2^{2013}}{2^{2013}-2^{2012}}=\frac{2^{2012}\cdot 2^2-2^{2012}\cdot 2^1}{2^{2012}\cdot 2^1-2^{2012}}=\frac{2^{2012}\cdot\left(2^2-2^1\right)}{2^{2012}\cdot\left(2^1-1\right)}=\frac{2^{2012}\cdot\left(2^2-2^1\right)}{2^{2012}\cdot\left(2^1-1\right)}=$$

$$=\frac{2^2-2^1}{2^1-1}=\frac{4-2}{2-1}=\frac{2}{1}=2.$$

Vježba 383

Izračunati: $\dfrac{2^{2013}-2^{2014}}{2^{2012}-2^{2013}}$.

Rezultat: 2.

Zadatak 384 (Lucija, srednja škola)

Ako je $\frac{x}{a}=\frac{y}{b}=\frac{z}{c}$, onda je $\left(x^2+y^2+z^2\right)\cdot\left(a^2+b^2+c^2\right)=\left(a\cdot x+b\cdot y+c\cdot z\right)^2$.

Dokaži!

Rješenje 384

Ponovimo!

$$(a\cdot b)^n=a^n\cdot b^n \quad , \quad a^1=a \quad , \quad a^n\cdot a^m=a^{n+m}.$$

Zakon distribucije množenja prema zbrajanju.

$$a\cdot(b+c)=a\cdot b+a\cdot c \quad , \quad a\cdot b+a\cdot c=a\cdot(b+c).$$

Neka je

$$\frac{x}{a}=\frac{y}{b}=\frac{z}{c} \Rightarrow \left.\begin{matrix} \frac{x}{a}=k \\ \frac{y}{b}=k \\ \frac{z}{c}=k \end{matrix}\right\} \Rightarrow \left.\begin{matrix} \frac{x}{a}=k \ / \cdot a \\ \frac{y}{b}=k \ / \cdot b \\ \frac{z}{c}=k \ / \cdot c \end{matrix}\right\} \Rightarrow \left.\begin{matrix} x=k\cdot a \\ y=k\cdot b \\ z=k\cdot c \end{matrix}\right\}.$$

Sada vrijedi:

$$\left(x^2+y^2+z^2\right)\cdot\left(a^2+b^2+c^2\right)=\left((k\cdot a)^2+(k\cdot b)^2+(k\cdot c)^2\right)\cdot\left(a^2+b^2+c^2\right)=$$

$$=\left(k^2\cdot a^2+k^2\cdot b^2+k^2\cdot c^2\right)\cdot\left(a^2+b^2+c^2\right)=k^2\cdot\left(a^2+b^2+c^2\right)\cdot\left(a^2+b^2+c^2\right)=$$

$$=k^2\cdot\left(a^2+b^2+c^2\right)^2=\left(k\cdot\left(a^2+b^2+c^2\right)\right)^2=\left(k\cdot a^2+k\cdot b^2+k\cdot c^2\right)^2=$$

$$=(a\cdot k\cdot a+b\cdot k\cdot b+c\cdot k\cdot c)^2=(a\cdot(k\cdot a)+b\cdot(k\cdot b)+c\cdot(k\cdot c))^2=$$

$$=\begin{bmatrix} x=k\cdot a \\ y=k\cdot b \\ z=k\cdot c \end{bmatrix}=(a\cdot x+b\cdot y+c\cdot z)^2.$$

Vježba 384

Ako je $\frac{x}{a}=\frac{y}{b}=\frac{z}{c}$, onda je $\left(a^2+b^2+c^2\right)\cdot\left(x^2+y^2+z^2\right)=(a\cdot x+b\cdot y+c\cdot z)^2$.

Dokaži!

Rezultat: Dokaz analogan.

Zadatak 385 (Helena, gimnazija)

Ako je $x\cdot y+y\cdot z+z\cdot x=1$, onda je $x^2+y^2+z^2\geq 1$. Dokaži!

Rješenje 385

Ponovimo!

$$a^2\geq 0\ ,\ a\in R \quad , \quad (a-b)^2=a^2-2\cdot a\cdot b+b^2 \quad , \quad a\geq b\ ,\ c>0 \Rightarrow \frac{a}{c}\geq\frac{b}{c}.$$

Zakon distribucije množenja prema zbrajanju.

$$a\cdot(b+c)=a\cdot b+a\cdot c \quad , \quad a\cdot b+a\cdot c=a\cdot(b+c).$$

Očito je da vrijedi:

$$(x-y)^2+(y-z)^2+(z-x)^2\geq 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow x^2-2\cdot x\cdot y+y^2+y^2-2\cdot y\cdot z+z^2+z^2-2\cdot z\cdot x+x^2\geq 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 2\cdot x^2+2\cdot y^2+2\cdot z^2-2\cdot x\cdot y-2\cdot y\cdot z-2\cdot z\cdot x\geq 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 2\cdot x^2+2\cdot y^2+2\cdot z^2-2\cdot x\cdot y-2\cdot y\cdot z-2\cdot z\cdot x\geq 0 \ /:2 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow x^2+y^2+z^2-x\cdot y-y\cdot z-z\cdot x\geq 0 \Rightarrow x^2+y^2+z^2-(x\cdot y+y\cdot z+z\cdot x)\geq 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow [x\cdot y+y\cdot z+z\cdot x=1] \Rightarrow x^2+y^2+z^2-1\geq 0 \Rightarrow x^2+y^2+z^2\geq 1.$$

Dokaz gotov.

Vježba 385

Ako je $x \cdot y + y \cdot z + z \cdot x = 2$, onda je $x^2 + y^2 + z^2 \geq 2$. Dokaži!

Rezultat: Dokaz analogan.

Zadatak 386 (Petar, srednja škola)

Što možemo zaključiti o brojevima a, b, c ako vrijedi nejednakost $|a-b|+|b-c|+|c-a|>0$?

Rješenje 386

Ponovimo!

Za realni broj x njegova je apsolutna vrijednost (modul) broj $|x|$ koji određujemo na ovaj način:

$$|x| = \begin{cases} x, & x \geq 0 \\ -x, & x < 0. \end{cases}$$

Ako je broj x pozitivan ili nula, tada je on jednak svojoj apsolutnoj vrijednosti. Za svaki x, x ≥ 0, vrijedi $|x| = x$.

Ako je x negativan broj, njegova apsolutna vrijednost je suprotan broj – x koji je pozitivan. Za svaki x, x < 0, je $|x| = -x$.

$$|x| = 0 \Rightarrow x = 0 \quad , \quad |x-y| = 0 \Rightarrow x = y.$$

Ako su brojevi međusobno jednaki

$$a = b = c,$$

vrijedi

$$|a-b|+|b-c|+|c-a| = 0+0+0 = 0.$$

Budući da je

$$|a-b|+|b-c|+|c-a| > 0,$$

barem dva broja moraju biti međusobno različita.

Vježba 386

Što možemo zaključiti o brojevima a, b, c, d ako vrijedi jednakost $|a-b|+|c-d|=0$?

Rezultat: $a = b$ i $c = d$.

Zadatak 387 (Petar, srednja škola)

Što možemo zaključiti o brojevima a, b, c ako vrijedi $(a-b)\cdot(b-c)\cdot(c-a) \neq 0$?

Rješenje 387

Ponovimo!

Da bi umnožak bio jednak nuli, dovoljno je da jedan faktor bude jednak nuli.

$$a \cdot b = 0 \Leftrightarrow a = 0 \text{ ili } b = 0 \text{ ili } a = b = 0.$$

Sva tri broja međusobno su različita.

$$(a-b)\cdot(b-c)\cdot(c-a) \neq 0 \Rightarrow a \neq b \neq c.$$

Vježba 387

Što možemo zaključiti o brojevima a, b, c ako vrijedi jednakost $(a-b)\cdot(a-c)=0$?

Rezultat: $a = b$ ili $a = c$.

Zadatak 388 (Maturantica, ekonomska škola)

Izračunaj: $\dfrac{4^{2.5} \cdot 8^{-\frac{7}{3}}}{\left(1-\frac{1}{2}\right)^{\frac{2}{3}} \cdot \sqrt[3]{\frac{1}{16}}}$.

Rješenje 388

Ponovimo!

$$\left(a^{n}\right)^{m}=a^{n\cdot m} \quad , \quad n=\frac{n}{1} \quad , \quad \frac{a}{b}-\frac{c}{d}=\frac{a\cdot d-b\cdot c}{b\cdot d} \quad , \quad a^{n}\cdot a^{m}=a^{n+m} \quad , \quad a^{1}=a.$$

$$a^{-n}=\frac{1}{a^{n}} \quad , \quad \sqrt[n]{a^{m}}=a^{\frac{m}{n}} \quad , \quad \frac{a}{n}+\frac{b}{n}=\frac{a+b}{n}.$$

Skratiti razlomak znači brojnik i nazivnik tog razlomka podijeliti istim brojem različitim od nule i jedinice

$$\frac{a\cdot n}{b\cdot n}=\frac{a}{b} \ , \ n\neq 0 \ , \ n\neq 1.$$

$$\frac{4^{2.5}\cdot 8^{-\frac{7}{3}}}{\left(1-\frac{1}{2}\right)^{\frac{2}{3}}\cdot\sqrt[3]{\frac{1}{16}}}=\frac{\left(2^{2}\right)^{2.5}\cdot\left(2^{3}\right)^{-\frac{7}{3}}}{\left(\frac{1}{1}-\frac{1}{2}\right)^{\frac{2}{3}}\cdot\sqrt[3]{\frac{1}{2^{4}}}}=\frac{2^{-2}}{\left(\frac{2-1}{2}\right)^{\frac{2}{3}}\cdot\sqrt[3]{2^{-4}}}=\frac{2^{-2}}{\left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{2}{3}}\cdot 2^{-\frac{4}{3}}}=\frac{2^{-2}}{\left(2^{-1}\right)^{\frac{2}{3}}\cdot 2^{-\frac{4}{3}}}=$$

$$=\frac{2^{-2}}{2^{-\frac{2}{3}}\cdot 2^{-\frac{4}{3}}}=\frac{2^{-2}}{2^{-\frac{6}{3}}}=\frac{2^{-2}}{2^{-\frac{6}{3}}}=\frac{2^{-2}}{2^{-2}}=\frac{2^{-2}}{2^{-2}}=1.$$

Vježba 388

Izračunaj: $\dfrac{4^{2.5}}{\left(1-\frac{1}{2}\right)^{\frac{2}{3}}\cdot 8^{\frac{7}{3}}\cdot\sqrt[3]{\frac{1}{16}}}.$

Rezultat: 1.

Zadatak 389 (Branimir, gimnazija)

Vrijednost brojevnog izraza $\left(x^{2}-1\right)^{3}\cdot\left(x^{2}+1\right)^{3}$ za $x=\sqrt[4]{3}$ jednaka je:

$A.\ 8 \qquad B.\ 3\cdot\sqrt{3} \qquad C.\ 4 \qquad D.\ 2\cdot\sqrt{2}$

Rješenje 389

Ponovimo!

$$a^{n}\cdot b^{n}=(a\cdot b)^{n} \quad , \quad (a-b)\cdot(a+b)=a^{2}-b^{2} \quad , \quad \left(a^{n}\right)^{m}=a^{n\cdot m} \quad , \quad \sqrt[n]{a^{n}}=a \ , \ a\geq 0.$$

$$\left(\sqrt[n\cdot m]{a}\right)^{m}=\sqrt[n]{a} \quad , \quad \left(\sqrt{a}\right)^{2}=a.$$

1.inačica

$$\left(x^{2}-1\right)^{3}\cdot\left(x^{2}+1\right)^{3}=\left(\left(x^{2}-1\right)\cdot\left(x^{2}+1\right)\right)^{3}=\left(\left(x^{2}\right)^{2}-1\right)^{3}=\left(x^{4}-1\right)^{3}=$$

$$=\left[\ x=\sqrt[4]{3}\ \right]=\left(\left(\sqrt[4]{3}\right)^{4}-1\right)^{3}=(3-1)^{3}=2^{3}=8.$$

Odgovor je pod A.

2.inačica

$$\left(x^{2}-1\right)^{3}\cdot\left(x^{2}+1\right)^{3}=\left[\ x=\sqrt[4]{3}\ \right]=\left(\left(\sqrt[4]{3}\right)^{2}-1\right)^{3}\cdot\left(\left(\sqrt[4]{3}\right)^{2}+1\right)^{3}=\left(\sqrt{3}-1\right)^{3}\cdot\left(\sqrt{3}+1\right)^{3}=$$

$$=\left(\left(\sqrt{3}-1\right)\cdot\left(\sqrt{3}+1\right)\right)^3=\left(\left(\sqrt{3}\right)^2-1\right)^3=(3-1)^3=2^3=8.$$

Odgovor je pod A.

Vježba 389

Vrijednost brojevnog izraza $\left(x^2-1\right)^3\cdot\left(x^2+1\right)^3$ za $x=\sqrt{3}$ jednaka je:

$A.\ 16 \quad B.\ 32 \quad C.\ 64 \quad D.\ 512$

Rezultat: D.

Zadatak 390 (Antun, gimnazija)

Ako je $4^x+4^{-x}=34$, onda je 2^x+2^{-x} jednako:

$A.\ 4 \quad B.\ 8 \quad C.\ 6 \quad D.\ 9$

Rješenje 390

Ponovimo!

$$(a+b)^2=a^2+2\cdot a\cdot b+b^2 \quad , \quad \left(a^n\right)^m=\left(a^m\right)^n=a^{n\cdot m}.$$

$$a^n\cdot a^m=a^{n+m} \quad , \quad a^\circ=1.$$

Neka je

$$y=2^x+2^{-x}.$$

Kvadriranjem dobije se:

$$y=2^x+2^{-x} \Rightarrow y=2^x+2^{-x}\ /^2 \Rightarrow y^2=\left(2^x+2^{-x}\right)^2 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow y^2=\left(2^x\right)^2+2\cdot 2^x\cdot 2^{-x}+\left(2^{-x}\right)^2 \Rightarrow y^2=\left(2^2\right)^x+2\cdot 2^{x-x}+\left(2^2\right)^{-x} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow y^2=4^x+2\cdot 2^\circ+4^{-x} \Rightarrow y^2=4^x+2\cdot 1+4^{-x} \Rightarrow y^2=4^x+2+4^{-x} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow y^2=4^x+4^{-x}+2 \Rightarrow \left[\begin{array}{c}\text{uvjet}\\ 4^x+4^{-x}=34\end{array}\right] \Rightarrow y^2=34+2 \Rightarrow y^2=36 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow y^2=36\ /\sqrt{\ } \Rightarrow y=\sqrt{36} \Rightarrow y=6.$$

Odgovor je pod C.

Vježba 390

Ako je $4^x+4^{-x}=23$, onda je 2^x+2^{-x} jednako:

$A.\ 5 \quad B.\ 7 \quad C.\ 6 \quad D.\ 9$

Rezultat: A.

Zadatak 391 (Iva, strukovna škola)

Zbroj četiriju uzastopnih prirodnih brojeva iznosi 26. Koliki je umnožak tih četiriju brojeva?

$A.\ 360 \quad B.\ 840 \quad C.\ 1680 \quad D.\ 3024$

Rješenje 391

Ponovimo!

Skup prirodnih brojeva označavamo slovom N, a zapisujemo

$$N=\{1,\ 2,\ 3,\ 4,\ 5,\ \ldots,\ n-1,\ n,\ n+1,\ \ldots\}.$$

Prethodnik prirodnog broja n, n ≠ 1, je prirodni broj n – 1.
Sljedbenik prirodnog broja n je prirodni broj n + 1.
Zakon distribucije množenja prema zbrajanju.

$$a\cdot(b+c)=a\cdot b+a\cdot c \quad , \quad a\cdot b+a\cdot c=a\cdot(b+c).$$

1.inačica

Neka je n prirodan broj. Rečenicu "Zbroj četiriju uzastopnih prirodnih brojeva iznosi 26." možemo zapisati u obliku jednadžbe.

$$n+(n+1)+(n+2)+(n+3)=26 \Rightarrow n+n+1+n+2+n+3=26 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow n+n+n+n=26-1-2-3 \Rightarrow 4\cdot n=20 \Rightarrow 4\cdot n=20 \;/:4 \Rightarrow n=5.$$

To su brojevi:

$$n,\ n+1,\ n+2,\ n+3 \Rightarrow [\,n=5\,] \Rightarrow 5,\ 6,\ 7,\ 8.$$

Njihov umnožak je

$$5\cdot 6\cdot 7\cdot 8=1680.$$

Odgovor je pod C.

2.inačica

Neka je n prirodan broj. Rečenicu "Zbroj četiriju uzastopnih prirodnih brojeva iznosi 26." možemo zapisati i na ovaj način:

$$(n-1)+n+(n+1)+(n+2)=26 \Rightarrow n-1+n+n+1+n+2=26 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow n-1+n+n+1+n+2=26 \Rightarrow n+n+n+n+2=26 \Rightarrow 4\cdot n=26-2 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 4\cdot n=24 \Rightarrow 4\cdot n=24 \;/:4 \Rightarrow n=6.$$

To su brojevi:

$$n-1,\ n,\ n+1,\ n+2 \Rightarrow [\,n=6\,] \Rightarrow 5,\ 6,\ 7,\ 8.$$

Njihov umnožak je

$$5\cdot 6\cdot 7\cdot 8=1680.$$

Odgovor je pod C.

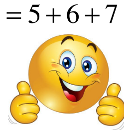
3.inačica

Pokušajmo broj 26 rastaviti na četiri uzastopna pribrojnika (prirodna broja).

$$26\neq 3+4+5+6$$

$$26\neq 4+5+6+7$$

$$26=5+6+7+8.$$



To su brojevi:

$$5,\ 6,\ 7,\ 8.$$

Njihov umnožak je

$$5\cdot 6\cdot 7\cdot 8=1680.$$

Odgovor je pod C.

Vježba 391

Zbroj četiriju uzastopnih prirodnih brojeva iznosi 18. Koliki je umnožak tih četiriju brojeva?

A. 360 *B.* 840 *C.* 1680 *D.* 3024

Rezultat: A.

Zadatak 392 (Željka, ekonomska škola)

Odredite **sve prirodne** brojeve za koje je izraz $\frac{5}{n-2}$ **prirodan** broj.

Rješenje 392

Ponovimo!

$$\frac{n}{1}=n \quad , \quad \frac{n}{n}=1.$$

Skup prirodnih brojeva označavamo slovom N, a zapisujemo

$$N=\{1, 2, 3, 4, 5, \ldots, n-1, n, n+1, \ldots\}.$$

Prosti brojevi (prim – brojevi) su prirodni brojevi djeljivi bez ostatka samo s brojem 1 i sami sa sobom, a veći od broja 1.

Razlomak, zapis racionalnoga broja u obliku *a*/*b*, pri čem su *a* i *b* cijeli brojevi, a *b* je različit od nule. (Broj *a*/*b* dobije se tako da se jedinica razdijeli u *b* jednakih dijelova i onda uzme *a* takvih dijelova). Broj *b* naziva se *nazivnik,* a broj *a brojnik* razlomka *a*/*b.* Crta između brojnika i nazivnika naziva se *razlomkova crta.* (http://www.enciklopedija.hr/natuknica.aspx?ID=52041)

Budući da je brojnik 5 prost broj, izraz $\frac{5}{n-2}$ bit će prirodan broj u dva slučaja:

- nazivnik je jednak 1

$$\frac{5}{n-2}=\frac{5}{1} \Rightarrow n-2=1 \Rightarrow n=1+2 \Rightarrow n=3$$

- nazivnik je jednak 5

$$\frac{5}{n-2}=\frac{5}{5} \Rightarrow n-2=5 \Rightarrow n=5+2 \Rightarrow n=7.$$

Vježba 392

Odredite **sve prirodne** brojeve za koje je izraz $\frac{5}{n-3}$ **prirodan** broj.

Rezultat: 4, 8.

Zadatak 393 (Matija, ekonomska škola)

Bez uporabe džepnog računala odgovori koji je od dva razlomka veći:

$$A=\frac{1234512345}{4567845678} \text{ ili } B=\frac{1234512346}{4567845679}.$$

Rješenje 393

Ponovimo!

$$a-b<0 \Rightarrow a<b \quad , \quad \frac{a}{b}-\frac{c}{d}=\frac{a\cdot d-b\cdot c}{b\cdot d}.$$

Zakon distribucije množenja prema zbrajanju.

$$a\cdot(b+c)=a\cdot b+a\cdot c \quad , \quad a\cdot b+a\cdot c=a\cdot(b+c).$$

Neka je m = 1234512345 i B = 4567845678. Tada je

$$A=\frac{m}{n} \text{ i } B=\frac{m+1}{n+1}.$$

Uočimo da je n > m > 0 => m – n < 0.

Sada izračunamo razliku brojeva A i B.

$$A-B=\frac{m}{n}-\frac{m+1}{n+1} \Rightarrow A-B=\frac{m\cdot(n+1)-n\cdot(m+1)}{n\cdot(n+1)} \Rightarrow A-B=\frac{m\cdot n+m-n\cdot m-n}{n\cdot(n+1)} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow A-B=\frac{m\cdot n+m-n\cdot m-n}{n\cdot(n+1)} \Rightarrow A-B=\frac{m-n}{n\cdot(n+1)} \Rightarrow [m-n<0] \Rightarrow A-B<0 \Rightarrow A<B.$$

Vježba 393

Bez uporabe džepnog računala odgovori koji je od dva razlomka manji:

$$A=\frac{127895348567}{765843598721}\ \text{ili}\ B=\frac{127895348569}{765843598723}.$$

Rezultat: A.

Zadatak 394 (Pavle, srednja škola)

Ako je $f(0)=1,\ f(x)=f(x-1)+x$ za $x>0,$ tada $f(100)$ iznosi:

$$A.\ 1011 \qquad B.\ 1010 \qquad C.\ 50501 \qquad D.\ 50500$$

Rješenje 394

Ponovimo!

$$1+2+3+4+5+\ ...\ +n=\frac{n\cdot(n+1)}{2}.$$

Zakon distribucije množenja prema zbrajanju.

$$a\cdot(b+c)=a\cdot b+a\cdot c \quad , \quad a\cdot b+a\cdot c=a\cdot(b+c).$$

Skratiti razlomak znači brojnik i nazivnik tog razlomka podijeliti istim brojem različitim od nule i jedinice

$$\frac{a\cdot n}{b\cdot n}=\frac{a}{b}\ ,\ n\neq 0\ ,\ n\neq 1.$$

Iz uvjeta

$$\left.\begin{array}{l} f(0)=1 \\ f(x)=f(x-1)+x \end{array}\right\}$$

redom dobijemo:

- $f(1)=f(0)+1=1+1$
- $f(2)=f(1)+2=(1+1)+2=1+1+2$
- $f(3)=f(2)+3=(1+1+2)+3=1+1+2+3$
- $f(4)=f(3)+4=(1+1+2+3)+4=1+1+2+3+4$
- $f(5)=f(4)+5=(1+1+2+3+4)+5=1+1+2+3+4+5$

…………………………………………

- $f(99)=f(98)+99=(1+1+2+3+4+5+\ ....\ +98)+99=1+1+2+3+4+5+\ ...\ +98+99$
- $f(100)=f(99)+100=(1+1+2+3+4+5+\ ....\ +99)+100=1+1+2+3+4+5+\ ...\ +99+100=$

$$=1+(1+2+3+4+5+\ ...\ +99+100)=1+\frac{100\cdot(100+1)}{2}=1+\frac{100\cdot 101}{2}=$$

$$=1+\frac{100\cdot 101}{2}=1+50\cdot 101=1+5050=50501.$$

Odgovor je pod C.

Vježba 394

Ako je $f(0)=1,\ f(x)=f(x-1)+x$ za $x>0,$ tada $f(100)$ iznosi:

$$A.\ 1011 \qquad B.\ 1010 \qquad C.\ 50501 \qquad D.\ 50500$$

Rezultat: A.

Zadatak 395 (Marija, ekonomska škola)

Najmanji od brojeva $a = 0.01$, $b = 100^{-1.5}$, $c = 0.1^{-2}$, $d = \sqrt[4]{0.001}$ jest broj:

A. a *B. b* *C. c* *D. d*

Rješenje 395

Ponovimo!

$$\left(a^{n}\right)^{m} = a^{n \cdot m} \quad , \quad \sqrt[n]{a^{m}} = a^{\frac{m}{n}}.$$

$$n < m \Rightarrow 10^{n} < 10^{m} \quad , \quad n > m \Rightarrow 10^{n} > 10^{m}.$$

U decimalnom broju decimalna točka razdvaja dekadska mjesta od decimalnih. Lijevo od decimalne točke su dekadska mjesta, a desno od decimalne točke su decimalna mjesta.

dekadska mjesta **decimalna mjesta**

12340 . 56789

↓

decimalna točka

1.inačica

Brojeve preoblikujemo u decimalne brojeve i onda ih usporedimo.

- $a = 0.01$
- $b = 100^{-1.5} = 0.001$
- $c = 0.1^{-2} = 100$
- $d = \sqrt[4]{0.001} = 0.1778...$

Najmanji je broj b.
Odgovor je pod B

2.inačica

Brojeve preoblikujemo u potencije s bazom 10 i onda ih usporedimo.

- $a = 0.01 = 10^{-2}$
- $b = 100^{-1.5} = \left(10^{2}\right)^{-1.5} = 10^{-3}$
- $c = 0.1^{-2} = \left(10^{-1}\right)^{-2} = 10^{2}$
- $d = \sqrt[4]{0.001} = \sqrt[4]{10^{-3}} = 10^{-\frac{3}{4}}.$

Najmanja je potencija b.
Odgovor je pod B

Vježba 395

Najveći od brojeva $a = 0.01$, $b = 100^{-1.5}$, $c = 0.1^{-2}$, $d = \sqrt[4]{0.001}$ jest broj:

A. a *B. b* *C. c* *D. d*

Rezultat: C.

Zadatak 396 (Marija, ekonomska škola)

Broj $\left(4^{-1}-5^{-1}\right)^{-2}$ jednak je:

$A.\ -9 \qquad B.\ 12 \qquad C.\ 41 \qquad D.\ 400$

Rješenje 396

Ponovimo!

$$a^1 = a \quad , \quad a^{-n} = \frac{1}{a^n} \quad , \quad \frac{a}{b} - \frac{c}{d} = \frac{a \cdot d - b \cdot c}{b \cdot d} \quad , \quad \frac{n}{1} = n \quad , \quad \frac{\frac{a}{b}}{\frac{c}{d}} = \frac{a \cdot d}{b \cdot c}.$$

1.inačica

$$\left(4^{-1}-5^{-1}\right)^{-2} = \left(\frac{1}{4}-\frac{1}{5}\right)^{-2} = \left(\frac{5-4}{20}\right)^{-2} = \left(\frac{1}{20}\right)^{-2} = \left(\frac{20}{1}\right)^{2} = \frac{400}{1} = 400.$$

Odgovor je pod D

2.inačica

$$\left(4^{-1}-5^{-1}\right)^{-2} = \frac{1}{\left(4^{-1}-5^{-1}\right)^{2}} = \frac{1}{\left(\frac{1}{4}-\frac{1}{5}\right)^{2}} = \frac{1}{\left(\frac{5-4}{20}\right)^{2}} = \frac{1}{\left(\frac{1}{20}\right)^{2}} = \frac{1}{\frac{1}{400}} =$$

$$= \frac{\frac{1}{1}}{\frac{1}{400}} = \frac{400}{1} = 400.$$

Odgovor je pod D

Vježba 396

Broj $\left(2^{-1}-3^{-1}\right)^{-2}$ jednak je:

$A.\ 9 \qquad B.\ 12 \qquad C.\ 36 \qquad D.\ 13$

Rezultat: C.

Zadatak 397 (Vedrana, ekonomska škola)

Ako je $2^{10} \cdot 5^{12} = n \cdot 10^8$, onda je:

$A.\ n = 2.5 \qquad B.\ n = 25 \qquad C.\ n = 250 \qquad D.\ n = 2\,500$

Rješenje 397

Ponovimo!

$$a^n \cdot a^m = a^{n+m} \quad , \quad a^n \cdot b^n = (a \cdot b)^n.$$

1.inačica

$$2^{10} \cdot 5^{12} = n \cdot 10^8 \Rightarrow 2^8 \cdot 2^2 \cdot 5^8 \cdot 5^4 = n \cdot 10^8 \Rightarrow 2^8 \cdot 5^8 \cdot 2^2 \cdot 5^4 = n \cdot 10^8 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow (2 \cdot 5)^8 \cdot 4 \cdot 625 = n \cdot 10^8 \Rightarrow 10^8 \cdot 2500 = n \cdot 10^8 \Rightarrow 2500 \cdot 10^8 = n \cdot 10^8 \Rightarrow n = 2500.$$

Odgovor je pod D.

2.inačica

$$2^{10} \cdot 5^{12} = n \cdot 10^8 \Rightarrow 2^{10} \cdot 5^{10} \cdot 5^2 = n \cdot 10^8 \Rightarrow (2 \cdot 5)^{10} \cdot 5^2 = n \cdot 10^8 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 10^{10} \cdot 25 = n \cdot 10^8 \Rightarrow 10^8 \cdot 10^2 \cdot 25 = n \cdot 10^8 \Rightarrow 10^8 \cdot 100 \cdot 25 = n \cdot 10^8 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 10^8 \cdot 2500 = n \cdot 10^8 \Rightarrow 2500 \cdot 10^8 = n \cdot 10^8 \Rightarrow n = 2500.$$

Odgovor je pod D.

Vježba 397

Ako je $2^{9} \cdot 5^{11} = n \cdot 10^{7}$, onda je:

$$A.\ n = 2.5 \qquad B.\ n = 25 \qquad C.\ n = 250 \qquad D.\ n = 2\,500$$

Rezultat: D.

Zadatak 398 (Zvonimir, gimnazija)

Dokažite da se između bilo kojih 11 prirodnih brojeva uvijek mogu izabrati dva broja tako da njihova razlika bude djeljiva s 10.

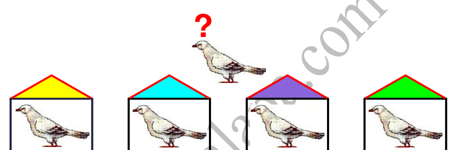
Rješenje 398

Ponovimo!

Skup prirodnih brojeva označavamo slovom N, a zapisujemo

$$N = \{1,\ 2,\ 3,\ 4,\ 5,\ \ldots,\ n-1,\ n,\ n+1,\ \ldots\}.$$

Prirodni je broj djeljiv s 10 ako mu je posljednja znamenka 0.
Dekadski sustav, sustav s bazom 10, za zapisivanje brojeva koristi znamenke: 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8 i 9.
Zadatke ovog tipa najelegantnije rješavamo pomoću Dirichletovog pravila. Dirichletov princip ili pravilo jedno je od najjednostavnijih kombinatornih pravila. U literaturi je poznat i pod raznim drugim imenima: pravilo pretinaca, pravilo kutija ili pravilo golubinjaka (od engl. pigenhole principle). Najčešće se zove Dirichletovo pravilo prema njemačkom matematičaru francuskog podrijetla **G. L. Dirichletu** (1805. – 1859.). Slikovito rečeno, to pravilo tvrdi sljedeće: ako puno golubova doleti u nekoliko golubinjaka, onda će bar u jednome golubinjaku biti bar dva goluba.



Malo preciznije, Dirichletovo pravilo možemo formulirati ovako:
Ako n + 1 predmeta bilo kako rasporedimo u n kutija (pretinaca), onda bar jedna kutija sadrži bar dva predmeta.
U dekadskom sustavu postoji točno 10 znamenki pomoću kojih zapisujemo brojeve. Znamenke su: 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, i 9. Budući da znamenki ima točno 10, među bilo kojih 11 prirodnih brojeva postoje barem dva koji završavaju istom znamenkom. Njihova razlika je broj čija je posljednja znamenka nula, tj. razlika je djeljiva s 10.

Vježba 398

Dokažite da se između bilo kojih 12 prirodnih brojeva uvijek mogu izabrati dva broja tako da njihova razlika bude djeljiva s 10.

Rezultat: Dokaz analogan.

Zadatak 399 (Fric, gimnazija)

Kvadrat zbroja bilo kojega realnog broja i njegove recipročne vrijednosti veći je od kvadrata razlike tog broja i njegove recipročne vrijednosti za:

$$A.\ 2 \qquad B.\ 4 \qquad C.\ 1 \qquad D.\ 8$$

Rješenje 399

Ponovimo!

$$(a+b)^2 = a^2 + 2 \cdot a \cdot b + b^2 \quad , \quad (a-b)^2 = a^2 - 2 \cdot a \cdot b + b^2.$$

$$a^2 - b^2 = (a-b) \cdot (a+b) \quad , \quad \frac{a}{n} + \frac{b}{n} = \frac{a+b}{n}.$$

Kako zapisati da je broj b veći od broja a?

$$b > a \ \Rightarrow\ b - a > 0.$$

Zakon distribucije množenja prema zbrajanju.

$$a\cdot(b+c)=a\cdot b+a\cdot c \quad , \quad a\cdot b+a\cdot c=a\cdot(b+c).$$

Skratiti razlomak znači brojnik i nazivnik tog razlomka podijeliti istim brojem različitim od nule i jedinice

$$\frac{a\cdot n}{b\cdot n}=\frac{a}{b} \; , \; n\neq 0 \; , \; n\neq 1.$$

Racionalan broj $\frac{b}{a}$ zove se recipročan broj od broja $\frac{a}{b}$. Umnožak recipročnih brojeva jednak je 1.

$$\frac{a}{b}\cdot\frac{b}{a}=1.$$

Neka je x bilo koji realan broj različit od nule, $x\neq 0$. Zapisujemo:

- kvadrat zbroja realnog broja x i njegove recipročne vrijednosti

$$\left(x+\frac{1}{x}\right)^2$$

- kvadrat razlike realnog broja x i njegove recipročne vrijednosti

$$\left(x-\frac{1}{x}\right)^2.$$

1.inačica

Sada računamo razliku:

$$\left(x+\frac{1}{x}\right)^2-\left(x-\frac{1}{x}\right)^2=x^2+2\cdot x\cdot\frac{1}{x}+\frac{1}{x^2}-\left(x^2-2\cdot x\cdot\frac{1}{x}+\frac{1}{x^2}\right)=$$

$$=x^2+2\cdot x\cdot\frac{1}{x}+\frac{1}{x^2}-x^2+2\cdot x\cdot\frac{1}{x}-\frac{1}{x^2}=x^2+2\cdot x\cdot\frac{1}{x}+\frac{1}{x^2}-x^2+2\cdot x\cdot\frac{1}{x}-\frac{1}{x^2}=$$

$$=2\cdot x\cdot\frac{1}{x}+2\cdot x\cdot\frac{1}{x}=2\cdot x\cdot\frac{1}{x}+2\cdot x\cdot\frac{1}{x}=2+2=4.$$

Odgovor je pod B.

2.inačica

Sada računamo razliku:

$$\left(x+\frac{1}{x}\right)^2-\left(x-\frac{1}{x}\right)^2=\left(\left(x+\frac{1}{x}\right)-\left(x-\frac{1}{x}\right)\right)\cdot\left(\left(x+\frac{1}{x}\right)+\left(x-\frac{1}{x}\right)\right)=$$

$$=\left(x+\frac{1}{x}-x+\frac{1}{x}\right)\cdot\left(x+\frac{1}{x}+x-\frac{1}{x}\right)=\left(x+\frac{1}{x}-x+\frac{1}{x}\right)\cdot\left(x+\frac{1}{x}+x-\frac{1}{x}\right)=$$

$$=\left(\frac{1}{x}+\frac{1}{x}\right)\cdot(x+x)=\frac{2}{x}\cdot 2\cdot x=\frac{2}{x}\cdot 2\cdot x=4.$$

Odgovor je pod B.

Vježba 399

Kvadrat razlike bilo kojega realnog broja i njegove recipročne vrijednosti manji je od kvadrata zbroja tog broja i njegove recipročne vrijednosti za:

$A.\ 2 \qquad B.\ 4 \qquad C.\ 1 \qquad D.\ 8$

Rezultat: B.

Zadatak 400 (Patrik, gimnazija)

Dokaži da je za svaki prirodni broj n broj (2 · n + 3) · (3 · n – 2) – (3 · n + 2) · (2 · n – 3) djeljivo s 10.

Rješenje 400

Ponovimo!

$$a^1 = a \quad , \quad a^n \cdot a^m = a^{n+m}.$$

Množenje zagrada

$$(a+b)\cdot(c+d) = a\cdot c + a\cdot d + b\cdot c + b\cdot d.$$

Zakon distribucije množenja prema zbrajanju.

$$a\cdot(b+c) = a\cdot b + a\cdot c \quad , \quad a\cdot b + a\cdot c = a\cdot(b+c).$$

$$(2\cdot n+3)\cdot(3\cdot n-2)-(3\cdot n+2)\cdot(2\cdot n-3)=$$

$$=6\cdot n^2-4\cdot n+9\cdot n-6-\left(6\cdot n^2-9\cdot n+4\cdot n-6\right)=6\cdot n^2-4\cdot n+9\cdot n-6-6\cdot n^2+9\cdot n-4\cdot n+6=$$

$$=6\cdot n^2-4\cdot n+9\cdot n-6-6\cdot n^2+9\cdot n-4\cdot n+6=-4\cdot n+9\cdot n+9\cdot n-4\cdot n=10\cdot n.$$

Dakle, broj $(2\cdot n+3)\cdot(3\cdot n-2)-(3\cdot n+2)\cdot(2\cdot n-3)$ djeljiv je s 10 za svaki $n \in N$.

Vježba 400

Dokaži da je za svaki prirodni broj n broj (2 · n + 3) · (3 · n – 2) + (3 · n + 2) · (3 – 2 · n) djeljivo s 10.

Rezultat: Dokaz analogan.