Zadatak 301 (Pixy, srednja škola)

Kako zapisati 0 pomoću tri petice?

Rješenje 301

Ponovimo!

$$a \cdot 0 = 0 \cdot a = 0 \quad , \quad 0 : a = 0 \;,\; a \neq 0.$$

1.inačica

$$(5-5)^5 = 0^5 = 0.$$

2.inačica

$$(5-5) \cdot 5 = 0 \cdot 5 = 0.$$

3.inačica

$$(5-5) : 5 = 0 : 5 = 0.$$

Vježba 301

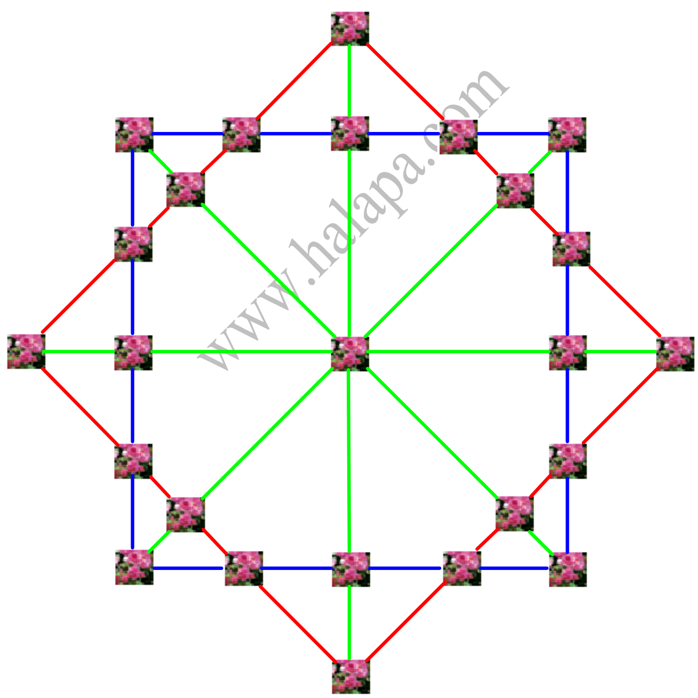
Kako zapisati 0 pomoću tri sedmice?

Rezultat: ☺.

Zadatak 302 (Pixy, srednja škola)

Kako zasaditi 25 grmova ruža rasporedivši ih u ukupno 12 gredica sa po 5 grmova u svakoj?

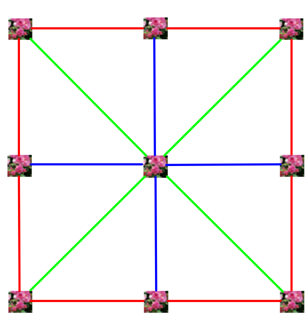
Rješenje 302



Vježba 302

Kako zasaditi 9 grmova ruža rasporedivši ih u ukupno 8 gredica sa po 3 grma u svakoj?

Rezultat:



Zadatak 303 (Viki, gimnazija)

Knjiga ima 400 stranica. Koliko je znamenaka upotrijebljeno za označavanje svih stranica knjige?

Rješenje 303

Ponovimo!

Skup prirodnih brojeva označavamo slovom N, a zapisujemo

$$N = \{1, 2, 3, 4, 5, \ldots, n-1, n, n+1, \ldots\}.$$

Brojevi koji imaju samo jednu znamenku zovu se jednoznamenkasti brojevi.
To su: 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9. Ima ih 9.
Brojevi koji imaju dvije znamenke zovu se dvoznamenkasti brojevi.
To su: 10, 11, 12, 13, 14, 15, … , 97, 98, 99. Ima ih 90.
Brojevi koji imaju tri znamenke zovu se troznamenkasti brojevi.
To su: 100, 101, 102, 103, 104, 105, … , 997, 998, 999. Ima ih 900.
Zakon distribucije množenja prema zbrajanju.

$$a \cdot (b+c) = a \cdot b + a \cdot c \quad , \quad a \cdot b + a \cdot c = a \cdot (b+c).$$

1.inačica

Prvih 9 stranica knjige označeno je jednoznamenkastim brojevima. Za njih je upotrijebljeno

$$9 \cdot 1 = 9$$

znamenaka.
Sljedećih 90 stranica knjige označeno je dvoznamenkastim brojevima. Za njih je upotrijebljeno

$$90 \cdot 2 = 180$$

znamenaka.
Budući da knjiga ima 400 stranica, preostalo je

$$400 - (90 + 9) = 301$$

stranica koje su označene troznamenkastim brojevima. Za njih je upotrijebljeno

$$301 \cdot 3 = 903$$

znamenaka.
Ukupan broj znamenaka za označavanje knjige od 400 stranica iznosi:

$$9 + 90 + 903 = 1092.$$

2.inačica

Stranice knjige označene su jednoznamenkastim, dvoznamenkastim i troznamenkastim brojevima. Označimo slovom x troznamenkasti broj odabran po volji. Ako bi sve stranice knjige bile označene troznamenkastim brojevima manjim od x ukupno bi trebalo upotrijebiti

$$3 \cdot x$$

znamenaka.
Kod jednoznamenkastih brojeva uračunali smo 2 znamenke više pa to iznosi

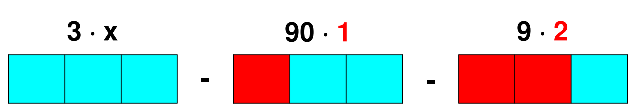
$$9 \cdot 2 = 18$$

znamenaka više.
Kod dvoznamenkastih brojeva uračunali smo 1 znamenku više pa to iznosi

$$90 \cdot 1 = 90$$

znamenaka više.
Zato je ukupan broj znamenaka dan izrazom

$$3 \cdot x - (90 + 18) = 3 \cdot x - 108.$$



U zadatku knjiga ima 400 stranica pa su za njezino numeriranje potrebne

$$3 \cdot x - 108 = [\, x = 400 \,] = 3 \cdot 400 - 108 = 1200 - 108 = 1092$$

znamenke.

Vježba 303

Knjiga ima 200 stranica. Koliko je znamenaka upotrijebljeno za označavanje svih stranica knjige?

Rezultat: 492.

Zadatak 304 (Marko, srednja škola)

Izračunaj $\dfrac{3\cdot\left(\dfrac{2}{3}\right)^{-2}+4^{-1}}{\left(\dfrac{1}{2}\right)^{-1}+5}$.

Rješenje 304

Ponovimo!

$$\left(\frac{a}{b}\right)^{-n}=\left(\frac{b}{a}\right)^{n} \quad , \quad a^{-n}=\frac{1}{a^{n}} \quad , \quad a^{1}=a \quad , \quad \frac{n}{1}=n \quad , \quad \left(\frac{a}{b}\right)^{n}=\frac{a^{n}}{b^{n}}.$$

$$a\cdot\frac{b}{c}=\frac{a\cdot b}{c} \quad , \quad \frac{a}{n}+\frac{b}{n}=\frac{a+b}{n}.$$

Skratiti razlomak znači brojnik i nazivnik tog razlomka podijeliti istim brojem različitim od nule i jedinice

$$\frac{a\cdot n}{b\cdot n}=\frac{a}{b} \ , \ n\neq 0 \ , \ n\neq 1.$$

$$\frac{3\cdot\left(\frac{2}{3}\right)^{-2}+4^{-1}}{\left(\frac{1}{2}\right)^{-1}+5}=\frac{3\cdot\left(\frac{3}{2}\right)^{2}+\frac{1}{4}}{\left(\frac{2}{1}\right)^{1}+5}=\frac{3\cdot\frac{9}{4}+\frac{1}{4}}{2^{1}+5}=\frac{\frac{27}{4}+\frac{1}{4}}{2+5}=\frac{\frac{27+1}{4}}{7}=\frac{\frac{28}{4}}{7}=\frac{\frac{28}{4}}{7}=\frac{7}{7}=\frac{7}{7}=1.$$

Vježba 304

Izračunaj $\dfrac{\left(\dfrac{1}{2}\right)^{-1}+5}{3\cdot\left(\dfrac{2}{3}\right)^{-2}+4^{-1}}$.

Rezultat: 1.

Zadatak 305 (Iva, gimnazija)

Ispisujemo redom sve prirodne brojeve od 1 do 1000. Koliko smo ukupno znamenki zapisali?

Rješenje 305

Ponovimo!

Skup prirodnih brojeva označavamo slovom N, a zapisujemo

$$N=\{1,\ 2,\ 3,\ 4,\ 5,\ \ldots\ ,\ n-1,\ n,\ n+1,\ \ldots\}.$$

Brojevi koji imaju samo jednu znamenku zovu se jednoznamenkasti brojevi.
To su: 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9. Ima ih 9.
Brojevi koji imaju dvije znamenke zovu se dvoznamenkasti brojevi.
To su: 10, 11, 12, 13, 14, 15, … , 97, 98, 99. Ima ih 90.
Brojevi koji imaju tri znamenke zovu se troznamenkasti brojevi.

To su: 100, 101, 102, 103, 104, 105, … , 997, 998, 999. Ima ih 900.

Broj znamenki za ispis brojeva:

- jednoznamenkastih

$$9 \cdot 1 = 9$$

- dvoznamenkastih

$$90 \cdot 2 = 180$$

- troznamenkastih

$$900 \cdot 3 = 2\,700.$$

Broj 1000 ima još 4 znamenke pa je ukupan broj svih znamenki koje smo zapisali jednak:

$$9 + 180 + 2\,700 + 4 = 2\,893.$$

Vježba 305

Ispisujemo redom sve prirodne brojeve od 1 do 100. Koliko smo ukupno znamenki zapisali?

Rezultat: 192.

Zadatak 306 (GTA, gimnazija)

Zapišite sljedeću jednakost bez uporabe sigma notacije.

$$\sum_{k=1}^{n} \frac{k}{2^k} = 2 - \frac{n+2}{2^n}.$$

Rješenje 306

Ponovimo!

$$a^1 = a.$$

Sigma notacija

Veliko slovo sigma ∑. To je slovo grčkog alfabeta. U matematici znak ∑ označava zbroj (sumu).
Zbroj

$$a_1 + a_2 + a_3 + a_4 + a_5 + \ldots + a_n$$

možemo uporabom znaka sumacije zapisati u obliku

$$a_1 + a_2 + a_3 + a_4 + a_5 + \ldots + a_n = \sum_{k=1}^{n} a_k,$$

gdje je k indeks sumacije koji se mijenja u granicama od 1 do n povećavajući se u svakom pribrojniku za 1.
Na primjer, zbroj

$$a_1 + a_2 + a_3 + a_4 + a_5 + a_6 + a_7$$

možemo kraće zapisati ovako:

$$\sum_{k=1}^{7} a_k.$$

Čita se: sigma a indeks ka gdje ka ide od jedan do sedam.
Broj k zove se indeks zbrajanja i može se zamijeniti nekim drugim slovom. Na primjer,

$$\sum_{i=1}^{7} a_i.$$

Primjeri uporabe sigma notacije.

$$\sum_{k=1}^{n} a_k = a_1 + a_2 + a_3 + \ldots + a_n \quad (n \in N) \quad , \quad \sum_{k=1}^{n} k = 1 + 2 + 3 + \ldots + n$$

$$\sum_{k=1}^{n} k^2 = 1^2 + 2^2 + 3^2 + \ldots + n^2 \quad , \quad \sum_{k=1}^{n} k^3 = 1^3 + 2^3 + 3^3 + \ldots + n^3.$$

$$\sum_{k=1}^{n} (2 \cdot k)^2 = 2^2 + 4^2 + 6^2 + \ldots + (2 \cdot n)^2 \quad , \quad \sum_{k=1}^{n} (2 \cdot k - 1)^2 = 1^2 + 3^2 + 5^2 + \ldots + (2 \cdot n - 1)^2.$$

$$\sum_{k=1}^{n} c = c + c + c + \dots + c = n \cdot c.$$

Za zbroj (sumu) vrijede sljedeća svojstva:

$$\sum_{k=1}^{n} \left(a_k + b_k\right) = \sum_{k=1}^{n} a_k + \sum_{k=1}^{n} b_k \quad , \quad \sum_{k=1}^{n} \left(c \cdot a_k\right) = c \cdot \sum_{k=1}^{n} a_k.$$

$$\sum_{k=1}^{n+1} a_k = \sum_{k=1}^{n} a_k + a_{n+1} \quad , \quad \sum_{k=1}^{n} \left(a_k - a_{k-1}\right) = a_n - a_0.$$

Zadana jednakost bez uporabe sigma notacije glasi:

$$\sum_{k=1}^{n} \frac{k}{2^k} = 2 - \frac{n+2}{2^n} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \frac{1}{2^1} + \frac{2}{2^2} + \frac{3}{2^3} + \frac{4}{2^4} + \frac{5}{2^5} + \dots + \frac{n}{2^n} = 2 - \frac{n+2}{2^n} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \frac{1}{2} + \frac{2}{2^2} + \frac{3}{2^3} + \frac{4}{2^4} + \frac{5}{2^5} + \dots + \frac{n}{2^n} = 2 - \frac{n+2}{2^n}.$$

Vježba 306

Zapišite sljedeću jednakost bez uporabe sigma notacije.

$$\sum_{k=1}^{n} k = \frac{n \cdot (n+1)}{2}.$$

Rezultat: $1 + 2 + 3 + \dots + n = \frac{n \cdot (n+1)}{2}.$

Zadatak 307 (Anita, gimnazija)

Zbroj pet uzastopnih parnih brojeva jednak je 6080. Koji su to brojevi?

Rješenje 307

Ponovimo!

Skup svih prirodnih brojeva označavamo sa N i pišemo:

$$N = \{1, 2, 3, 4, 5, \dots, n, n+1, \dots\}.$$

Skup svih parnih prirodnih brojeva označavamo sa N_2 i pišemo:

$$N_2 = \{2, 4, 6, 8, 10, \dots, 2 \cdot n, 2 \cdot n + 2, \dots\}.$$

Svaki se parni prirodni broj može prikazati u obliku $2 \cdot n$, gdje je n prirodan broj, tj. $n \in N$. Parni brojevi se povećavaju za 2.

Zakon distribucije množenja prema zbrajanju.

$$a \cdot (b + c) = a \cdot b + a \cdot c \quad , \quad a \cdot b + a \cdot c = a \cdot (b + c).$$

1.inačica

Neka je n najmanji paran broj od pet uzastopnih parnih brojeva za koje vrijedi:

$$n + (n+2) + (n+4) + (n+6) + (n+8) = 6080 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow n + n + 2 + n + 4 + n + 6 + n + 8 = 6080 \Rightarrow 5 \cdot n + 20 = 6080 \Rightarrow 5 \cdot n = 6080 - 20 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 5 \cdot n = 6060 \Rightarrow 5 \cdot n = 6060 \;/:5 \Rightarrow n = 1212.$$

Niz pet parnih brojeva glasi:

$$n \;,\; n+2 \;,\; n+4 \;,\; n+6 \;,\; n+8$$

$$1212 \;,\; 1214 \;,\; 1216 \;,\; 1218 \;,\; 1220$$

2.inačica

Neka je n – 4 najmanji paran broj od pet uzastopnih parnih brojeva za koje vrijedi:

$$(n-4) + (n-2) + n + (n+2) + (n+4) = 6080 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow\ n-4+n-2+n+n+2+n+4=6080\ \Rightarrow\ n-4+n-2+n+n+2+n+4=6080\ \Rightarrow$$

$$\Rightarrow\ 5\cdot n=6080\ \Rightarrow\ 5\cdot n=6080\ /:5\ \Rightarrow\ n=1216.$$

Niz pet parnih brojeva glasi:

$$n-4\ ,\ n-2\ ,\ \ n\ \ ,\ n+2\ ,\ n+4$$

$$1212\ ,\ 1214\ ,\ 1216\ ,\ 1218\ ,\ 1220$$

3.inačica

Neka je 2 · n najmanji paran broj od pet uzastopnih parnih brojeva za koje vrijedi:

$$2\cdot n+(2\cdot n+2)+(2\cdot n+4)+(2\cdot n+6)+(2\cdot n+8)=6080\ \Rightarrow$$

$$\Rightarrow\ 2\cdot n+2\cdot n+2+2\cdot n+4+2\cdot n+6+2\cdot n+8=6080\ \Rightarrow\ 10\cdot n+20=6080\ \Rightarrow$$

$$\Rightarrow\ 10\cdot n=6080-20\ \Rightarrow\ 10\cdot n=6060\ \Rightarrow\ 10\cdot n=6060\ /:10\ \Rightarrow\ n=606.$$

Niz pet parnih brojeva glasi:

$$n=606$$

$$2\cdot n\ \ ,\ 2\cdot n+2\ ,\ 2\cdot n+4\ ,\ 2\cdot n+6\ ,\ 2\cdot n+8$$

$$1212\ ,\ 1214\ ,\ 1216\ ,\ 1218\ ,\ 1220$$

4.inačica

Neka je 2 · n – 4 najmanji paran broj od pet uzastopnih parnih brojeva za koje vrijedi:

$$(2\cdot n-4)+(2\cdot n-2)+2\cdot n+(2\cdot n+2)+(2\cdot n+4)=6080\ \Rightarrow$$

$$\Rightarrow\ 2\cdot n-4+2\cdot n-2+2\cdot n+2\cdot n+2+2\cdot n+4=6080\ \Rightarrow$$

$$\Rightarrow\ 2\cdot n-4+2\cdot n-2+2\cdot n+2\cdot n+2+2\cdot n+4=6080\ \Rightarrow\ 10\cdot n=6080\ \Rightarrow\ 10\cdot n=6080\ /:10\ \Rightarrow\ n=608.$$

Niz pet parnih brojeva glasi:

$$n=608$$

$$2\cdot n-4\ \ ,\ 2\cdot n-2\ ,\ \ 2\cdot n\ \ ,\ 2\cdot n+2\ ,\ 2\cdot n+4$$

$$1212\ ,\ 1214\ ,\ 1216\ ,\ 1218\ ,\ 1220$$

Vježba 307

Zbroj pet uzastopnih parnih brojeva jednak je 180. Koji su to brojevi?

Rezultat: 32, 34, 36, 38, 40.

Zadatak 308 (Valentina, srednja škola)

Za sve realne brojeve x i y vrijedi:

$A.\ y-x=-(x+y)$ $\quad B.\ y-x=-(x-y)$ $\quad C.\ y-x=-(-y-x)$ $\quad D.\ y-x=-(y-x)$

Rješenje 308

Ponovimo!

Zakon distribucije množenja prema zbrajanju.

$$a\cdot(b+c)=a\cdot b+a\cdot c\quad ,\quad a\cdot b+a\cdot c=a\cdot(b+c).$$

Kad je pred zagradom znak minus, zagradu i taj znak izostavit ćemo, a brojeve u zagradi zamijeniti suprotnim brojevima.

$$-(a+b)=-a-b\quad ,\quad -(a-b)=-a+b\quad ,\quad -(-a+b)=a-b\quad ,\quad -(-a-b)=a+b.$$

Zbroj se ne mijenja ako pribrojnici zamijene svoja mjesta.

$$a+b=b+a.$$

$$\left.\begin{array}{l} y-x=-(x+y) \\ y-x=-(x-y) \\ y-x=-(-y-x) \\ y-x=-(y-x) \end{array}\right\}\Rightarrow \left.\begin{array}{l} y-x=-x-y \\ y-x=-x+y \\ y-x=y+x \\ y-x=-y+x \end{array}\right\}\Rightarrow \left.\begin{array}{l} y-x\neq -y-x \\ y-x=y-x \\ y-x\neq y+x \\ y-x\neq -y+x \end{array}\right\}\Rightarrow\ y-x=y-x.$$

Odgovor je pod B.

Vježba 308

Za sve realne brojeve x i y vrijedi:

$A.\ x-y=-(x+y) \qquad B.\ x-y=-(x-y) \qquad C.\ x-y=-(-y-x) \qquad D.\ x-y=-(y-x)$

Rezultat: D.

Zadatak 309 (Ernest, srednja škola)

Izračunaj $\left(\dfrac{0.75}{1\frac{2}{3}-1.2}:\dfrac{3+1\frac{1}{2}}{1.4}\right)\cdot\dfrac{\frac{1}{2}-\frac{1}{3}}{\frac{1}{3}-\frac{1}{4}}.$

Rješenje 309

Ponovimo!

$$n=\frac{n}{1} \quad , \quad \frac{a}{b}-\frac{c}{d}=\frac{a\cdot d-b\cdot c}{b\cdot d} \quad , \quad \frac{a}{b}+\frac{c}{d}=\frac{a\cdot d+b\cdot c}{b\cdot d} \quad , \quad \frac{\frac{a}{b}}{\frac{c}{d}}=\frac{a\cdot d}{b\cdot c}.$$

$$\frac{a}{b}\cdot\frac{c}{d}=\frac{a\cdot c}{b\cdot d} \quad , \quad \frac{a}{b}:\frac{c}{d}=\frac{a}{b}\cdot\frac{d}{c}=\frac{a\cdot d}{b\cdot c}.$$

Decimalni broj piše se u obliku decimalnog razlomka tako da se u brojnik napiše zadani decimalni broj bez decimalne točke, a u nazivnik se napiše dekadska jedinica (10, 100, 1000, 10000, 100000, …) koja ima toliko nula koliko decimalni broj ima decimala (znamenaka na decimalnom mjestu, tj. iza decimalne točke ili decimalnog zareza).

Pretvaranje mješovitog broja u razlomak

$$a\frac{b}{n}=\frac{a\cdot n+b}{n}.$$

Skratiti razlomak znači brojnik i nazivnik tog razlomka podijeliti istim brojem različitim od nule i jedinice.

$$\frac{a\cdot n}{b\cdot n}=\frac{a}{b} \ , \ n\neq 0 \ , \ n\neq 1.$$

$$\left(\frac{0.75}{1\frac{2}{3}-1.2}:\frac{3+1\frac{1}{2}}{1.4}\right)\cdot\frac{\frac{1}{2}-\frac{1}{3}}{\frac{1}{3}-\frac{1}{4}}=\left(\frac{\frac{75}{100}}{\frac{5}{3}-\frac{12}{10}}:\frac{\frac{3}{1}+\frac{3}{2}}{\frac{14}{10}}\right)\cdot\frac{\frac{3-2}{6}}{\frac{4-3}{12}}=\left(\frac{\frac{75}{100}}{\frac{5}{3}-\frac{12}{10}}:\frac{\frac{6+3}{2}}{\frac{14}{10}}\right)\cdot\frac{\frac{1}{6}}{\frac{1}{12}}=\left(\frac{\frac{3}{4}}{\frac{5}{3}-\frac{6}{5}}:\frac{\frac{9}{2}}{\frac{7}{5}}\right)\cdot\frac{12}{6}=$$

$$=\left(\frac{\frac{3}{4}}{\frac{25-18}{15}}:\frac{\frac{9}{2}}{\frac{7}{5}}\right)\cdot\frac{12}{6}=\left(\frac{\frac{3}{4}}{\frac{7}{15}}:\frac{\frac{9}{2}}{\frac{7}{5}}\right)\cdot\frac{2}{1}=\left(\frac{3\cdot15}{4\cdot7}:\frac{9\cdot5}{2\cdot7}\right)\cdot\frac{2}{1}=\left(\frac{3\cdot15}{4\cdot7}\cdot\frac{2\cdot7}{9\cdot5}\right)\cdot\frac{2}{1}=\frac{3\cdot15}{4\cdot7}\cdot\frac{2\cdot7}{9\cdot5}\cdot\frac{2}{1}=$$

$$=\frac{3\cdot15}{4\cdot7}\cdot\frac{2\cdot7}{9\cdot5}\cdot\frac{2}{1}=\frac{3\cdot3}{4\cdot1}\cdot\frac{2\cdot1}{9\cdot1}\cdot\frac{2}{1}=\frac{9}{4}\cdot\frac{2}{9}\cdot\frac{2}{1}=\frac{9}{4}\cdot\frac{4}{9}=\frac{9}{4}\cdot\frac{4}{9}=1.$$

Vježba 309

Izračunaj $\left(\dfrac{0.75}{1\frac{2}{3}-1.2}\cdot\dfrac{1.4}{3+1\frac{1}{2}}\right):\dfrac{\frac{1}{3}-\frac{1}{4}}{\frac{1}{2}-\frac{1}{3}}.$

Rezultat: 1.

Zadatak 310 (Domagoj, gimnazija)

Provjeri je li istinita sljedeća tvrdnja: ako je a > b, onda je (a + 1) · b < a · (b + 1).

Rješenje 310

Ponovimo!

$$n+a<n+b \ , \ n\in R \ \Rightarrow \ a<b \quad , \quad a<b \ \Rightarrow \ b>a \quad , \quad a<b \ \Rightarrow \ a+n<b+n \ , \ n\in R.$$

Zakon distribucije množenja prema zbrajanju.

$$a\cdot(b+c)=a\cdot b+a\cdot c \quad , \quad a\cdot b+a\cdot c=a\cdot(b+c).$$

1.inačica

Preoblikujemo zadanu nejednakost.

$$(a+1)\cdot b<a\cdot(b+1) \ \Rightarrow \ a\cdot b+b<a\cdot b+a \ \Rightarrow \ a\cdot b+b<a\cdot b+a \ \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \ b<a \ \Rightarrow \ a>b.$$

Tvrdnja je istinita.

2.inačica

Polazimo od postavljenog uvjeta.

$$a>b \ \Rightarrow \ b<a \ \Rightarrow \ b<a \ /+a\cdot b \ \Rightarrow \ b+a\cdot b<a+a\cdot b \ \Rightarrow \ b+a\cdot b<a+a\cdot b \ \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \ b\cdot(1+a)<a\cdot(1+b) \ \Rightarrow \ (a+1)\cdot b<a\cdot(b+1).$$

Vježba 310

Provjeri je li istinita sljedeća tvrdnja: ako je a > b, onda je a · (b – 1) < b · (a – 1).

Rezultat: Dokaz analogan.

Zadatak 311 (Domagoj, gimnazija)

Provjeri je li istinita sljedeća tvrdnja: ako je a > b, onda je (a + 1) · (b – 1) < a · b.

Rješenje 311

Ponovimo!

$$n+a<n+b \ , \ n\in R \ \Rightarrow \ a<b \quad , \quad a<b \ , \ c<0 \ \Rightarrow \ a\cdot c>b\cdot c.$$

Množenje zagrada

$$(a+b)\cdot(c+d)=a\cdot c+a\cdot d+b\cdot c+b\cdot d.$$

1.inačica

Preoblikujemo zadanu nejednakost.

$$(a+1)\cdot(b-1)<a\cdot b \ \Rightarrow \ a\cdot b-a+b-1<a\cdot b \ \Rightarrow \ a\cdot b-a+b-1<a\cdot b \ \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \ -a+b-1<0 \ \Rightarrow \ -a+b-1<0 \ /\cdot(-1) \ \Rightarrow \ a-b+1>0 \ \Rightarrow \ a>b-1$$

što je istinito jer je a > b.

2.inačica

Polazimo od postavljenog uvjeta.

$$a>b \ \Rightarrow \ a>b-1 \ \Rightarrow \ a-b+1>0 \ \Rightarrow \ a-b+1>0 \ /\cdot(-1) \ \Rightarrow \ -a+b-1<0 \ \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \ -a+b-1<0 \ /+a\cdot b \ \Rightarrow \ -a+b-1+a\cdot b<a\cdot b \ \Rightarrow \ a\cdot b+b-a-1<a\cdot b \ \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \ (a\cdot b+b)+(-a-1)<a\cdot b \ \Rightarrow \ b\cdot(a+1)-(a+1)<a\cdot b \ \Rightarrow \ b\cdot(a+1)-(a+1)<a\cdot b \ \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \ (a+1)\cdot(b-1)<a\cdot b.$$

Vježba 311

Provjeri je li istinita sljedeća tvrdnja: ako je a > b, onda je (a + 1) · (1 – b) > – a · b.

Rezultat: Dokaz analogan.

Zadatak 312 (Tim, strukovna škola)

Izračunaj $\dfrac{\dfrac{7}{24} : 0.125 + 3.5}{\dfrac{2}{3} - 0.25}$.

Rješenje 312

Ponovimo!

$$\frac{a}{b} \cdot \frac{c}{d} = \frac{a \cdot c}{b \cdot d} \quad , \quad \frac{a}{b} : \frac{c}{d} = \frac{a}{b} \cdot \frac{d}{c} = \frac{a \cdot d}{b \cdot c} \quad , \quad \frac{a}{b} - \frac{c}{d} = \frac{a \cdot d - b \cdot c}{b \cdot d}.$$

$$\frac{a}{b} + \frac{c}{d} = \frac{a \cdot d + b \cdot c}{b \cdot d} \quad , \quad \frac{n}{1} = n \quad , \quad \frac{\frac{a}{b}}{\frac{c}{d}} = \frac{a \cdot d}{b \cdot c}.$$

Decimalni broj piše se u obliku decimalnog razlomka tako da se u brojnik napiše zadani decimalni broj bez decimalne točke, a u nazivnik se napiše dekadska jedinica (10, 100, 1000, 10000, 100000, …) koja ima toliko nula koliko decimalni broj ima decimala (znamenaka na decimalnom mjestu, tj. iza decimalne točke ili decimalnog zareza).
Skratiti razlomak znači brojnik i nazivnik tog razlomka podijeliti istim brojem različitim od nule i jedinice.

$$\frac{a \cdot n}{b \cdot n} = \frac{a}{b} \ , \ n \neq 0 \ , \ n \neq 1.$$

$$\frac{\frac{7}{24} : 0.125 + 3.5}{\frac{2}{3} - 0.25} = \frac{\frac{7}{24} : \frac{125}{1000} + \frac{35}{10}}{\frac{2}{3} - \frac{25}{100}} = \frac{\frac{7}{24} : \frac{125}{1000} + \frac{35}{10}}{\frac{2}{3} - \frac{25}{100}} = \frac{\frac{7}{24} : \frac{1}{8} + \frac{7}{2}}{\frac{2}{3} - \frac{1}{4}} = \frac{\frac{7}{24} \cdot \frac{8}{1} + \frac{7}{2}}{\frac{8-3}{12}} =$$

$$= \frac{\frac{7}{24} \cdot \frac{8}{1} + \frac{7}{2}}{\frac{5}{12}} = \frac{\frac{7}{3} \cdot \frac{1}{1} + \frac{7}{2}}{\frac{5}{12}} = \frac{\frac{7}{3} + \frac{7}{2}}{\frac{5}{12}} = \frac{\frac{14+21}{6}}{\frac{5}{12}} = \frac{\frac{35}{6}}{\frac{5}{12}} = \frac{35 \cdot 12}{6 \cdot 5} = \frac{35 \cdot 12}{6 \cdot 5} = \frac{7 \cdot 2}{1 \cdot 1} = \frac{14}{1} = 14.$$

Vježba 312

Izračunaj $\dfrac{\dfrac{2}{3} - 0.25}{\dfrac{7}{24} : 0.125 + 3.5}$.

Rezultat: $\dfrac{1}{14}$.

Zadatak 313 (Hrvoje, strukovna škola)

Vrijednost izraza $a^2 - b^2 + c^2 + 2 \cdot a \cdot c$ za a = 101, b = 100, c = 99 jednaka je:

$$A.\ 3 \cdot 10^3 \qquad B.\ 3 \cdot 10^4 \qquad C.\ 3 \cdot 10^5 \qquad D.\ 3 \cdot 10^6$$

Rješenje 313

Ponovimo!

$$a^2 + 2a \cdot b + b^2 = (a+b)^2 \quad , \quad a^2 - b^2 = (a-b) \cdot (a+b).$$

1.inačica

$$a^2 - b^2 + c^2 + 2 \cdot a \cdot c = \begin{bmatrix} a = 101 \ , \ b = 100 \\ c = 99 \end{bmatrix} = 101^2 - 100^2 + 99^2 + 2 \cdot 101 \cdot 99 = \begin{bmatrix} \text{Kalkulator} \\ \text{u ruke! :)} \end{bmatrix} =$$

$$= 10\,201 - 10\,000 + 9\,801 + 19\,998 = 30\,000 = 3 \cdot 10\,000 = 3 \cdot 10^4.$$

Odgovor je pod B.

2.inačica

$$a^2 - b^2 + c^2 + 2 \cdot a \cdot c = a^2 + 2 \cdot a \cdot c + c^2 - b^2 = \left(a^2 + 2 \cdot a \cdot c + c^2\right) - b^2 = (a+c)^2 - b^2 =$$

$$= ((a+c)-b) \cdot ((a+c)+b) = (a+c-b) \cdot (a+c+b) = \begin{bmatrix} a = 101 \ , \ b = 100 \\ c = 99 \end{bmatrix} =$$

$$= (101 + 99 - 100) \cdot (101 + 99 + 100) = (200 - 100) \cdot (200 + 100) = 100 \cdot 300 =$$

$$= 30\,000 = 3 \cdot 10\,000 = 3 \cdot 10^4.$$

Odgovor je pod B.

Vježba 313

Vrijednost izraza $a^2 - b^2 + c^2 + 2 \cdot a \cdot c$ za $a = 11$, $b = 10$, $c = 9$ jednaka je:

$$A.\ 3 \cdot 10^2 \qquad B.\ 3 \cdot 10^3 \qquad C.\ 30 \qquad D.\ 3 \cdot 10^4$$

Rezultat: A.

Zadatak 314 (Bojana, gimnazija)

Zbroj kvadrata tri uzastopna parna prirodna broja je 200. Odredite te brojeve.

Rješenje 314

Ponovimo!

$$(a+b)^2 = a^2 + 2 \cdot a \cdot b + b^2 \quad , \quad (a-b)^2 = a^2 - 2 \cdot a \cdot b + b^2 \quad , \quad (a \cdot b)^2 = a^2 \cdot b^2.$$

Skratiti razlomak znači brojnik i nazivnik tog razlomka podijeliti istim brojem različitim od nule i jedinice

$$\frac{a \cdot n}{b \cdot n} = \frac{a}{b} \ , \ n \neq 0 \ , \ n \neq 1.$$

Skup svih prirodnih brojeva označavamo sa N i pišemo:

$$N = \{1, 2, 3, 4, 5, \dots, n, n+1, \dots\}.$$

Skup svih parnih prirodnih brojeva označavamo sa N_2 i pišemo:

$$N_2 = \{2, 4, 6, 8, 10, \dots, 2 \cdot n - 2, 2 \cdot n, \dots\}.$$

Svaki se parni prirodni broj može prikazati u obliku $2 \cdot n, \ n \in N$. Parni brojevi rastu za 2.

1.inačica

Neka su zadana tri uzastopna parna prirodna broja:

$$n \quad , \quad n+2 \quad , \quad n+4.$$

Prema uvjetu zadatka dobije se:

$$n^2 + (n+2)^2 + (n+4)^2 = 200 \ \Rightarrow \ n^2 + n^2 + 4 \cdot n + 4 + n^2 + 8 \cdot n + 16 = 200 \ \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \ n^2 + n^2 + 4 \cdot n + 4 + n^2 + 8 \cdot n + 16 - 200 = 0 \ \Rightarrow \ 3 \cdot n^2 + 12 \cdot n - 180 = 0 \ \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \ 3 \cdot n^2 + 12 \cdot n - 180 = 0 \ /:3 \ \Rightarrow \ n^2 + 4 \cdot n - 60 = 0 \ \Rightarrow \ \left.\begin{matrix} n^2 + 4 \cdot n - 60 = 0 \\ a = 1 \ , \ b = 4 \ , \ c = -60 \end{matrix}\right\} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \ \left.\begin{matrix} a = 1 \ , \ b = 4 \ , \ c = -60 \\ n_{1,2} = \dfrac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4 \cdot a \cdot c}}{2 \cdot a} \end{matrix}\right\} \Rightarrow \ n_{1,2} = \frac{-4 \pm \sqrt{4^2 - 4 \cdot 1 \cdot (-60)}}{2 \cdot 1} \ \Rightarrow \ n_{1,2} = \frac{-4 \pm \sqrt{16 + 240}}{2} \ \Rightarrow$$

$$\Rightarrow n_{1,2}=\frac{-4\pm\sqrt{256}}{2} \Rightarrow n_{1,2}=\frac{-4\pm16}{2} \Rightarrow \left.\begin{aligned} n_1&=\frac{-4+16}{2}\\ n_2&=\frac{-4-16}{2}\end{aligned}\right\} \Rightarrow \left.\begin{aligned} n_1&=\frac{12}{2}\\ n_2&=-\frac{20}{2}\end{aligned}\right\} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \left.\begin{aligned} n_1&=\frac{12}{2}\\ n_2&=-\frac{20}{2}\end{aligned}\right\} \Rightarrow \left.\begin{aligned} n_1&=6\\ n_2&=-10 \text{ nema smisla}\end{aligned}\right\} \Rightarrow n=6.$$

Traženi brojevi su:

$$\begin{array}{ccccc} n & , & n+2 & , & n+4 \\ 6 & , & 8 & , & 10. \end{array}$$

2.inačica

Neka su zadana tri uzastopna parna prirodna broja:

$$n-2 \quad , \quad n \quad , \quad n+2.$$

Prema uvjetu zadatka dobije se:

$$(n-2)^2+n^2+(n+2)^2=200 \Rightarrow n^2-4\cdot n+4+n^2+n^2+4\cdot n+4=200 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow n^2-4\cdot n+4+n^2+n^2+4\cdot n+4=200 \Rightarrow n^2+4+n^2+n^2+4=200 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow n^2+n^2+n^2=200-4-4 \Rightarrow 3\cdot n^2=192 \Rightarrow 3\cdot n^2=192 \;/:3 \Rightarrow n^2=64 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow n^2=64 \;/\sqrt{\ } \Rightarrow n_{1,2}=\pm\sqrt{64} \Rightarrow n_{1,2}=\pm8 \Rightarrow \left.\begin{aligned} n_1&=8\\ n_2&=-8 \text{ nema smisla}\end{aligned}\right\} \Rightarrow n=8$$

Traženi brojevi su:

$$\begin{array}{ccccc} n-2 & , & n & , & n+2 \\ 6 & , & 8 & , & 10. \end{array}$$

3.inačica

Neka su zadana tri uzastopna parna prirodna broja:

$$2\cdot n \quad , \quad 2\cdot n+2 \quad , \quad 2\cdot n+4.$$

Prema uvjetu zadatka dobije se:

$$(2\cdot n)^2+(2\cdot n+2)^2+(2\cdot n+4)^2=200 \Rightarrow 4\cdot n^2+4\cdot n^2+8\cdot n+4+4\cdot n^2+16\cdot n+16=200 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 4\cdot n^2+4\cdot n^2+8\cdot n+4+4\cdot n^2+16\cdot n+16-200=0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 12\cdot n^2+24\cdot n-180=0 \Rightarrow 12\cdot n^2+24\cdot n-180=0 \;/:12 \Rightarrow n^2+2\cdot n-15=0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \left.\begin{aligned} &n^2+2\cdot n-15=0\\ &a=1 \;,\; b=2 \;,\; c=-15\end{aligned}\right\} \Rightarrow \left.\begin{aligned} &a=1 \;,\; b=2 \;,\; c=-15\\ &n_{1,2}=\frac{-b\pm\sqrt{b^2-4\cdot a\cdot c}}{2\cdot a}\end{aligned}\right\} \Rightarrow n_{1,2}=\frac{-2\pm\sqrt{2^2-4\cdot1\cdot(-15)}}{2\cdot1} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow n_{1,2}=\frac{-2\pm\sqrt{4+60}}{2} \Rightarrow n_{1,2}=\frac{-2\pm\sqrt{64}}{2} \Rightarrow n_{1,2}=\frac{-2\pm8}{2} \Rightarrow \left.\begin{aligned} n_1&=\frac{-2+8}{2}\\ n_2&=\frac{-2-8}{2}\end{aligned}\right\} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \left.\begin{array}{l} n_1 = \frac{6}{2} \\ n_2 = -\frac{10}{2} \end{array}\right\} \Rightarrow \left.\begin{array}{l} n_1 = \frac{6}{2} \\ n_2 = -\frac{10}{2} \end{array}\right\} \Rightarrow \left.\begin{array}{l} n_1 = 3 \\ n_2 = -5 \text{ nema smisla} \end{array}\right\} \Rightarrow n = 3.$$

Traženi brojevi su:

$$\begin{array}{ccccc} 2 \cdot n & , & 2 \cdot n + 2 & , & 2 \cdot n + 4 \\ 2 \cdot 3 & , & 2 \cdot 3 + 2 & , & 2 \cdot 3 + 4 \\ 6 & , & 8 & , & 10. \end{array}$$

4.inačica

Neka su zadana tri uzastopna parna prirodna broja:

$$2 \cdot n - 2 \quad , \quad 2 \cdot n \quad , \quad 2 \cdot n + 2.$$

Prema uvjetu zadatka dobije se:

$$(2 \cdot n - 2)^2 + (2 \cdot n)^2 + (2 \cdot n + 2)^2 = 200 \Rightarrow 4 \cdot n^2 - 8 \cdot n + 4 + 4 \cdot n^2 + 4 \cdot n^2 + 8 \cdot n + 4 = 200 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 4 \cdot n^2 - 8 \cdot n + 4 + 4 \cdot n^2 + 4 \cdot n^2 + 8 \cdot n + 4 = 200 \Rightarrow 4 \cdot n^2 + 4 + 4 \cdot n^2 + 4 \cdot n^2 + 4 = 200 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 4 \cdot n^2 + 4 \cdot n^2 + 4 \cdot n^2 = 200 - 4 - 4 \Rightarrow 12 \cdot n^2 = 192 \Rightarrow 12 \cdot n^2 = 192 \; / : 12 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow n^2 = 16 \Rightarrow n^2 = 16 \; / \sqrt{} \Rightarrow n_{1,2} = \pm\sqrt{16} \Rightarrow n_{1,2} = \pm 4 \Rightarrow \left.\begin{array}{l} n_1 = 4 \\ n_2 = -4 \text{ nema smisla} \end{array}\right\} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow n = 4.$$

Traženi brojevi su:

$$\begin{array}{ccccc} 2 \cdot n - 2 & , & 2 \cdot n & , & 2 \cdot n + 2 \\ 2 \cdot 4 - 2 & , & 2 \cdot 4 & , & 2 \cdot 4 + 2 \\ 6 & , & 8 & , & 10. \end{array}$$

Vježba 314

Zbroj kvadrata tri uzastopna parna broja je 56. Odredite te brojeve.

Rezultat: 2, 4, 6.

Zadatak 315 (Lucija, web dizajner)

Masa Zemlje je $5.974 \cdot 10^{24}$ kg, a masa Mjeseca $7.349 \cdot 10^{22}$ kg. Koliko je puta masa Zemlje veća od mase Mjeseca?

$$A.\ 8 \text{ puta} \qquad B.\ 12 \text{ puta} \qquad C.\ 81 \text{ put} \qquad D.\ 123 \text{ puta}$$

Rješenje 315

Ponovimo!

Kako se računa koliko je puta broj a veći od broja b?

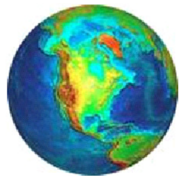
$$\frac{a}{b} = n \;,\; \text{veći je } n \text{ puta}.$$

Skratiti razlomak znači brojnik i nazivnik tog razlomka podijeliti istim brojem različitim od nule i jedinice

$$\frac{a \cdot n}{b \cdot n} = \frac{a}{b} \;,\; n \neq 0 \;,\; n \neq 1.$$

$$\left.\begin{array}{l} m_1 = 5.974 \cdot 10^{24} \; kg \; - \text{ masa Zemlje} \\ m_2 = 7.349 \cdot 10^{22} \; kg \; - \text{ masa Mjeseca} \end{array}\right\} \Rightarrow \frac{m_1}{m_2} = \frac{5.974 \cdot 10^{24} \; kg}{7.349 \cdot 10^{22} \; kg} \Rightarrow \frac{m_1}{m_2} = 81.29 \approx 81.$$

Odgovor je pod C.

 **:**  **= 81 put**

Vježba 315

Masa prvog planeta je $5.974 \cdot 10^{20}$ kg, a masa drugog planeta $7.349 \cdot 10^{18}$ kg. Koliko je puta masa prvog planeta veća od mase drugog planeta?

$$A.\ 8\ \ puta \qquad B.\ 12\ \ puta \qquad C.\ 81\ \ put \qquad D.\ 123\ \ puta$$

Rezultat: C.

Zadatak 316 (Vanna, gimnazija)

Koja je znamenka u broju 0.123456789101112131415 ... na 77. mjestu iza decimalne točke?

Rješenje 316

Ponovimo!

Brojevi koji imaju dvije znamenke zovu se dvoznamenkasti brojevi, npr. broj 28.

U decimalnom broju decimalna točka razdvaja dekadska mjesta od decimalnih. Lijevo od decimalne točke su dekadska mjesta, a desno od decimalne točke su decimalna mjesta.

dekadska mjesta **decimalna mjesta**

12340 . 56789

↓

decimalna točka

Jednoznamenkasti prirodni brojevi su: 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9. To je 9 znamenki.

Dvoznamenkastih brojeva kojima je:

- prva znamenka 1 ima deset: 10, 11, 12, 13, 14, 15, 16, 17, 18, 19.

Njih zapisujemo sa 20 ($2 \cdot 10$) znamenki.

- prva znamenka 2 ima deset: 20, 21, 22, 23, 24, 25, 26, 27, 28, 29.

Njih zapisujemo sa 20 ($2 \cdot 10$) znamenki.

- prva znamenka 3 ima deset: 30, 31, 32, 33, 34, 35, 36, 37, 38, 39.

Njih zapisujemo sa 20 ($2 \cdot 10$) znamenki.

To je ukupno 69 znamenki: 9 + 20 + 20 + 20 = 69.

Da bismo dobili 77. znamenku po redu treba pribrojiti još 8 znamenki: 69 + 8 = 77. Moramo na decimalnom mjestu dopisati četiri dvoznamenkasta broja kojima je prva znamenka 4: 40, 41, 42, 43.

70	71	72	73	74	75	76	77
4	0	4	1	4	2	4	3

Dakle, na 77. mjestu zadanog decimalnog broja nalazi se znamenka 3.

Vježba 316

Koja je znamenka u broju 0.123456789101112131415 ... na 75. mjestu iza decimalne točke?

Rezultat: 2.

Zadatak 317 (Vanna, gimnazija)

Je li broj 0.123456789101112131415 ... racionalan ili iracionalan?

Rješenje 317

Ponovimo!

U decimalnom broju decimalna točka razdvaja dekadska mjesta od decimalnih. Lijevo od decimalne točke su dekadska mjesta, a desno od decimalne točke su decimalna mjesta.

dekadska mjesta **decimalna mjesta**

12340 . 56789

decimalna točka

Realan broj nazivamo racionalnim ako se može zapisati u obliku

$$\frac{a}{b}, \; a \in Z, \; b \in N.$$

Racionalni brojevi su brojevi koje možemo napisati u obliku razlomaka.
Iracionalni brojevi su brojevi koje ne možemo zapisati u obliku razlomaka.
Svaki se razlomak (racionalan broj) može napisati kao decimalni broj. Decimalne brojeve dijelimo na

- konačne decimalne brojeve

Na primjer:

$$\frac{13}{5} = 13:5 = 2.6.$$

- čisto periodičke decimalne brojeve

Na primjer:

$$\frac{17}{3} = 17:3 = 5.6666... = 5.\dot{6}.$$

Decimale koje se ponavljaju zovemo periode.

- mješovite periodičke decimalne brojeve

Na primjer:

$$\frac{13}{15} = 13:15 = 0.8666... = 0.8\dot{6}.$$

Decimale koje se ne ponavljaju zovemo predperiode, a decimale koje se ponavljaju zovemo periode. Cijeli broj i konačan decimalni broj moguće je pisati kao periodičke decimalne brojeve u kojima je perioda jednaka nuli. Na primjer:

$$5 = 5.000... = 5.\dot{0} \quad , \quad 0.7 = 0.7000... = 0.7\dot{0} \quad , \quad 11.94 = 11.94000... = 11.94\dot{0}.$$

Bilo koji racionalan broj može se zapisati u obliku beskonačnog periodičkog decimalnog broja i obratno, svaki beskonačan periodički decimalni broj može se zapisati u obliku racionalnog broja.

1.inačica

Uočimo da u decimalnom broju 0.12345678910111213141516171819202122 … ima beskonačno mnogo znamenki koje se ne ponavljaju periodički. Brojeve koji u decimalnom zapisu imaju beskonačno mnogo decimala koje se periodički ne ponavljaju nazivamo iracionalnim brojevima. Dakle zadani decimalni broj je iracionalan broj.

2.inačica

Pretpostavimo da je broj 0.1234567891011121314151617181920212223242526… periodičan (što je istovjetno pretpostavci da je racionalan) i neka periodu čini n znamenki. U ispisivanju tog broja u jednom će trenutku doći na red za ispis i broj 10^n koji se zapisuje jednom jedinicom i s n nula. To znači da se perioda sastoji od n nula koje se uzastopno ponavljaju. Na temelju toga bismo zaključili da je broj konačan, a on to očito nije. Onda nije ni periodičan pa ni racionalan. Dakle, broj je iracionalan.

Vježba 317

Je li broj 0.101001000100001000001 … racionalan ili iracionalan? Je li broj 0.149162536496481 … racionalan ili iracionalan?

Rezultat: Dokazi se provode analogno dokazu u zadatku. Brojevi su iracionalni.

Zadatak 318 (Tihomir, srednja škola)

Racionaliziraj nazivnik razlomka $\frac{1}{\sqrt{10}+\sqrt{15}+\sqrt{14}+\sqrt{21}}$.

Rješenje 318

Ponovimo!

$$\sqrt{a\cdot b}=\sqrt{a}\cdot\sqrt{b} \quad , \quad (a+b)\cdot(a-b)=a^2-b^2 \quad , \quad \left(\sqrt{a}\right)^2=a \quad , \quad \frac{a}{b}\cdot\frac{c}{d}=\frac{a\cdot c}{b\cdot d}.$$

Zakon distribucije množenja prema zbrajanju.

$$a\cdot(b+c)=a\cdot b+a\cdot c \quad , \quad a\cdot b+a\cdot c=a\cdot(b+c).$$

Proširiti razlomak znači brojnik i nazivnik tog razlomka pomnožiti istim brojem različitim od nule i jedinice

$$\frac{a}{b}=\frac{a\cdot n}{b\cdot n} \ , \ n\neq 0 \ , \ n\neq 1.$$

1.inačica

$$\frac{1}{\sqrt{10}+\sqrt{15}+\sqrt{14}+\sqrt{21}}=\frac{1}{\sqrt{2\cdot 5}+\sqrt{3\cdot 5}+\sqrt{2\cdot 7}+\sqrt{3\cdot 7}}=$$

$$=\frac{1}{\sqrt{2}\cdot\sqrt{5}+\sqrt{3}\cdot\sqrt{5}+\sqrt{2}\cdot\sqrt{7}+\sqrt{3}\cdot\sqrt{7}}=\begin{bmatrix}\text{metoda}\\ \text{grupiranja}\end{bmatrix}=$$

$$=\frac{1}{\left(\sqrt{2}\cdot\sqrt{5}+\sqrt{3}\cdot\sqrt{5}\right)+\left(\sqrt{2}\cdot\sqrt{7}+\sqrt{3}\cdot\sqrt{7}\right)}=$$

$$=\frac{1}{\left(\sqrt{2}\cdot\sqrt{5}+\sqrt{3}\cdot\sqrt{5}\right)+\left(\sqrt{2}\cdot\sqrt{7}+\sqrt{3}\cdot\sqrt{7}\right)}=\frac{1}{\sqrt{5}\cdot\left(\sqrt{2}+\sqrt{3}\right)+\sqrt{7}\cdot\left(\sqrt{2}+\sqrt{3}\right)}=$$

$$=\frac{1}{\sqrt{5}\cdot\left(\sqrt{2}+\sqrt{3}\right)+\sqrt{7}\cdot\left(\sqrt{2}+\sqrt{3}\right)}=\frac{1}{\left(\sqrt{2}+\sqrt{3}\right)\cdot\left(\sqrt{5}+\sqrt{7}\right)}=$$

$$=\frac{1}{\left(\sqrt{3}+\sqrt{2}\right)\cdot\left(\sqrt{7}+\sqrt{5}\right)}=\frac{1}{\left(\sqrt{3}+\sqrt{2}\right)\cdot\left(\sqrt{7}+\sqrt{5}\right)}\cdot\frac{\left(\sqrt{3}-\sqrt{2}\right)\cdot\left(\sqrt{7}-\sqrt{5}\right)}{\left(\sqrt{3}-\sqrt{2}\right)\cdot\left(\sqrt{7}-\sqrt{5}\right)}=$$

$$=\frac{\left(\sqrt{3}-\sqrt{2}\right)\cdot\left(\sqrt{7}-\sqrt{5}\right)}{\left(\sqrt{3}+\sqrt{2}\right)\cdot\left(\sqrt{3}-\sqrt{2}\right)\cdot\left(\sqrt{7}+\sqrt{5}\right)\cdot\left(\sqrt{7}-\sqrt{5}\right)}=$$

$$=\frac{\left(\sqrt{3}-\sqrt{2}\right)\cdot\left(\sqrt{7}-\sqrt{5}\right)}{\left(\left(\sqrt{3}\right)^2-\left(\sqrt{2}\right)^2\right)\cdot\left(\left(\sqrt{7}\right)^2-\left(\sqrt{5}\right)^2\right)}=\frac{\left(\sqrt{3}-\sqrt{2}\right)\cdot\left(\sqrt{7}-\sqrt{5}\right)}{(3-2)\cdot(7-5)}=$$

$$=\frac{\left(\sqrt{3}-\sqrt{2}\right)\cdot\left(\sqrt{7}-\sqrt{5}\right)}{1\cdot 2}=\frac{\left(\sqrt{3}-\sqrt{2}\right)\cdot\left(\sqrt{7}-\sqrt{5}\right)}{2}.$$

2.inačica

$$\frac{1}{\sqrt{10}+\sqrt{15}+\sqrt{14}+\sqrt{21}}=\frac{1}{\sqrt{2\cdot 5}+\sqrt{3\cdot 5}+\sqrt{2\cdot 7}+\sqrt{3\cdot 7}}=$$

$$=\frac{1}{\sqrt{2}\cdot\sqrt{5}+\sqrt{3}\cdot\sqrt{5}+\sqrt{2}\cdot\sqrt{7}+\sqrt{3}\cdot\sqrt{7}}=\begin{bmatrix}\text{metoda}\\ \text{grupiranja}\end{bmatrix}=$$

$$=\frac{1}{\left(\sqrt{2}\cdot\sqrt{5}+\sqrt{2}\cdot\sqrt{7}\right)+\left(\sqrt{3}\cdot\sqrt{5}+\sqrt{3}\cdot\sqrt{7}\right)}=$$

$$=\frac{1}{\left(\sqrt{2}\cdot\sqrt{5}+\sqrt{2}\cdot\sqrt{7}\right)+\left(\sqrt{3}\cdot\sqrt{5}+\sqrt{3}\cdot\sqrt{7}\right)}=$$

$$=\frac{1}{\sqrt{2}\cdot\left(\sqrt{5}+\sqrt{7}\right)+\sqrt{3}\cdot\left(\sqrt{5}+\sqrt{7}\right)}=$$

$$=\frac{1}{\sqrt{2}\cdot\left(\sqrt{5}+\sqrt{7}\right)+\sqrt{3}\cdot\left(\sqrt{5}+\sqrt{7}\right)}=\frac{1}{\left(\sqrt{5}+\sqrt{7}\right)\cdot\left(\sqrt{2}+\sqrt{3}\right)}=$$

$$=\frac{1}{\left(\sqrt{7}+\sqrt{5}\right)\cdot\left(\sqrt{3}+\sqrt{2}\right)}=\frac{1}{\left(\sqrt{7}+\sqrt{5}\right)\cdot\left(\sqrt{3}+\sqrt{2}\right)}\cdot\frac{\left(\sqrt{7}-\sqrt{5}\right)\cdot\left(\sqrt{3}-\sqrt{2}\right)}{\left(\sqrt{7}-\sqrt{5}\right)\cdot\left(\sqrt{3}-\sqrt{2}\right)}=$$

$$=\frac{\left(\sqrt{7}-\sqrt{5}\right)\cdot\left(\sqrt{3}-\sqrt{2}\right)}{\left(\sqrt{7}+\sqrt{5}\right)\cdot\left(\sqrt{7}-\sqrt{5}\right)\cdot\left(\sqrt{3}+\sqrt{2}\right)\cdot\left(\sqrt{3}-\sqrt{2}\right)}=$$

$$=\frac{\left(\sqrt{7}-\sqrt{5}\right)\cdot\left(\sqrt{3}-\sqrt{2}\right)}{\left(\left(\sqrt{7}\right)^2-\left(\sqrt{5}\right)^2\right)\cdot\left(\left(\sqrt{3}\right)^2-\left(\sqrt{2}\right)^2\right)}=\frac{\left(\sqrt{7}-\sqrt{5}\right)\cdot\left(\sqrt{3}-\sqrt{2}\right)}{(7-5)\cdot(3-2)}=$$

$$=\frac{\left(\sqrt{7}-\sqrt{5}\right)\cdot\left(\sqrt{3}-\sqrt{2}\right)}{2\cdot 1}=\frac{\left(\sqrt{7}-\sqrt{5}\right)\cdot\left(\sqrt{3}-\sqrt{2}\right)}{2}.$$

Vježba 318

Racionaliziraj nazivnik razlomka $\frac{1}{\sqrt{10}+\sqrt{14}+\sqrt{15}+\sqrt{21}}$.

Rezultat: $\frac{\left(\sqrt{7}-\sqrt{5}\right)\cdot\left(\sqrt{3}-\sqrt{2}\right)}{2}$.

Zadatak 319 (Tomislav, srednja škola)

Ako umnošku triju uzastopnih cijelih brojeva dodamo srednji broj, dobit ćemo kub srednjeg broja. Dokaži!

Rješenje 319

Ponovimo!

$$a^2+2\cdot a\cdot b+b^2=(a+b)^2 \quad , \quad a^3+3\cdot a^2\cdot b+3\cdot a\cdot b^2+b^3=(a+b)^3.$$

$$(a-b)\cdot(a+b)=a^2-b^2 \quad , \quad a^1=a \quad , \quad a^n\cdot a^m=a^{n+m}.$$

Zakon distribucije množenja prema zbrajanju.

$$a\cdot(b+c)=a\cdot b+a\cdot c \quad , \quad a\cdot b+a\cdot c=a\cdot(b+c).$$

Množenje zagrada

$$(a+b)\cdot(c+d)=a\cdot c+a\cdot d+b\cdot c+b\cdot d.$$

Cijeli brojevi jesu brojevi:

$$\ldots, -5, -4, -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, 4, 5, \ldots$$

Oni čine skup cijelih brojeva koji označavamo slovom Z, a zapisujemo kao

$$Z=\{\ldots, -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, \ldots\} \quad \text{ili} \quad Z=\{0, 1, -1, 2, -2, 3, -3, \ldots\}.$$

Neposredni prethodnik cijelog broja je broj prije zadanog broja.

Neposredni prethodnik broja n je broj n – 1.
Neposredni sljedbenik cijelog broja je broj nakon zadanog broja.
Neposredni sljedbenik broja n je broj n + 1.

1.inačica

Neka su n, n + 1, n + 2 tri uzastopna cijela broja. Prema uvjetu zadatka slijedi:

$$n\cdot(n+1)\cdot(n+2)+(n+1)=\left(n^2+n\right)\cdot(n+2)+(n+1)=n^3+2\cdot n^2+n^2+2\cdot n+n+1=$$
$$=n^3+3\cdot n^2+3\cdot n+1=(n+1)^3.$$

2.inačica

Neka su n, n + 1, n + 2 tri uzastopna cijela broja. Prema uvjetu zadatka slijedi:

$$n\cdot(n+1)\cdot(n+2)+(n+1)=n\cdot(n+1)\cdot(n+2)+(n+1)=(n+1)\cdot(n\cdot(n+2)+1)=$$
$$=(n+1)\cdot\left(n^2+2\cdot n+1\right)=(n+1)\cdot(n+1)^2=(n+1)^3.$$

3.inačica

Neka su n – 1, n, n + 1 tri uzastopna cijela broja. Prema uvjetu zadatka slijedi:

$$(n-1)\cdot n\cdot(n+1)+n=n\cdot(n-1)\cdot(n+1)+n=n\cdot\left(n^2-1\right)+n=n^3-n+n=n^3-n+n=n^3.$$

4.inačica

Neka su n – 1, n, n + 1 tri uzastopna cijela broja. Prema uvjetu zadatka slijedi:

$$(n-1)\cdot n\cdot(n+1)+n=(n-1)\cdot n\cdot(n+1)+n=n\cdot((n-1)\cdot(n+1)+1)=n\cdot\left(n^2-1+1\right)=$$
$$=n\cdot\left(n^2-1+1\right)=n\cdot n^2=n^3.$$

Vježba 319

Ako umnošku dvaju uzastopnih cijelih brojeva dodamo veći broj, dobit ćemo kvadrat većeg broja. Dokaži!

Rezultat: Dokaz analogan.

Zadatak 320 (Tomislav, srednja škola)

Razlika kvadrata dvaju uzastopnih cijelih brojeva neparan je broj. Dokaži!

Rješenje 320

Ponovimo!

$$(a+b)^2=a^2+2\cdot a\cdot b+b^2 \quad , \quad (a-b)\cdot(a+b)=a^2-b^2.$$

Zakon distribucije množenja prema zbrajanju.

$$a\cdot(b+c)=a\cdot b+a\cdot c \quad , \quad a\cdot b+a\cdot c=a\cdot(b+c).$$

Cijeli brojevi jesu brojevi:

$$\ldots,\ -5,\ -4,\ -3,\ -2,\ -1,\ 0,\ 1,\ 2,\ 3,\ 4,\ 5,\ \ldots$$

Oni čine skup cijelih brojeva koji označavamo slovom Z, a zapisujemo kao

$$Z=\{\ldots,\ -3,\ -2,\ -1,\ 0,\ 1,\ 2,\ 3,\ \ldots\} \quad \text{ili} \quad Z=\{0,\ 1,\ -1,\ 2,\ -2,\ 3,\ -3,\ \ldots\}.$$

Neposredni prethodnik cijelog broja je broj prije zadanog broja.
Neposredni prethodnik broja n je broj n – 1.
Neposredni sljedbenik cijelog broja je broj nakon zadanog broja.
Neposredni sljedbenik broja n je broj n + 1.
Prirodni brojevi dijele se na parne i neparne brojeve. Parni brojevi su oni brojevi koji su djeljivi sa 2, a neparni su oni koji nisu djeljivi sa 2.
Da je neki prirodan broj m neparan znači da se može napisati u obliku

$$m=2\cdot(\text{neki prirodan broj})-1 \quad , \quad m=2\cdot k-1\ ,\ k\in N.$$

Ili

$$m = 2 \cdot (\text{neki prirodan broj}) + 1 \quad , \quad m = 2 \cdot k + 1 \ , \ k \in N.$$

1.inačica

Neka su n i n + 1 dva uzastopna cijela broja. Prema uvjetu zadatka slijedi:

$$(n+1)^2 - n^2 = n^2 + 2 \cdot n + 1 - n^2 = n^2 + 2 \cdot n + 1 - n^2 = 2 \cdot n + 1 \text{ neparan broj}.$$

2.inačica

Neka su n i n + 1 dva uzastopna cijela broja. Prema uvjetu zadatka slijedi:

$$(n+1)^2 - n^2 = ((n+1) - n) \cdot ((n+1) + n) = (n+1-n) \cdot (n+1+n) = (n+1-n) \cdot (n+1+n) =$$

$$= 1 \cdot (2 \cdot n + 1) = 2 \cdot n + 1 \text{ neparan broj}.$$

Vježba 320

Zbroj dvaju uzastopnih cijelih brojeva neparan je broj. Dokaži!

Rezultat: Dokaz analogan.