Zadatak 281 (Ivan, tehnička škola)

Racionaliziraj razlomak $\sqrt{\frac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{3}}$.

Rješenje 281

Ponovimo!

$$\sqrt{\frac{a}{b}}=\frac{\sqrt{a}}{\sqrt{b}} \quad , \quad \sqrt{a}\cdot\sqrt{b}=\sqrt{a\cdot b} \quad , \quad \left(\sqrt{a}\right)^2=a.$$

Proširiti razlomak znači brojnik i nazivnik tog razlomka pomnožiti istim brojem različitim od nule i jedinice

$$\frac{a}{b}=\frac{a\cdot n}{b\cdot n} \; , \; n\neq 0 \; , \; n\neq 1.$$

Zakon distribucije množenja prema zbrajanju.

$$a\cdot(b+c)=a\cdot b+a\cdot c \quad , \quad a\cdot b+a\cdot c=a\cdot(b+c).$$

1.inačica

$$\sqrt{\frac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{3}}=\sqrt{\frac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{3}\cdot\frac{3}{3}}=\sqrt{\frac{3\cdot\left(\sqrt{6}+\sqrt{2}\right)}{9}}=\frac{\sqrt{3\cdot\left(\sqrt{6}+\sqrt{2}\right)}}{\sqrt{9}}=\frac{\sqrt{3\cdot\sqrt{6}+3\cdot\sqrt{2}}}{3}.$$

2.inačica

$$\sqrt{\frac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{3}}=\frac{\sqrt{\sqrt{6}+\sqrt{2}}}{\sqrt{3}}=\frac{\sqrt{\sqrt{6}+\sqrt{2}}}{\sqrt{3}}\cdot\frac{\sqrt{3}}{\sqrt{3}}=\frac{\sqrt{3}\cdot\sqrt{\sqrt{6}+\sqrt{2}}}{\left(\sqrt{3}\right)^2}=$$

$$=\frac{\sqrt{3\cdot\left(\sqrt{6}+\sqrt{2}\right)}}{3}=\frac{\sqrt{3\cdot\sqrt{6}+3\cdot\sqrt{2}}}{3}.$$

Vježba 281

Racionaliziraj razlomak $\sqrt{\frac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{5}}$.

Rezultat: $\frac{\sqrt{5\cdot\sqrt{6}+5\cdot\sqrt{2}}}{5}$.

Zadatak 282 (Irena, gimnazija)

Izračunaj: 123456787 · 123456788 – 123456789 · 123456786.

Rješenje 282

Ponovimo!

$$a^1=a \quad , \quad a^n\cdot a^m=a^{n+m}.$$

Množenje zagrada

$$(a+b)\cdot(c+d)=a\cdot c+a\cdot d+b\cdot c+b\cdot d.$$

Zakon distribucije množenja prema zbrajanju.

$$a\cdot(b+c)=a\cdot b+a\cdot c \quad , \quad a\cdot b+a\cdot c=a\cdot(b+c).$$

1.inačica

Označimo x = 123456786. Tada je:

$$123\,456\,787\cdot 123\,456\,788-123\,456\,789\cdot 123\,456\,786=(x+1)\cdot(x+2)-(x+3)\cdot x=$$

$$=x^2+2\cdot x+x+2-x^2-3\cdot x=x^2+2\cdot x+x+2-x^2-3\cdot x=2.$$

2.inačica

Označimo x = 123456787. Tada je:

$$123\,456\,787\cdot 123\,456\,788-123\,456\,789\cdot 123\,456\,786=x\cdot(x+1)-(x+2)\cdot(x-1)=$$

$$=x^2+x-\left(x^2-x+2\cdot x-2\right)=x^2+x-x^2+x-2\cdot x+2=x^2+x-x^2+x-2\cdot x+2=2.$$

3.inačica

Označimo x = 123456788. Tada je:

$$123\,456\,787\cdot 123\,456\,788-123\,456\,789\cdot 123\,456\,786=(x-1)\cdot x-(x+1)\cdot(x-2)=$$

$$=x^2-x-\left(x^2-2\cdot x+x-2\right)=x^2-x-x^2+2\cdot x-x+2=x^2-x-x^2+2\cdot x-x+2=2.$$

4.inačica

Označimo x = 123456789. Tada je:

$$123\,456\,787\cdot 123\,456\,788-123\,456\,789\cdot 123\,456\,786=(x-2)\cdot(x-1)-x\cdot(x-3)=$$

$$=x^2-x-2\cdot x+2-x^2+3\cdot x=x^2-x-2\cdot x+2-x^2+3\cdot x=2.$$

Vježba 282

Izračunaj: 123456 · 123457 – 123458 · 123455.

Rezultat: 2.

Zadatak 283 (Iris, gimnazija)

Broj $8^7 \cdot 25^7$ napišite u standardnom obliku.

Rješenje 283

Ponovimo!

$$a^n\cdot b^n=(a\cdot b)^n \quad , \quad \left(a^n\right)^m=a^{n\cdot m} \quad , \quad a^n\cdot a^m=a^{n+m}.$$

Decimalni broj množimo dekadskom jedinicom (10, 100, 1000, 10000, …) tako da mu decimalnu točku pomaknemo udesno za onoliko mjesta koliko dekadska jedinica ima nula.

Svaki realan broj možemo napisati u standardnom obliku, tj. kao umnožak broja iz intervala $[1, 10\rangle$ i potencije broja 10. Na primjer,

$$3\,250=3.25\cdot 10^3 \quad , \quad 0.00072=7.2\cdot 10^{-4}.$$

Preoblikujemo zadani broj.

$$8^7\cdot 25^7=(8\cdot 25)^7=200^7=(2\cdot 100)^7=2^7\cdot 100^7=128\cdot\left(10^2\right)^7=128\cdot 10^{14}=$$

$$=1.28\cdot 10^2\cdot 10^{14}=1.28\cdot 10^{16}.$$

Vježba 283

Broj $4^3 \cdot 125^3$ napišite u standardnom obliku.

Rezultat: $1.25 \cdot 10^8$.

Zadatak 284 (Robert, gimnazija)

Dokaži da je četveroznamenkasti broj oblika $\overline{abba}$ djeljiv s 11.

Rješenje 284

Ponovimo!

$$a^1=a \quad , \quad a^0=1.$$

Za zapis broja koristimo znamenke 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8 i 9. Brojevna vrijednost što ju nosi neka znamenka određena je ne samo vrijednošću te znamenke već i pozicijom te znamenke u zapisu broja. Takav zapis broja zovemo pozicijskim zapisom. Općenito:

Ako je $N=a_n a_{n-1} a_{n-2} \ldots a_2 a_1 a_0$, pri čemu je $a_i\in\{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9\}$, $i=0,1,2,\ldots,n$ dekadski zapis prirodnog broja N, onda je njegova vrijednost

$$N = a_n \cdot 10^n + a_{n-1} \cdot 10^{n-1} + a_{n-2} \cdot 10^{n-2} + ... + a_2 \cdot 10^2 + a_1 \cdot 10 + a_0.$$

Broj 10 zove se baza dekadskog brojevnog sustava.
Broj b je višekratnik prirodnog broja a ako postoji takav prirodan broj k da vrijedi

$$b = k \cdot a.$$

Za prirodni broj b kažemo da je djeljiv s prirodnim brojem a ako je

$$b = k \cdot a \ , \ k \in N,$$

tj. ako je broj b višekratnik broja a.
Zakon distribucije množenja prema zbrajanju.

$$a \cdot (b + c) = a \cdot b + a \cdot c \quad , \quad a \cdot b + a \cdot c = a \cdot (b + c).$$

Za četveroznamenkasti prirodni broj vrijedi

$$\overline{abcd} = 1000 \cdot a + 100 \cdot b + 10 \cdot c + d,$$

gdje je $a \in \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9\}$, $b, c, d \in \{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9\}$.

$$\overline{abba} = \overset{3}{a}\overset{2}{b}\overset{1}{b}\overset{0}{a} = a \cdot 10^3 + b \cdot 10^2 + b \cdot 10^1 + a \cdot 10^0 = a \cdot 10^3 + b \cdot 10^2 + b \cdot 10 + a \cdot 1 =$$

$$= 1000 \cdot a + 100 \cdot b + 10 \cdot b + a = 1001 \cdot a + 110 \cdot b = 11 \cdot (91 \cdot a + 10 \cdot b) = 11 \cdot (91 \cdot a + 10 \cdot b).$$

Vježba 284

Dokaži da je četveroznamenkasti broj oblika $\overline{aabb}$ djeljiv s 11.

Rezultat: Dokaz analogan, $11 \cdot (100 \cdot a + b)$.

Zadatak 285 (Robert, gimnazija)

Dokaži da je šesteroznamenkasti broj oblika $\overline{abcabc}$ djeljiv sa $7 \cdot 11 \cdot 13$.

Rješenje 285

Ponovimo!

$$a^1 = a \ , \quad a^0 = 1.$$

Za zapis broja koristimo znamenke 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8 i 9. Brojevna vrijednost što ju nosi neka znamenka određena je ne samo vrijednošću te znamenke već i pozicijom te znamenke u zapisu broja. Takav zapis broja zovemo pozicijskim zapisom. Općenito:

Ako je $N = a_n a_{n-1} a_{n-2} ... a_2 a_1 a_0$, pri čemu je $a_i \in \{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9\}$, $i = 0, 1, 2, ..., n$ dekadski zapis prirodnog broja N, onda je njegova vrijednost

$$N = a_n \cdot 10^n + a_{n-1} \cdot 10^{n-1} + a_{n-2} \cdot 10^{n-2} + ... + a_2 \cdot 10^2 + a_1 \cdot 10 + a_0.$$

Broj 10 zove se baza dekadskog brojevnog sustava.
Broj b je višekratnik prirodnog broja a ako postoji takav prirodan broj k da vrijedi

$$b = k \cdot a.$$

Za prirodni broj b kažemo da je djeljiv s prirodnim brojem a ako je

$$b = k \cdot a \ , \ k \in N,$$

tj. ako je broj b višekratnik broja a.
Zakon distribucije množenja prema zbrajanju.

$$a \cdot (b + c) = a \cdot b + a \cdot c \quad , \quad a \cdot b + a \cdot c = a \cdot (b + c).$$

Za šesteroznamenkasti prirodni broj vrijedi

$$\overline{abcdef} = 100\,000 \cdot a + 10\,000 \cdot b + 1000 \cdot c + 100 \cdot d + 10 \cdot e + f,$$

gdje je $a \in \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9\}$, $b, c, d, e, f \in \{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9\}$.

$$\overline{abcabc} = \overset{5}{a}\overset{4}{b}\overset{3}{c}\overset{2}{a}\overset{1}{b}\overset{0}{c} = a \cdot 10^5 + b \cdot 10^4 + c \cdot 10^3 + a \cdot 10^2 + b \cdot 10^1 + c \cdot 10^0 =$$

$$= a \cdot 10^5 + b \cdot 10^4 + c \cdot 10^3 + a \cdot 10^2 + b \cdot 10 + c \cdot 1 =$$

$$= 100\,000 \cdot a + 10\,000 \cdot b + 1000 \cdot c + 100 \cdot a + 10 \cdot b + c =$$

$$= 100100 \cdot a + 10010 \cdot b + 1001 \cdot c = 1001 \cdot (100 \cdot a + 10 \cdot b + c) = [1001 = 7 \cdot 11 \cdot 13] =$$
$$= 7 \cdot 11 \cdot 13 \cdot (100 \cdot a + 10 \cdot b + c).$$

Vježba 285

Dokaži da je šesteroznamenkasti broj oblika $\overline{aabbcc}$ djeljiv s 11.

Rezultat: Dokaz analogan, $11 \cdot (10\,000 \cdot a + 100 \cdot b + c)$.

Zadatak 286 (Jelica ☺, gimnazija)

Koji od brojeva ne može biti rješenje algebarske jednadžbe $x^4 + a \cdot x^2 + b \cdot x - 3 = 0$ s cjelobrojnim koeficijentima?

$A.\ 2 \qquad B.\ 1 \qquad C.\ -1 \qquad D.\ 3$

Rješenje 286

Ponovimo!
Nultočka polinoma

$$f(x) = a_n \cdot x^n + a_{n-1} \cdot x^{n-1} + a_{n-2} \cdot x^{n-2} + \ \dots \ + a_2 \cdot x^2 + a_1 \cdot x + a_0$$

je svaki kompleksni broj x_0 za koji je

$$f(x_0) = 0.$$

Ako je x_0 realan broj, onda se x_0 zove realna nultočka, a ako je x_0 kompleksan broj onda se x_0 zove kompleksna nultočka.
Za broj x_0 kažemo da je nultočka (korijen) funkcije f ako vrijedi

$$f(x_0) = 0.$$

Broj b je višekratnik prirodnog broja a ako postoji takav prirodan broj k da vrijedi

$$b = k \cdot a.$$

Za prirodni broj b kažemo da je djeljiv s prirodnim brojem a ako je

$$b = k \cdot a \ , \ k \in N,$$

tj. ako je broj b višekratnik broja a.
Ako je cijeli broj x_0 nultočka polinoma

$$f(x) = a_n \cdot x^n + a_{n-1} \cdot x^{n-1} + a_{n-2} \cdot x^{n-2} + \ \dots \ + a_2 \cdot x^2 + a_1 \cdot x + a_0$$

s cjelobrojnim koeficijentima, onda je a_0 djeljiv s x_0.
Odredimo koeficijente zadanog polinoma.

$$f(x) = x^4 + a \cdot x^2 + b \cdot x - 3 \ \Rightarrow \ f(x) = 1 \cdot x^4 + 0 \cdot x^3 + a \cdot x^2 + b \cdot x - 3 \ \Rightarrow \ \left.\begin{array}{l} a_4 = 1 \\ a_3 = 0 \\ a_2 = a \\ a_1 = b \\ a_0 = -3 \end{array}\right\}.$$

Zanima nas koeficijent $a_0 = -3$.
Redom provjeravamo je li a_0 djeljiv brojevima 2, 1, – 1, 3, tj. koji od brojeva 2, 1, – 1, 3 ne može biti nultočka zadanog polinoma.

- $\left.\begin{array}{l} a_0 = -3 \\ x_0 = 2 \end{array}\right\} \Rightarrow [-3 : 2 = -1.5 \notin Z] \Rightarrow$

$\Rightarrow$ -3 nije djeljiv s 2 pa broj 2 ne može biti rješenje algebarske jednadžbe

- $\left.\begin{array}{l} a_0 = -3 \\ x_0 = 1 \end{array}\right\} \Rightarrow [-3 : 1 = -3 \in Z] \Rightarrow$

$\Rightarrow\ -3$ je djeljiv s 1 pa broj 1 može biti rješenje algebarske jednadžbe

$$\bullet \quad \left.\begin{array}{l} a_0 = -3 \\ x_0 = -1 \end{array}\right\} \Rightarrow \left[-3 : (-1) = 3 \in Z \right] \Rightarrow$$

$\Rightarrow\ -3$ je djeljiv s -1 pa broj -1 može biti rješenje algebarske jednadžbe

$$\bullet \quad \left.\begin{array}{l} a_0 = -3 \\ x_0 = 3 \end{array}\right\} \Rightarrow \left[-3 : 3 = -1 \in Z \right] \Rightarrow$$

$\Rightarrow\ -3$ je djeljiv s 3 pa broj 3 može biti rješenje algebarske jednadžbe

Odgovor je pod A.

Vježba 286

Koji od brojeva ne može biti rješenje algebarske jednadžbe $x^4 + a \cdot x^2 + b \cdot x - 9 = 0$ s cjelobrojnim koeficijentima?

$$A.\ 2 \qquad B.\ 1 \qquad C.\ -1 \qquad D.\ 3$$

Rezultat: A.

Zadatak 287 (Zvonko, gimnazija)

Odredite n iz jednadžbe $\binom{n}{10} = \binom{n}{7}$.

Rješenje 287

Ponovimo!

$$n = \frac{n}{1} \quad , \quad \frac{a}{b} = \frac{c}{d} \Rightarrow \frac{b}{a} = \frac{d}{c}.$$

Umnožak prvih n prirodnih brojeva označavamo posebnim simbolom

$$n! = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot \ldots \cdot (n-2) \cdot (n-1) \cdot n.$$

Broj n! čitamo "en faktorijela". Tako na primjer, vrijedi

$$\boxed{\begin{array}{l} 1! = 1, \\ 2! = 1 \cdot 2, \\ 3! = 1 \cdot 2 \cdot 3, \\ 4! = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4, \\ 5! = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5, \\ 6! = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5 \cdot 6 \text{ itd.} \end{array}}$$

Vidimo da faktorijele zadovoljavaju formulu

$$n! = (n-1)! \cdot n.$$

Uočimo da se može pisati, na primjer,

$$\boxed{\begin{array}{l} 9! = 8! \cdot 9, \\ 9! = 7! \cdot 8 \cdot 9, \\ 9! = 6! \cdot 7 \cdot 8 \cdot 9, \\ 9! = 5! \cdot 6 \cdot 7 \cdot 8 \cdot 9, \\ 9! = 4! \cdot 5 \cdot 6 \cdot 7 \cdot 8 \cdot 9 \text{ itd.} \end{array}}$$

$$\boxed{\begin{array}{l} n! = (n-1)! \cdot n, \\ n! = (n-2)! \cdot (n-1) \cdot n, \\ n! = (n-3)! \cdot (n-2) \cdot (n-1) \cdot n, \\ n! = (n-4)! \cdot (n-3) \cdot (n-2) \cdot (n-1) \cdot n, \\ n! = (n-5)! \cdot (n-4) \cdot (n-3) \cdot (n-2) \cdot (n-1) \cdot n \text{ itd.} \end{array}}$$

Binomni koeficijent

Neka je n prirodan broj, a k prirodan broj ili 0 i $k \le n$. Binomni koeficijent označavamo simbolom $\binom{n}{k}$ i definiramo

$$\binom{n}{k}=\frac{n!}{k!\cdot(n-k)!}.$$

Svojstvo simetrije:

$$\binom{n}{k}=\binom{n}{n-k}.$$

1.inačica

Preoblikujemo zadanu jednadžbu.

$$\binom{n}{10}=\binom{n}{7} \Rightarrow \frac{n!}{10!\cdot(n-10)!}=\frac{n!}{7!\cdot(n-7)!} \Rightarrow \frac{n!}{10!\cdot(n-10)!}=\frac{n!}{7!\cdot(n-7)!} \ /\cdot\frac{1}{n!} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \frac{1}{10!\cdot(n-10)!}=\frac{1}{7!\cdot(n-7)!} \Rightarrow 10!\cdot(n-10)!=7!\cdot(n-7)! \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 7!\cdot 8\cdot 9\cdot 10\cdot(n-10)!=7!\cdot(n-7)! \Rightarrow 7!\cdot 8\cdot 9\cdot 10\cdot(n-10)!=7!\cdot(n-7)! \ /\cdot\frac{1}{7!} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 8\cdot 9\cdot 10\cdot(n-10)!=(n-7)! \Rightarrow 8\cdot 9\cdot 10\cdot(n-10)!=(n-10)!\cdot(n-9)\cdot(n-8)\cdot(n-7) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 8\cdot 9\cdot 10\cdot(n-10)!=(n-10)!\cdot(n-9)\cdot(n-8)\cdot(n-7) \ /\cdot\frac{1}{(n-10)!} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 8\cdot 9\cdot 10=(n-9)\cdot(n-8)\cdot(n-7) \Rightarrow (n-9)\cdot(n-8)\cdot(n-7)=8\cdot 9\cdot 10 \Rightarrow \left.\begin{array}{l} n-9=8 \\ n-8=9 \\ n-7=10 \end{array}\right\} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \left.\begin{array}{l} n=8+9 \\ n=9+8 \\ n=10+7 \end{array}\right\} \Rightarrow \left.\begin{array}{l} n=17 \\ n=17 \\ n=17 \end{array}\right\} \Rightarrow n=17.$$

2.inačica

Zbog svojstva simetričnosti binomnog koeficijenta

$$\binom{n}{k}=\binom{n}{n-k} \Rightarrow k+n-k=k+n-k=n,$$

slijedi:

$$\binom{n}{10}=\binom{n}{7} \Rightarrow 10+7=n \Rightarrow n=17.$$

Vježba 287

Odredite n iz jednadžbe $\binom{n}{10}=\binom{n}{5}$.

Rezultat: n = 15.

Zadatak 288 (Marko, gimnazija)

Dokaži da je broj $\sqrt{7+4\cdot\sqrt{3}}+\sqrt{7-4\cdot\sqrt{3}}$ cijeli broj.

Rješenje 288

Ponovimo!

$$(a+b)^2=a^2+2\cdot a\cdot b+b^2 \quad , \quad \left(\sqrt{a}\right)^2=a \quad , \quad \sqrt{a}\cdot\sqrt{b}=\sqrt{a\cdot b}.$$

$$(a-b)\cdot(a+b)=a^2-b^2 \quad , \quad (a\cdot b)^n=a^n\cdot b^n.$$

Ako zadani izraz označimo slovom n i kvadriramo ga, dobivamo:

$$n=\sqrt{7+4\cdot\sqrt{3}}+\sqrt{7-4\cdot\sqrt{3}} \Rightarrow n=\sqrt{7+4\cdot\sqrt{3}}+\sqrt{7-4\cdot\sqrt{3}} \;/^2 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow n^2=\left(\sqrt{7+4\cdot\sqrt{3}}+\sqrt{7-4\cdot\sqrt{3}}\right)^2 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow n^2=\left(\sqrt{7+4\cdot\sqrt{3}}\right)^2+2\cdot\sqrt{7+4\cdot\sqrt{3}}\cdot\sqrt{7-4\cdot\sqrt{3}}+\left(\sqrt{7-4\cdot\sqrt{3}}\right)^2 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow n^2=7+4\cdot\sqrt{3}+2\cdot\sqrt{\left(7+4\cdot\sqrt{3}\right)\cdot\left(7-4\cdot\sqrt{3}\right)}+7-4\cdot\sqrt{3} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow n^2=7+4\cdot\sqrt{3}+2\cdot\sqrt{\left(7+4\cdot\sqrt{3}\right)\cdot\left(7-4\cdot\sqrt{3}\right)}+7-4\cdot\sqrt{3} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow n^2=7+2\cdot\sqrt{\left(7+4\cdot\sqrt{3}\right)\cdot\left(7-4\cdot\sqrt{3}\right)}+7 \Rightarrow n^2=14+2\cdot\sqrt{7^2-\left(4\cdot\sqrt{3}\right)^2} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow n^2=14+2\cdot\sqrt{49-4^2\cdot\left(\sqrt{3}\right)^2} \Rightarrow n^2=14+2\cdot\sqrt{49-16\cdot 3} \Rightarrow n^2=14+2\cdot\sqrt{49-48} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow n^2=14+2\cdot\sqrt{1} \Rightarrow n^2=14+2\cdot 1 \Rightarrow n^2=14+2 \Rightarrow n^2=16.$$

Budući da je n pozitivan broj,

$$n=\sqrt{7+4\cdot\sqrt{3}}+\sqrt{7-4\cdot\sqrt{3}}>0$$

slijedi da je

$$n^2=16 \Rightarrow n^2=16 \;/\sqrt{\ } \Rightarrow n=\sqrt{16} \Rightarrow n=4.$$

Dakle, zadani broj je prirodan.

Vježba 288

Dokaži da je broj $\sqrt{11+6\cdot\sqrt{2}}+\sqrt{11-6\cdot\sqrt{2}}$ cijeli broj.

Rezultat: Dokaz analogan.

Zadatak 289 (Tomislav, srednja škola)

U razredu je 12 dječaka i 18 djevojaka. Na ispitu znanja prosjek razreda bio je 90 bodova. Ako su dečki postigli prosjek 87 bodova, koliki je prosjek djevojaka?

Rješenje 289

Ponovimo!

Neka je dan skup n pozitivnih brojeva $\{a_1, a_2, a_3, \ldots, a_n\}$. Tada je aritmetička sredina ili prosjek A_n brojeva $a_1, a_2, a_3, \ldots, a_n$ definirana izrazom

$$A_n=\frac{a_1+a_2+a_3+\ldots+a_n}{n}.$$

Ako su $a_1, a_2, a_3, \ldots, a_n$ veličine čiji se prosjek traži i imamo

f_1 veličine a_1
f_2 veličine a_2
……………..
f_n veličine a_n,

tada je prosječna vrijednost vagana (ponderirana) aritmetička sredina:

$$A_n=\frac{f_1\cdot a_1+f_2\cdot a_2+f_3\cdot a_3+\ldots+f_n\cdot a_n}{f_1+f_2+f_3+\ldots+f_n}.$$

U razredu je ukupno 30 učenika.

$$12+18=30.$$

Dečki su postigli prosjek 87 bodova. Neka je x prosjek bodova djevojaka. Budući da je na ispitu znanja prosjek razreda bio 90 bodova, vrijedi:

$$\frac{18\cdot x+12\cdot 87}{30}=90 \Rightarrow \frac{18\cdot x+1044}{30}=90 \Rightarrow \frac{18\cdot x+1044}{30}=90 \;/\cdot 30 \Rightarrow 18\cdot x+1044=2700 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 18\cdot x=2700-1044 \Rightarrow 18\cdot x=1656 \Rightarrow 18\cdot x=1656 \;/:18 \Rightarrow x=92.$$

Vježba 289

U razredu je 12 dječaka i 18 djevojaka. Na ispitu znanja prosjek razreda bio je 90 bodova. Ako su djevojke postigle prosjek 92 boda, koliki je prosjek dječaka?

Rezultat: 87.

Zadatak 290 (Davorka, srednja škola)

Izračunajte $\left\{\left[\left(2^{-1}\right)\cdot\left(\frac{1}{4}\right)^{3}\right]\cdot 8\right\}^{\frac{1}{4}}$.

Rješenje 290

Ponovimo!

$$a^{-n}=\frac{1}{a^{n}} \quad , \quad a^{1}=a \quad , \quad \left(\frac{a}{b}\right)^{n}=\frac{a^{n}}{b^{n}} \quad , \quad \left(a^{n}\right)^{m}=a^{n\cdot m} \quad , \quad \frac{a}{b}\cdot\frac{c}{d}=\frac{a\cdot c}{b\cdot d}.$$

$$a^{n}\cdot a^{m}=a^{n+m} \quad , \quad b\cdot\frac{a}{b}=a.$$

Skratiti razlomak znači brojnik i nazivnik tog razlomka podijeliti istim brojem različitim od nule i jedinice

$$\frac{a\cdot n}{b\cdot n}=\frac{a}{b} \;,\; n\neq 0 \;,\; n\neq 1.$$

1.inačica

$$\left\{\left[\left(2^{-1}\right)\cdot\left(\frac{1}{4}\right)^{3}\right]\cdot 8\right\}^{\frac{1}{4}}=\left\{\left[\frac{1}{2}\cdot\frac{1^{3}}{4^{3}}\right]\cdot 8\right\}^{\frac{1}{4}}=\left\{\left[\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{64}\right]\cdot 8\right\}^{\frac{1}{4}}=\left\{\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{64}\cdot 8\right\}^{\frac{1}{4}}=$$

$$=\left\{\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{64}\cdot 8\right\}^{\frac{1}{4}}=\left\{\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{8}\right\}^{\frac{1}{4}}=\left(\frac{1}{16}\right)^{\frac{1}{4}}=\left(\left(\frac{1}{2}\right)^{4}\right)^{\frac{1}{4}}=\frac{1}{2}.$$

2.inačica

$$\left\{\left[\left(2^{-1}\right)\cdot\left(\frac{1}{4}\right)^{3}\right]\cdot 8\right\}^{\frac{1}{4}}=\left\{\left[2^{-1}\cdot\left(\frac{1}{2^{2}}\right)^{3}\right]\cdot 2^{3}\right\}^{\frac{1}{4}}=\left\{\left[2^{-1}\cdot\left(2^{-2}\right)^{3}\right]\cdot 2^{3}\right\}^{\frac{1}{4}}=$$

$$=\left\{\left[2^{-1}\cdot 2^{-6}\right]\cdot 2^{3}\right\}^{\frac{1}{4}}=\left\{2^{-1}\cdot 2^{-6}\cdot 2^{3}\right\}^{\frac{1}{4}}=\left(2^{-4}\right)^{\frac{1}{4}}=2^{-1}=\frac{1}{2}.$$

Vježba 290

Izračunajte $\left\{\left[\left(2^{-1}\right)\cdot\left(\frac{1}{4}\right)^{3}\right]\cdot 8\right\}^{\frac{1}{2}}$.

Rezultat: $\frac{1}{4}$.

Zadatak 291 (Dado, gimnazija)

Nađi C(10) ako je C zadano rekurzijom $C(1)=1,\ C(2\cdot n)=C(n)+1,\ C(2\cdot n+1)=C(6\cdot n+4)+1,$ $n\in N.$

Rješenje 291

Ponovimo!

Skup svih prirodnih brojeva označavamo sa N i pišemo:

$$N=\{1,\ 2,\ 3,\ 4,\ 5,\ \ldots,\ n,\ n+1,\ \ldots\}.$$

Skup svih neparnih prirodnih brojeva označavamo sa N_1 i pišemo:

$$N_1=\{1,\ 3,\ 5,\ 7,\ 9,\ \ldots,\ 2\cdot n-1,\ 2\cdot n+1,\ \ldots\}.$$

Skup svih parnih prirodnih brojeva označavamo sa N_2 i pišemo:

$$N_2=\{2,\ 4,\ 6,\ 8,\ 10,\ \ldots,\ 2\cdot n,\ 2\cdot n+2,\ \ldots\}.$$

Svaki se parni prirodni broj može prikazati u obliku $2\cdot n$, a neparni broj u obliku $2\cdot n-1$, gdje je n prirodan broj, tj. $n\in N$.

Nizove možemo zadavati pomoću rekurzivnih formula u kojima se članovi niza zadaju pomoću već prije definiranih. U rekurzivnom zadavanju niza mora biti poznat prvi član, kako bismo pomoću njega mogli izračunati drugi član itd. Zavisno od rekurzivne formule, ponekad je potrebno zadati više od jednog početnog člana niza.

$$C(10)=\left[C(2\cdot n)=C(n)+1\right]=C(5)+1=\left[\begin{matrix}C(2\cdot n+1)=C(6\cdot n+4)+1\\ 2\cdot n+1=5\ \Rightarrow\ n=2\end{matrix}\right]=$$

$$=C(6\cdot 2+4)+1+1=C(16)+2=\left[C(2\cdot n)=C(n)+1\right]=C(8)+1+2=C(8)+3=$$

$$=C(8)+3=\left[C(2\cdot n)=C(n)+1\right]=C(4)+1+3=C(4)+4=\left[C(2\cdot n)=C(n)+1\right]=$$

$$=C(2)+1+4=C(2)+5=\left[C(2\cdot n)=C(n)+1\right]=C(1)+1+5=C(1)+6=1+6=7.$$

Vježba 291

Nađi C(10) ako je C zadano rekurzijom $C(1)=4,\ C(2\cdot n)=C(n)+1,\ C(2\cdot n+1)=C(6\cdot n+4)+1,$ $n\in N.$

Rezultat: 10.

Zadatak 292 (Ivan, gimnazija)

Pojednostavni broj $\sqrt{\sqrt{28-16\cdot\sqrt{3}}}$.

Rješenje 292

Ponovimo!

$$a\cdot\sqrt{b}=\sqrt{a^2\cdot b}\quad,\quad\left(a\cdot\sqrt{b}\right)^2=a^2\cdot b\quad,\quad\left(\sqrt{a}\right)^2=a\quad,\quad a^2-2\cdot a\cdot b+b^2=(a-b)^2.$$

$$\sqrt{a^2}=a\ ,\ a\ge 0\quad,\quad\sqrt{A\pm\sqrt{B}}=\sqrt{\frac{A+\sqrt{A^2-B}}{2}}\pm\sqrt{\frac{A-\sqrt{A^2-B}}{2}}.$$

Skratiti razlomak znači brojnik i nazivnik tog razlomka podijeliti istim brojem različitim od nule i jedinice

$$\frac{a\cdot n}{b\cdot n}=\frac{a}{b}\ ,\ n\ne 0\ ,\ n\ne 1.$$

1.inačica

Izraz pod korijenima dva puta preoblikujemo u kvadrat razlike.

$$\sqrt{\sqrt{28-16\cdot\sqrt{3}}}=\sqrt{\sqrt{16-16\cdot\sqrt{3}+12}}=\sqrt{\sqrt{4^2-2\cdot 4\cdot 2\cdot\sqrt{3}+\left(2\cdot\sqrt{3}\right)^2}}=$$

$$=\sqrt{\sqrt{\left(4-2\cdot\sqrt{3}\right)^2}}=\sqrt{4-2\cdot\sqrt{3}}=\sqrt{3-2\cdot\sqrt{3}+1}=\sqrt{\left(\sqrt{3}\right)^2-2\cdot\sqrt{3}\cdot 1+1^2}=$$
$$=\sqrt{\left(\sqrt{3}-1\right)^2}=\sqrt{3}-1.$$

2.inačica

Primjenom formule $\sqrt{A-\sqrt{B}}=\sqrt{\frac{A+\sqrt{A^2-B}}{2}}-\sqrt{\frac{A-\sqrt{A^2-B}}{2}}$ dva puta, dobije se:

$$\sqrt{\sqrt{28-16\cdot\sqrt{3}}}=\sqrt{\sqrt{28-\sqrt{16^2\cdot 3}}}=\sqrt{\sqrt{28-\sqrt{768}}}=\begin{bmatrix} A=28 \;,\; A^2=784 \\ B=768 \end{bmatrix}=$$
$$=\sqrt{\sqrt{\frac{28+\sqrt{784-768}}{2}}-\sqrt{\frac{28-\sqrt{784-768}}{2}}}=\sqrt{\sqrt{\frac{28+\sqrt{16}}{2}}-\sqrt{\frac{28-\sqrt{16}}{2}}}=$$
$$=\sqrt{\sqrt{\frac{28+4}{2}}-\sqrt{\frac{28-4}{2}}}=\sqrt{\sqrt{\frac{32}{2}}-\sqrt{\frac{24}{2}}}=\sqrt{\sqrt{\frac{32}{2}}-\sqrt{\frac{24}{2}}}=\sqrt{\sqrt{16}-\sqrt{12}}=\sqrt{4-\sqrt{12}}=$$
$$=\begin{bmatrix} A=4 \;,\; A^2=16 \\ B=12 \end{bmatrix}=\sqrt{\frac{4+\sqrt{16-12}}{2}}-\sqrt{\frac{4-\sqrt{16-12}}{2}}=\sqrt{\frac{4+\sqrt{4}}{2}}-\sqrt{\frac{4-\sqrt{4}}{2}}=$$
$$=\sqrt{\frac{4+2}{2}}-\sqrt{\frac{4-2}{2}}=\sqrt{\frac{6}{2}}-\sqrt{\frac{2}{2}}=\sqrt{\frac{6}{2}}-\sqrt{\frac{2}{2}}=\sqrt{3}-\sqrt{1}=\sqrt{3}-1.$$

Vježba 292

Pojednostavi broj $\sqrt{\sqrt{17-12\cdot\sqrt{2}}}$.

Rezultat: $\sqrt{2}-1.$

Zadatak 293 (Antonija, srednja škola)

Razlika kvadrata dva uzastopna neparna prirodna broja iznosi 408. Nađite veći od brojeva.

Rješenje 293

Ponovimo!

$$a^2-b^2=(a-b)\cdot(a+b) \quad , \quad (a\cdot b)^n=a^n\cdot b^n \quad , \quad (a+b)^2=a^2+2\cdot a\cdot b+b^2.$$
$$(a-b)^2=a^2-2\cdot a\cdot b+b^2.$$

Zakon distribucije množenja prema zbrajanju.

$$a\cdot(b+c)=a\cdot b+a\cdot c \quad , \quad a\cdot b+a\cdot c=a\cdot(b+c).$$

Skup svih prirodnih brojeva označavamo sa N i pišemo:

$$N=\{1,\ 2,\ 3,\ 4,\ 5,\ \ldots,\ n,\ n+1,\ \ldots\}.$$

Skup svih neparnih prirodnih brojeva označavamo sa N_1 i pišemo:

$$N_1=\{1,\ 3,\ 5,\ 7,\ 9,\ \ldots,\ 2\cdot n-1,\ 2\cdot n+1,\ \ldots\}.$$

Svaki se parni prirodni broj može prikazati u obliku $2 \cdot n$, a neparni broj u obliku $2 \cdot n - 1$, gdje je n prirodan broj, tj. $n\in N$.

1.inačica

Neka su zadana dva uzastopna neparna prirodna broja:

$$2\cdot k-1 \quad , \quad 2\cdot k+1,\ k\in N.$$

Prema uvjetu zadatka dobije se:

$$(2\cdot k+1)^2-(2\cdot k-1)^2=408 \Rightarrow ((2\cdot k+1)-(2\cdot k-1))\cdot((2\cdot k+1)+(2\cdot k-1))=408 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow (2\cdot k+1-2\cdot k+1)\cdot(2\cdot k+1+2\cdot k-1)=408 \Rightarrow (2\cdot k+1-2\cdot k+1)\cdot(2\cdot k+1+2\cdot k-1)=408 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 2\cdot 4\cdot k=408 \Rightarrow 8\cdot k=408 \Rightarrow 8\cdot k=408\ /:8 \Rightarrow k=51.$$

Veći broj iznosi:

$$2\cdot k+1=2\cdot 51+1=102+1=103.$$

2.inačica

Neka su zadana dva uzastopna neparna prirodna broja:

$$2\cdot k-1 \quad , \quad 2\cdot k+1,\ k\in N.$$

Prema uvjetu zadatka dobije se:

$$(2\cdot k+1)^2-(2\cdot k-1)^2=408 \Rightarrow 4\cdot k^2+4\cdot k+1-\left(4\cdot k^2-4\cdot k+1\right)=408 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 4\cdot k^2+4\cdot k+1-4\cdot k^2+4\cdot k-1=408 \Rightarrow 4\cdot k^2+4\cdot k+1-4\cdot k^2+4\cdot k-1=408 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 8\cdot k=408 \Rightarrow 8\cdot k=408\ /:8 \Rightarrow k=51.$$

Veći broj iznosi:

$$2\cdot k+1=2\cdot 51+1=102+1=103.$$

Vježba 293

Razlika kvadrata dva uzastopna neparna prirodna broja iznosi 408. Nađite manji od brojeva.

Rezultat: 101.

Zadatak 294 (Dino, srednja škola)

Dokažite da je: $\frac{1}{\sqrt{3}+\sqrt{5}}+\frac{1}{\sqrt{5}+\sqrt{7}}+\ldots+\frac{1}{\sqrt{2\cdot n-1}+\sqrt{2\cdot n+1}}=\frac{n-1}{\sqrt{3}+\sqrt{2\cdot n+1}}.$

Rješenje 294

Ponovimo!

$$(a+b)\cdot(a-b)=a^2-b^2 \quad , \quad \frac{a}{b}\cdot\frac{c}{d}=\frac{a\cdot c}{b\cdot d} \quad , \quad \left(\sqrt{a}\right)^2=a.$$

Zakon distribucije množenja prema zbrajanju.

$$a\cdot(b+c)=a\cdot b+a\cdot c \quad , \quad a\cdot b+a\cdot c=a\cdot(b+c).$$

$$\frac{1}{\sqrt{3}+\sqrt{5}}+\frac{1}{\sqrt{5}+\sqrt{7}}+\ldots+\frac{1}{\sqrt{2\cdot n-1}+\sqrt{2\cdot n+1}}=$$

$$=\frac{1}{\sqrt{3}+\sqrt{5}}\cdot\frac{\sqrt{3}-\sqrt{5}}{\sqrt{3}-\sqrt{5}}+\frac{1}{\sqrt{5}+\sqrt{7}}\cdot\frac{\sqrt{5}-\sqrt{7}}{\sqrt{5}-\sqrt{7}}+\ldots+\frac{1}{\sqrt{2\cdot n-1}+\sqrt{2\cdot n+1}}\cdot\frac{\sqrt{2\cdot n-1}-\sqrt{2\cdot n+1}}{\sqrt{2\cdot n-1}-\sqrt{2\cdot n+1}}=$$

$$=\frac{\sqrt{3}-\sqrt{5}}{\left(\sqrt{3}\right)^2-\left(\sqrt{5}\right)^2}+\frac{\sqrt{5}-\sqrt{7}}{\left(\sqrt{5}\right)^2-\left(\sqrt{7}\right)^2}+\ldots+\frac{\sqrt{2\cdot n-1}-\sqrt{2\cdot n+1}}{\left(\sqrt{2\cdot n-1}\right)^2-\left(\sqrt{2\cdot n+1}\right)^2}=$$

$$=\frac{\sqrt{3}-\sqrt{5}}{3-5}+\frac{\sqrt{5}-\sqrt{7}}{5-7}+\ldots+\frac{\sqrt{2\cdot n-1}-\sqrt{2\cdot n+1}}{2\cdot n-1-(2\cdot n+1)}=$$

$$=\frac{\sqrt{3}-\sqrt{5}}{-2}+\frac{\sqrt{5}-\sqrt{7}}{-2}+\ldots+\frac{\sqrt{2\cdot n-1}-\sqrt{2\cdot n+1}}{2\cdot n-1-2\cdot n-1}=$$

$$=\frac{\sqrt{3}-\sqrt{5}}{-2}+\frac{\sqrt{5}-\sqrt{7}}{-2}+\ldots+\frac{\sqrt{2\cdot n-1}-\sqrt{2\cdot n+1}}{2\cdot n-1-2\cdot n-1}=$$

$$=\frac{\sqrt{3}-\sqrt{5}}{-2}+\frac{\sqrt{5}-\sqrt{7}}{-2}+\ldots+\frac{\sqrt{2\cdot n-1}-\sqrt{2\cdot n+1}}{-2}=$$

$$=-\frac{1}{2}\cdot\left(\sqrt{3}-\sqrt{5}+\sqrt{5}-\sqrt{7}+\ldots+\sqrt{2\cdot n-1}-\sqrt{2\cdot n+1}\right)=$$

$$=-\frac{1}{2}\cdot\left(\sqrt{3}-\sqrt{5}+\sqrt{5}-\sqrt{7}+\ldots+\sqrt{2\cdot n-1}-\sqrt{2\cdot n+1}\right)=-\frac{1}{2}\cdot\left(\sqrt{3}-\sqrt{2\cdot n+1}\right)=$$

$$=\frac{\sqrt{2\cdot n+1}-\sqrt{3}}{2}=\frac{\sqrt{2\cdot n+1}-\sqrt{3}}{2}\cdot\frac{\sqrt{2\cdot n+1}+\sqrt{3}}{\sqrt{2\cdot n+1}+\sqrt{3}}=\frac{\left(\sqrt{2\cdot n+1}\right)^2-\left(\sqrt{3}\right)^2}{2\cdot\left(\sqrt{2\cdot n+1}+\sqrt{3}\right)}=$$

$$=\frac{2\cdot n+1-3}{2\cdot\left(\sqrt{2\cdot n+1}+\sqrt{3}\right)}=\frac{2\cdot n-2}{2\cdot\left(\sqrt{2\cdot n+1}+\sqrt{3}\right)}=\frac{2\cdot(n-1)}{2\cdot\left(\sqrt{2\cdot n+1}+\sqrt{3}\right)}=\frac{2\cdot(n-1)}{2\cdot\left(\sqrt{2\cdot n+1}+\sqrt{3}\right)}=$$

$$=\frac{n-1}{\sqrt{2\cdot n+1}+\sqrt{3}}.$$

Vježba 294

Dokažite da je: $\frac{1}{\sqrt{3}+\sqrt{5}}+\frac{1}{\sqrt{5}+\sqrt{7}}+\ldots+\frac{1}{\sqrt{99}+\sqrt{101}}=\frac{49}{\sqrt{3}+\sqrt{101}}.$

Rezultat: Dokaz analogan.

Zadatak 295 (Igor, tehnička škola)

Ako je $x=333333333^2$, $y=333333332\cdot333333334$, onda je

A. $x-y=1$ *B.* $y=x+1$ *C.* $y-x=1$ *D.* $x=(y-1)^2$

Rješenje 295

Ponovimo!

Skup prirodnih brojeva označavamo slovom N i pišemo

$$N=\{1,\ 2,\ 3,\ 4,\ \ldots,\ n-1,\ n,\ n+1,\ \ldots\}.$$

Prethodnik prirodnog broja n, n ≠ 1, je prirodni broj n – 1.
Sljedbenik prirodnog broja n je prirodni broj n + 1.

$$(a-b)\cdot(a+b)=a^2-b^2.$$

1.inačica

Uočimo da je broju 333333333:

- njegov prethodnik 333333332
- njegov sljedbenik 333333334.

Sada je:

$$y=333333332\cdot333333334\ \Rightarrow\ y=(333333333-1)\cdot(333333333+1)\ \Rightarrow$$

$$\Rightarrow\ y=333333333^2-1\ \Rightarrow\ \left[\ x=333333333^2\ \right]\ \Rightarrow\ y=x-1\ \Rightarrow\ x-1=y\ \Rightarrow\ x-y=1.$$

Odgovor je pod A.

2.inačica

Pokažimo da općenito vrijedi

$$n^2-(n-1)\cdot(n+1)=1.$$

$$n^2-(n-1)\cdot(n+1)=n^2-\left(n^2-1\right)=n^2-n^2+1=n^2-n^2+1=1.$$

Odgovor je pod A.

Vježba 295

Ako je $x = 333333333^2$, $y = 333333331 \cdot 333333335$, onda je

$$A.\ x-y=2 \qquad B.\ x-y=4 \qquad C.\ y-x=4 \qquad D.\ x=(y-2)^2$$

Rezultat: B.

Zadatak 296 (Vesna, ekonomska škola)

Vrijednost izraza $\frac{1}{\left(2-\sqrt{3}\right)^3}$ jednaka je:

$$A.\ 24\cdot\sqrt{3} \qquad B.\ 56 \qquad C.\ 15-3\cdot\sqrt{3} \qquad D.\ 26+15\cdot\sqrt{3}$$

Rješenje 296

Ponovimo!

$$(a-b)^3 = a^3 - 3\cdot a^2\cdot b + 3\cdot a\cdot b^2 - b^3 \quad , \quad \left(\sqrt{a}\right)^2 = a \quad , \quad \left(\sqrt[n]{a}\right)^m = \sqrt[n]{a^m}.$$

$$a^n\cdot a^m = a^{n+m} \quad , \quad a^1 = a \quad , \quad \sqrt{a\cdot b} = \sqrt{a}\cdot\sqrt{b} \quad , \quad (a-b)\cdot(a+b) = a^2 - b^2.$$

$$(a\cdot b)^n = a^n\cdot b^n \quad , \quad \frac{n}{1} = n \quad , \quad \frac{a^n}{b^n} = \left(\frac{a}{b}\right)^n \quad , \quad (a+b)^3 = a^3 + 3\cdot a^2\cdot b + 3\cdot a\cdot b^2 + b^3.$$

$$\frac{a}{b}\cdot\frac{c}{d} = \frac{a\cdot c}{b\cdot d}.$$

1.inačica

$$\frac{1}{\left(2-\sqrt{3}\right)^3} = \frac{1}{2^3 - 3\cdot 2^2\cdot\sqrt{3} + 3\cdot 2\cdot\left(\sqrt{3}\right)^2 - \left(\sqrt{3}\right)^3} = \frac{1}{8 - 3\cdot 4\cdot\sqrt{3} + 3\cdot 2\cdot 3 - \sqrt{3^3}} =$$

$$= \frac{1}{8 - 12\cdot\sqrt{3} + 18 - \sqrt{3^2\cdot 3^1}} = \frac{1}{8 - 12\cdot\sqrt{3} + 18 - \sqrt{3^2}\cdot\sqrt{3^1}} = \frac{1}{8 - 12\cdot\sqrt{3} + 18 - 3\cdot\sqrt{3}} =$$

$$= \frac{1}{26 - 15\cdot\sqrt{3}} = \left[\begin{array}{l}\text{racionalizacija}\\ \text{nazivnika}\end{array}\right] = \frac{1}{26 - 15\cdot\sqrt{3}}\cdot\frac{26 + 15\cdot\sqrt{3}}{26 + 15\cdot\sqrt{3}} = \frac{26 + 15\cdot\sqrt{3}}{26^2 - \left(15\cdot\sqrt{3}\right)^2} =$$

$$= \frac{26 + 15\cdot\sqrt{3}}{676 - 15^2\cdot\left(\sqrt{3}\right)^2} = \frac{26 + 15\cdot\sqrt{3}}{676 - 225\cdot 3} = \frac{26 + 15\cdot\sqrt{3}}{676 - 675} = \frac{26 + 15\cdot\sqrt{3}}{1} = 26 + 15\cdot\sqrt{3}.$$

Odgovor je pod D.

2.inačica

$$\frac{1}{\left(2-\sqrt{3}\right)^3} = \left(\frac{1}{2-\sqrt{3}}\right)^3 = \left[\begin{array}{l}\text{racionalizacija}\\ \text{nazivnika}\end{array}\right] = \left(\frac{1}{2-\sqrt{3}}\cdot\frac{2+\sqrt{3}}{2+\sqrt{3}}\right)^3 = \left(\frac{2+\sqrt{3}}{2^2 - \left(\sqrt{3}\right)^2}\right)^3 =$$

$$= \left(\frac{2+\sqrt{3}}{4-3}\right)^3 = \left(\frac{2+\sqrt{3}}{1}\right)^3 = \left(2+\sqrt{3}\right)^3 = 2^3 + 3\cdot 2^2\cdot\sqrt{3} + 3\cdot 2\cdot\left(\sqrt{3}\right)^2 + \left(\sqrt{3}\right)^3 =$$

$$= 8 + 3\cdot 4\cdot\sqrt{3} + 3\cdot 2\cdot 3 + \sqrt{3^3} = 8 + 12\cdot\sqrt{3} + 18 + \sqrt{3^2\cdot 3^1} =$$

$$= 8 + 12\cdot\sqrt{3} + 18 + \sqrt{3^2}\cdot\sqrt{3^1} = 8 + 12\cdot\sqrt{3} + 18 + 3\cdot\sqrt{3} = 26 + 15\cdot\sqrt{3}.$$

Odgovor je pod D.

Vježba 296

Vrijednost izraza $\dfrac{1}{\left(2+\sqrt{3}\right)^3}$ jednaka je:

$$A.\ 48\cdot\sqrt{3} \qquad B.\ 54 \qquad C.\ 15+3\cdot\sqrt{3} \qquad D.\ 26-15\cdot\sqrt{3}$$

Rezultat: D.

Zadatak 297 (4A, TUPŠ)

Koji je od navedenih brojeva veći od $\frac{1}{4}$ i manji od $\frac{1}{3}$?

$$A.\ \frac{1}{5} \qquad B.\ \frac{1}{7} \qquad C.\ \frac{3}{8} \qquad D.\ \frac{3}{10}$$

Rješenje 297

Ponovimo!

$$a<b \Rightarrow \frac{a}{n}<\frac{b}{n} \quad , \quad a>b \Rightarrow \frac{a}{n}>\frac{b}{n}.$$

Proširiti razlomak znači brojnik i nazivnik tog razlomka pomnožiti istim brojem različitim od nule i jedinice

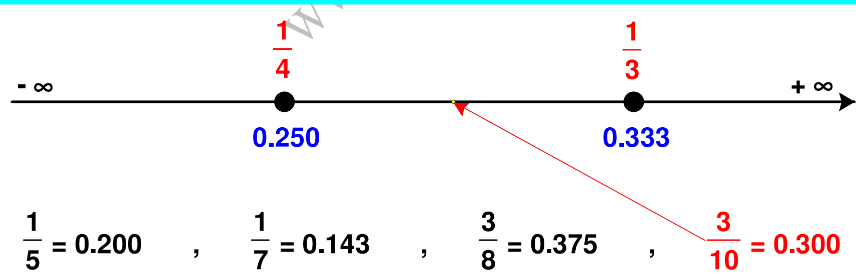
$$\frac{a}{b}=\frac{a\cdot n}{b\cdot n} \ , \ n\neq 0 \ , \ n\neq 1.$$

1.inačica

Zadane razlomke pretvorimo u decimalne brojeve (na primjer, na tri decimale) tako da brojnik podijelimo nazivnikom i onda ih usporedimo.

$$\frac{1}{4}=1:4=0.250 \qquad , \qquad \frac{1}{3}=1:3=0.333$$

$$\frac{1}{5}=1:5=0.200 \quad , \quad \frac{1}{7}=1:7=0.143 \quad , \quad \frac{3}{8}=3:8=0.375 \quad , \quad \frac{3}{10}=3:10=0.300$$



Odgovor je pod D.

2.inačica

Je li neki razlomak veći od $\frac{1}{4}$ i manji od $\frac{1}{3}$ provjerit ćemo tako da sva tri razlomka svedemo na zajednički nazivnik i onda ih usporedimo.

- $$\left.\begin{array}{l}\frac{1}{5}\\[4pt]\frac{1}{4}\\[4pt]\frac{1}{3}\end{array}\right\} \Rightarrow \left[\,v(5,4,3)=60\,\right] \Rightarrow \left.\begin{array}{l}\frac{1}{5}=\frac{12}{60}\\[4pt]\frac{1}{4}=\frac{15}{60}\\[4pt]\frac{1}{3}=\frac{20}{60}\end{array}\right\} \Rightarrow \frac{12}{60}<\frac{15}{60}<\frac{20}{60} \Rightarrow \frac{1}{5}<\frac{1}{4}<\frac{1}{3}$$

- $\left.\begin{array}{l}\frac{1}{7}\\\frac{1}{4}\\\frac{1}{3}\end{array}\right\} \Rightarrow \left[v(7,\ 4,\ 3)=84\right] \Rightarrow \left.\begin{array}{l}\frac{1}{7}=\frac{12}{84}\\\frac{1}{4}=\frac{21}{84}\\\frac{1}{3}=\frac{28}{84}\end{array}\right\} \Rightarrow \frac{12}{84}<\frac{21}{84}<\frac{28}{84} \Rightarrow \frac{1}{7}<\frac{1}{4}<\frac{1}{3}$
- $\left.\begin{array}{l}\frac{3}{8}\\\frac{1}{4}\\\frac{1}{3}\end{array}\right\} \Rightarrow \left[v(8,\ 4,\ 3)=24\right] \Rightarrow \left.\begin{array}{l}\frac{3}{8}=\frac{9}{24}\\\frac{1}{4}=\frac{6}{24}\\\frac{1}{3}=\frac{8}{24}\end{array}\right\} \Rightarrow \frac{6}{24}<\frac{8}{24}<\frac{9}{24} \Rightarrow \frac{1}{4}<\frac{1}{3}<\frac{3}{8}$
- $\left.\begin{array}{l}\frac{3}{10}\\\frac{1}{4}\\\frac{1}{3}\end{array}\right\} \Rightarrow \left[v(10,\ 4,\ 3)=60\right] \Rightarrow \left.\begin{array}{l}\frac{3}{10}=\frac{18}{60}\\\frac{1}{4}=\frac{15}{60}\\\frac{1}{3}=\frac{20}{60}\end{array}\right\} \Rightarrow \frac{15}{60}<\frac{18}{60}<\frac{20}{60} \Rightarrow \frac{1}{4}<\frac{3}{10}<\frac{1}{3}.$

Odgovor je pod D.

Vježba 297

Koji je od navedenih brojeva veći od $\frac{1}{4}$ i manji od $\frac{1}{3}$?

$A.\ \frac{1}{5} \qquad B.\ \frac{1}{7} \qquad C.\ \frac{3}{8} \qquad D.\ \frac{7}{25}$

Rezultat: D.

Zadatak 298 (4A, TUPŠ)

Za koji su prirodan broj n u razvoju binoma $\left(x^2+y\right)^n$ vrijednosti binomnih koeficijenata petoga i osmoga člana jednake?

$A.\ 9 \qquad B.\ 10 \qquad C.\ 11 \qquad D.\ 12$

Napomena: $\binom{n}{k}=\frac{n!}{k!\cdot(n-k)!}$

Rješenje 298

Ponovimo!

$$\frac{n}{1}=n \quad , \quad \frac{a}{b}=\frac{c}{d} \Rightarrow \frac{b}{a}=\frac{d}{c}.$$

Skratiti razlomak znači brojnik i nazivnik tog razlomka podijeliti istim brojem različitim od nule i jedinice

$$\frac{a\cdot n}{b\cdot n}=\frac{a}{b}\ ,\ n\neq 0\ ,\ n\neq 1.$$

Umnožak prvih n prirodnih brojeva označavamo posebnim simbolom

$$n!=1\cdot 2\cdot 3\cdot 4\cdot\ \ldots\ \cdot(n-2)\cdot(n-1)\cdot n.$$

Broj n! čitamo "en faktorijela". Tako na primjer, vrijedi

$$\begin{array}{|l|}\hline 1! = 1, \\ 2! = 1 \cdot 2, \\ 3! = 1 \cdot 2 \cdot 3, \\ 4! = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4, \\ 5! = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5, \\ 6! = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5 \cdot 6 \text{ itd.} \\ \hline \end{array}$$

Vidimo da faktorijele zadovoljavaju formulu

$$n! = (n-1)! \cdot n.$$

Uočimo da se može pisati, na primjer,

$$\begin{array}{|l|}\hline 9! = 8! \cdot 9, \\ 9! = 7! \cdot 8 \cdot 9, \\ 9! = 6! \cdot 7 \cdot 8 \cdot 9, \\ 9! = 5! \cdot 6 \cdot 7 \cdot 8 \cdot 9, \\ 9! = 4! \cdot 5 \cdot 6 \cdot 7 \cdot 8 \cdot 9 \text{ itd.} \\ \hline \end{array}$$

$$\begin{array}{|l|}\hline n! = (n-1)! \cdot n, \\ n! = (n-2)! \cdot (n-1) \cdot n, \\ n! = (n-3)! \cdot (n-2) \cdot (n-1) \cdot n, \\ n! = (n-4)! \cdot (n-3) \cdot (n-2) \cdot (n-1) \cdot n, \\ n! = (n-5)! \cdot (n-4) \cdot (n-3) \cdot (n-2) \cdot (n-1) \cdot n \text{ itd.} \\ \hline \end{array}$$

Binomni koeficijent

Neka je n prirodan broj, a k prirodan broj ili 0 i $k \leq n$. Binomni koeficijent označavamo simbolom $\binom{n}{k}$ i definiramo

$$\binom{n}{k} = \frac{n!}{k! \cdot (n-k)!}.$$

Binomni poučak

Za svaki $a, b \in R$, $n \in N$ vrijedi

$$(a+b)^n = \binom{n}{0} \cdot a^n \cdot b^0 + \binom{n}{1} \cdot a^{n-1} \cdot b^1 + \binom{n}{2} \cdot a^{n-2} \cdot b^2 + \ldots + \binom{n}{n-1} \cdot a^1 \cdot b^{n-1} + \binom{n}{n} \cdot a^0 \cdot b^n.$$

Prvi član u razvoju binoma ima oblik
$\binom{n}{0} \cdot a^n \cdot b^0$, drugi $\binom{n}{1} \cdot a^{n-1} \cdot b^1$, ... , a k – ti član glasi $\binom{n}{k-1} \cdot a^{n-(k-1)} \cdot b^{k-1}$.

$$\left(x^2+y\right)^n = \left(x^2\right)^n + \ldots + \underbrace{\binom{n}{4} \cdot \left(x^2\right)^{n-4} \cdot y^4}_{\text{peti član}} + \ldots + \underbrace{\binom{n}{7} \cdot \left(x^2\right)^{n-7} \cdot y^7}_{\text{osmi član}} + \ldots + y^n.$$

Budući da su vrijednosti binomnih koeficijenata petoga i osmoga člana jednake, slijedi:

$$\binom{n}{4} = \binom{n}{7} \Rightarrow \frac{n!}{4! \cdot (n-4)!} = \frac{n!}{7! \cdot (n-7)!} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \frac{n!}{4! \cdot (n-7)! \cdot (n-6) \cdot (n-5) \cdot (n-4)} = \frac{n!}{4! \cdot 5 \cdot 6 \cdot 7 \cdot (n-7)!} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \frac{n!}{4! \cdot (n-7)! \cdot (n-6) \cdot (n-5) \cdot (n-4)} = \frac{n!}{4! \cdot 5 \cdot 6 \cdot 7 \cdot (n-7)!} \; / \cdot \frac{4! \cdot (n-7)!}{n!} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \frac{1}{(n-6) \cdot (n-5) \cdot (n-4)} = \frac{1}{5 \cdot 6 \cdot 7} \Rightarrow (n-6) \cdot (n-5) \cdot (n-4) = 5 \cdot 6 \cdot 7 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \left.\begin{matrix} n-6=5 \\ n-5=6 \\ n-4=7 \end{matrix}\right\} \Rightarrow \left.\begin{matrix} n=5+6 \\ n=6+5 \\ n=7+4 \end{matrix}\right\} \Rightarrow \left.\begin{matrix} n=11 \\ n=11 \\ n=11 \end{matrix}\right\} \Rightarrow n=11.$$

Odgovor je pod C.

Vježba 298

Za koji su prirodan broj n u razvoju binoma $\left(x^3+y^2\right)^n$ vrijednosti binomnih koeficijenata petoga i osmoga člana jednake?

$$A.\ 9 \qquad B.\ 10 \qquad C.\ 11 \qquad D.\ 12$$

Napomena: $\binom{n}{k}=\frac{n!}{k!\cdot(n-k)!}$

Rezultat: C.

Zadatak 299 (4A, TUPŠ)

Koja je od navedenih tvrdnja točna?

$$A.\ -2.4<-\frac{7}{3}<-2 \qquad B.\ -2.4<-2<-\frac{7}{3}$$

$$C.\ -\frac{7}{3}<-2.4<-2 \qquad D.\ -2<-\frac{7}{3}<-2.4$$

Rješenje 299

Ponovimo!

$$\frac{n}{1}=n.$$

Razlomak pretvaramo u decimalni broj tako da brojnik podijelimo nazivnikom.
Decimalni broj piše se u obliku decimalnog razlomka tako da se u brojnik napiše zadani decimalni broj bez decimalne točke, a u nazivnik se napiše dekadska jedinica (10, 100, 1000, 10000, 100000, …) koja ima toliko nula koliko decimalni broj ima decimala (znamenaka na decimalnom mjestu, tj. iza decimalne točke ili decimalnog zareza).
Skratiti razlomak znači brojnik i nazivnik tog razlomka podijeliti istim brojem različitim od nule i jedinice.

$$\frac{a\cdot n}{b\cdot n}=\frac{a}{b}\ ,\ n\neq 0\ ,\ n\neq 1.$$

Proširiti razlomak znači brojnik i nazivnik tog razlomka pomnožiti istim brojem različitim od nule i jedinice.

$$\frac{a}{b}=\frac{a\cdot n}{b\cdot n}\ ,\ n\neq 0\ ,\ n\neq 1.$$

1.inačica

Razlomak pretvorimo u decimalni broj i usporedimo decimalne brojeve.

$$\left.\begin{matrix} -2.4<-\frac{7}{3}<-2 \\ -2.4<-2<-\frac{7}{3} \\ -\frac{7}{3}<-2.4<-2 \\ -2<-\frac{7}{3}<-2.4 \end{matrix}\right\} \Rightarrow \left[\frac{7}{3}=7:3=2.3\right] \Rightarrow \left.\begin{matrix} -2.4<-2.3<-2 \\ -2.4<-2<-2.3 \\ -2.3<-2.4<-2 \\ -2<-2.3<-2.4 \end{matrix}\right\} \Rightarrow \left[\begin{matrix} \text{točna} \\ \text{tvrdnja} \end{matrix}\right] \Rightarrow$$

$$\Rightarrow -2.4 < -2.3 < -2 \Rightarrow -2.4 < -\frac{7}{3} < -2.$$

Odgovor je pod A.

2.inačica

Decimalni broj pretvorimo u razlomak, skratimo ga i razlomke svedemo na zajednički nazivnik.

$$\left.\begin{matrix} -2.4 < -\frac{7}{3} < -2 \\ -2.4 < -2 < -\frac{7}{3} \\ -\frac{7}{3} < -2.4 < -2 \\ -2 < -\frac{7}{3} < -2.4 \end{matrix}\right\} \Rightarrow \left.\begin{matrix} -\frac{24}{10} < -\frac{7}{3} < -\frac{2}{1} \\ -\frac{24}{10} < -\frac{2}{1} < -\frac{7}{3} \\ -\frac{7}{3} < -\frac{24}{10} < -\frac{2}{1} \\ -\frac{2}{1} < -\frac{7}{3} < -\frac{24}{10} \end{matrix}\right\} \Rightarrow \left.\begin{matrix} -\frac{24}{10} < -\frac{7}{3} < -\frac{2}{1} \\ -\frac{24}{10} < -\frac{2}{1} < -\frac{7}{3} \\ -\frac{7}{3} < -\frac{24}{10} < -\frac{2}{1} \\ -\frac{2}{1} < -\frac{7}{3} < -\frac{24}{10} \end{matrix}\right\} \Rightarrow \left.\begin{matrix} -\frac{12}{5} < -\frac{7}{3} < -\frac{2}{1} \\ -\frac{12}{5} < -\frac{2}{1} < -\frac{7}{3} \\ -\frac{7}{3} < -\frac{12}{5} < -\frac{2}{1} \\ -\frac{2}{1} < -\frac{7}{3} < -\frac{12}{5} \end{matrix}\right\} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{bmatrix} \text{razlomke svedemo na} \\ \text{zajednički nazivnik 15} \end{bmatrix} \Rightarrow \left.\begin{matrix} -\frac{36}{15} < -\frac{35}{15} < -\frac{30}{15} \\ -\frac{36}{15} < -\frac{30}{15} < -\frac{35}{15} \\ -\frac{35}{15} < -\frac{36}{15} < -\frac{30}{15} \\ -\frac{30}{15} < -\frac{35}{15} < -\frac{36}{15} \end{matrix}\right\} \Rightarrow \begin{bmatrix} \text{točna} \\ \text{tvrdnja} \end{bmatrix} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow -\frac{36}{15} < -\frac{35}{15} < -\frac{30}{15} \Rightarrow -2.4 < -\frac{7}{3} < -2.$$

Odgovor je pod A.

Vježba 299

Koja je od navedenih tvrdnja točna?

$$A.\ 2.4 > \frac{7}{3} > 2 \qquad B.\ 2.4 > 2 > \frac{7}{3}$$

$$C.\ \frac{7}{3} > 2.4 > 2 \qquad D.\ 2 > \frac{7}{3} > 2.4$$

Rezultat: A.

Zadatak 300 (Anita, gimnazija)

Ako je svaki od dva broja zbroj kvadrata dvaju cijelih brojeva, onda je i njihov umnožak zbroj dvaju kvadrata. Dokaži!

Rješenje 300

Ponovimo!

Množenje zagrada

$$(a+b)\cdot(c+d) = a\cdot c + a\cdot d + b\cdot c + b\cdot d.$$

$$(a\cdot b)^n = a^n \cdot b^n \quad , \quad a^1 = a \quad , \quad \left(a^n\right)^m = a^{n\cdot m}.$$

$$a^2 + 2\cdot a\cdot b + b^2 = (a+b)^2 \quad , \quad a^2 - 2\cdot a\cdot b + b^2 = (a-b)^2.$$

Neka su x i y dva broja koji su jednaki zbroju kvadrata dvaju cijelih brojeva.

$$x = a^2 + b^2 \quad , \quad y = c^2 + d^2.$$

Tada umnožak od x i y iznosi:

$$x \cdot y = \left(a^2 + b^2\right) \cdot \left(c^2 + d^2\right) \Rightarrow x \cdot y = a^2 \cdot c^2 + b^2 \cdot c^2 + a^2 \cdot d^2 + b^2 \cdot d^2 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow x \cdot y = a^2 \cdot c^2 + b^2 \cdot c^2 + a^2 \cdot d^2 + b^2 \cdot d^2 + 2 \cdot a \cdot c \cdot b \cdot d - 2 \cdot a \cdot c \cdot b \cdot d \Rightarrow$$

$$\Rightarrow x \cdot y = a^2 \cdot c^2 + 2 \cdot a \cdot c \cdot b \cdot d + b^2 \cdot d^2 + b^2 \cdot c^2 - 2 \cdot a \cdot c \cdot b \cdot d + a^2 \cdot d^2 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow x \cdot y = \left(a^2 \cdot c^2 + 2 \cdot a \cdot c \cdot b \cdot d + b^2 \cdot d^2\right) + \left(b^2 \cdot c^2 - 2 \cdot a \cdot c \cdot b \cdot d + a^2 \cdot d^2\right) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow x \cdot y = (a \cdot c + b \cdot d)^2 + (b \cdot c - a \cdot d)^2 .$$

Vježba 300

Ako je svaki od dva broja razlika kvadrata dvaju cijelih brojeva, onda je i njihov umnožak razlika dvaju kvadrata. Dokaži!

Rezultat: Dokaz analogan.