Zadatak 261 (4A, TUPŠ)

Odredi bazu brojevnog sustava ako je $2110_{(x)} = 148$.

Rješenje 261

Ponovimo!

$$a^3-b^3=(a-b)\cdot\left(a^2+a\cdot b+b^2\right)\quad,\quad a^2-b^2=(a-b)\cdot(a+b)\quad,\quad a^1=a\quad,\quad a^0=1.$$

Zakon distribucije množenja prema zbrajanju.

$$a\cdot(b+c)=a\cdot b+a\cdot c\quad,\quad a\cdot b+a\cdot c=a\cdot(b+c).$$

Da bi umnožak bio jednak nuli, dovoljno je da jedan faktor bude jednak nuli.

$$a\cdot b=0\ \Leftrightarrow\ a=0\ \text{ili}\ b=0\ \text{ili}\ a=b=0.$$

Diskriminanta kvadratne jednadžbe

$$a\cdot x^2+b\cdot x+c=0$$

je broj

$$D=b^2-4\cdot a\cdot c.$$

- Ako je $D > 0$, jednadžba ima dva realna rješenja.
- Ako je $D = 0$, jednadžba ima jedno dvostruko realno rješenje.
- Ako je $D < 0$, jednadžba ima kompleksno – konjugirana rješenja.

Brojevni sustav je naziv za skup pravila pomoću kojih se jednoznačno zapisuju brojevi. Baza brojevnog sustava je vrijednost koja se pridružuje pojedinoj znamenci u pozicijskom brojevnom sustavu, ovisno o njezinom položaju u zapisu. Svaki je brojevni sustav određen vlastitim skupom znamenaka, a ukupan broj različitih znamenaka naziva se bazom brojevnog sustava. Baza brojevnog sustava se obično zapisuje kao indeks nakon samog broja. U svakom brojevnom sustavu vrijedi da svaka znamenka u nizu ima jedinstvenu mjesnu vrijednost. Mjesna se vrijednost svake znamenke dobije na način da se baza brojevnog sustava potencira eksponentom čija vrijednost ovisi o položaju znamenke. Krajnje desni eksponent ima vrijednost 0, predzadnji ima 1, itd. Baza mora biti prirodan broj veći od 1.
Budući da je baza označena slovom x možemo broj napisati pomoću potencija broja x pazeći na pozicijski zapis (mjesnu vrijednost!).

$$2110_{(x)}=148\ \Rightarrow\ \overset{3210}{2110}{}_{(x)}=148\ \Rightarrow\ 2\cdot x^3+1\cdot x^2+1\cdot x^1+0\cdot x^0=148\ \Rightarrow$$

$$\Rightarrow\ 2\cdot x^3+x^2+x=148\ \Rightarrow\ 2\cdot x^3+x^2+x-148=0\ \Rightarrow\ \left[\begin{array}{c}\text{metoda}\\ \text{grupiranja}\end{array}\right]\ \Rightarrow$$

$$\Rightarrow\ 2\cdot x^3-128+x^2-16+x-4=0\ \Rightarrow\ \left(2\cdot x^3-128\right)+\left(x^2-16\right)+(x-4)=0\ \Rightarrow$$

$$\Rightarrow\ 2\cdot\left(x^3-64\right)+\left(x^2-16\right)+(x-4)=0\ \Rightarrow\ 2\cdot\left(x^3-4^3\right)+\left(x^2-4^2\right)+(x-4)=0\ \Rightarrow$$

$$\Rightarrow\ 2\cdot(x-4)\cdot\left(x^2+4\cdot x+16\right)+(x-4)\cdot(x+4)+(x-4)=0\ \Rightarrow$$

$$\Rightarrow\ 2\cdot(x-4)\cdot\left(x^2+4\cdot x+16\right)+(x-4)\cdot(x+4)+(x-4)=0\ \Rightarrow$$

$$\Rightarrow\ (x-4)\cdot\left(2\cdot\left(x^2+4\cdot x+16\right)+(x+4)+1\right)=0\ \Rightarrow\ (x-4)\cdot\left(2\cdot x^2+8\cdot x+32+x+4+1\right)=0\ \Rightarrow$$

$$\Rightarrow\ (x-4)\cdot\left(2\cdot x^2+9\cdot x+37\right)=0\ \Rightarrow\ \left.\begin{array}{l}x-4=0\\ 2\cdot x^2+9\cdot x+37=0\end{array}\right\}.$$

Prva jednadžba daje rješenje:

$$x-4=0\ \Rightarrow\ x=4.$$

Druga jednadžba je kvadratna pa vrijedi:

$$2\cdot x^2+9\cdot x+37=0\ \Rightarrow\ \left.\begin{array}{l}2\cdot x^2+9\cdot x+37=0\\ a=2\ ,\ b=9\ ,\ c=37\end{array}\right\}\ \Rightarrow\ \left.\begin{array}{l}a=2\ ,\ b=9\ ,\ c=37\\ D=b^2-4\cdot a\cdot c\end{array}\right\}\ \Rightarrow$$

$$\Rightarrow\ D = 9^2 - 4\cdot 2\cdot 37\ \Rightarrow\ D = -215 < 0.$$

Budući da je diskriminanta negativna, jednadžba nema realna rješenja (rješenja su konjugirano kompleksni brojevi). Baza brojevnog sustava je broj 4.

Vježba 261

Odredi bazu brojevnog sustava ako je $2110_{(x)} - 66 = 0$.

Rezultat: 3.

Zadatak 262 (Marija, gimnazija ☺)

Dokažite da je $\sqrt{3}$ iracionalan broj.

Rješenje 262

Ponovimo!

$$\left(\sqrt{a}\right)^2 = a \quad , \quad \left(\frac{a}{b}\right)^n = \frac{a^n}{b^n} \quad , \quad (a\cdot b)^n = a^n\cdot b^n.$$

Skratiti razlomak znači brojnik i nazivnik tog razlomka podijeliti istim brojem različitim od nule i jedinice

$$\frac{a\cdot n}{b\cdot n} = \frac{a}{b}\ ,\ n\neq 0\ ,\ n\neq 1.$$

Racionalni brojevi su brojevi koje možemo zapisati u obliku razlomaka, tj. $\frac{a}{b}$, gdje je a cijeli broj koji zovemo brojnikom, a b je prirodan broj koji nazivamo nazivnikom.

Iracionalni brojevi su brojevi koje ne možemo zapisati u obliku razlomaka.

Pretpostavimo suprotno da je $\sqrt{3}$ racionalan broj, tj. da je $\sqrt{3}\in Q$. Tada možemo pisati $\sqrt{3} = \frac{m}{n}$ $(m, n\in N)$ i zamisliti da je razlomak $\frac{m}{n}$ skraćen do kraja (ako nije skratimo ga), tj. da prirodni brojevi m i n nemaju zajedničkih faktora osim broja 1 (najveći zajednički djelitelj brojeva m i n je 1, D(m, n) = 1). Kvadriranjem i sređivanjem slijedi:

$$\sqrt{3} = \frac{m}{n}\ \Rightarrow\ \sqrt{3} = \frac{m}{n}\ /^2\ \Rightarrow\ \left(\sqrt{3}\right)^2 = \left(\frac{m}{n}\right)^2\ \Rightarrow\ 3 = \frac{m^2}{n^2}\ \Rightarrow\ 3 = \frac{m^2}{n^2}\ /\cdot n^2\ \Rightarrow\ m^2 = 3\cdot n^2.$$

Na desnoj strani nalazi se faktor 3 pa i broj na lijevoj strani mora biti djeljiv s 3. Zato vrijedi:

$$m = 3\cdot k,\ \text{za svako } k\in N.$$

Uvrstimo li to u gornju jednakost i skratimo, dobije se:

$$\left.\begin{array}{l} m = 3\cdot k \\ m^2 = 3\cdot n^2 \end{array}\right\}\ \Rightarrow\ \left[\begin{array}{l}\text{metoda}\\ \text{supstitucije}\end{array}\right]\ \Rightarrow\ (3\cdot k)^2 = 3\cdot n^2\ \Rightarrow\ 9\cdot k^2 = 3\cdot n^2\ /:3\ \Rightarrow\ n^2 = 3\cdot k^2.$$

pa ponovno slijedi $n = 3\cdot l$, za svako $l\in N$. Stoga m i n imaju zajednički faktor 3,

$$\left[\begin{array}{l} m = 3\cdot k\ ,\ k\in N \\ n = 3\cdot l\ ,\ l\in N \end{array}\right],$$

što je u suprotnosti s pretpostavkom da je razlomak $\frac{m}{n}$ do kraja skraćen. Zaključak: $\sqrt{3}\notin Q$, dakle, to je iracionalan broj.

Vježba 262

Dokažite da je $\sqrt{5}$ iracionalan broj.

Rezultat: Dokaz je analogan (sličan).

Zadatak 263 (Marija, gimnazija ☺)

Dokaži da je $\sqrt{2}+\sqrt{3}$ iracionalan broj.

Rješenje 263

Ponovimo!

$$\left(\sqrt{a}\right)^2 = a \quad , \quad (a-b)^2 = a^2 - 2 \cdot a \cdot b + b^2 \quad , \quad \sqrt{2} \notin Q.$$

Racionalni brojevi su brojevi koje možemo zapisati u obliku razlomaka, tj. $\frac{a}{b}$, gdje je a cijeli broj koji zovemo brojnikom, a b je prirodan broj koji nazivamo nazivnikom.

Iracionalni brojevi su brojevi koje ne možemo zapisati u obliku razlomaka.

U dokazu polazimo od suprotne pretpostavke. Pretpostavit ćemo da je $\sqrt{2}+\sqrt{3}$ racionalan broj.

$$\sqrt{2}+\sqrt{3} = r, \; r \in Q.$$

Preoblikovanjem jednakosti dobije se:

$$\sqrt{2}+\sqrt{3} = r \Rightarrow \sqrt{3} = r - \sqrt{2} \Rightarrow \sqrt{3} = r - \sqrt{2} \;/^2 \Rightarrow \left(\sqrt{3}\right)^2 = \left(r-\sqrt{2}\right)^2 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \left(\sqrt{3}\right)^2 = r^2 - 2 \cdot \sqrt{2} \cdot r + \left(\sqrt{2}\right)^2 \Rightarrow 3 = r^2 - 2 \cdot \sqrt{2} \cdot r + 2 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 2 \cdot \sqrt{2} \cdot r = r^2 + 2 - 3 \Rightarrow 2 \cdot \sqrt{2} \cdot r = r^2 - 1 \Rightarrow 2 \cdot \sqrt{2} \cdot r = r^2 - 1 \;/ \cdot \frac{1}{2 \cdot r} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \sqrt{2} = \frac{r^2 - 1}{2 \cdot r}.$$

Budući da je, po pretpostavci, r racionalan broj, vrijedi:

- r^2 *je racionalan broj*
- $r^2 - 1$ *je racionalan broj*
- $\frac{r^2-1}{2 \cdot r}$ *je racionalan broj.*

Dakle, na lijevoj strani jednakosti je iracionalan broj $\sqrt{2}$, a na desnoj racionalan broj $\frac{r^2-1}{2 \cdot r}$. Došli smo do proturječja. Pretpostavka da je $\sqrt{2}+\sqrt{3}$ racionalan broj je netočna pa zaključujemo da je $\sqrt{2}+\sqrt{3}$ iracionalan broj.

Vježba 263

Dokaži da je $\sqrt{2}+\sqrt{5}$ iracionalan broj.

Rezultat: Dokaz analogan.

Zadatak 264 (Ivan, gimnazija)

Kvadrat zbroja bilo kojega realnog broja i njegove recipročne vrijednosti veći je od kvadrata razlike tog broja i njegove recipročne vrijednosti za:

$$A.\ 2 \qquad B.\ 4 \qquad C.\ 1 \qquad D.\ 8.$$

Rješenje 264

Ponovimo!

Za svaki racionalan broj $\frac{a}{b}$, $b \neq 0$, postoji racionalan broj $\frac{b}{a}$ koji zovemo recipročan broj od broja $\frac{a}{b}$ sa svojstvom

$$\frac{a}{b}\cdot\frac{b}{a}=1.$$

Kako zapisati da je broj a za n veći od broja b?

$$a-n=b \quad , \quad a=b+n \quad , \quad a-b=n.$$

$$n=\frac{n}{1} \quad , \quad (a+b)^2=a^2+2\cdot a\cdot b+b^2 \quad , \quad (a-b)^2=a^2-2\cdot a\cdot b+b^2.$$

$$a^2-b^2=(a-b)\cdot(a+b) \quad , \quad \frac{a}{n}+\frac{b}{n}=\frac{a+b}{n}.$$

Skratiti razlomak znači brojnik i nazivnik tog razlomka podijeliti istim brojem različitim od nule i jedinice

$$\frac{a\cdot n}{b\cdot n}=\frac{a}{b} \ , \ n\neq 0 \ , \ n\neq 1.$$

Zakon distribucije množenja prema zbrajanju.

$$a\cdot(b+c)=a\cdot b+a\cdot c \quad , \quad a\cdot b+a\cdot c=a\cdot(b+c).$$

Neka je x realan broj. Njegova recipročna vrijednost je $\frac{1}{x}$. Iz uvjeta zadatka dobije se:

1.inačica

$$\left(x+\frac{1}{x}\right)^2-\left(x-\frac{1}{x}\right)^2=x^2+2\cdot x\cdot\frac{1}{x}+\left(\frac{1}{x}\right)^2-\left(x^2-2\cdot x\cdot\frac{1}{x}+\left(\frac{1}{x}\right)^2\right)=$$

$$=x^2+2\cdot x\cdot\frac{1}{x}+\left(\frac{1}{x}\right)^2-\left(x^2-2\cdot x\cdot\frac{1}{x}+\left(\frac{1}{x}\right)^2\right)=x^2+2+\left(\frac{1}{x}\right)^2-\left(x^2-2+\left(\frac{1}{x}\right)^2\right)=$$

$$=x^2+2+\left(\frac{1}{x}\right)^2-x^2+2-\left(\frac{1}{x}\right)^2=x^2+2+\left(\frac{1}{x}\right)^2-x^2+2-\left(\frac{1}{x}\right)^2=2+2=4.$$

Odgovor je pod B.

2.inačica

$$\left(x+\frac{1}{x}\right)^2-\left(x-\frac{1}{x}\right)^2=\left(\left(x+\frac{1}{x}\right)-\left(x-\frac{1}{x}\right)\right)\cdot\left(\left(x+\frac{1}{x}\right)+\left(x-\frac{1}{x}\right)\right)=$$

$$=\left(x+\frac{1}{x}-x+\frac{1}{x}\right)\cdot\left(x+\frac{1}{x}+x-\frac{1}{x}\right)=\left(x+\frac{1}{x}-x+\frac{1}{x}\right)\cdot\left(x+\frac{1}{x}+x-\frac{1}{x}\right)=\left(\frac{1}{x}+\frac{1}{x}\right)\cdot(x+x)=$$

$$=\frac{2}{x}\cdot 2\cdot x=\frac{2}{x}\cdot 2\cdot x=4.$$

Odgovor je pod B.

Vježba 264

Kvadrat razlike bilo kojega realnog broja i njegove recipročne vrijednosti manji je od kvadrata zbroja tog broja i njegove recipročne vrijednosti za:

$$A.\ 2 \qquad B.\ 4 \qquad C.\ 1 \qquad D.\ 8$$

Rezultat: B.

Zadatak 265 (Goga, gimnazija)

Ako je $a^2+b^2=1$ i $c^2+d^2=1$, onda je $|a\cdot c-b\cdot d|\leq 1$. Dokazati.

Rješenje 265

Ponovimo!

$$a^2 \geq 0 \ , \ a \in R \quad , \quad (a+b)^2 = a^2 + 2 \cdot a \cdot b + b^2 \quad , \quad (a-b)^2 = a^2 - 2 \cdot a \cdot b + b^2.$$

$$a \geq b \ , \ c > 0 \ \Rightarrow \ \frac{a}{c} \geq \frac{b}{c} \quad , \quad a \geq b \ , \ c < 0 \ \Rightarrow \ \frac{a}{c} \leq \frac{b}{c}.$$

$$|x| \leq a \ , \ a > 0 \ \Rightarrow \ -a \leq x \leq a.$$

Zakon distribucije množenja prema zbrajanju.

$$a \cdot (b+c) = a \cdot b + a \cdot c \quad , \quad a \cdot b + a \cdot c = a \cdot (b+c).$$

Polazimo od očiglednih nejednakosti.

$$\left.\begin{array}{l} (a+c)^2 + (b-d)^2 \geq 0 \\ (a-c)^2 + (b+d)^2 \geq 0 \end{array}\right\} \Rightarrow \left.\begin{array}{l} a^2 + 2 \cdot a \cdot c + c^2 + b^2 - 2 \cdot b \cdot d + d^2 \geq 0 \\ a^2 - 2 \cdot a \cdot c + c^2 + b^2 + 2 \cdot b \cdot d + d^2 \geq 0 \end{array}\right\} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \left.\begin{array}{l} a^2 + b^2 + c^2 + d^2 + 2 \cdot a \cdot c - 2 \cdot b \cdot d \geq 0 \\ a^2 + b^2 + c^2 + d^2 - 2 \cdot a \cdot c + 2 \cdot b \cdot d \geq 0 \end{array}\right\} \Rightarrow \left.\begin{array}{l} \left(a^2 + b^2\right) + \left(c^2 + d^2\right) + 2 \cdot a \cdot c - 2 \cdot b \cdot d \geq 0 \\ \left(a^2 + b^2\right) + \left(c^2 + d^2\right) - 2 \cdot a \cdot c + 2 \cdot b \cdot d \geq 0 \end{array}\right\} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{bmatrix} \text{uvjeti} \\ a^2 + b^2 = 1 \\ c^2 + d^2 = 1 \end{bmatrix} \Rightarrow \left.\begin{array}{l} 1 + 1 + 2 \cdot a \cdot c - 2 \cdot b \cdot d \geq 0 \\ 1 + 1 - 2 \cdot a \cdot c + 2 \cdot b \cdot d \geq 0 \end{array}\right\} \Rightarrow \left.\begin{array}{l} 2 + 2 \cdot a \cdot c - 2 \cdot b \cdot d \geq 0 \\ 2 - 2 \cdot a \cdot c + 2 \cdot b \cdot d \geq 0 \end{array}\right\} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \left.\begin{array}{l} 2 \cdot a \cdot c - 2 \cdot b \cdot d \geq -2 \\ -2 \cdot a \cdot c + 2 \cdot b \cdot d \geq -2 \end{array}\right\} \Rightarrow \left.\begin{array}{l} 2 \cdot a \cdot c - 2 \cdot b \cdot d \geq -2 \ /:2 \\ -2 \cdot a \cdot c + 2 \cdot b \cdot d \geq -2 \ /:(-2) \end{array}\right\} \Rightarrow \left.\begin{array}{l} a \cdot c - b \cdot d \geq -1 \\ a \cdot c - b \cdot d \leq 1 \end{array}\right\} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow -1 \leq a \cdot c - b \cdot d \leq 1 \Rightarrow |a \cdot c - b \cdot d| \leq 1.$$

Vježba 265

Ako je $a^2 + b^2 + c^2 + d^2 = 2$, onda je $|a \cdot c - b \cdot d| \leq 1$. Dokazati.

Rezultat: Dokaz analogan.

Zadatak 266 (Goga, gimnazija)

Ako su a i b jednakog predznaka dokaži nejednakost $\frac{a}{b} + \frac{b}{a} \geq 2$.

Rješenje 266

Ponovimo!

$$a^2 \geq 0 \ , \ a \in R \quad , \quad (a-b)^2 = a^2 - 2 \cdot a \cdot b + b^2 \quad , \quad a \geq b \ , \ c > 0 \ \Rightarrow \ \frac{a}{c} \geq \frac{b}{c}.$$

$$\left.\begin{array}{l} a > 0 \ , \ b > 0 \\ a < 0 \ , \ b < 0 \end{array}\right\} \Rightarrow a \cdot b > 0 \quad , \quad a^1 = a \quad , \quad a^n : a^m = a^{n-m}.$$

Skratiti razlomak znači brojnik i nazivnik tog razlomka podijeliti istim brojem različitim od nule i jedinice

$$\frac{a \cdot n}{b \cdot n} = \frac{a}{b} \ , \ n \neq 0 \ , \ n \neq 1.$$

Iz očigledne nejednakosti dobije se:

$$(a-b)^2 \geq 0 \Rightarrow a^2 - 2 \cdot a \cdot b + b^2 \geq 0 \Rightarrow a^2 + b^2 \geq 2 \cdot a \cdot b \Rightarrow a^2 + b^2 \geq 2 \cdot a \cdot b \ / \cdot \frac{1}{a \cdot b} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \frac{a^2}{a \cdot b} + \frac{b^2}{a \cdot b} \geq 2 \Rightarrow \frac{a^2}{a \cdot b} + \frac{b^2}{a \cdot b} \geq 2 \Rightarrow \frac{a}{b} + \frac{b}{a} \geq 2.$$

Vježba 266

Ako su a i b jednakog predznaka dokaži nejednakost $\frac{1}{a^2}+\frac{1}{b^2}\ge\frac{2}{a\cdot b}$.

Rezultat: Dokaz analogan.

Zadatak 267 (Goga, gimnazija)

Dokazati nejednakost: $\frac{1}{n+1}+\frac{1}{n+2}+\frac{1}{n+3}+\ldots+\frac{1}{2\cdot n-1}+\frac{1}{2\cdot n}>\frac{1}{2}$.

Rješenje 267

Ponovimo!

$$a<b\;\Rightarrow\;\frac{1}{a}>\frac{1}{b}\;,\;a,b\in R\setminus\{0\}\quad,\quad\left.\begin{array}{l}a>b\\c>d\end{array}\right\}\Rightarrow\;a+c>b+d\quad,\quad\frac{a}{n}+\frac{b}{n}=\frac{a+b}{n}.$$

Skratiti razlomak znači brojnik i nazivnik tog razlomka podijeliti istim brojem različitim od nule i jedinice

$$\frac{a\cdot n}{b\cdot n}=\frac{a}{b}\;,\;n\ne 0\;,\;n\ne 1.$$

Polazimo od očiglednih nejednakosti.

$$\left.\begin{array}{l}n+1<2\cdot n\\n+2<2\cdot n\\n+3<2\cdot n\\\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\\2\cdot n-1<2\cdot n\\2\cdot n=2\cdot n\end{array}\right\}\Rightarrow\left.\begin{array}{l}\frac{1}{n+1}>\frac{1}{2\cdot n}\\\frac{1}{n+2}>\frac{1}{2\cdot n}\\\frac{1}{n+3}>\frac{1}{2\cdot n}\\\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\\\frac{1}{2\cdot n-1}>\frac{1}{2\cdot n}\\\frac{1}{2\cdot n}=\frac{1}{2\cdot n}\end{array}\right\}\Rightarrow\left[\begin{array}{l}\text{zbrojimo}\\\text{nejednakosti}\end{array}\right]\Rightarrow$$

$$\Rightarrow\frac{1}{n+1}+\frac{1}{n+2}+\frac{1}{n+3}+\ldots+\frac{1}{2\cdot n-1}+\frac{1}{2\cdot n}>\frac{1}{2\cdot n}+\frac{1}{2\cdot n}+\frac{1}{2\cdot n}+\ldots+\frac{1}{2\cdot n}+\frac{1}{2\cdot n}\Rightarrow$$

$$\Rightarrow\frac{1}{n+1}+\frac{1}{n+2}+\frac{1}{n+3}+\ldots+\frac{1}{2\cdot n-1}+\frac{1}{2\cdot n}>\underbrace{\frac{1}{2\cdot n}+\frac{1}{2\cdot n}+\frac{1}{2\cdot n}+\ldots+\frac{1}{2\cdot n}+\frac{1}{2\cdot n}}_{\text{n pribrojnika}}\Rightarrow$$

$$\Rightarrow\frac{1}{n+1}+\frac{1}{n+2}+\frac{1}{n+3}+\ldots+\frac{1}{2\cdot n-1}+\frac{1}{2\cdot n}>n\cdot\frac{1}{2\cdot n}\Rightarrow$$

$$\Rightarrow\frac{1}{n+1}+\frac{1}{n+2}+\frac{1}{n+3}+\ldots+\frac{1}{2\cdot n-1}+\frac{1}{2\cdot n}>n\cdot\frac{1}{2\cdot n}\Rightarrow\frac{1}{n+1}+\frac{1}{n+2}+\frac{1}{n+3}+\ldots+\frac{1}{2\cdot n-1}+\frac{1}{2\cdot n}>\frac{1}{2}.$$

Vježba 267

Dokazati nejednakost: $\frac{1}{n}+\frac{1}{n+1}+\frac{1}{n+2}+\frac{1}{n+3}+\ldots+\frac{1}{2\cdot n-1}+\frac{1}{2\cdot n}>\frac{n+2}{2\cdot n}$.

Rezultat: Dokaz analogan.

Zadatak 268 (Goga, gimnazija)

Ako je $a^2+b^2=1$, onda je $-\sqrt{2}<a+b<\sqrt{2}$.

Rješenje 268

Ponovimo!

$$a^2\ge 0\ ,\ a\in R\quad,\quad a>b\ ,\ c\in R\ \Rightarrow\ a+c>b+c\quad,\quad a^2+2\cdot a\cdot b+b^2=(a+b)^2.$$

$$\sqrt{a^2}=|a|\quad,\quad |x|<a\ ,\ a>0\ \Rightarrow\ -a<x<a\quad,\quad 0<a\le b\ \Rightarrow\ \sqrt[n]{a}\le\sqrt[n]{b}.$$

Zakon distribucije množenja prema zbrajanju.

$$a\cdot(b+c)=a\cdot b+a\cdot c\quad,\quad a\cdot b+a\cdot c=a\cdot(b+c).$$

Polazimo od očigledne nejednakosti.

$$(a-b)^2\ge 0\ \Rightarrow\ a^2-2\cdot a\cdot b+b^2\ge 0\ \Rightarrow\ a^2+b^2\ge 2\cdot a\cdot b\ \Rightarrow\ a^2+b^2\ge 2\cdot a\cdot b\ /+a^2+b^2\ \Rightarrow$$

$$\Rightarrow\ a^2+b^2+a^2+b^2\ge 2\cdot a\cdot b+a^2+b^2\ \Rightarrow\ 2\cdot a^2+2\cdot b^2\ge a^2+2\cdot a\cdot b+b^2\ \Rightarrow$$

$$\Rightarrow\ 2\cdot\left(a^2+b^2\right)\ge(a+b)^2\ \Rightarrow\ \begin{bmatrix}\text{uvjet}\\ a^2+b^2=1\end{bmatrix}\ \Rightarrow\ 2\cdot 1\ge(a+b)^2\ \Rightarrow\ 2\ge(a+b)^2\ \Rightarrow$$

$$\Rightarrow\ (a+b)^2\le 2\ \Rightarrow\ (a+b)^2\le 2\ /\sqrt{\ }\ \Rightarrow\ \sqrt{(a+b)^2}\le\sqrt{2}\ \Rightarrow\ |a+b|\le\sqrt{2}\ \Rightarrow\ -\sqrt{2}\le a+b\le\sqrt{2}.$$

Vježba 268

Ako je $\frac{a}{b}+\frac{b}{a}=\frac{1}{a\cdot b}$, onda je $-\sqrt{2}<a+b<\sqrt{2}$.

Rezultat: Dokaz analogan.

Zadatak 269 (Brane, gimnazija)

Ako je $a_0=2$, $a_1=3$ i $a_{n+1}=3\cdot a_n-2\cdot a_{n-1}$, dokazati da je $a_n=2^n+1$.

Rješenje 269

Ponovimo!

$$a^1=a\quad,\quad a^n\cdot a^m=a^{n+m}.$$

Zakon distribucije množenja prema zbrajanju.

$$a\cdot(b+c)=a\cdot b+a\cdot c\quad,\quad a\cdot b+a\cdot c=a\cdot(b+c).$$

Matematička indukcija sastoji se iz dva koraka: baze indukcije i koraka indukcije. U bazi indukcije provjerava se je li tvrdnja istinita za najmanji prirodni broj (obično je to broj 1, osim ako nije postavljen neki drugi uvjet). U koraku indukcije pretpostavi se najprije da je tvrdnja istinita za prirodan broj n i zatim se provjerava istinitost tvrdnje za sljedbenika n + 1.

baza indukcije

n = 1

$$\left.\begin{array}{l}a_0=2\\ a_1=3\\ a_2=3\cdot a_1-2\cdot a_0\end{array}\right\}\ \Rightarrow\ a_2=3\cdot 3-2\cdot 2\ \Rightarrow\ a_2=9-4\ \Rightarrow\ a_2=5\ \Rightarrow\ a_2=4+1\ \Rightarrow\ a_2=2^2+1.$$

Dakle, baza indukcije je ispunjena.

korak indukcije

n

Pretpostavimo da je tvrdnja istinita za neki prirodni broj n i n – 1, tj. da vrijedi

$$a_{n-1}=2^{n-1}+1\ ,\ a_n=2^n+1.$$

n + 1

Sada provjeravamo izraz za sljedbenika n + 1:

$$a_{n+1} = 3 \cdot a_n - 2 \cdot a_{n-1} \Rightarrow a_{n+1} = 3 \cdot \left(2^n + 1\right) - 2 \cdot \left(2^{n-1} + 1\right) \Rightarrow a_{n+1} = 3 \cdot 2^n + 3 - 2 \cdot 2^{n-1} - 2 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow a_{n+1} = 3 \cdot 2^n - 2^1 \cdot 2^{n-1} + 1 \Rightarrow a_{n+1} = 3 \cdot 2^n - 2^n + 1 \Rightarrow a_{n+1} = 2 \cdot 2^n + 1 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow a_{n+1} = 2^{n+1} + 1.$$

Vježba 269

Ako je $a_0 = 0,\ a_1 = 1$ i $a_{n+1} = 3 \cdot a_n - 2 \cdot a_{n-1}$, dokazati da je $a_n = 2^n - 1$.

Rezultat: Dokaz analogan.

Zadatak 270 (Brane, gimnazija)

Dokazati da je $\frac{a+b}{a-b}$ iracionalan broj, ako je $a > 0,\ b > 0,\ a^2 + b^2 = 6 \cdot a \cdot b.$

Rješenje 270

Ponovimo!

$$\sqrt{2} \in I \quad , \quad (a+b)^2 = a^2 + 2 \cdot a \cdot b + b^2 \quad , \quad (a-b)^2 = a^2 - 2 \cdot a \cdot b + b^2.$$

$$a = b \Rightarrow b = a \quad , \quad \sqrt{a^2} = a \ ,\ a > 0 \quad , \quad \frac{a^n}{b^n} = \left(\frac{a}{b}\right)^n.$$

Zakon distribucije množenja prema zbrajanju.

$$a \cdot (b+c) = a \cdot b + a \cdot c \quad , \quad a \cdot b + a \cdot c = a \cdot (b+c).$$

Preoblikujemo zadanu jednakost.

$$a^2 + b^2 = 6 \cdot a \cdot b \Rightarrow 6 \cdot a \cdot b = a^2 + b^2 \Rightarrow 2 \cdot a \cdot b + 4 \cdot a \cdot b = 2 \cdot a^2 - a^2 + 2 \cdot b^2 - b^2 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 2 \cdot a \cdot b + a^2 + b^2 = 2 \cdot a^2 + 2 \cdot b^2 - 4 \cdot a \cdot b \Rightarrow a^2 + 2 \cdot a \cdot b + b^2 = 2 \cdot a^2 - 4 \cdot a \cdot b + 2 \cdot b^2 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow (a+b)^2 = 2 \cdot \left(a^2 - 2 \cdot a \cdot b + b^2\right) \Rightarrow (a+b)^2 = 2 \cdot (a-b)^2 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow (a+b)^2 = 2 \cdot (a-b)^2 \ / \cdot \frac{1}{(a-b)^2} \Rightarrow \frac{(a+b)^2}{(a-b)^2} = 2 \Rightarrow \left(\frac{a+b}{a-b}\right)^2 = 2 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \left(\frac{a+b}{a-b}\right)^2 = 2 \ / \sqrt{\ } \Rightarrow \frac{a+b}{a-b} = \sqrt{2}.$$

Vježba 270

Dokazati da je $\frac{a+b}{a-b}$ iracionalan broj, ako je $a > 0,\ b > 0,\ (a-b)^2 = 4 \cdot a \cdot b.$

Rezultat: Dokaz analogan.

Zadatak 271 (Matija, kemija)

Matematičkom indukcijom dokažite $2^n > n^3$ za $\forall n \in N,\ n \ge 10.$

Rješenje 271

Ponovimo!

$$\left(\frac{a}{b}\right)^n = \frac{a^n}{b^n} \quad , \quad \frac{a+b}{n} = \frac{a}{n} + \frac{b}{n} \quad , \quad (a+b)^3 = a^3 + 3 \cdot a^2 \cdot b + 3 \cdot a \cdot b^2 + b^3.$$

Skratiti razlomak znači brojnik i nazivnik tog razlomka podijeliti istim brojem različitim od nule i jedinice

$$\frac{a \cdot n}{b \cdot n} = \frac{a}{b} \ , \ n \neq 0 \ , \ n \neq 1.$$

$$\left.\begin{array}{l} a > b > 0 \\ c > d > 0 \end{array}\right\} \Rightarrow a \cdot c > b \cdot d \quad , \quad a^1 = a \quad , \quad a^n \cdot a^m = a^{n+m} \quad , \quad a \cdot \frac{b}{c} = \frac{a \cdot b}{c}.$$

Matematička indukcija sastoji se iz dva koraka: baze indukcije i koraka indukcije. U bazi indukcije provjerava se je li tvrdnja istinita za najmanji prirodni broj (obično je to broj 1, osim ako nije postavljen neki drugi uvjet). U koraku indukcije pretpostavi se najprije da je tvrdnja istinita za prirodan broj n i zatim se provjerava istinitost tvrdnje za sljedbenika n + 1.

baza indukcije

n = 10

Provjerimo da je nejednakost točna za n = 10.

$$2^{10} > 10^3 \Rightarrow 1024 > 1000.$$

Dakle, baza indukcije je ispunjena.

korak indukcije

n

Pretpostavimo da je tvrdnja istinita za neki prirodni broj n ≥ 10, tj. da vrijedi

$$2^n > n^3.$$

Prije provjere izraza za sljedbenika n + 1 pokažimo da nejednakost

$$2 > \frac{(n+1)^3}{n^3}$$

također vrijedi za svaki n ≥ 10.

$$2 > \frac{(n+1)^3}{n^3} \Rightarrow 2 > \left(\frac{n+1}{n}\right)^3 \Rightarrow 2 > \left(\frac{n}{n} + \frac{1}{n}\right)^3 \Rightarrow 2 > \left(\frac{n}{n} + \frac{1}{n}\right)^3 \Rightarrow 2 > \left(1 + \frac{1}{n}\right)^3 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 2 > 1^3 + 3 \cdot 1^2 \cdot \frac{1}{n} + 3 \cdot 1 \cdot \left(\frac{1}{n}\right)^2 + \left(\frac{1}{n}\right)^3 \Rightarrow 2 > 1 + 3 \cdot 1 \cdot \frac{1}{n} + 3 \cdot 1 \cdot \frac{1}{n^2} + \frac{1}{n^3} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 2 > 1 + \frac{3}{n} + \frac{3}{n^2} + \frac{1}{n^3} \Rightarrow 1 + \frac{3}{n} + \frac{3}{n^2} + \frac{1}{n^3} < 2 \Rightarrow \frac{3}{n} + \frac{3}{n^2} + \frac{1}{n^3} < 2 - 1 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \frac{3}{n} + \frac{3}{n^2} + \frac{1}{n^3} < 1 \ , \ n \geq 10.$$

Za n = 10 vidi se točnost nejednakosti.

$$\frac{3}{10} + \frac{3}{10^2} + \frac{1}{10^3} < 1 \Rightarrow \frac{3}{10} + \frac{3}{100} + \frac{1}{1000} < 1 \Rightarrow 0.3 + 0.03 + 0.001 < 1 \Rightarrow 0.331 < 1.$$

Jasno je da će nejednakost biti valjana za svaki n > 10.

Konačno se množenjem dviju nejednakosti dobije da vrijedi:

$$\left.\begin{array}{l} 2^n > n^3 \\ 2 > \dfrac{(n+1)^3}{n^3} \end{array}\right\} \Rightarrow \left[\begin{array}{l} \text{pomnožimo} \\ \text{nejednakosti} \end{array}\right] \Rightarrow 2^n \cdot 2 > n^3 \cdot \frac{(n+1)^3}{n^3} \Rightarrow 2^n \cdot 2^1 > n^3 \cdot \frac{(n+1)^3}{n^3} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 2^{n+1} > (n+1)^3.$$

Vježba 271

Matematičkom indukcijom dokažite $3^{n} > n^{4}$ za $\forall n \in N,\ n \geq 8.$

Rezultat: Dokaz analogan. Naputak: $3 > \frac{(n+1)^{4}}{n^{4}}$, $\left(1+\frac{1}{n}\right)^{4} = 1 + \frac{4}{n} + \frac{6}{n^{2}} + \frac{4}{n^{3}} + \frac{1}{n^{4}} \ldots$

$\frac{4}{n} + \frac{6}{n^{2}} + \frac{4}{n^{3}} + \frac{1}{n^{4}} < 1$ za $n \geq 8.$

Zadatak 272 (Josip, gimnazija)

Zadani su brojevi: $A = \sqrt[3]{\sqrt{9+\sqrt{17}} \cdot \sqrt{9-\sqrt{17}}}$ i $B = \sqrt{\sqrt[3]{11-\sqrt{57}} \cdot \sqrt[3]{11+\sqrt{57}}}$. Dokažite da su A i B racionalni brojevi i jednaki.

Rješenje 272

Ponovimo!

$$\sqrt[n]{a} \cdot \sqrt[n]{b} = \sqrt[n]{a \cdot b} \quad , \quad (a-b)\cdot(a+b) = a^{2} - b^{2} \quad , \quad \left(\sqrt{a}\right)^{2} = a \quad , \quad \sqrt[n \cdot r]{a^{m \cdot r}} = \sqrt[n]{a^{m}}.$$

$$\sqrt[n]{a^{n}} = a \ , \ a \geq 0 \quad , \quad \left.\begin{array}{l} a = c \\ b = c \end{array}\right\} \Rightarrow a = b.$$

Racionalni brojevi su svi negativni razlomci, nula i pozitivni razlomci. Skup racionalnih brojeva označavamo slovom Q. Svaki razlomak možemo zapisati u obliku $\frac{a}{b}$, gdje je a cijeli broj, a b prirodni broj.

Preoblikujemo izraz A.

$$A = \sqrt[3]{\sqrt{9+\sqrt{17}} \cdot \sqrt{9-\sqrt{17}}} \Rightarrow A = \sqrt[3]{\sqrt{\left(9+\sqrt{17}\right)\cdot\left(9-\sqrt{17}\right)}} \Rightarrow A = \sqrt[3]{\sqrt{9^{2} - \left(\sqrt{17}\right)^{2}}} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow A = \sqrt[3]{\sqrt{81-17}} \Rightarrow A = \sqrt[3]{\sqrt{64}} \Rightarrow A = \sqrt[3]{\sqrt{8^{2}}} \Rightarrow A = \sqrt[3]{\sqrt{8^{2}}} \Rightarrow A = \sqrt[3]{8} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow A = \sqrt[3]{2^{3}} \Rightarrow A = \sqrt[3]{2^{3}} \Rightarrow A = 2.$$

Preoblikujemo izraz B.

$$B = \sqrt{\sqrt[3]{11-\sqrt{57}} \cdot \sqrt[3]{11+\sqrt{57}}} \Rightarrow B = \sqrt{\sqrt[3]{\left(11-\sqrt{57}\right)\cdot\left(11+\sqrt{57}\right)}} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow B = \sqrt{\sqrt[3]{11^{2} - \left(\sqrt{57}\right)^{2}}} \Rightarrow B = \sqrt{\sqrt[3]{121-57}} \Rightarrow B = \sqrt{\sqrt[3]{64}} \Rightarrow B = \sqrt{\sqrt[3]{4^{3}}} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow B = \sqrt{\sqrt[3]{4^{3}}} \Rightarrow B = \sqrt{4} \Rightarrow B = \sqrt{2^{2}} \Rightarrow B = \sqrt{2^{2}} \Rightarrow B = 2.$$

Brojevi A i B su racionalni brojevi i vrijedi:

$$\left.\begin{array}{l} A = 2 \\ B = 2 \end{array}\right\} \Rightarrow A = B.$$

Vježba 272

Zadani su brojevi: $A = \sqrt[3]{\sqrt{3^{2}-\sqrt{17}} \cdot \sqrt{3^{2}+\sqrt{17}}}$ i $B = \sqrt{\sqrt[3]{11+\sqrt{57}} \cdot \sqrt[3]{11-\sqrt{57}}}$. Dokažite da su A i B racionalni brojevi i jednaki.

Rezultat: Dokaz analogan. A = B = 2.

Zadatak 273 (Petar, gimnazija)

Primjenom nejednakosti aritmetičke i geometrijske sredine dokažite $a^3+b^3+c^3 \geq 3 \cdot a \cdot b \cdot c$.

Rješenje 273

Ponovimo!

$$a^n \cdot b^n = (a \cdot b)^n \quad , \quad \sqrt[n]{a^n} = a \; , \; a \geq 0.$$

Neka je dan skup n pozitivnih brojeva $\{a_1, a_2, a_3, \ldots, a_n\}$. Tada je aritmetička sredina A_n brojeva $a_1, a_2, a_3, \ldots, a_n$ definirana izrazom

$$A_n = \frac{a_1 + a_2 + a_3 + \ldots + a_n}{n}.$$

Neka je dan skup n pozitivnih brojeva $\{a_1, a_2, a_3, \ldots, a_n\}$. Tada je geometrijska sredina G_n brojeva $a_1, a_2, a_3, \ldots, a_n$ definirana izrazom

$$G_n = \sqrt[n]{a_1 \cdot a_2 \cdot a_3 \cdot \ldots \cdot a_n}.$$

Za aritmetičku i geometrijsku sredinu vrijedi nejednakost

$$A \geq G.$$

Znak jednakosti vrijedi, ako je:

$$a_1 = a_2 = a_3 = \ldots = a_n.$$

Neka su a, b i c tri pozitivna realna broja. Tada je

- aritmetička sredina A brojeva a, b i c definirana izrazom

$$A = \frac{a+b+c}{3}$$

- geometrijska sredina G brojeva a, b i c definirana izrazom

$$G = \sqrt[3]{a \cdot b \cdot c}.$$

Promatrajmo brojeve a^3, b^3, c^3. Uporabom nejednakosti između aritmetičke i geometrijske sredine dobije se:

$$\frac{a^3+b^3+c^3}{3} \geq \sqrt[3]{a^3 \cdot b^3 \cdot c^3} \Rightarrow \frac{a^3+b^3+c^3}{3} \geq \sqrt[3]{(a \cdot b \cdot c)^3} \Rightarrow \frac{a^3+b^3+c^3}{3} \geq \sqrt[3]{(a \cdot b \cdot c)^3} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \frac{a^3+b^3+c^3}{3} \geq a \cdot b \cdot c \Rightarrow \frac{a^3+b^3+c^3}{3} \geq a \cdot b \cdot c \; / \cdot 3 \Rightarrow a^3+b^3+c^3 \geq 3 \cdot a \cdot b \cdot c.$$

Znak jednakosti (=) vrijedi za a = b = c.

Vježba 273

Primjenom nejednakosti aritmetičke i geometrijske sredine dokažite $a^4+b^4+c^4+d^4 \geq 4 \cdot a \cdot b \cdot c \cdot d$.

Rezultat: Dokaz analogan,

Zadatak 274 (Petar, gimnazija)

Primjenom nejednakosti aritmetičke i geometrijske sredine dokažite $(a+b+c) \cdot \left(a^2+b^2+c^2\right) \geq 9 \cdot a \cdot b \cdot c$.

Rješenje 274

Ponovimo!

$$\left.\begin{array}{l} a \geq b > 0 \\ c \geq d > 0 \end{array}\right\} \Rightarrow a \cdot c \geq b \cdot d \quad , \quad \sqrt[n]{a} \cdot \sqrt[n]{b} = \sqrt[n]{a \cdot b} \quad , \quad a^1 = a \quad , \quad a^n \cdot a^m = a^{n+m}.$$

$$\frac{a}{b}\cdot\frac{c}{d}=\frac{a\cdot c}{b\cdot d} \quad , \quad a^n\cdot b^n=(a\cdot b)^n \quad , \quad \sqrt[n]{a^n}=a \ , \ a\geq 0.$$

Neka je dan skup n pozitivnih brojeva $\{a_1, a_2, a_3, \ldots, a_n\}$. Tada je aritmetička sredina A_n brojeva $a_1, a_2, a_3, \ldots, a_n$ definirana izrazom

$$A_n=\frac{a_1+a_2+a_3+\ \ldots\ +a_n}{n}.$$

Neka je dan skup n pozitivnih brojeva $\{a_1, a_2, a_3, \ldots, a_n\}$. Tada je geometrijska sredina G_n brojeva $a_1, a_2, a_3, \ldots, a_n$ definirana izrazom

$$G_n=\sqrt[n]{a_1\cdot a_2\cdot a_3\cdot\ldots\cdot a_n}.$$

Za aritmetičku i geometrijsku sredinu vrijedi nejednakost

$$A\geq G.$$

Znak jednakosti vrijedi, ako je:

$$a_1=a_2=a_3=\ldots=a_n.$$

Neka su a, b i c tri pozitivna realna broja. Tada je

- aritmetička sredina A brojeva a, b i c definirana izrazom

$$A=\frac{a+b+c}{3}$$

- geometrijska sredina G brojeva a, b i c definirana izrazom

$$G=\sqrt[3]{a\cdot b\cdot c}.$$

Promatrajmo brojeve a, b, c. Uporabom nejednakosti između aritmetičke i geometrijske sredine dobije se.

$$\frac{a+b+c}{3}\geq\sqrt[3]{a\cdot b\cdot c}.$$

Promatrajmo brojeve a^2, b^2, c^2. Uporabom nejednakosti između aritmetičke i geometrijske sredine dobije se:

$$\frac{a^2+b^2+c^2}{3}\geq\sqrt[3]{a^2\cdot b^2\cdot c^2}.$$

Sada je:

$$\left.\begin{aligned}&\frac{a+b+c}{3}\geq\sqrt[3]{a\cdot b\cdot c}\\&\frac{a^2+b^2+c^2}{3}\geq\sqrt[3]{a^2\cdot b^2\cdot c^2}\end{aligned}\right\}\Rightarrow\begin{bmatrix}\text{pomnožimo}\\\text{nejednakosti}\end{bmatrix}\Rightarrow$$

$$\Rightarrow\frac{a+b+c}{3}\cdot\frac{a^2+b^2+c^2}{3}\geq\sqrt[3]{a\cdot b\cdot c}\cdot\sqrt[3]{a^2\cdot b^2\cdot c^2}\Rightarrow$$

$$\Rightarrow\frac{(a+b+c)\cdot\left(a^2+b^2+c^2\right)}{9}\geq\sqrt[3]{a\cdot b\cdot c\cdot a^2\cdot b^2\cdot c^2}\Rightarrow$$

$$\Rightarrow\frac{(a+b+c)\cdot\left(a^2+b^2+c^2\right)}{9}\geq\sqrt[3]{a^3\cdot b^3\cdot c^3}\Rightarrow$$

$$\Rightarrow\frac{(a+b+c)\cdot\left(a^2+b^2+c^2\right)}{9}\geq\sqrt[3]{(a\cdot b\cdot c)^3}\Rightarrow\frac{(a+b+c)\cdot\left(a^2+b^2+c^2\right)}{9}\geq\sqrt[3]{(a\cdot b\cdot c)^3}\Rightarrow$$

$$\Rightarrow \frac{(a+b+c)\cdot\left(a^2+b^2+c^2\right)}{9} \ge a\cdot b\cdot c \Rightarrow \frac{(a+b+c)\cdot\left(a^2+b^2+c^2\right)}{9} \ge a\cdot b\cdot c \ /\cdot 9 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow (a+b+c)\cdot\left(a^2+b^2+c^2\right) \ge 9\cdot a\cdot b\cdot c.$$

Znak jednakosti (=) vrijedi za a = b = c.

Vježba 274

Primjenom nejednakosti aritmetičke i geometrijske sredine dokažite $(a+b+c+d)\cdot\left(a^3+b^3+c^3+d^3\right) \ge 16\cdot a\cdot b\cdot c\cdot d.$

Rezultat: Dokaz analogan,

Zadatak 275 (Petar, gimnazija)

Primjenom nejednakosti aritmetičke i geometrijske sredine dokažite $(a+b+c)\cdot\left(\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}\right) \ge 9.$

Rješenje 275

Ponovimo!

$$\left.\begin{matrix} a \ge b > 0 \\ c \ge d > 0 \end{matrix}\right\} \Rightarrow a\cdot c \ge b\cdot d \quad , \quad \sqrt[n]{a}\cdot\sqrt[n]{b} = \sqrt[n]{a\cdot b} \quad , \quad \frac{a}{b}\cdot\frac{c}{d} = \frac{a\cdot c}{b\cdot d}.$$

Skratiti razlomak znači brojnik i nazivnik tog razlomka podijeliti istim brojem različitim od nule i jedinice

$$\frac{a\cdot n}{b\cdot n} = \frac{a}{b} \ , \ n \ne 0 \ , \ n \ne 1.$$

Neka je dan skup n pozitivnih brojeva $\{a_1, a_2, a_3, \ldots, a_n\}$. Tada je aritmetička sredina A_n brojeva $a_1, a_2, a_3, \ldots, a_n$ definirana izrazom

$$A_n = \frac{a_1+a_2+a_3+\ \ldots\ +a_n}{n}.$$

Neka je dan skup n pozitivnih brojeva $\{a_1, a_2, a_3, \ \ldots \ , a_n\}$. Tada je geometrijska sredina G_n brojeva $a_1, a_2, a_3, \ldots, a_n$ definirana izrazom

$$G_n = \sqrt[n]{a_1\cdot a_2\cdot a_3\cdot \ldots \cdot a_n}.$$

Za aritmetičku i geometrijsku sredinu vrijedi nejednakost

$$A \ge G.$$

Znak jednakosti vrijedi, ako je:

$$a_1 = a_2 = a_3 = \ldots = a_n.$$

Neka su a, b i c tri pozitivna realna broja. Tada je

- aritmetička sredina A brojeva a, b i c definirana izrazom

$$A = \frac{a+b+c}{3}$$

- geometrijska sredina G brojeva a, b i c definirana izrazom

$$G = \sqrt[3]{a\cdot b\cdot c}.$$

Promatrajmo brojeve a, b, c. Uporabom nejednakosti između aritmetičke i geometrijske sredine dobije se:

$$\frac{a+b+c}{3} \ge \sqrt[3]{a\cdot b\cdot c}.$$

Promatrajmo brojeve $\frac{1}{a}, \frac{1}{b}, \frac{1}{c}$. Uporabom nejednakosti između aritmetičke i geometrijske sredine dobije se.

$$\frac{\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}}{3} \geq \sqrt[3]{\frac{1}{a} \cdot \frac{1}{b} \cdot \frac{1}{c}}.$$

Sada je:

$$\left.\begin{array}{l} \frac{a+b+c}{3} \geq \sqrt[3]{a \cdot b \cdot c} \\ \frac{\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}}{3} \geq \sqrt[3]{\frac{1}{a} \cdot \frac{1}{b} \cdot \frac{1}{c}} \end{array}\right\} \Rightarrow \left[\begin{array}{l} \text{pomnožimo} \\ \text{nejednakosti} \end{array}\right] \Rightarrow \frac{a+b+c}{3} \cdot \frac{\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}}{3} \geq \sqrt[3]{a \cdot b \cdot c} \cdot \sqrt[3]{\frac{1}{a} \cdot \frac{1}{b} \cdot \frac{1}{c}} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \frac{(a+b+c) \cdot \left(\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}\right)}{9} \geq \sqrt[3]{a \cdot b \cdot c} \cdot \sqrt[3]{\frac{1}{a \cdot b \cdot c}} \Rightarrow \frac{(a+b+c) \cdot \left(\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}\right)}{9} \geq \sqrt[3]{a \cdot b \cdot c \cdot \frac{1}{a \cdot b \cdot c}} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \frac{(a+b+c) \cdot \left(\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}\right)}{9} \geq \sqrt[3]{a \cdot b \cdot c \cdot \frac{1}{a \cdot b \cdot c}} \Rightarrow \frac{(a+b+c) \cdot \left(\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}\right)}{9} \geq \sqrt[3]{1} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \frac{(a+b+c) \cdot \left(\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}\right)}{9} \geq 1 \Rightarrow \frac{(a+b+c) \cdot \left(\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}\right)}{9} \geq 1 \; / \cdot 9 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow (a+b+c) \cdot \left(\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}\right) \geq 9.$$

Vježba 275

Primjenom nejednakosti aritmetičke i geometrijske sredine dokažite

$$(a+b+c+d) \cdot \left(\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}+\frac{1}{d}\right) \geq 16.$$

Rezultat: Dokaz analogan,

Zadatak 276 (Petar, gimnazija)

Primjenom nejednakosti aritmetičke i geometrijske sredine dokažite $2 \cdot a^3 + 11 > 9 \cdot a$.

Rješenje 276

Ponovimo!

$$\sqrt[n]{a^n} = a \;,\; a \geq 0 \quad , \quad a^n \cdot b^n = (a \cdot b)^n.$$

Zakon distribucije množenja prema zbrajanju.

$$a \cdot (b+c) = a \cdot b + a \cdot c \quad , \quad a \cdot b + a \cdot c = a \cdot (b+c).$$

Proširiti razlomak znači brojnik i nazivnik tog razlomka pomnožiti istim brojem različitim od nule i jedinice

$$\frac{a}{b} = \frac{a \cdot n}{b \cdot n} \;,\; n \neq 0 \;,\; n \neq 1.$$

Neka je dan skup n pozitivnih brojeva $\{a_1, a_2, a_3, \ldots, a_n\}$. Tada je aritmetička sredina A_n brojeva $a_1, a_2, a_3, \ldots, a_n$ definirana izrazom

$$A_n = \frac{a_1 + a_2 + a_3 + \ldots + a_n}{n}.$$

Neka je dan skup n pozitivnih brojeva $\{a_1, a_2, a_3, \ldots, a_n\}$. Tada je geometrijska sredina G_n brojeva $a_1, a_2, a_3, \ldots, a_n$ definirana izrazom

$$G_n = \sqrt[n]{a_1 \cdot a_2 \cdot a_3 \cdot \ldots \cdot a_n}.$$

Za aritmetičku i geometrijsku sredinu vrijedi nejednakost

$$A \geq G.$$

Znak jednakosti vrijedi, ako je:

$$a_1 = a_2 = a_3 = \ldots = a_n.$$

Neka su a, b i c tri pozitivna realna broja. Tada je

- aritmetička sredina A brojeva a, b i c definirana izrazom

$$A = \frac{a+b+c}{3}$$

- geometrijska sredina G brojeva a, b i c definirana izrazom

$$G = \sqrt[3]{a \cdot b \cdot c}.$$

Binom $2 \cdot a^3 + 11$ preoblikujemo u polinom od 6 članova i grupiramo ga pa se uporabom nejednakosti između aritmetičke i geometrijske sredine dobije:

$$2 \cdot a^3 + 11 = a^3 + 1 + 1 + a^3 + 8 + 1 = \left(a^3 + 1 + 1\right) + \left(a^3 + 8 + 1\right) =$$

$$= 3 \cdot \frac{a^3 + 1 + 1}{3} + 3 \cdot \frac{a^3 + 8 + 1}{3} \geq 3 \cdot \sqrt[3]{a^3 \cdot 1 \cdot 1} + 3 \cdot \sqrt[3]{a^3 \cdot 8 \cdot 1} = 3 \cdot \sqrt[3]{a^3} + 3 \cdot \sqrt[3]{8 \cdot a^3} =$$

$$= 3 \cdot \sqrt[3]{a^3} + 3 \cdot \sqrt[3]{(2 \cdot a)^3} = 3 \cdot a + 3 \cdot \sqrt[3]{(2 \cdot a)^3} = 3 \cdot a + 3 \cdot 2 \cdot a = 3 \cdot a + 6 \cdot a = 9 \cdot a.$$

Dakle, vrijedi

$$2 \cdot a^3 + 11 \geq 9 \cdot a.$$

Vježba 276

Primjenom nejednakosti aritmetičke i geometrijske sredine dokažite $2 \cdot a^4 + 21 > 12 \cdot a.$

Rezultat: Dokaz analogan.

Zadatak 277 (Marija, ekonomska škola)

Izračunajte $\frac{0.1 : 0.02^2}{0.1 \cdot 0.02}.$

Rješenje 277

Ponovimo!

Decimalni broj pretvara se u razlomak tako da u brojnik stavimo broj kao cijeli (bez decimalne točke), a u nazivnik dekadsku jedinicu koja ima nula koliko je mjesta poslije decimalne točke. Razlomak skratimo, ako je moguće. Na primjer,

$$0.3 = \frac{3}{10} \quad , \quad 0.07 = \frac{7}{100} \quad , \quad 1.25 = \frac{125}{100} = \frac{125}{100} = \frac{5}{4} \quad , \quad 23.027 = \frac{23027}{1000}.$$

$$\frac{a}{b} : \frac{c}{d} = \frac{a}{b} \cdot \frac{d}{c} = \frac{a \cdot d}{b \cdot c} \quad , \quad n = \frac{n}{1} \quad , \quad \frac{\frac{a}{b}}{\frac{c}{d}} = \frac{a \cdot d}{b \cdot c} \quad , \quad \left(\frac{a}{b}\right)^n = \frac{a^n}{b^b} \quad , \quad a^1 = a.$$

$$a^n \cdot a^m = a^{n+m}.$$

Proširiti razlomak znači brojnik i nazivnik tog razlomka pomnožiti istim brojem različitim od nule i jedinice

$$\frac{a}{b} = \frac{a \cdot n}{b \cdot n} \ , \ n \neq 0 \ , \ n \neq 1.$$

Skratiti razlomak znači brojnik i nazivnik tog razlomka podijeliti istim brojem različitim od nule i jedinice

$$\frac{a\cdot n}{b\cdot n}=\frac{a}{b}\ ,\ n\neq 0\ ,\ n\neq 1.$$

1.inačica

$$\frac{0.1:0.02^{2}}{0.1\cdot 0.02}=\frac{0.1\cdot\frac{1}{0.02^{2}}}{0.1\cdot 0.02}=\frac{0.1\cdot\frac{1}{0.02^{2}}}{0.1\cdot 0.02}=\frac{\frac{1}{0.02^{2}}}{0.02}=\frac{\frac{1}{0.02^{2}}}{\frac{0.02}{1}}=\frac{1}{0.02^{3}}=\left(\frac{1}{0.02}\right)^{3}=$$

$$=\left(\frac{1\cdot 100}{0.02\cdot 100}\right)^{3}=\left(\frac{100}{2}\right)^{3}=\left(\frac{100}{2}\right)^{3}=\left(\frac{50}{1}\right)^{3}=50^{3}=12\,500.$$

2.inačica

$$\frac{0.1:0.02^{2}}{0.1\cdot 0.02}=\frac{\frac{1}{10}:\left(\frac{2}{100}\right)^{2}}{\frac{1}{10}\cdot\frac{2}{100}}=\frac{\frac{1}{10}\cdot\left(\frac{100}{2}\right)^{2}}{\frac{1}{10}\cdot\frac{2}{100}}=\frac{\frac{1}{10}\cdot\left(\frac{100}{2}\right)^{2}}{\frac{1}{10}\cdot\frac{2}{100}}=\frac{\left(\frac{100}{2}\right)^{2}}{\frac{2}{100}}=\frac{\left(\frac{100}{2}\right)^{2}}{\frac{2}{100}}=$$

$$=\frac{\left(\frac{50}{1}\right)^{2}}{\frac{1}{50}}=\frac{50^{2}}{\frac{1}{50}}=\frac{\frac{50^{2}}{1}}{\frac{1}{50}}=\frac{50^{3}}{1}=50^{3}=125\,000.$$

Vježba 277

Izračunajte $\frac{0.3:0.02^{2}}{0.3\cdot 0.02}$.

Rezultat: 125000.

Zadatak 278 (Martina, ekonomska škola)

Izračunajte $1-\frac{1+\frac{1}{1+2}}{2+\frac{1}{1+3}}+\frac{2+\frac{1}{3+4}}{3+\frac{1}{3+6}}$.

Rješenje 278

Ponovimo!

$$n=\frac{n}{1}\quad,\quad\frac{a}{b}+\frac{c}{d}=\frac{a\cdot d+b\cdot c}{b\cdot d}\quad,\quad\frac{\frac{a}{b}}{\frac{c}{d}}=\frac{a\cdot d}{b\cdot c}\quad,\quad\frac{a}{b}-\frac{c}{d}=\frac{a\cdot d-b\cdot c}{b\cdot d}.$$

$$a^{n}\cdot a^{m}=a^{n+m}.$$

Prosti brojevi (prim – brojevi) su prirodni brojevi djeljivi bez ostatka samo s brojem 1 i sami sa sobom, a veći od broja 1. Prirodni brojevi koji su veći od broja 1, a nisu prosti brojevi nazivaju se složenim brojevima.
Višekratnici prirodnog broja su svi brojevi koji su djeljivi s tim brojem. Prirodni broj ima beskonačno višekratnika.
Zajednički višekratnici dvaju ili više brojeva su brojevi koji su djeljivi s svim zadanim brojevima
Najmanji zajednički višekratnik dvaju ili više brojeva je najmanji prirodni broj koji je djeljiv sa svim zadanim brojevima.

$$1-\frac{1+\frac{1}{1+2}}{2+\frac{1}{1+3}}+\frac{2+\frac{1}{3+4}}{3+\frac{1}{3+6}}=1-\frac{1+\frac{1}{3}}{2+\frac{1}{4}}+\frac{2+\frac{1}{7}}{3+\frac{1}{9}}=1-\frac{\frac{1}{1}+\frac{1}{3}}{\frac{2}{1}+\frac{1}{4}}+\frac{\frac{2}{1}+\frac{1}{7}}{\frac{3}{1}+\frac{1}{9}}=1-\frac{\frac{3+1}{3}}{\frac{8+1}{4}}+\frac{\frac{14+1}{7}}{\frac{27+1}{9}}=$$

$$=1-\frac{\frac{4}{3}}{\frac{9}{4}}+\frac{\frac{15}{7}}{\frac{28}{9}}=1-\frac{16}{27}+\frac{135}{196}=\frac{5292-3136+3645}{5292}=\frac{5801}{5292}.$$

Da bismo našli najmanji zajednički višekratnik brojeve 27 i 196 moramo rastaviti na proste faktore.

27	,	196	2
27	,	98	2
27	,	49	3
9	,	49	3
3	,	49	3
1	,	49	7
1	,	7	7
1	,	1	

$$v(27, 196) = 2 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 7 \cdot 7 = 5292.$$

Vježba 278

Izračunajte $1-\frac{1+\frac{1}{1+2}}{2+\frac{1}{1+3}}+\frac{2+\frac{1}{2+5}}{3+\frac{1}{4+5}}$.

Rezultat: $\frac{5801}{5292}$.

Zadatak 279 (Željka, medicinska škola)

Izračunajte $\sqrt{2}:\sqrt[3]{2}$.

Rješenje 279

Ponovimo!

$$a^1=a \quad , \quad \sqrt[n]{a^m}=\sqrt[n\cdot r]{a^{m\cdot r}} \quad , \quad \sqrt[n]{a}:\sqrt[n]{b}=\sqrt[n]{a:b} \quad , \quad a^n:a^m=a^{n-m}.$$

$$\sqrt[n]{a^m}=a^{\frac{m}{n}} \quad , \quad \frac{a}{b}-\frac{c}{d}=\frac{a\cdot d-b\cdot c}{b\cdot d}.$$

1.inačica

Zadane korijene napisat ćemo kao potencije s racionalnim eksponentima, a zatim uporabiti pravilo za dijeljenje potencija jednakih baza.

$$\sqrt{2}:\sqrt[3]{2}=\sqrt{2^1}:\sqrt[3]{2^1}=2^{\frac{1}{2}}:2^{\frac{1}{3}}=2^{\frac{1}{2}-\frac{1}{3}}=2^{\frac{3-2}{6}}=2^{\frac{1}{6}}=\sqrt[6]{2^1}=\sqrt[6]{2}.$$

2.inačica

Zadane korijene moramo svesti na zajednički korijen. Budući da je najmanji zajednički višekratnik brojeva 2 i 3 jednak 6, zadane korijene svodimo na šesti korijen.

$$\sqrt{2}:\sqrt[3]{2}=\sqrt{2^1}:\sqrt[3]{2^1}=\sqrt[2\cdot 3]{2^{1\cdot 3}}:\sqrt[3\cdot 2]{2^{1\cdot 2}}=\sqrt[6]{2^3}:\sqrt[6]{2^2}=\sqrt[6]{2^3:2^2}=\sqrt[6]{2^{3-2}}=$$

$$=\sqrt[6]{2^1}=\sqrt[6]{2}.$$

Vježba 279

Izračunajte $\sqrt{7}:\sqrt[3]{7}$.

Rezultat: $\sqrt[6]{7}.$

Zadatak 280 (Matija, strukovna škola)

Izračunajte $\dfrac{\dfrac{1}{3}-\left\{\dfrac{2}{3}-\left[1-\dfrac{2}{3}\right]-\dfrac{1}{6}\right\}}{\dfrac{1}{3}-\dfrac{2}{3}\cdot\left(2+\dfrac{1}{2}\right)}.$

Rješenje 280

Ponovimo!

$$n=\frac{n}{1}\quad,\quad \frac{a}{b}-\frac{c}{d}=\frac{a\cdot d-b\cdot c}{b\cdot d}\quad,\quad \frac{a}{b}+\frac{c}{d}=\frac{a\cdot d+b\cdot c}{b\cdot d}\quad,\quad \frac{a}{b}\cdot\frac{c}{d}=\frac{a\cdot c}{b\cdot d}.$$

$$\frac{a}{n}-\frac{b}{n}=\frac{a-b}{n}\quad,\quad \frac{\frac{a}{b}}{\frac{c}{d}}=\frac{a\cdot d}{b\cdot c}.$$

Skratiti razlomak znači brojnik i nazivnik tog razlomka podijeliti istim brojem različitim od nule i jedinice

$$\frac{a\cdot n}{b\cdot n}=\frac{a}{b}\ ,\ n\neq 0\ ,\ n\neq 1.$$

Zakon distribucije množenja prema zbrajanju.

$$a\cdot(b+c)=a\cdot b+a\cdot c\quad,\quad a\cdot b+a\cdot c=a\cdot(b+c).$$

Računske operacije dijelimo u tri stupnja:

1. stupanj ... zbrajanje i oduzimanje
2. stupanj ... množenje i dijeljenje
3. stupanj ... potenciranje, korjenovanje i logaritmiranje.

Najprije računamo operacije trećeg stupnja, zatim operacije drugog stupnja i na kraju prvog stupnja. Dakle, najprije potenciramo i korjenujemo, zatim množimo i dijelimo i tek na kraju zbrajamo i oduzimamo.
Najprije računamo unutar okruglih zagrada ( ), zatim unutar uglatih zagrada [ ] i napokon unutar vitičastih zagrada { }.

Predznak ispred zagrade

Ako je ispred zagrade predznak plus (ili ništa), onda se zagrada briše i nastavlja se računanje kao da nije bilo zagrade.

$+(a+b)=a+b$	$+(-a+b)=-a+b$
$+(a-b)=a-b$	$+(-a-b)=-a-b$

Ako je ispred zagrade predznak minus, zagrada se briše i svi predznaci u zagradi mijenjaju se.

$-(a+b)=-a-b$	$-(-a+b)=a-b$
$-(a-b)=-a+b$	$-(-a-b)=a+b$

Množenje cijelih brojeva

$+a\cdot(+b)=+(a\cdot b)$	$-a\cdot(+b)=-(a\cdot b)$
$+a\cdot(-b)=-(a\cdot b)$	$-a\cdot(-b)=+(a\cdot b)$

1.inačica

Najprije računamo unutar uglatih zagrada [ ], a zatim unutar vitičastih zagrada { }.

$$\frac{\frac{1}{3}-\left\{\frac{2}{3}-\left[1-\frac{2}{3}\right]-\frac{1}{6}\right\}}{\frac{1}{3}-\frac{2}{3}\cdot\left(2+\frac{1}{2}\right)}=\frac{\frac{1}{3}-\left\{\frac{2}{3}-\left[\frac{1}{1}-\frac{2}{3}\right]-\frac{1}{6}\right\}}{\frac{1}{3}-\frac{2}{3}\cdot\left(\frac{2}{1}+\frac{1}{2}\right)}=\frac{\frac{1}{3}-\left\{\frac{2}{3}-\frac{3-2}{3}-\frac{1}{6}\right\}}{\frac{1}{3}-\frac{2}{3}\cdot\frac{4+1}{2}}=\frac{\frac{1}{3}-\left\{\frac{2}{3}-\frac{1}{3}-\frac{1}{6}\right\}}{\frac{1}{3}-\frac{2}{3}\cdot\frac{5}{2}}=$$

$$=\frac{\frac{1}{3}-\frac{4-2-1}{6}}{\frac{1}{3}-\frac{2}{3}\cdot\frac{5}{2}}=\frac{\frac{1}{3}-\frac{1}{6}}{\frac{1}{3}-\frac{1}{3}\cdot\frac{5}{1}}=\frac{\frac{1}{3}-\frac{1}{6}}{\frac{1}{3}-\frac{5}{3}}=\frac{\frac{2-1}{6}}{\frac{1-5}{3}}=\frac{\frac{1}{6}}{-\frac{4}{3}}=\frac{\frac{1}{6}}{-\frac{4}{3}}=\frac{\frac{1}{2}}{-\frac{4}{1}}=-\frac{1}{8}.$$

2.inačica

Ispred uglate zagrade je predznak minus pa zagradu brišemo i svi predznaci u zagradi mijenjaju se.
Ispred vitičaste zagrade je predznak minus pa zagradu brišemo i svi predznaci u zagradi mijenjaju se.

$$\frac{\frac{1}{3}-\left\{\frac{2}{3}-\left[1-\frac{2}{3}\right]-\frac{1}{6}\right\}}{\frac{1}{3}-\frac{2}{3}\cdot\left(2+\frac{1}{2}\right)}=\frac{\frac{1}{3}-\left\{\frac{2}{3}-1+\frac{2}{3}-\frac{1}{6}\right\}}{\frac{1}{3}-\frac{2}{3}\cdot 2-\frac{2}{3}\cdot\frac{1}{2}}=\frac{\frac{1}{3}-\frac{2}{3}+1-\frac{2}{3}+\frac{1}{6}}{\frac{1}{3}-\frac{2}{3}\cdot\frac{2}{1}-\frac{2}{3}\cdot\frac{1}{2}}=\frac{\frac{1}{3}-\frac{2}{3}+\frac{1}{1}-\frac{2}{3}+\frac{1}{6}}{\frac{1}{3}-\frac{4}{3}-\frac{1}{3}\cdot\frac{1}{1}}=$$

$$=\frac{\frac{2-4+6-4+1}{6}}{\frac{1}{3}-\frac{4}{3}-\frac{1}{3}}=\frac{\frac{1}{6}}{\frac{1}{3}-\frac{4}{3}-\frac{1}{3}}=\frac{\frac{1}{6}}{-\frac{4}{3}}=\frac{\frac{1}{6}}{-\frac{4}{3}}=\frac{\frac{1}{2}}{-\frac{4}{1}}=-\frac{1}{8}.$$

Vježba 280

Izračunajte $\dfrac{\frac{1}{3}-\frac{2}{3}\cdot\left(2+\frac{1}{2}\right)}{\frac{1}{3}-\left\{\frac{2}{3}-\left[1-\frac{2}{3}\right]-\frac{1}{6}\right\}}$.

Rezultat: $-8.$